

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON
METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

HAZIRLAYAN
Hasan Hüseyin ÖZGEN

2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan Hüseyin ÖZGEN

06221101

Ana Bilim Dalı: Matematik Ana bilim

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 23 Haziran 2010

TEMMUZ-2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan Hüseyin ÖZGEN

06221101

Ana Bilim Dalı: Matematik Ana bilim

Programı: Uygulamalı Matematik

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Temmuz 2010

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT**

Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Etibar PENAHLI**

Yrd.Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, tez konusunun belirlenilmesi, yazılması ve sonuçlandırılması sürecinde bütün fedakârlık ve yardımlarını esirgemeyen saygı değer Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT hocama sonsuz şükranlarımı sunarım.

Hasan HÜSEYİN ÖZGEN
ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Temel Tanımlar.....	2
2. MATERYAL ve METOT	6
2.1. Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM).....	6
2.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM).....	14
2.3. Adomian Ayrışım Metodu (ADM).....	17
3. UYGULAMALAR.....	20
3.1. Burgers' Denklemine VIM, HPM ve ADM 'unun uygulanması	20
3.1.1 Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözüm.....	20
3.1.2 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	22
3.1.3 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	25
3.2. Klein-Gordon Denklemine VIM, HPM ve ADM 'unun uygulanması	28
3.2.1 Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözüm.....	28
3.2.2 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	30
3.2.3 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	33
3.3. Lineer Olmayan KdV Denklemine VIM, HPM ve ADM 'unun uygulanması.	36
3.3.1 Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözüm.....	36
3.3.2 Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm.....	38
3.3.3 Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm.....	41
4. SAYISAL SONUÇLARIN İRDELENMESİ.....	44
5. SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	49

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, bazı temel tanımlar verildi.

İkinci bölümde, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Adomian Ayrışım Metodu ve Varyasyonel iterasyon metodunun temel yapısı verildi.

Üçüncü Bölümde, Homotopi Pertürbasyon, Adomian Ayrışım ve Varyasyonel iterasyon metotları; başlangıç koşulları ile verilen lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlerden Klein-Gordon, Burgers' ve KdV denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uygulandı. Her bir denklem için elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümlerin sayısal veri tabloları, iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri çizilerek grafiklerin irdelenmesi yapıldı.

Dördüncü bölümde, elde edilen verilerin bir tartışması yapıldı.

Beşinci bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlara bağlı olarak Homotopi Pertürbasyon Metodu, Adomian ayrışım Metodu ve Varyasyonel iterasyon metodu bazı lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlere uygulanarak çözüm serisinin terimlerinin karşılaştırılması yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrışım Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu, Klein-Gordon Denklemi, Burgers' Denklemi, KdV Denklemi,

SUMMARY

The Numerical Solutions of Nonlinear Partial Diferantial Equations by Using Variational Iteration Method

This study is constructed five chapters.

In chapter one, some fundamental definitions are given.

In chapter two, the primary structures of Homotopy Perturbation Method, Adomian Decomposition Method and Variational Iteration Method are given.

In chapter three, Homotopy Perturbation Method, Adomian Decomposition Method and Variational Iteration Method is applied to find approximate solutions of linear or nonlinear differential equations which have initial conditions such as Klein-Gordon, Burgers' and KdV equations. We drawn graphics (2D and 3D) and constructed tables of approximate solutions and exact solution which are obtained for every equations.

In chapter four, it is made a conversation of obtained datebases.

In chapter five, it has made a comparison of solution series of the obtained by applying Homotopy Perturbation Method, Adomian Decomposition Method and Variational Iteration Method to some linear or nonlinear differential equations by depending on obtained solutions.

Key words: Homotopy Perturbation Method, Adomian Decomposition Method, Variational Iteration Method, Klein-Gordon Equation, Burgers Equation, KdV Equation,

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Burgers' Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (VIM) üç boyutlu görünümü.....	21
Şekil 1.2. Burgers' Denkleminin, analitik çözümü ile VIM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	21
Şekil 1.3. Burgers' Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü	24
Şekil 1.4. Burgers' Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	25
Şekil 1.5. Burgers' Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	27
Şekil 1.6. Burgers' Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	27
Şekil 1.7. Klein-Gordon Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (VIM) üç boyutlu görünümü.....	29
Şekil 1.8. Klein-Gordon Denkleminin, analitik çözümü ile VIM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	29
Şekil 1.9. Klein-Gordon Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü	32
Şekil 1.10. Klein-Gordon Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması	32
Şekil 1.11. Klein-Gordon Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü.....	35
Şekil 1.12. Klein-Gordon Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması....	35
Şekil 1.13. KdV Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (VIM) üç boyutlu görünümü	37

Şekil 1.14. KdV Denkleminin, analitik çözümü ile VIM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	37
Şekil 1.15. KdV Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü	40
Şekil 1.16. KdV Denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	40
Şekil 1.17. KdV Denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü	42
Şekil 1.18. KdV Denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	43

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.1. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	22
Tablo 1.2. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile küçük terimlerle birlikte hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	22
Tablo 1.3. $n = 3$ durumunda, HPM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	25
Tablo 1.4. $n = 3$ durumunda, ADM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	27
Tablo 1.5. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	30
Tablo 1.6. $n = 3$ durumunda, HPM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	33
Tablo 1.7. $n = 3$ durumunda, ADM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	35
Tablo 1.8. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	37
Tablo 1.9. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile küçük terimlerle birlikte hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	38
Tablo 1.10. $n = 3$ durumunda, HPM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	41
Tablo 1.11. $n = 3$ durumunda, ADM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu.....	43

SEMBOLLER LİSTESİ

L	: Diferensiyel operatörü
L^{-1}	: İntegral operatörü
Nu	: Lineer olmayan terim
A_n	: Adomian polinomu
ϕ_n	: n-terim yaklaşımı
$u(x,t)$	: Çözüm fonksiyonu
p	: Küçük bir parametre
R	: Reel sayı sistemi
λ	: Lamda
ε	: Epsilon
Ω	: Omega
Γ	: Gama
ξ	: Xi
ϕ	: Phi
$\sqcup$	:Tilda

KISALTMALAR

ADM	: Adomian Ayrışım Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
VIM	: Varyasyonel İterasyon Metodu
KdV	: Korteweg-de Vries Denklemleri

1. GİRİŞ

İçinde bulunduğumuz dünyada hayatını idame ettiren bütün canlılar birbirleri ile ve yaşadıkları doğa ile bir etkileşim içindedirler. Bu etkileşim sonucu ortaya çıkan hareketlenme ve bunun sonucunda oluşan fiziksel olayların tesadüfi olmadığı aksine dünyamızdaki her olayın matematiksel bir anlamının olduğunu bilmekteyiz. Uygulamalı alanında çalışan bilim adamları hayatımızı etkileyen fiziksel olayların matematiksel modellemesi üzerine çalışarak modelleme alanında büyük ilerlemeler sağlamışlardır. Modelleme üzerine çalışan bilim adamları doğadaki bir çok fiziksel olayı diferensiyel denklemler ile açıklamışlardır [1,4,32]. Örneğin depremlerden sonra meydana gelebilecek Tsunami de oluşacak büyük dalgaların ne zaman ve nereye kadar ulaşabileceği bilim adamları tarafından hesaplanabilmektedir. Bu tür hesaplamalar yapılırken o olayın matematiksel modellemesine karşılık gelen diferensiyel denklemin çözüm fonksiyonlarından faydalanılmaktadır. Bu nedenle diferensiyel denklemlerin çözüm fonksiyonları hakkında bilgi edinmek için pek çok analitik yöntem geliştirilmiştir. Çünkü bir diferensiyel denklemin analitik çözümünün bilinmesi modellemesi yapılan olayın fiziksel özellikleri hakkında pek çok bilgi sağlar. Ancak bütün diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerine analitik yöntemler kullanılarak ulaşılamayabilir. Bu durumda incelenen problemin bir başlangıç şartından faydalanılarak problemin sayısal olarak incelenmesi yapılabilir. Bu tür çalışmalar için literatürde pek çok sayısal yöntemler vardır. Bu tür yöntemlerde incelenen problemin çözümü seri formunda aranır ve bir başlangıç şartından hareketle serinin diğer terimleri hesaplanır. Bu hesaplamalar sonucunda elde edilen serinin terimlerinin toplanmasıyla bazen bir fonksiyonun Taylor seri açılımına ulaşılabilir. Bu durumda incelenen problemin analitik çözümü elde edilebilir. Ancak bu durum her zaman mümkün olmayabilir. Aksi durumlarda serinin birkaç terimi hesaplanarak elde edilen çözüm fonksiyonunun analitik çözüme yakınsaması incelenir.

Günümüzde yüksek performanslı bilgisayarlar ile Mathematica , Maple, Matlab vs. gibi bazı hesaplama yazılımlarına sahip olmamıza ve literatürde var olan pek çok analitik metotlara rağmen lineer olmayan diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri her zaman elde edilmeyebilir. Bu durumda incelenen diferensiyel denklemin sayısal analizi yapılır. Bunun için literatürde var olan ve yarı analitik metotlar olarak adlandırılan Adomian Ayrışım Metodu [2], Varyasyonel İterasyon Metodu [9], Homotopi Pertürbasyon

Metodu [9], gibi bazı metotlar geliştirilmiştir. Bilindiği gibi bu tür yarı analitik metotlar 1980 li yıllarda ortaya çıkmakla birlikte temelde seri çözümlerine dayanırlar. Çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi bu türden metotların uygulama sahasında çalışan bilim adamlarının ilgisini çekmekte ve literatürde geniş bir yer tutmasına sebep olmaktadır.

Bu metotlardan ADM, Adomian tarafından 1980’li yıllarda sunulmuştur. Lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılan ayrışım yöntemi, uygulamada başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematiksel modelleri olan uzay ve zamana göre bir boyutlu veya çok boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerini bulmada kullanılmaktadır [21,22].

Ayrıca 1980 yılında He tarafından HPM ve VIM literatüre kazandırılmıştır [9,14,15,17,18]. Bu metotlar bilim adamları tarafından pek çok lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlere uygulanmıştır [4,5,6,26,27].

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen yarı analitik metotlardan ADM, HPM ve VIM’ nun genel bir sunumu yapılarak bu metotların Burgers’ [1,3,25,27], Klein-Gordon [20], KdV [1,32] denklemlerine uygulamaları verilmiştir. Bu uygulamalar sonucunda elde edilen sayısal sonuçların iki ve üç boyutlu grafikleri ve ayrıca sayısal veri tabloları verilerek analitik çözüme olan yakınsamaları irdelenmiştir.

1.1 Temel tanımlar

Tanım 1.1.1. Homotopi kavramı, 1895 yılında Jules Henri Poincaré [33] tarafından tanıtılmıştır.

f ve g bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına sürekli dönüşümler olsun. $I = [0,1]$ $\square$ ’nin kapalı bir alt kümesi olmak üzere; $\forall x \in X$ için

$$H(x,0) = f(x) \text{ ve } H(x,1) = g(x)$$

eşitliklerini sağlayan sürekli bir $H : X \times I \rightarrow Y$ fonksiyonu varsa f , g ’ ye homotopiktir denir. H dönüşümüne f ve g arasında bir *homotopi* denir ve H , f ve g arasında bir homotopi olduğunda, $H : f \cong g$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2. X ve Y iki uzay ve $I \{t | 0 \leq t \leq 1\}$ aralığında tanımlı olsun. Eğer $\phi : X \times I \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümü $\forall x \in X$ için $\phi(x,0) = f(x)$ ve $\phi(x,1) = g(x)$ oluyor

ise $f, g: X \rightarrow Y$ dönüşümlerine *homotopiktirler* denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir. $\phi: f \simeq g$ ise ϕ, f ' den g 'ye bir homotopi kurar şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.3. Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif mertebeden türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferensiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir

Bir tek bağımsız değişken içeren diferensiyel denkleme *adi diferensiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir adi diferensiyel denklem* genel olarak;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

şeklinde gösterilir. İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferensiyel *denkleme kısmi diferensiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.4. Bir diferensiyel denklem, lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyorsa, bu diferensiyel denkleme *lineer diferensiyel denklem* denir. Eğer bir diferensiyel denklem de bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım yada bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik, yada logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise, bu tür diferensiyel denklemlere *lineer olmayan diferensiyel denklem* denir.

Tanım 1.1.5. Bir değişkenin skaler bir fonksiyonu için Adomian polinomu aşağıdaki şekilde verilir. f fonksiyonu n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} U_i\right)$$

formülü ile tanımlanır [2].

Tanım 1.1.6. A, B, C birer sabit sayı olmak üzere, x ve y serileri arasında kesin türden olan çeşitli fonksiyonel ilişkilere deterministik ilişki denir. Örneğin;

$$y = Ax + B \text{ (Doğrusal İlişki)}$$

$$\log y = \log(Ax + B) \text{ (Tam Logaritmik İlişki)}$$

ifadeleri birer deterministik ilişkililerdir. Bunlardan başka daha pek çok deterministik ilişki tipleri yazılabilir. Örneğin; bir gazın hacmi ile basıncı arasındaki ters yönlü ilişki, elektrik akımı ile direnç arasındaki ters yönlü ilişkiler birer deterministik ilişkidir [19].

Tanım 1.1.7. E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x ' de, değer kümesi E_y ' de bulunan $y = Ax$ eşitliği ile verilen A operatörünü ele alalım. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa verilen bu A operatörüne *lineer operatör* denir [23].

$$L1) A(x + y) = Ax + Ay$$

$$L2) A(\lambda x) = \lambda Ax$$

Tanım 1.1.8. Bir fonksiyonel

$$J(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, x', y, y') dt \quad (1.1.8.1)$$

olup sınır şartı

$$f(x, y, t) = 0 \quad (1.1.8.2)$$

olacak şekilde göz önüne alalım. (1.1.8.1) denkleminin varyasyonu hesaplanırsa

$$\delta J(x, y) = \delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y' \right\} dt = 0 \quad (1.1.8.3)$$

elde ederiz. Burada (1.1.8.2) denklemi x ve y ' ye bağlı olmak üzere f ' nin varyasyonu

$$\delta f \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0 \quad (1.1.8.4)$$

bulunur. (1.1.8.3)' ü λ ile çarpıp, t ' ye göre integre edersek,

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right\} dt = 0 \quad (1.1.8.5)$$

elde edilir. Burada λ sıfırdan farklı keyfi sabittir ve λ , t 'nin bir fonksiyonu olarak ta seçilebilir. Dolayısıyla (1.1.8.4) denklemini (1.1.8.5)'e ekleyerek,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right] \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \delta x' + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right] \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y' \right\} dt = 0 \quad (1.1.8.6)$$

bulunur. Parçaları birleştirerek bu ifadelerin integrali alınır ve rastgele seçilmiş δx ve δy 'yi göz önüne aldığımızda,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1.1.8.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (1.1.8.8)$$

yazılır. Bu iki eşitlik aynı zamanda Lagrange çarpanı metodu yardımıyla da bulunabilir. Buradan (1.1.8.7) ve (1.1.8.8) denklemleri

$$J(x, y, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} (\Phi + \lambda f) dt, \quad (1.1.8.9)$$

biçiminde çoğaltılmış bir fonksiyonelin oluşturulmasını gerektiren Lagrange Çarpanı yöntemi yardımıyla da elde edilebilir. Burada λ Lagrange çarpanıdır. Varyasyonun prosedürün de, (1.1.8.9)'daki λ , x ve y gibi bir bağımsız değişken olarak alınmalıdır.

2. MATERYAL VE METOD

2.1. Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM)

Varyasyonel iterasyon yöntemi [1,7,8,9,10,11,12,25] analitik çözüme hızlı bir şekilde yakınsayan lineer olmayan problemlerin geniş bir sınıfını kolay ve etkili bir şekilde çözmek için verilmiştir. Kaynak [8]'de yöntem kesirli türevlere sahip lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

Kaynak [7]'de varyasyonel iterasyon yöntemiyle Adomian ayrışım metodu arasında yararlı olabilecek bir karşılaştırma yapılmıştır. Bu metodun temel yapısını gösterebilmek için, L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(t)$ verilmiş sürekli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki genel lineer olmayan sistemi göz önüne alalım.

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t), \quad (2.1.1)$$

yöntemin temel özelliği (2.1.2) sistemi için bir doğrulama fonksiyoneli kurmaktır, o halde

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{ Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s) \} ds, \quad (2.1.2)$$

dir. Burada λ , varyasyonel teoride en uygun şekilde belirlenebilen genel bir Lagrange çarpanıdır. Lineer problemler için bu problemin gerçek çözümleri, Lagrange çarpanının tam olarak belirlenebildiği gerçeğinden dolayı sadece bir iterasyon ile elde edilebilir. Örneğin;

$$u' + a(t)u = b(t), u(0) = c \quad (2.1.3)$$

birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin düzeltme fonksiyonelleri

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right\} ds \quad (2.1.4)$$

biçimindedir. Düzeltme fonksiyoneli u_n 'e göre sabit alınır ve $\delta u_n = 0$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) \right\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \int_0^t \left\{ -\frac{\partial \lambda}{\partial s} + a(s)\lambda \right\} \delta u_n(s) ds = 0\end{aligned}\quad (2.1.5)$$

yazılır. Böylece Euler-Lagrange denklemi

$$-\frac{\partial \lambda(t,s)}{\partial s} + a(s)\lambda(t,s) = 0, \quad (2.1.6)$$

olup doğal sınır koşullarını

$$1 + \lambda(t,s) = 0 \quad (2.1.7)$$

olarak hesaplanır. Böylece Lagrange çarpanını

$$\lambda(t,s) = -\exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} \quad (2.1.8)$$

biçiminde elde edilir. Belirlenen Lagrange çarpanını (2.1.2) de yerine yazarak, aşağıdaki iterasyon formülü

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial s} + a(s)u_n(s) - b(s) \right\} ds \quad (2.1.9)$$

şeklinde yazılır. Eğer $u_0 = c \exp \left\{ -\int_0^t a(\xi) d\xi \right\}$, homojen

$$u' + a(t)u = 0$$

denkleminin $u_0 = c$ başlangıç koşuluna sahip çözümü ise, bu denklemin tam çözümü

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= c \exp \left\{ - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} - \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_0^t a(\xi) d\xi - \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} ds \\
&= c \exp \left\{ - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} + \exp \left\{ \int_0^t a(s) ds \right\} \int_0^t b(s) \exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} ds
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

olarak yazılır.

Bu çözümden bütün özellikler kolayca (2.1.10) dan elde edilebilir. Şimdi de, sınırlı sürekli lineer oskilatör denklemini ele alalım:

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = f(t) \tag{2.1.11}$$

Bu denklemin düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - f(s) \} ds \tag{2.1.12}$$

biçiminde yazılabilir. $\delta u_n(0) = 0$ olduğu göz önüne alınarak u_n in varyasyonu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - f(s) \} ds \\
&= \delta u_n(t) + \lambda(s) \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds \\
&= \left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \lambda(s) \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} \\
&\quad + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

elde edilir. Buradan, aşağıdaki sabit koşullar

$$\frac{\partial^2 \lambda(t, s)}{\partial s^2} + \omega^2 \lambda(t, s) = 0, \tag{2.1.14}$$

$$1 - \frac{\partial \lambda(t, s)}{\partial s} \Big|_{t=s} = 0, \quad (2.1.15)$$

$$\lambda(t, s) \Big|_{t=s} = 0, \quad (2.1.16)$$

elde edilir.

Böylece, Lagrange çarpanı ise aşağıdaki şekilde

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \sin \omega(s - t) \quad (2.1.17)$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak, aşağıdaki iterasyon formülü

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(s - t) \{u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - f(s)\} ds \quad (2.1.18)$$

yazılır. Eğer başlangıç tahmini uygun c_1 ve c_2 sabitleriyle

$$u_0(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

tamamlayıcı çözümünü kullanırsak, (2.1.18) iterasyon formülünden, (2.1.11)'in genel çözümü olan

$$u_1(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(s - t) ds \quad (2.1.19)$$

elde edilir. Bununla birlikte eğer düzeltme fonksiyoneline sınırlı varyasyon uygulayacak olursak tam çözüm sadece ardışık iterasyonlarla elde edilebilir. Denklem (2.1.11)'in homojen olduğunu kabul edersek

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad (2.1.20)$$

olup düzeltme fonksiyoneli yeniden yazarsak

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{u_n''(s) + \omega^2 \tilde{u}_n(s)\} ds \quad (2.1.21)$$

olur. Burada $\tilde{u}_n$ kısıtlanmış bir varyasyon olarak kabul edilir. Yani $\delta\tilde{u}_n = 0$ dır. Bu şart altında, yukarıdaki düzeltme fonksiyonelinin (2.1.21) sabit koşulları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial^2 \lambda(t, s)}{\partial s^2} = 0, \quad (2.1.22)$$

$$1 - \frac{\partial \lambda(t, s)}{\partial s} \Big|_{t=s} = 0, \quad (2.1.23)$$

$$\lambda(t, s) \Big|_{t=s} = 0, \quad (2.1.24)$$

Dolayısıyla, Lagrange çarpanı aşağıdaki gibi

$$\lambda = s - t, \quad (2.1.25)$$

kolayca bulunabilir. Lagrange çarpanının yerine konulmasıyla iterasyon formülü

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s-t) \{u_n''(s) + \omega^2 u_n(s)\} ds \quad (2.1.26)$$

olur.

$u(0)=1$ ve $u'(0)=1$ başlangıç koşulları ve $u_0(0)=u(0)=1$ başlangıç tahmini ile başlarsak, yukarıdaki iterasyon formülünden (2.1.26) aşağıdaki yaklaşık çözümler elde ederiz.

$$u_1(t) = 1 - \frac{1}{2!} \omega^2 t^2, \quad (2.1.27)$$

$$u_2(t) = 1 - \frac{1}{2!} \omega^2 t^2 + \frac{1}{4!} \omega^4 t^4, \quad (2.1.28)$$

$\vdots$

$$u_n(t) = 1 - \frac{1}{2!} \omega^2 t^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \omega^{2n} t^{2n} \quad (2.1.29)$$

Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \cos(\omega t)$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm problemin gerçek çözümüdür. Yukarıdaki çözüm metodundan çözümler, Lagrange çarpanının yaklaşık tanımlaması ile bağlantılı olarak yavaş bir şekilde gerçek çözüme yaklaşır. Gerçekte denklem (2.1.15)'in, denklem (2.1.18)'in birinci mertebeden tahmini olduğunu aşağıdaki bağıntıdan görebiliriz.

$$\lambda = \frac{1}{\omega} \sin \omega(s-t) \approx s-t - \frac{1}{3!} \omega^2 (s-t)^3, \quad (2.1.30)$$

Lineer olmayan problemler için Lagrange çarpanını basit bir şekilde elde edebilmek açısından, lineer olmayan terimler kısıtlanmış varyasyonlar olarak düşünülebilir.

Bu iterasyon formülü

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \left\{ s-t - \frac{1}{3!} \omega^2 (s-t)^3 \right\} \{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) \} ds \quad (2.1.31)$$

biçiminde yazılabilir.

Aynı zamanda $u_0(0) = 1$ gibi bir başlangıç tahmini ile başlarsak

$$u_1(t) = 1 - \frac{1}{2!} \omega^2 t^2 + \frac{1}{4!} \omega^4 t^4, \quad (2.1.32)$$

$$u_2(t) = 1 - \frac{1}{2!} \omega^2 t^2 + \frac{1}{4!} \omega^4 t^4 - \frac{1}{6!} \omega^6 t^6 + \frac{1}{8!} \omega^8 t^8, \quad (2.1.33)$$

elde ederiz.

Böylece, (2.1.31)'den elde edilen yaklaşık çözümler, (2.1.26) iterasyon formülünden elde edilenlerden daha hızlı bir şekilde gerçek çözüme yaklaştığı açıkça görülebilir. Şimdi de aşağıdaki lineer olmayan denklemi göz önüne alalım

$$u' + a(t)u = b(t) + N(u), u(0) = c \quad (2.1.34)$$

Burada N, u 'nun lineer olmayan bir fonksiyonudur. Yukarıdaki sistemi göz önüne alırsak

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) - N(\tilde{u}_n) \right\} ds \quad (2.1.35)$$

yazabiliriz. Burada $\tilde{u}_n$ kısıtlanmış varyasyondur ve $\delta\tilde{u}_n = 0$ dır.

Yukarıda belirtilen yollardan ilerleyerek, aşağıdaki iterasyon formülasyonunu

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \exp \left\{ \int_0^t a(\xi) d\xi - \int_0^t a(\xi) d\xi \right\} \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)u_n(s) - b(s) - N(u_n) \right\} ds \quad (2.1.36)$$

elde ederiz. Aşağıdaki ikinci mertebeden lineer olmayan denklemi göz önüne alırsak,

$$u'' + a(t)u' + b(t)u + N(u) = 0, \quad u(0) = c_1, \quad u'(0) = c_2 \quad (2.1.37)$$

bu denklemin düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + a(s)u_n'(s) + b(s)u_n(s) + N(\tilde{u}_n(s)) \right\} ds \quad (2.1.38)$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki fonksiyoneli u_n 'e göre sabitleyerek, $\delta u_n(0) = 0$ olduğuna dikkat edersek

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + a(s)u_n'(s) + b(s)u_n(s) + N(\tilde{u}_n(s)) \right\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + a \lambda(s) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} \\ &\quad + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} (a \lambda) + b(s) \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = 0 \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

dır. Aşağıdaki sabit koşullar

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} (a \lambda) + b(s) \lambda(t, s) = 0, \quad (2.1.40)$$

$$1 - \frac{\partial \lambda}{\partial s}(t, t) + a(t) \lambda(t, t) = 0, \quad (2.1.41)$$

$$\lambda(t, t) = 0, \quad (2.1.42)$$

elde edilir. Yukarıdaki (2.1.40) ~ (2.1.42) denklemlerden, Lagrange çarpanını

$$\lambda = \exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} [u_1(s)u_2(t) - u_2(s)u_1(t)], \quad (2.1.43)$$

şeklinde yazarız. Eğer w_1 ve w_2 ,

$$w_1(0) = 1, \quad w_1'(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 1 \quad (2.1.44)$$

başlangıç koşulları tarafından açıkça belirtilen temel bir çözüm cümlesi olarak seçilirse, ilk yaklaşım için,

$$u_1(t) = C_1 w_1 + C_2 w_2 + \int_0^t N(u_0(s)) \lambda(t, s) ds \quad (2.1.45)$$

elde ederiz. Şimdi aşağıdaki homojen olmayan denklemi ele alalım.

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = f(u), \quad (2.1.46)$$

buradan,

$$u(0) = C_1, \quad u(1) = C_2 \quad (2.1.47)$$

şeklindedir. $u_{(1)}$ ve $u_{(2)}$ 'yi iki temel çözüme uygulamalıyız, yani,

$$u_{(1)}(0) = 1, \quad u_{(1)}'(0) = 0, \quad (2.1.48)$$

$$u_{(2)}(0) = 0, \quad u_{(2)}'(0) = 1, \quad (2.1.49)$$

ve

$$u = C_1 u_{(1)} + C_2 u_{(2)} \quad (2.1.50)$$

yazabiliriz. Düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \{ u_n''(s) + a u_n'(s) + b u_n(s) - \tilde{f}_n \} ds \quad (2.1.51)$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki düzeltme fonksiyoneli u_n 'e göre sabitleyerek,

$\delta u_n(0) = 0$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
\delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \{ u_n''(s) + a u_n'(s) + b u_n(s) - \tilde{f}_n \} ds \\
&= \delta u_n(t) + \lambda(s) \delta u_n'(s) \Big|_{s=t} - \lambda'(s) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + a \lambda(s) \delta u_n(s) \Big|_{s=t}, \\
&\quad + \int_0^t \left\{ \frac{d^2 \lambda}{ds^2} - \frac{d}{ds} (a \lambda) + b(s) \lambda(s) \right\} \delta u_n(s) ds = 0,
\end{aligned}$$

olup, aşağıdaki sabit koşullar

$$\begin{cases} \delta u_n(s): & \frac{d^2 \lambda}{ds^2} - \frac{d}{ds} (a \lambda) + b(s) \lambda(t, s) = 0, \\ \delta u_n(t): & 1 - \frac{d \lambda}{ds} + a(s) \lambda(s, s) = 0, \\ \delta u_n'(t): & \lambda(s, s) = 0, \end{cases} \quad (2.1.52)$$

şeklinde elde edilir. Lagrange çarpanı ise

$$\lambda = -\exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} \left[u_{(1)}(s) u_{(2)}(t) - u_{(2)}(s) u_{(1)}(t) \right] \quad (2.1.53)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece aşağıdaki iterasyon formülü

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(t) &= u_n(t) - \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s a(\xi) d\xi \right\} \left[u_{(1)}(s) u_{(2)}(t) - u_{(2)}(s) u_{(1)}(t) \right] \{ u_n''(s) \\
&\quad + a u_n'(s) + b u_n(s) - f_n \} ds
\end{aligned} \quad (2.1.54)$$

elde ederiz.

2.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

Bu bölümde, topolojideki homotopi kavramı ile pertürbasyon tekniğini birleştirerek pertürbasyon metotlarının dezavantajlarını ortadan kaldıran ve sadece zayıf lineer olmayan denklemler için değil aynı zamanda kuvvetli lineer olmayanlığa sahip denklemler için de elde edilen çözümlerin, tüm çözüm bölgesinde geçerli olduğu, yarı analitik bir metot olan homotopi pertürbasyon metodunu vereceğiz [9,13,14,15,16,17,18,28,29].

Bu metodun temel yapısını açıklamak için aşağıdaki lineer olmayan diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad (2.2.1)$$

(2.2.1) denkleminin sınır koşulu

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.2.2)$$

şeklinde belirlenir. Burada A genel diferensiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik bir fonksiyon ve Γ , Ω 'ya bağlı sınırdır.

Genel olarak A diferensiyel operatörü, L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir ki burada L lineer, N ise lineer olmayan bir operatördür. (2.2.1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılırsa

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (2.2.3)$$

elde edilir. Buna göre homotopi tekniği ile bir homotopi oluşturulabilir.

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere,

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega \quad (2.2.4)$$

dır. Burada $p \in [0, 1]$ bir parametre ve u_0 ise (2.2.1) denkleminin bir başlangıç koşuludur.

O halde

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) - pL(v) + pL(u_0) + pA(v) - pf(r) = 0$$

$$= L(v) - L(u_0) - p[L(v) - L(u_0) - A(v) + f(r)] = 0$$

$$= L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v) - A(v) + f(r)] = 0$$

olup, (2.2.1) den $A(u) - f(r) = 0$ dır. Böylece

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[L(v)] = 0 \quad (2.2.5)$$

olacak şekilde, (2.2.3) özdeşliğini kullanarak

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \Rightarrow L(u) = -N(u) + f(r) \quad (2.2.6)$$

denklemi bulunur. Bulunan (2.2.6) denkleminin (2.2.5) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$L(v) - L(u_0) + pL(u_0) - p[-N(v) + f(r)] = 0$$

elde edilir. Böylece (2.2.4) denklemi

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.2.7)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $p \in [0, 1]$, u_0 başlangıç koşulu ve

$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ dir. (2.2.4) veya (2.2.7) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.2.8)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (2.2.9)$$

olduğu açıkça görülebilir. Burada $p = 0$ olduğunda (2.2.4) denklemi lineer bir denklem haline gelir; $p = 1$ olduğunda lineer olmayan bir denklem olur. Bu yüzden 0'dan 1'e p nin değişim işlemi, $L(v) - L(u_0) = 0$ denklemini $A(v) - f(r)$ denklemine dönüştürür. $L(v) - L(u_0) = 0$ aşıkâr problemi 0'dan 1'e monoton olarak artan p parametresi, sürekli olarak $A(v) - f(r) = 0$ problemine deforme oluyorsa, bu topolojide *deforme* olarak adlandırılır. $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r)$ ifadelerine ise *homotopiktirler* denir. Homotopi pertürbasyon metodu gereğince, ilk olarak yerleştirilen parametre olan p 'yi küçük parametre olarak kabul ederek (2.2.4) ve (2.2.7) denklemlerinin çözümü

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n \quad (2.2.10)$$

olacak şekilde p parametresinin kuvvet serisi

$$p^0 : f(v_0) - f(x_0) = 0, \quad (2.2.11)$$

$$p^1 : f'(v_0)v_1 + f(x_0) = 0, \quad (2.2.12)$$

$$p^2 : f'(v_0)v_2 + \frac{1}{2!}f''(v_0)v_1^2 = 0, \quad (2.2.13)$$

$$p^3 : f'(v_0)v_3 + \frac{1}{2!}f''(v_0)2v_1v_2 + \frac{1}{3!}f'''(v_0)v_1^3 = 0, \quad (2.2.14)$$

yazılır. (2.2.11)-(2.2.14) denklemlerinin v_1 , v_2 ve v_3 için çözülmesiyle

$$v_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(v_0)}, \quad (2.2.15)$$

$$v_2 = -\frac{f''(v_0)v_1^2}{2!f'(v_0)} = -\frac{f''(v_0)}{2!f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2, \quad (2.2.16)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= -\frac{f''(v_0)v_1v_2}{f'(v_0)} - \frac{f'''(v_0)v_1^3}{3!f'(v_0)} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(v_0)}{f'(v_0)}\right)^2\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3 + \frac{f'''(v_0)}{6f'(v_0)}\left(\frac{f(v_0)}{f'(v_0)}\right)^3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

(2.2.10) serisinin $v_1, v_2, v_3, \dots$ elde edilir. Elde edilen (2.2.15) $\sqcup$ (2.2.17) denklemleri, (2.2.10) denkleminde $p=1$ alınarak yeniden yazılırsa, (2.2.1) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \rightarrow 1} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots) \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

şeklinde elde edilir. Homotopi pertürbasyon metodu geleneksel pertürbasyon metodunun tüm özelliklerine sahiptir. (2.2.10) serileri $A(v)$ lineer olmayan operatörüne bağlı olduğu oranda yakınsamaktadır. (Aşağıdaki görüş; He [15] tarafından önerilmektedir)

(1) $N(V)$ nin V ye göre ikinci türevi küçük olmalıdır çünkü parametre oldukça büyük olabilir. Yani, $p \rightarrow 1$.

(2) Serinin yakınsaması için $L^{-1}(\partial N / \partial V)$ nin normu birden daha küçük olmalıdır.

2.3. Adomian Ayrışım Metodu (ADM)

Ayrışım yönteminin [20,26,30,31], bir seri metodu olduğu, birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel olarak bu metottan bahsedecek olursak; kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(x) \quad (2.3.1)$$

olsun. (2.3.1) denkleminde L - lineer operatörü R - lineer operatörün kalan kısmını ve N - ise lineer olmayan terimi göstermek üzere (2.3.1) denklemini

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (2.3.2)$$

şeklinde ayrıştırarak yazalım. L bir lineer operatör ve L^{-1} bu operatörün tersi olsun. (2.3.2) eşitliği;

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (2.3.3)$$

şeklinde yazılabilir ve (2.3.3) eşitliğinin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.3.4)$$

elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (2.3.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra;

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.3.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.3.5) ile elde edilen eşitlikteki $N(u)$ lineer olmayan terim

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n Adomian polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (2.3.5) eşitliğindeki u ; ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere, $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilir ve ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.3.6)$$

olarak yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (2.3.5) eşitliği tekrar yazılırsa

$$u = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.3.7)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (2.3.7) eşitliği açık şekilde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 ise u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 ve u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (2.3.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0) \\
A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) \\
A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) \\
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0) \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{n!} \cdot \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

ile verilmektedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.3.9) genel formülünün kullanılması, (2.3.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \quad n \geq 0 \tag{2.3.10}$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x,t) \tag{2.3.11}$$

ifadesi, (2.3.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (2.3.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından incelenmiştir [26,30].

3. UYGULAMALAR

3.1. Burgers' Denklemine VIM, HPM ve ADM' unun uygulanması

3.1.1. Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözüm

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad (3.1.1.1)$$

$$u(x, 0) = 1 - \frac{2}{x} \quad (3.1.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan lineer olmayan Burgers' denklemini [1,3,25,27] göz önüne alalım. Bu denklem için varyasyonel iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left[\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} + u_n(x, \xi) \frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_n(x, \xi)}{\partial x^2} \right] d\xi, \quad (3.1.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sabit koşulları aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} \lambda'(\xi) &= 0 \\ 1 + \lambda(\xi) &= 0 \end{aligned}$$

olup ve Lagrange çarpanı ise

$$\lambda(\xi) = -1$$

elde edilir. Lagrange çarpanının (3.1.1.3) denkleminde yerine yazılmasıyla oluşan iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} + u_n(x, \xi) \frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_n(x, \xi)}{\partial x^2} \right] d\xi \quad (3.1.1.4)$$

yazılır. Burada n nin değerleri için (3.1.1.2) başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots \quad (3.1.1.5)$$

terimleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$u_0(x, t) = 1 - \frac{2}{x}, \quad (3.1.1.6)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_0(x, \xi)}{\partial \xi} + u_0(x, \xi) \frac{\partial u_0(x, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_0(x, \xi)}{\partial x^2} \right] d\xi \\ &= 1 - \frac{2}{x} - \frac{2t}{x^2}, \end{aligned} \quad (3.1.1.7)$$

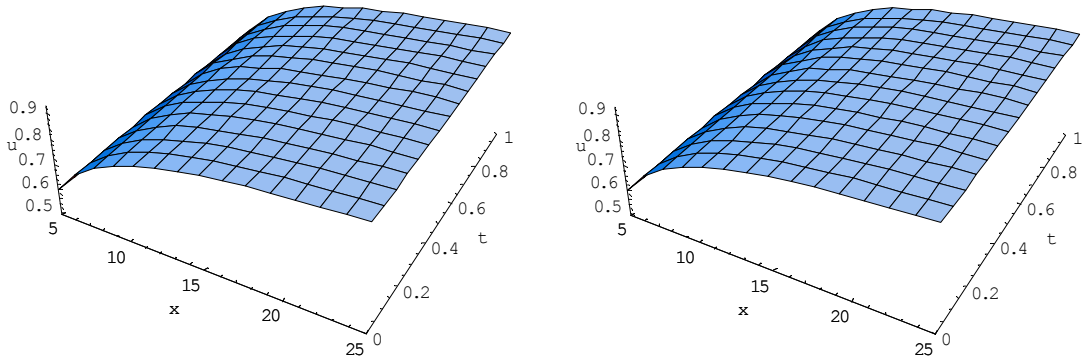
$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1(x,t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} + u_1(x,t) \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \right] dt \\
&= 1 - \frac{2}{x} - \frac{2t}{x^2} - \frac{2t^2}{x^3} + \text{küçük terimler}
\end{aligned} \tag{3.1.1.8}$$

⋮

Böylece (3.1.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu aşağıdaki şekilde

$$u(x,t) = 1 - \frac{2}{x-t}, \quad \left| \frac{t}{x} \right| < 1$$

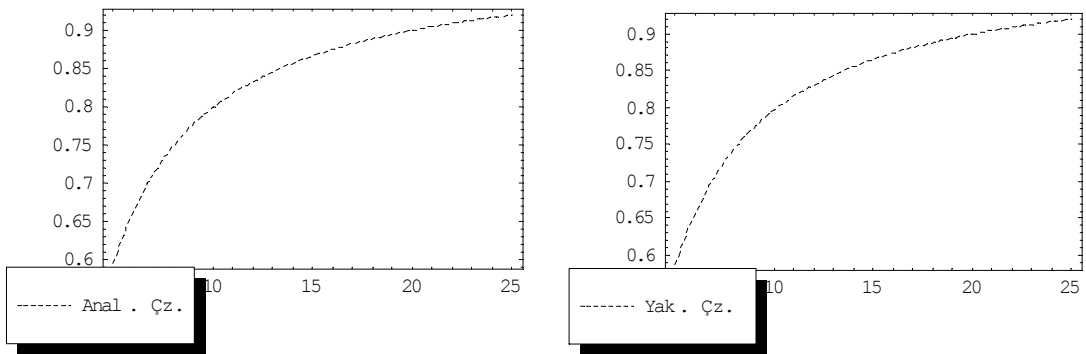
yazılabilir. $u(x,t)$ fonksiyonunun varyasyonel iterasyon metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tabloları aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.



(a) Analitik çözüm

(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.1. Burgers' denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (VIM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.2. Burgers' denkleminin, analitik çözümü ile VIM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.1. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	5	10	15	20	25
0.05	4.04040E-9	1.25628E-10	1.65160E-11	3.91609E-12	1.28242E-12
0.10	6.53061E-8	2.020200E-9	2.65142E-10	6.28141E-11	2.05623E-11
0.15	3.34021E-7	1.027920E-8	1.346800E-9	3.18797E-10	1.04306E-10
0.20	1.06667E-6	3.265310E-8	4.270940E-9	1.010100E-9	3.30323E-10
0.25	2.63158E-6	8.012820E-8	1.046240E-8	2.472310E-9	8.08081E-10

Tablo 1.2. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile küçük terimlerle birlikte hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	5	10	15	20	25
0.05	4.03999E-3	1.00500E-3	4.45926E-4	2.50625E-4	1.60320E-4
0.10	8.15990E-3	2.02000E-3	8.94815E-4	5.02500E-4	3.21280E-4
0.15	1.23595E-2	3.04499E-3	1.34667E-3	7.55625E-4	4.82880E-4
0.20	1.66384E-2	4.07996E-3	1.80148E-3	1.01000E-3	6.45120E-4
0.25	2.09961E-2	5.12490E-3	2.25925E-3	1.26562E-3	8.07999E-4

3.1.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

(3.1.1.1) ve (3.1.1.2) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan Burgers' denklemini için homotopi yapısını oluşturalım.

$$(1-p)[\dot{Y}-\dot{u}_0]+p[\dot{Y}+YY'-Y'']=0 \quad (3.1.2.1)$$

Burada $\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}$, $Y' = \frac{\partial Y}{\partial x}$, $Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (3.1.2.1) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\dot{Y}-\dot{u}_0+p\dot{u}_0+pYY'-pY''=0, \quad (3.1.2.2)$$

denklemin elde edilir. (3.1.1.1) denkleminin çözümünü (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi;

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x,t) \quad (3.1.2.3)$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + \dots \quad (3.1.2.4)$$

$$Y'' = Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 + \dots \quad (3.1.2.5)$$

$$Y' = Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 + \dots \quad (3.1.2.6)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.1.2.3) $\square$ (3.1.2.6) denklemlerinin (3.1.2.2) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \left(\dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 \right) - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 \\ & + p \left(Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 \right) \left(Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 \right) - p \left(Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 \right) = 0, \\ & \dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 - \dot{u}_0 + p \dot{u}_0 + pY_0Y'_0 + p^2Y_0Y'_1 + p^3Y_0Y'_2 + p^2Y_1Y'_0 \\ & + p^3Y_1Y'_1 + p^3Y_2Y'_0 - pY''_0 - p^2Y''_1 - p^3Y''_2 = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \quad (3.1.2.7)$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + Y_0Y'_0 - Y''_0 = 0, \quad (3.1.2.8)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 + Y_0Y'_1 + Y_1Y'_0 - Y''_1 = 0, \quad (3.1.2.9)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 + Y_0Y'_2 + Y_1Y'_1 + Y_2Y'_0 - Y''_2 = 0, \quad (3.1.2.10)$$

$\vdots$

bulunur. (3.1.2.7) $\square$ (3.1.2.10) denklemlerinin çözümü ile

$$\begin{aligned} p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0 & \Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{u}_0 \Rightarrow Y_0 = u_0 = 1 - \frac{2}{x} \\ & \Rightarrow Y_0 = 1 - \frac{2}{x}, \end{aligned} \quad (3.1.2.11)$$

$$\begin{aligned} p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + Y_0Y'_0 - Y''_0 = 0 & \Rightarrow \dot{Y}_1 = -\dot{u}_0 - Y_0Y'_0 + Y''_0 \\ & \Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[-\dot{u}_0 - Y_0Y'_0 + Y''_0 \right] dt \\ & \Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[-Y_0Y'_0 + Y''_0 \right] dt \\ & \Rightarrow Y_1 = -\frac{2t}{x^2}, \end{aligned} \quad (3.1.2.12)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \dot{Y}_2 + Y_0Y'_1 + Y_1Y'_0 - Y''_1 = 0 & \Rightarrow \dot{Y}_2 = \left[-Y_0Y'_1 - Y_1Y'_0 + Y''_1 \right] \\ & \Rightarrow Y_2 = \int_0^t \left[-Y_0Y'_1 - Y_1Y'_0 + Y''_1 \right] dt \\ & \Rightarrow Y_2 = -\frac{2t^2}{x^3}, \end{aligned} \quad (3.1.2.13)$$

$$\begin{aligned}
p^3 : \dot{Y}_3 + Y_0 Y_2' + Y_1 Y_1' + Y_2 Y_0' - Y_2'' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_3 = [-Y_0 Y_2' - Y_1 Y_1' - Y_2 Y_0' + Y_2''] \\
\Rightarrow Y_3 &= \int_0^t [-Y_0 Y_2' - Y_1 Y_1' - Y_2 Y_0' + Y_2''] dt \\
\Rightarrow Y_3 &= -\frac{2t^3}{x^4}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.1.2.14}$$

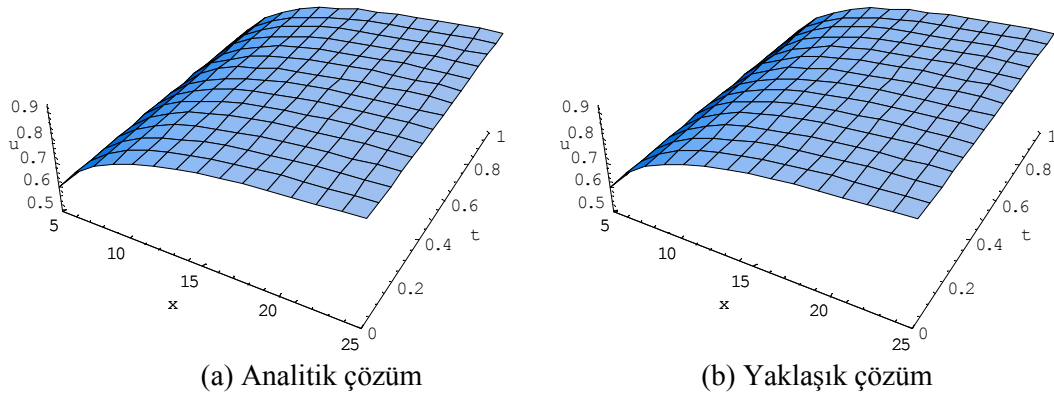
şeklinde (2.2.10) serisinin ilk üç terimi elde edilmiş olur. (3.1.2.11) $\sqcup$ (3.1.2.14) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.1.2.3) denkleminde yerine yazılırsa (3.1.1.1) lineer olmayan Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \\
&= 1 - \frac{2}{x} - \frac{2t}{x^2} - \frac{2t^2}{x^3} - \frac{2t^3}{x^4} + \dots \\
&= 1 - \frac{2}{x} \left[1 + \left(\frac{t}{x}\right) + \left(\frac{t}{x}\right)^2 + \left(\frac{t}{x}\right)^3 + \left(\frac{t}{x}\right)^4 + \dots \right],
\end{aligned}$$

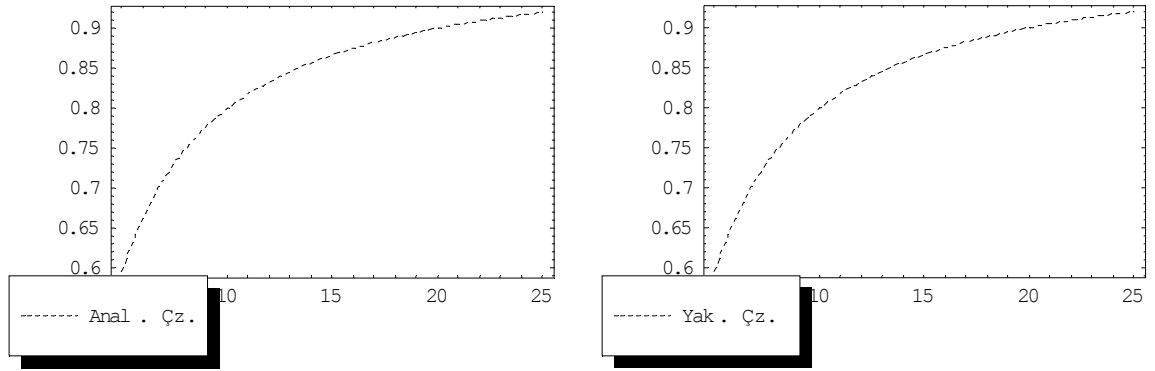
olarak elde edilir. Böylece (3.1.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = 1 - \frac{2}{x - t}$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.



Şekil 1.3. Burgers' denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.4. Burgers' denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.3. $n = 3$ durumunda, HPM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	5	10	15	20	25
0.05	4.04040E-9	1.25628E-10	1.65160E-11	3.91609E-12	1.28242E-12
0.10	6.53061E-8	2.020200E-9	2.65142E-10	6.28141E-11	2.05623E-11
0.15	3.34021E-7	1.027920E-8	1.346800E-9	3.18797E-10	1.04306E-10
0.20	1.06667E-6	3.265310E-8	4.270940E-9	1.010100E-9	3.30323E-10
0.25	2.63158E-6	8.012820E-8	1.046240E-8	2.472310E-9	8.08081E-10

3.1.3. Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm

(3.1.1.1) ve (3.1.1.2) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan Burgers' denklemini tekrar göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_t u = L_{xx} u - uu_x \quad (3.1.3.1)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dir. Burada L_t^{-1} integral

operatörü olup $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ şeklinde gösterilir. (3.1.3.1) denkleminin her iki tarafına

soldan L_t^{-1} uygulanırsa

$$L_t^{-1} [L_t u] = L_t^{-1} [L_{xx} u - uu_x] \quad (3.1.3.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) + t u_t(x, 0) + L_t^{-1} [L_{xx} u - (Mu)] \quad (3.1.3.3)$$

olur. Böylece $Mu = uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0(u_0)_x \\ A_1 &= u_0(u_1)_x + u_1(u_0)_x \\ A_2 &= u_0(u_2)_x + u_1(u_1)_x + u_2(u_0)_x \\ A_3 &= u_0(u_3)_x + u_1(u_2)_x + u_2(u_1)_x + u_3(u_0)_x \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.1.3.4)$$

olarak alınabilir. (3.1.3.3) denklemi için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u_0(x, 0) = 1 - \frac{2}{x} \\ u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1} [L_{xx} u_n - A_n] \end{cases}, \quad n \geq 0 \quad (3.1.3.5)$$

Elde edilen (3.1.3.5) rekürans bağıntısından

$$u_0(x, t) = 1 - \frac{2}{x}, \quad (3.1.3.6)$$

$$u_1(x, t) = L_t^{-1} [L_{xx} u_0(x, t) - A_0] = -\frac{2t}{x^2}, \quad (3.1.3.7)$$

$$u_2(x, t) = L_t^{-1} [L_{xx} u_1(x, t) - A_1] = -\frac{2t^2}{x^3}, \quad (3.1.3.8)$$

$$u_3(x, t) = L_t^{-1} [L_{xx} u_2(x, t) - A_2] = -\frac{2t^3}{x^4}, \quad (3.1.3.9)$$

$\vdots$

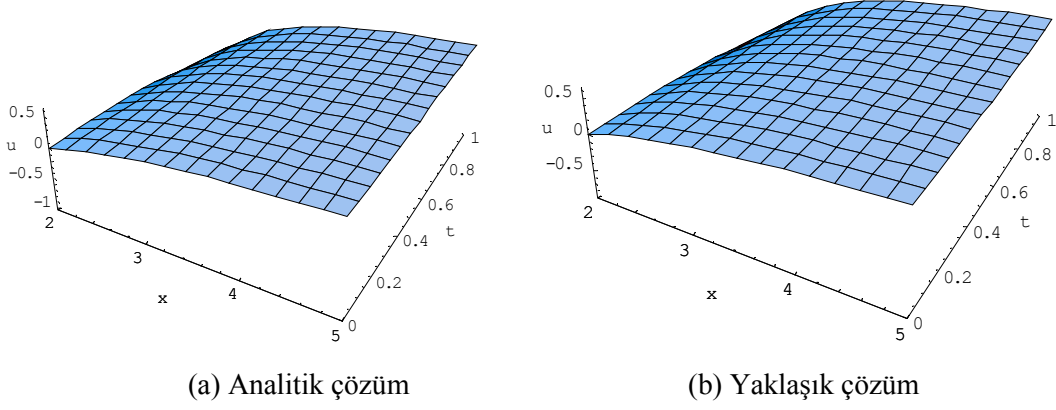
olarak ayrışım serisinin ilk üç terimi bulunur. Bulunan u_1, u_2, u_3 , terimleri (2.3.6) eşitliğinde yazılarak (3.1.1.1) lineer olmayan Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ &= 1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}t - \frac{2}{x^3}t^2 - \frac{2}{x^4}t^3 - \dots \\ &= 1 - \frac{2}{x} \left[1 + \frac{t}{x} + \left(\frac{t}{x}\right)^2 + \left(\frac{t}{x}\right)^3 + \dots \right], \end{aligned}$$

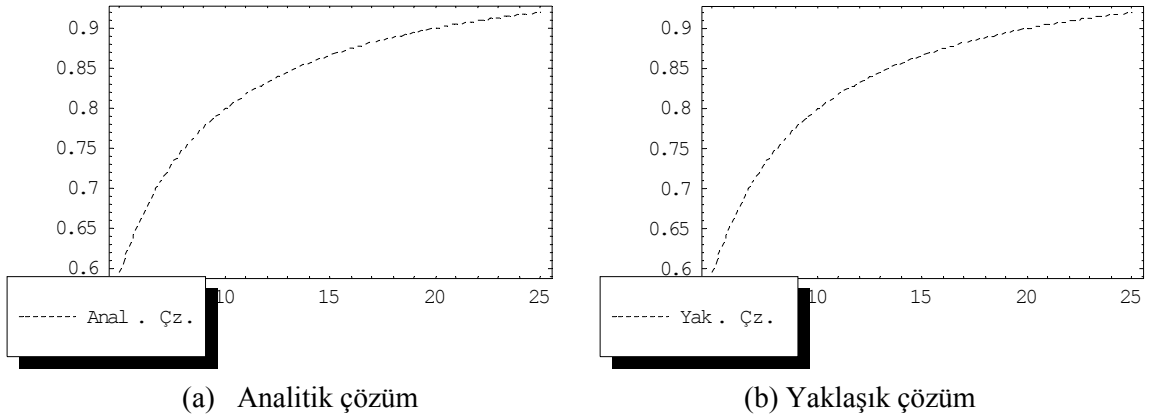
olarak elde edilebilir. Böylece (3.1.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = 1 - \frac{2}{x-t},$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.



Şekil 1.5. Burgers' denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



Şekil 1.6. Burgers' denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.4. $n = 3$ durumunda, ADM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	5	10	15	20	25
0.05	4.04040E-9	1.25628E-10	1.65160E-11	3.91609E-12	1.28242E-12
0.10	6.53061E-8	2.02020E-9	2.65142E-10	6.28141E-11	2.05623E-11
0.15	3.34021E-7	1.02792E-8	1.346800E-9	3.18797E-10	1.04306E-10
0.20	1.06667E-6	3.26531E-8	4.270940E-9	1.010100E-9	3.30323E-10
0.25	2.63158E-6	8.01282E-8	1.046240E-8	2.472310E-9	8.08081E-10

3.2. Klein-Gordon Denklemin VIM, HPM ve ADM ' unun uygulanması

3.2.1. Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözüm

$$u_{tt} - u_{xx} + u^2 - uu_x = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \quad (3.2.1.1)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = e^x, \quad 0 < x < 1 \quad (3.2.1.2)$$

$$u(0, t) = e^t, \quad (t \geq 0),$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan lineer olmayan Klein-Gordon denklemini [20] göz önüne alalım. Bu denklem için varyasyonel iterasyon formülasyonu

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \int_0^1 \left[\lambda(\xi) \left\{ \frac{\partial^2 u_n(x, \xi)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_n(x, \xi)}{\partial x^2} \right\} \right] d\xi d\xi \\ + \int_0^t \int_0^1 \left[\lambda(\xi) \left\{ +u_n^2(x, \xi) - u_n(x, \xi) \frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial x} \right\} \right] d\xi d\xi \end{aligned} \quad (3.2.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sabit koşulları aşağıdaki şekilde

$$1 - \lambda' = 0$$

$$\lambda(\xi = t) = 0$$

$$\lambda'' = 0$$

olup ve Lagrange çarpanı ise

$$\lambda(\xi) = \xi - t$$

elde edilir. Lagrange çarpanının (3.2.1.3) denkleminde yerine yazılmasıyla oluşan iterasyon formülasyonu;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \int_0^1 (\xi - t) \left[\left\{ \frac{\partial^2 u_n(x, \xi)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_n(x, \xi)}{\partial x^2} + u_n^2(x, \xi) - u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\} \right] d\xi d\xi \quad (3.2.1.4)$$

yazılır. Burada n nin değerleri için (3.2.1.2) başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots \quad (3.2.1.5)$$

terimleri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$u_0(x, t) = e^x (1 + t), \quad (3.2.1.6)$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_0(x, t) - \int_0^t \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} + u_0^2(x, t) - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} dt dt \\ &= e^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right), \end{aligned} \quad (3.2.1.7)$$

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + u_1^2(x,t) - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\} dt dt$$

$$= e^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right),$$

(3.2.1.8)

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) - \int_0^t \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + u_2^2(x,t) - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right\} dt dt$$

$$= e^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} + \dots \right),$$

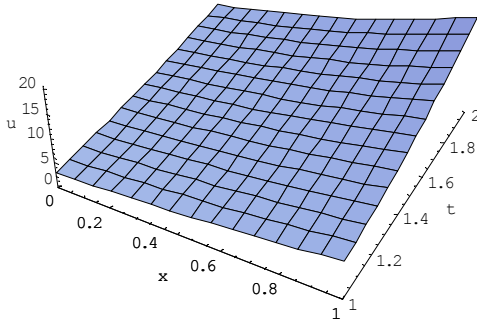
(3.2.1.9)

⋮

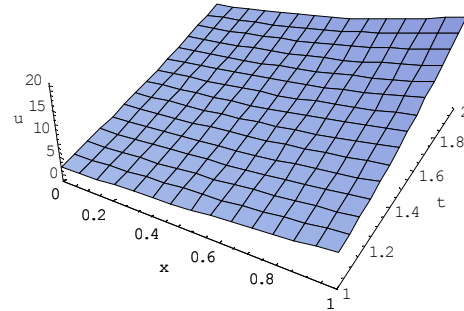
Böylece (3.2.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu aşağıdaki şekilde

$$u(x,t) = e^{x+t}$$

yazılabilir. $u(x,t)$ fonksiyonunun varyasyonel iterasyon metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

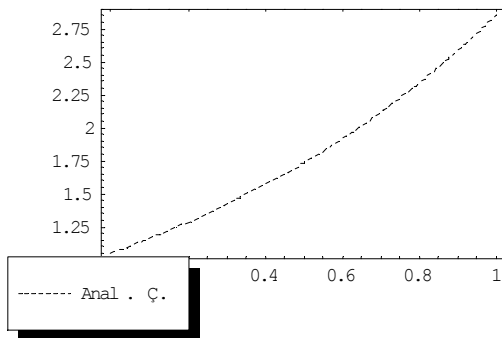


(a) Analitik çözüm

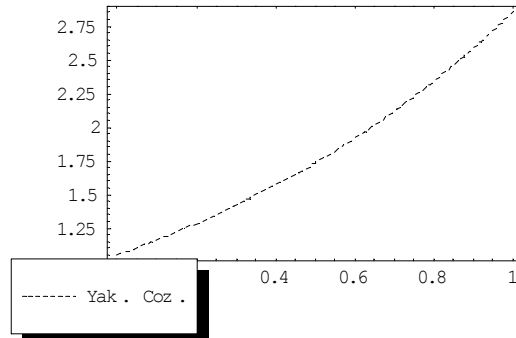


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.7. Klein-Gordon denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (VIM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil.1.8. Klein-Gordon denkleminin, analitik çözümü ile VIM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.5. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.05	6.61340E-16	1.33227E-15	1.33227E-15	2.66454E-15	2.66454E-15
0.10	2.77112E-13	3.38618E-13	4.13225E-13	5.04485E-13	6.16396E-13
0.15	7.14384E-12	8.72569E-12	1.06573E-11	1.30171E-11	1.58993E-11
0.20	7.17608E-11	8.76488E-11	1.07054E-10	1.30757E-10	1.59706E-10
0.25	4.30158E-10	5.25397E-10	6.41720E-10	7.83800E-10	9.57335E-10

3.2.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

(3.2.1.1) ve (3.2.1.2) eşitlikleri ile verilen denklem için aşağıdaki homotopi yapısını oluşturalım.

$$(1-p)\left[\ddot{Y}-\ddot{u}_0\right]+p\left[\ddot{Y}-Y''+Y^2-YY'\right]=0 \quad (3.2.2.1)$$

Burada $\ddot{Y}=\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$, $Y''=\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y'=\frac{\partial Y}{\partial x}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (3.2.2.1) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\ddot{Y}-\ddot{u}_0+p\ddot{u}_0-pY''+pY^2-pYY'=0 \quad (3.2.2.2)$$

denklemi elde edilir. (3.2.1.1) denkleminin çözümü (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi;

$$Y=Y_0+pY_1+p^2Y_2+p^3Y_3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}p^nY_n(x,t) \quad (3.2.2.3)$$

$$\ddot{Y}=\ddot{Y}_0+p\ddot{Y}_1+p^2\ddot{Y}_2+p^3\ddot{Y}_3+\dots \quad (3.2.2.4)$$

$$Y''=Y_0''+pY_1''+p^2Y_2''+p^3Y_3''+\dots \quad (3.2.2.5)$$

$$Y'=Y_0'+pY_1'+p^2Y_2'+p^3Y_3'+\dots \quad (3.2.2.6)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.2.2.3) □ (3.2.2.6) denklemlerinin (3.2.2.2) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\left(\ddot{Y}_0+p\ddot{Y}_1+p^2\ddot{Y}_2+p^3\ddot{Y}_3\right)-\ddot{u}_0+p\ddot{u}_0-p\left(Y_0''+pY_1''+p^2Y_2''+p^3Y_3''\right) \\ +p\left(Y_0+pY_1+p^2Y_2+p^3Y_3\right)^2-p\left(Y_0+pY_1+p^2Y_2+p^3Y_3\right)\left(Y_0'+pY_1'+p^2Y_2'+p^3Y_3'\right)=0$$

$$\ddot{Y}_0+p\ddot{Y}_1+p^2\ddot{Y}_2+p^3\ddot{Y}_3-\ddot{u}_0+p\ddot{u}_0-pY_0''-p^2Y_1''-p^3Y_2''+pY_0Y_0'+p^2Y_1Y_0'+p^3Y_2Y_0'+pY_0^2 \\ +p^2Y_0Y_1+p^3Y_1Y_1+2p^2Y_0Y_1+p^3Y_1^2+p^3Y_0Y_2+2p^3Y_0Y_2=0$$

elde edilir. Bu denklem p' nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \ddot{Y}_0 - \ddot{u}_0 = 0, \quad (3.2.2.7)$$

$$p^1 : \ddot{Y}_1 + \ddot{u}_0 - Y_0'' - Y_0 Y_0' + Y_0^2 = 0, \quad (3.2.2.8)$$

$$p^2 : \ddot{Y}_2 - Y_1'' - Y_1' Y_0 - Y_0' Y_1 + 2Y_0 Y_1 = 0, \quad (3.2.2.9)$$

$$p^3 : \ddot{Y}_3 - Y_2'' - Y_2' Y_0 - Y_1' Y_1 + Y_1^2 - Y_0' Y_2 + 2Y_0 Y_2 = 0, \quad (3.2.2.10)$$

$\vdots$

bulunur. (3.2.2.7) $\sqcup$ (3.2.2.10) denklemlerinin çözümü ile

$$p^0 : \ddot{Y}_0 - \ddot{u}_0 = 0 \Rightarrow Y_0 = u_0 \Rightarrow Y_0 = u_t(x, 0) = e^x(t+1), \quad (3.2.2.11)$$

$$\begin{aligned} p^1 : \ddot{Y}_1 + \ddot{u}_0 - Y_0'' - Y_0 Y_0' + Y_0^2 = 0 &\Rightarrow \ddot{Y}_1 = -\ddot{u}_0 + Y_0'' + Y_0 Y_0' - Y_0^2 \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \int_0^t \left[-\ddot{u}_0 + Y_0'' + Y_0 Y_0' - Y_0^2 \right] dt dt \\ &\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \int_0^t \left[Y_0'' + Y_0 Y_0' - Y_0^2 \right] dt dt \\ &\Rightarrow Y_1 = e^x \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right), \end{aligned} \quad (3.2.2.12)$$

$$\begin{aligned} p^2 : \ddot{Y}_2 - Y_1'' - Y_1' Y_0 - Y_0' Y_1 + 2Y_0 Y_1 &= 0 \\ &\Rightarrow \ddot{Y}_2 = Y_1'' + Y_1' Y_0 + Y_0' Y_1 - 2Y_0 Y_1 \\ &\Rightarrow Y_2 = \int_0^t \int_0^t \left[Y_1'' + Y_1' Y_0 + Y_0' Y_1 - 2Y_0 Y_1 \right] dt dt \\ &\Rightarrow Y_2 = e^x \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right), \end{aligned} \quad (3.2.2.13)$$

$$\begin{aligned} p^3 : \ddot{Y}_3 - Y_2'' - Y_2' Y_0 - Y_1' Y_1 + Y_1^2 - Y_0' Y_2 + 2Y_0 Y_2 &= 0 \\ &\Rightarrow \ddot{Y}_3 = Y_2'' + Y_2' Y_0 + Y_1' Y_1 - Y_1^2 + Y_0' Y_2 - 2Y_0 Y_2 \\ &\Rightarrow Y_3 = \int_0^t \int_0^t \left[Y_2'' + Y_2' Y_0 + Y_1' Y_1 - Y_1^2 + Y_0' Y_2 - 2Y_0 Y_2 \right] dt dt \\ &\Rightarrow Y_3 = e^x \left(\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} \right), \end{aligned} \quad (3.2.2.14)$$

$\vdots$

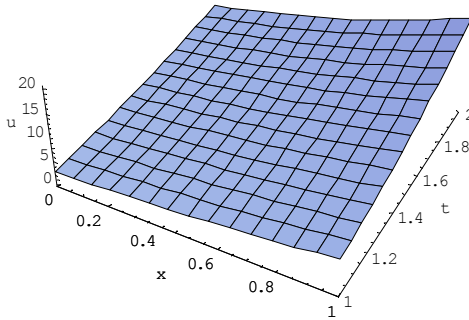
şeklinde (2.2.10) serisinin ilk üç terimi elde edilmiş olur. (3.2.2.11)-(3.2.2.14) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.2.2.3) denkleminde yerine yazılırsa (3.2.1.1) lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \\ &= e^x + e^x \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) + e^x \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) + e^x \left(\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} \right) + \dots \\ &= e^x \left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} + \dots \right] \end{aligned}$$

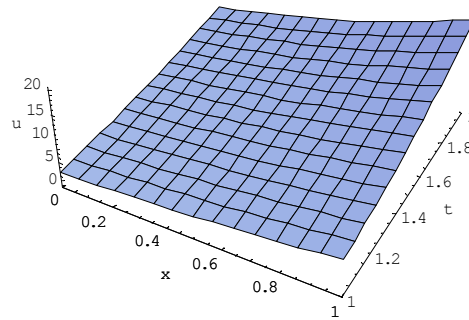
olarak elde edilir. Böylece (3.2.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = e^{x+t}$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

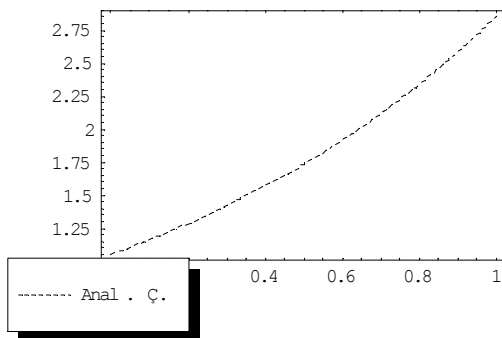


(a) Analitik çözüm

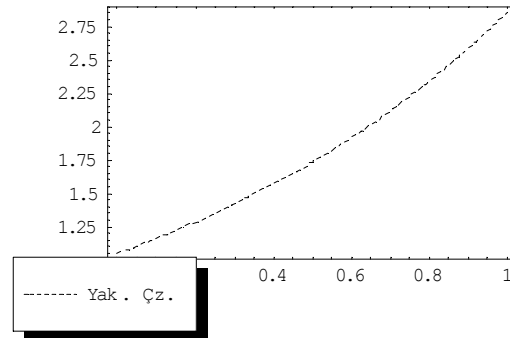


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.9. Klein-Gordon denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.10. Klein-Gordon denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.6. $n = 3$ durumunda, HPM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.05	6.61340E-16	1.33227E-15	1.33227E-15	2.66454E-15	2.66454E-15
0.10	2.77112E-13	3.38618E-13	4.13225E-13	5.04485E-13	6.16396E-13
0.15	7.14384E-12	8.72569E-12	1.06573E-11	1.30171E-11	1.58993E-11
0.20	7.17608E-11	8.76488E-11	1.07054E-10	1.30757E-10	1.59706E-10
0.25	4.30158E-10	5.25397E-10	6.41720E-10	7.83800E-10	9.57335E-10

3.2.3. Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm

(3.2.1.1) ve (3.2.1.2) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan Klein-Gordon denklemini tekrar göz önüne alalım. Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_u u = L_{xx} u - u^2 + uu_x \quad (3.2.3.1)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_u = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ve $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dir. Burada L_u^{-1} integral

operatörü olup $L_u^{-1} = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$ şeklinde gösterilir. (3.2.3.1) denkleminin her iki tarafına soldan L_u^{-1} uygulanırsa

$$L_u^{-1} [L_u u] = L_u^{-1} [L_{xx} u - u^2 + uu_x] \quad (3.2.3.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + L_u^{-1} L_{xx} u(x, t) - L_u^{-1} (Nu) + L_u^{-1} (Mu) \quad (3.2.3.3)$$

olur. Böylece $Nu = u^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ve $Mu = uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2 & B_0 &= u_0(u_0)_x \\ A_1 &= 2u_0 u_1 & B_1 &= u_0(u_1)_x + u_1(u_0)_x \\ A_2 &= 2u_0 u_2 + u_1^2 & B_2 &= u_0(u_2)_x + u_1(u_1)_x + u_2(u_0)_x \\ A_3 &= 2u_1 u_2 + 2u_0 u_3 & B_3 &= u_0(u_3)_x + u_1(u_2)_x + u_2(u_1)_x + u_3(u_0)_x \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (3.2.3.4)$$

olarak alınabilir. (3.2.3.3) denklemini için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u_0(x, t) = e^x + te^x = (1+t)e^x \\ u_{n+1}(x, t) = L_u^{-1} [L_{xx}u_n(x, t)] - L_u^{-1} [A_n] + L_u^{-1} [B_n] \end{cases}, n \geq 0 \quad (3.2.3.5)$$

Elde edilen (3.2.3.5) rekürans bağıntısından

$$u_0(x, t) = (1+t)e^x, \quad (3.2.3.6)$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_u^{-1} (L_{xx}u_0) - L_u^{-1} (A_0) + L_u^{-1} (B_0) \\ &= L_u^{-1} ((1+t)e^x) - L_u^{-1} ((1+t)^2 e^{2x}) + L_u^{-1} ((1+t)^2 e^{2x}) \\ &= e^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right), \end{aligned} \quad (3.2.3.7)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_u^{-1} (L_{xx}u_1) - L_u^{-1} (A_1) + L_u^{-1} (B_1) \\ &= L_u^{-1} \left(e^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) \right) - L_u^{-1} \left(2e^x (1+t) e^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) \right) \\ &\quad + L_u^{-1} \left(e^x (1+t) e^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) + e^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right) e^x (1+t) \right) \\ &= e^x \left(\frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} \right), \end{aligned} \quad (3.2.3.8)$$

$$u_3(x, t) = e^x \left(\frac{t^6}{720} + \frac{t^7}{5040} \right), \quad (3.2.3.9)$$

⋮

olarak ayrışım serisinin ilk üç terimi bulunur. Bulunan u_1, u_2, u_3 , terimleri (2.1.6)

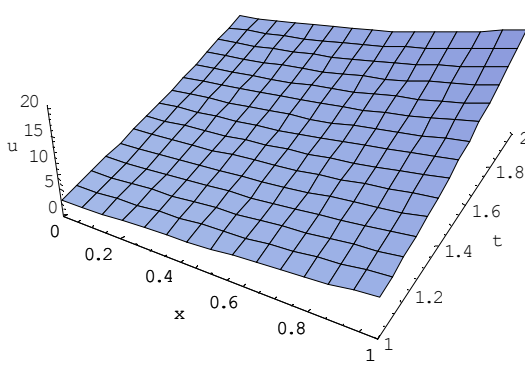
eşitliğinde yazılarak (3.2.1.1) lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ &= (1+t)e^x + e^x \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) + e^x \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) + e^x \left(\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} \right) \\ &= e^x \left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} + \dots \right], \end{aligned}$$

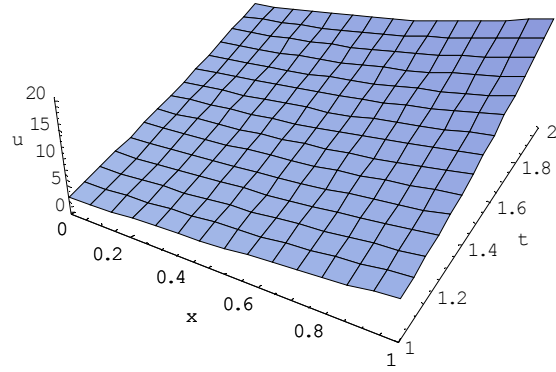
olarak elde edilebilir. Böylece (3.2.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = e^{x+t}$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

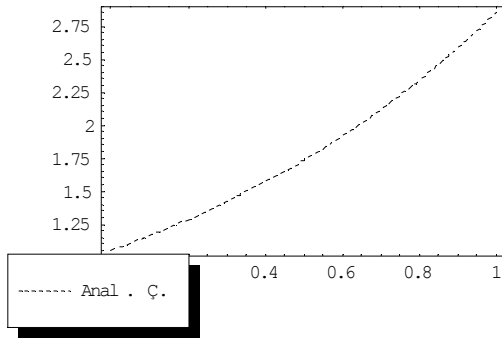


(a) Analitik çözüm

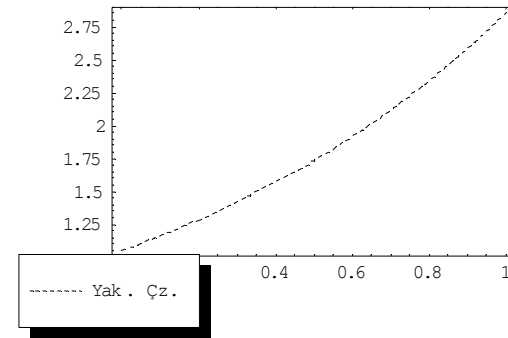


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.11. Klein-Gordon denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.12. Klein-Gordon denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.7. $n = 3$ durumunda, ADM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.05	6.61340E-16	1.33227E-15	1.33227E-15	2.66454E-15	2.66454E-15
0.10	2.77112E-13	3.38618E-13	4.13225E-13	5.04485E-13	6.16396E-13
0.15	7.14384E-12	8.72569E-12	1.06573E-11	1.30171E-11	1.58993E-11
0.20	7.17608E-11	8.76488E-11	1.07054E-10	1.30757E-10	1.59706E-10
0.25	4.30158E-10	5.25397E-10	6.41720E-10	7.83800E-10	9.57335E-10

3.3. Lineer Olmayan KdV Denkleminin VIM, HPM ve ADM ' unun Uygulanması

3.3.1. Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözüm

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.3.1.1)$$

$$u(x, 0) = 6x \quad (3.3.1.2)$$

başlangıç koşulu ile verilmiş olan lineer olmayan KdV Denklemini [1,32] göz önüne alalım.

Bu denklem için iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left[\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial [u_n^2(x, \xi)]}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_n(x, \xi)}{\partial x^3} \right] d\xi, \quad (3.3.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sabit koşulları aşağıdaki şekilde

$$\lambda'(\xi) = 0$$

$$1 + \lambda(\xi) = 0$$

olup ve Lagrange çarpanı ise

$$\lambda(\xi) = -1$$

elde edilir. Lagrange çarpanının (3.3.1.3) denkleminde yerine yazılmasıyla oluşan iterasyon formülü;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial [u_n^2(x, \xi)]}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_n(x, \xi)}{\partial x^3} \right] d\xi \quad (3.3.1.4)$$

yazılır. Burada n nin değerleri için (3.3.1.2) başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots \quad (3.3.1.5)$$

terimleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$u_0 = 6x, \quad (3.3.1.6)$$

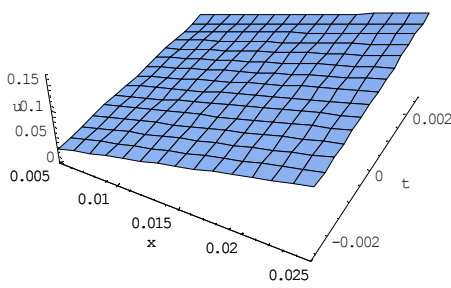
$$\begin{aligned} u_1 &= u_0(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} - 3 \frac{\partial [u_0^2(x, t)]}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_0(x, t)}{\partial x^3} \right] dt \\ &= 6x + 216tx \end{aligned} \quad (3.3.1.7)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} - 3 \frac{\partial [u_1^2(x, t)]}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_1(x, t)}{\partial x^3} \right] dt \\ &= 6x + 216tx + 7776t^2x + \text{küçük terimler} \end{aligned} \quad (3.3.1.8)$$

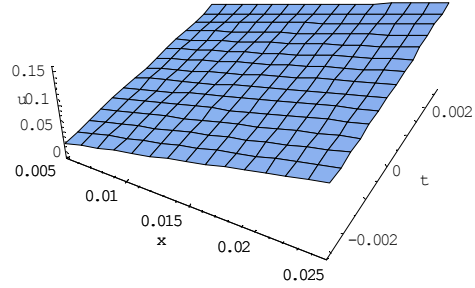
Böylece (3.3.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu aşağıdaki şekilde

$$u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}, \quad |36t| < 1,$$

yazılabilir. $u(x,t)$ fonksiyonunun varyasyonel iterasyon metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tabloları aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

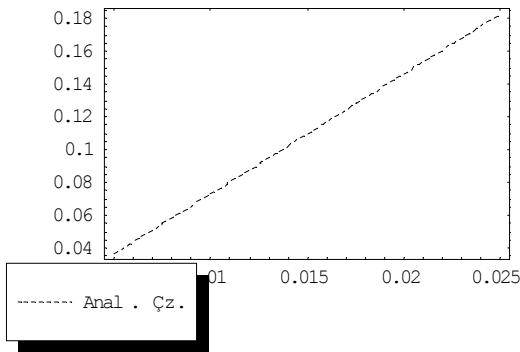


(a) Analitik çözüm

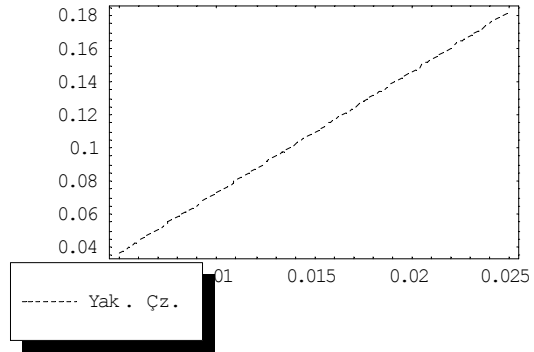


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.13. KdV denkleminin, $u(x,t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (VIM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.14. KdV denkleminin, analitik çözümü ile VIM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.8. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
0.005	3.84059E-5	7.68117E-5	1.15218E-4	1.53623E-4	1.92029E-4
0.010	7.87732E-4	1.57464E-3	2.36196E-3	3.14928E-3	3.93660E-3
0.015	5.54547E-3	1.10909E-2	1.66364E-2	2.21819E-2	2.77274E-2
0.020	2.87934E-2	5.75868E-2	8.63803E-2	1.15174E-1	1.43967E-1
0.025	1.96830E-1	3.93660E-1	5.90490E-1	7.87320E-1	9.84150E-1

Tablo 1.9. $n = 3$ durumunda, VIM formülü ile küçük terimlerle birlikte hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
0.005	1.73858E-2	3.47716E-2	5.21575E-2	6.95433E-2	8.69291E-2
0.010	5.82249E-2	1.16450E-1	1.74675E-1	2.32900E-1	2.91124E-1
0.015	1.48292E-1	2.96584E-1	4.44876E-1	5.93168E-1	7.41460E-1
0.020	3.28533E-1	6.57065E-1	9.85598E-1	1.31413E-0	1.64266E-0
0.025	5.70299E-1	4.10980E-0	1.71090E-0	2.28120E-0	2.85150E-0

3.3.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözüm

(3.3.1.1) ve (3.3.1.2) eşitlikleri ile verilen denklem için aşağıdaki homotopi yapısını oluşturalım.

$$(1-p)\left[\dot{Y}-\dot{u}_0\right]+p\left[\dot{Y}-3\left(Y^2\right)_x+Y'''\right]=0 \quad (3.3.2.1)$$

Burada $Y'' = \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}$, $\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}$ ve $p \in [0,1]$ dir. (3.3.2.1) denkleminin genel açılımı yapılması halinde

$$\dot{Y}-\dot{u}_0+p \dot{u}_0-3 p\left(Y^2\right)_x+p Y'''=0 \quad (3.3.2.2)$$

denklemini elde edilir. (3.3.1.1) denkleminin çözümü (2.2.10) denkleminde de belirtildiği gibi;

$$Y=Y_0+p Y_1+p^2 Y_2+p^3 Y_3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} p^n Y_n(x, t) \quad (3.3.2.3)$$

$$\dot{Y}=\dot{Y}_0+p \dot{Y}_1+p^2 \dot{Y}_2+p^3 \dot{Y}_3+\cdots \quad (3.3.2.4)$$

$$Y'''=Y_0'''+p Y_1''' +p^2 Y_2''' +p^3 Y_3''' +\cdots \quad (3.3.2.5)$$

şeklinde ele alınabilir. (3.3.2.3) □ (3.3.2.5) denklemlerinin (3.3.2.2) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \dot{Y}-\dot{u}_0+p \dot{u}_0-3 p\left(Y^2\right)_x+p Y'''=0, \\ & \left(\dot{Y}_0+p \dot{Y}_1+p^2 \dot{Y}_2+p^3 \dot{Y}_3\right)-\dot{u}_0+p \dot{u}_0-3 p\left[\left(Y_0+p Y_1+p^2 Y_2+p^3 Y_3\right)^2\right]_x \\ & +p\left(Y_0'''+p Y_1''' +p^2 Y_2''' +p^3 Y_3'''\right)=0, \\ & \left(\dot{Y}_0+p \dot{Y}_1+p^2 \dot{Y}_2+p^3 \dot{Y}_3\right)-\dot{u}_0+p \dot{u}_0+\left[-3 p Y_0^2-6 p^2 Y_0 Y_1-3 p^3 Y_1^2-6 p^3 Y_0 Y_2\right]_x \\ & +p\left(Y_0'''+p Y_1''' +p^2 Y_2''' +p^3 Y_3'''\right)=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + \left[-(3pY_0^2)_x - (6p^2Y_0Y_1)_x - (3p^3Y_1^2)_x - (6p^3Y_0Y_2)_x \right] \\
& + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' = 0, \\
& \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 - (3pY_0^2)_x - (6p^2Y_0Y_1)_x - (3p^3Y_1^2)_x - (6p^3Y_0Y_2)_x \\
& + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem p 'nin aynı kuvvetten terimlerine göre yeniden düzenlenirse

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \quad (3.3.2.6)$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 - (3Y_0^2)_x + Y_0''' = 0, \quad (3.3.2.7)$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 - (6Y_0Y_1)_x + Y_1''' = 0, \quad (3.3.2.8)$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 - (3Y_1^2)_x - (6Y_0Y_2)_x + Y_2''' = 0, \quad (3.3.2.9)$$

$\vdots$

bulunur. (3.3.2.6) $\square$ (3.3.2.9) denklemlerinin çözümü ile

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0 \Rightarrow \dot{Y}_0 = \dot{u}_0 \Rightarrow Y_0 = u_0 \Rightarrow Y_0 = 6x, \quad (3.3.2.10)$$

$$\begin{aligned}
p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 - (3Y_0^2)_x + Y_0''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_1 = -\dot{u}_0 + (3Y_0^2)_x - Y_0''' \\
&\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[-\dot{u}_0 + (3Y_0^2)_x - Y_0''' \right] dt \\
&\Rightarrow Y_1 = \int_0^t \left[(3Y_0^2)_x - Y_0''' \right] dt \\
&\Rightarrow Y_1 = 216tx,
\end{aligned} \quad (3.3.2.11)$$

$$\begin{aligned}
p^2 : \dot{Y}_2 - (6Y_0Y_1)_x + Y_1''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_2 = (6Y_0Y_1)_x - Y_1''' \\
&\Rightarrow Y_2 = \int_0^t \left[(6Y_0Y_1)_x - Y_1''' \right] dt \\
&\Rightarrow Y_2 = 7776t^2x,
\end{aligned} \quad (3.3.2.12)$$

$$\begin{aligned}
p^3 : \dot{Y}_3 - (3Y_1^2)_x - (6Y_0Y_2)_x + Y_2''' &= 0 \Rightarrow \dot{Y}_3 = (3Y_1^2)_x + (6Y_0Y_2)_x - Y_2''' \\
&\Rightarrow Y_3 = \int_0^t \left[(3Y_1^2)_x + (6Y_0Y_2)_x - Y_2''' \right] dt \\
&\Rightarrow Y_3 = 279936t^3x, \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (3.3.2.13)$$

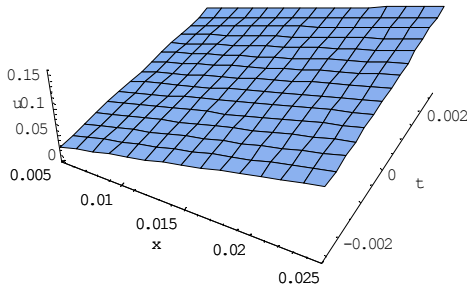
şeklinde (2.2.10) serisinin ilk üç terimi elde edilmiş olur. (3.3.2.10) □ (3.3.2.13) denklemleri $p \rightarrow 1$ iken (3.3.2.3) denkleminde yerine yazılırsa (3.3.1.1) lineer olmayan KdV denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \\ &= 6x + 216tx + 7776t^2x + 279936t^3x + \dots \\ &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + \dots) \end{aligned}$$

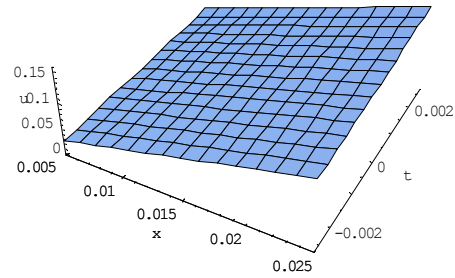
olarak elde edilir. Böylece (3.3.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, \quad |36t| < 1$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

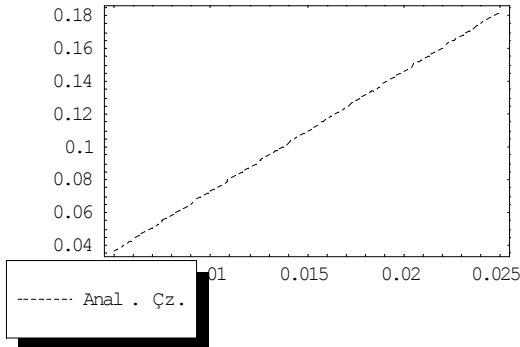


(a) Analitik çözüm

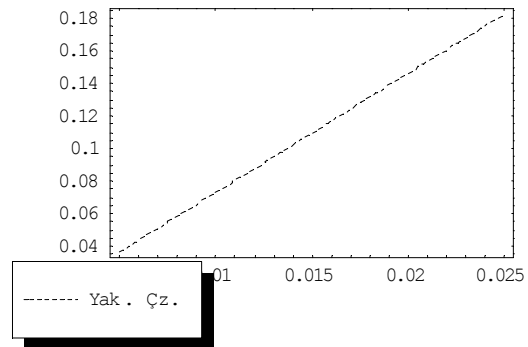


(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.15. KdV denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (HPM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.16. KdV denkleminin, analitik çözümü ile HPM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.10. $n = 3$ durumunda, HPM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
0.005	3.84059E-5	7.68117E-5	1.15218E-4	1.53623E-4	1.92029E-4
0.010	7.87732E-4	1.57464E-3	2.36196E-3	3.14928E-3	3.93660E-3
0.015	5.54547E-3	1.10909E-2	1.66364E-2	2.21819E-2	2.77274E-2
0.020	2.87934E-2	5.75868E-2	8.63803E-2	1.15174E-1	1.43967E-1
0.025	1.96830E-1	3.93660E-1	5.90490E-1	7.87320E-1	9.84150E-1

3.3.3. Adomian Ayrışım Metodu ile Çözüm

(3.3.1.1) ve (3.3.1.2) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan KdV denklemini tekrar göz önüne alalım Bu denklem aşağıdaki gibi

$$L_t u = -L_{xxx} u + N(u) \quad (3.3.3.1)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ ve lineer olmayan terim ise

$$N(u) = 3(u^2)_x \text{ olarak ifade edilmektedir. Burada } L_t^{-1} \text{ integral operatörü olup } L_t^{-1} = \int_0^t (.) dt$$

şeklinde gösterilir. (3.3.3.1) denkleminin her iki tarafına soldan L_t^{-1} uygulanırsa

$$L_t^{-1} [L_t u] = L_t^{-1} [-L_{xxx} u + N(u)] \quad (3.3.3.2)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} [-L_{xxx} u] + L_t^{-1} [N(u)] \quad (3.3.3.3)$$

olur. Böylece $N(u) = 3(u^2)_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanarak A_n Adomian polinomunun

ilk üç terimi (2.1.9) ifadesinde de belirtildiği gibi

$$\begin{aligned} A_0 &= 3(u_0^2)_x, \\ A_1 &= 3(2u_0 u_1)_x, \\ A_2 &= 3(2u_2 u_0 + u_1^2)_x, \\ A_3 &= 3(2u_1 u_2 + 2u_0 u_3)_x, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.3.3.4)$$

olarak alınabilir. (3.3.3.3) denklemi için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u_0(x, 0) = 6x \\ u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1}[-L_{xxx}u_k] + L_t^{-1}[A_k] \end{cases}, \quad k \geq 0, \quad (3.3.3.5)$$

elde edilen (3.3.3.5) rekürans bağıntısından

$$u_0 = 6x$$

$$u_1 = \int_0^t [-L_{xxx}(u_0) + A_0] dt = \int_0^t [-L_{xxx}(u_0) + 3(u_0^2)_x] dt = 216xt$$

$$u_2 = \int_0^t [-L_{xxx}(u_1) + A_1] dt = \int_0^t [-L_{xxx}(u_1) + 3(2u_0u_1)_x] dt = 7776xt^2$$

$$u_3 = \int_0^t [-L_{xxx}(u_2) + A_2] dt = \int_0^t [-L_{xxx}(u_2) + 3(2u_2u_0 + u_1^2)_x] dt = 279936xt^3$$

⋮

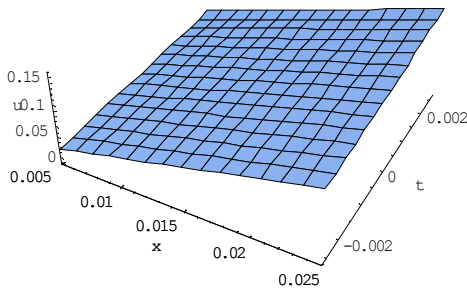
olarak ayrışım serisinin ilk üç terimi bulunur. Bulunan u_1, u_2, u_3 , terimleri (2.1.6) eşitliğinde yazılarak (3.3.1.1) lineer olmayan KdV denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \\ &= 6x + 216tx + 7776t^2x + 279936t^3x + \dots \\ &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + \dots) \end{aligned}$$

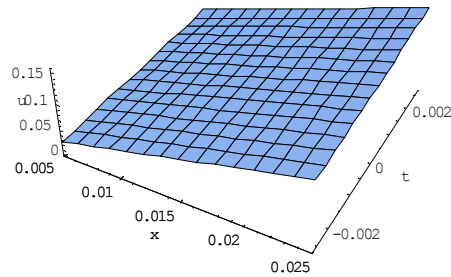
olarak elde edilebilir. Böylece (3.3.1.1) denkleminin analitik çözümünün kapalı formu

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, \quad |36t| < 1$$

olur. $u(x, t)$ fonksiyonunun adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık ve analitik çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri ile birlikte mutlak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

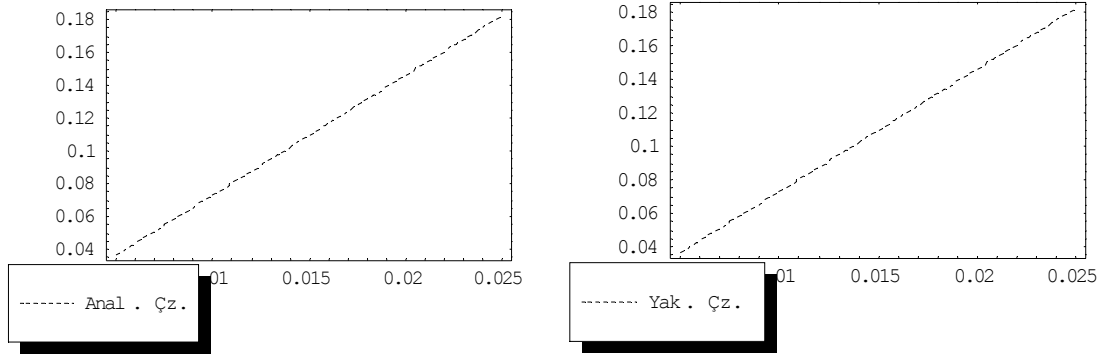


(a) Analitik çözüm



(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1.17. KdV denkleminin, $u(x, t)$ analitik çözümü ile yaklaşık çözümünün (ADM) üç boyutlu görünümü



(a) Analitik çözüm

(b) Yaklaşık çözüm

Şekil 1. 18. KdV denkleminin, analitik çözümü ile ADM kullanılarak elde edilen 3 terim için yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Tablo 1.11 $n = 3$ durumunda, ADM formülü ile hesaplanan 3 terim için elde edilen mutlak hata tablosu

t/x	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
0.005	3.84059E-5	7.68117E-5	1.15218E-4	1.53623E-4	1.92029E-4
0.010	7.87732E-4	1.57464E-3	2.36196E-3	3.14928E-3	3.93660E-3
0.015	5.54547E-3	1.10909E-2	1.66364E-2	2.21819E-2	2.77274E-2
0.020	2.87934E-2	5.75868E-2	8.63803E-2	1.15174E-1	1.43967E-1
0.025	1.96830E-1	3.93660E-1	5.90490E-1	7.87320E-1	9.84150E-1

4. SAYISAL SONUÇLARIN İRDELENMESİ

Bu çalışmada, Homotopi pertürbasyon metodu, Adomian ayrışım metodu ve Varyasyonel iterasyon metodu; Burgers', Klein-Gordon ve KdV denklemlerine başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu denklemlerin yarı analitik metotlarla elde edilen yaklaşık çözüm fonksiyonlarının, üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri çizilerek sayısal veri tabloları oluşturulmuştur. Her üç metotta da serinin birkaç teriminin kullanılması ile elde edilen sayısal sonuçların ve grafiklerin analitik çözüm fonksiyonuna çok iyi bir yaklaşım gösterdiği görülmektedir. Ayrışım serilerine yeni terimler eklemekle hatanın daha da küçüldüğü gözlenebilir. Mathematica programı kullanılarak, sayısal ve analitik çözümler için çözüm grafiklerinin hemen hemen aynı olduğu görülmektedir.

Burgers', Klein-Gordon ve KdV denklemlerinde, Homotopi pertürbasyon ve Adomian ayrışım metotları kullanılarak elde edilen hata miktarlarının aynı olduğu tablolarda görülmektedir. Sayısal veri tablolarında Varyasyonel iterasyon metodu ile elde edilen sayısal değerlerin hata miktarı, Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metoduna göre elde edilen sayısal değerlerin hata miktarlarından oldukça hassas olmadığı görülmektedir. Yani Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu ile elde edilen sayısal sonuçların, Varyasyonel iterasyon metoduna göre daha hassas olduğu görülmektedir.

Varyasyonel iterasyon metodunda, bazı denklemlerin çözüm serisinin terimleri hesaplanırken küçük terimlerin ortaya çıktığı görülmektedir. Eğer bu küçük terimler ihmal edilmezse VIM; HPM ve ADM ye göre hassas sonuçlar vermemektedir. Ancak bu küçük terimler ihmal edilirse VIM'in HPM ve ADM ye benzer sonuçlar verdiği tablolardan gözlemlenmiştir.

5. SONUÇ

Varyasyonel iterasyon metodu, Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu herhangi bir varsayım ve sınırlama olmadan sadece bir başlangıç koşulunun verilmesi ile lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Ancak bazı denklemlerin VIM kullanılarak elde edilen çözüm serisinde, ortaya çıkan küçük parametrelerin çözüm serisine dahil edilip edilmemesine göre analitik çözüme olan yakınsama değişmektedir. Bu çalışmada görüldüğü gibi Klein-Gordon denkleminin VIM ile çözümünde elde edilen çözüm serisinin terimlerinde küçük parametreler görülmemekte olup, Burgers' ve KdV denklemlerinin VIM ile çözümlerinde ise görülmektedir. Bu nedenden dolayı, yukarıdaki denklemler için Homotopi pertürbasyon metodu ve Adomian ayrışım metodunun kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm serisinin terimleri birbirleri ile benzer olduğu ancak Burgers' ve KdV denklemlerinin VIM kullanılarak elde edilen çözüm serisinin terimlerinin farklı olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Abdul-Majid Wazwaz**, 2007. ‘The variational iteration method for rational solutions for KdV, K(2,2), Burgers, and cubic Boussinesq equations’, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **207**, 18 – 23.
- [2] **Adomian G.**, 1986. ‘Nonlinear Stochastic Operator Equations’, *Academic Press*, San Diego.
- [3] **Bülent Saka ve İdris Dağa**, 1988. ‘A numerical study of the Burgers’ equation’, *Mathematics Department, Eskişehir Osmangazi University*, 26480 Eskişehir, Turkey
- [4] **Bulut, H.**, 2009. “Comparing Numerical Methods for Boussinesq Equation Model Problem”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **25** (4), 783-796.
- [5] **G. Adomian**, 1988. ‘A review of the Decomposition Method in Applied Mathematics’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **135**, 501–544.
- [6] **G. Adomian**, 1984. ‘A new approach to nonlinear partial differential equations’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **102**, 420-434.
- [7] **He, J.H.** 1999. ‘Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical technique: some examples’, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, **34**(4), 699-708.
- [8] **He, J.H.** 1998. ‘Approximate solution for nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **167**, 57-68.
- [9] **He J.H.**, 2006. ‘Non-Perturbative Methods for Strongly nonlinear Problems’, *dissertation, de -verlag im Internet GmbH*, Berlin.
- [10]. **He, J.H.** 2003. ‘Generalized Variational Principles in Fluids’, *science & Culture Publishing House of China*, (in Chinese)
- [11]. **He, J.H.** 2004. ‘Variational principles for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients’, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**(4), 847-851.
- [12]. **He, J.H.** 2000. ‘Variational iteration method for autonomous ordinary differential system’, *International Journal of Applied Mathematics and Computer*, **114**, (2/3), 115-123.
- [13] **Hasan Bulut, H.Mehmet Baskonus**, 2010. ‘A study on the numerical solution of the third-order dispersive equations with homotopy perturbation method’, *e-Journal of New World Sciences Academy*, **5**, (1), ISSN:1306–3111, 18-30.

- [14] **J.H. He**, 2000. 'A coupling method a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems', *International Journal of Non-Linear*. **35**, 37-43
- [15] **J.H. He**, 2008. 'Recent development of the homotopy perturbation method' *Journal of the Juliusz Schauder Center*. **31**, 205-209.
- [16] **J.H. He**, 2004. 'The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities', *Applied Mathematics and Computation*. **151**, 287–292.
- [17] **J. H. He**, 2006. 'Application of He's Homotopy perturbation Method to Non-Linear Coupled system of Reaction diffusion Equations', *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **7**, 413–420.
- [18] **J.H. He**, 2006. 'Some asymptotic methods for strongly nonlinearly equations', *International Journal of Modern Mathematics*. **20 (10)**, 1141–1199.
- [19] **Karagöz M.**, 1998. İstatistik Yöntemler, Malatya.
- [20] **Kartik Chandra Basak, Pratap Chandra Ray, Rasajit Kumar Bera**, 2009. 'Solution of non-linear Klein–Gordon equation with a quadratic non-linear term by Adomian decomposition method', *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 718–723.
- [21]. **Kaya D. and İnan İ.**, 2001. 'On a Solution of a Burgers Like Nonlinear Equation by Decomposition Method', *Menemui Math.*, **23**, 17-22,
- [22] **Kaya D. and Bulut H.**, 2000. 'The Decomposition Method for Approximate Solution of a Burgers Equation', *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, **28**, 35-42,
- [23] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S.V.**, 1957, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Presses, Rochester, N. Y.
- [24] **Mustafa Inc, Yavuz Uğurlu**, 2007. "Numerical simulation of the regularized long wave equation by He's homotopy perturbation method", *Physics Letters A*, **369**, (3), 173-179
- [25] **M.A. Abdou, A.A. Soliman**, 2005. 'Variational iteration method for solving Burgers' and Coupled Burgers' equation', *The Journal of Computational and Applied Mathematics*, **181**, 245–251.
- [26] **M. Dehghan**, 2004. 'The use of Adomian decomposition method for solving the one dimensional parabolic equation with non-local boundary specification', *International Journal of Computer Mathematics*, **81**, 25–34.

- [27] **Mei M.** 1998. ‘Large-time behavior of solution for generalized Benjamin–Bona–Mahony-Burgers equations’ *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **33**, 699–714.
- [28] **Ozis T., Agirseven D.**, 2008. ‘He’s homotopy perturbation method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients’, *Physics Letters A*, **372**, 5944–5950.
- [29] **Siddiqui AM, Mahmood R, Ghori QK**, 2006. ‘Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method’, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **7 (1)**, 7–14.
- [30] **T. Mavoungou, Y. Cherruault**, 1992. ‘Convergence of Adomian’s method and applications to nonlinear partial differential equations’, *Kybernetes* **21**, 13–25.
- [31] **Wazwaz, A.M.**, 2005. ‘Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratutype equations’, *Appl. Math Comput.* **166**, 652,663.
- [32] **Ergüt, M and Bulut, H.**, 2002. “The Numerical Solution of 2-Dimensional Partial Differential Equations by The Decomposition Method”, *Journal of Natural Science Mathematics*, **42 (1)**, 07-20,
- [33] www.en.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Diyarbakır’da doğdum. İlkokul, Ortaokul ve Lise öğrenimimi Diyarbakır’da tamamladım. 2001 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde lisans eğitimine başladım. 2005 yılında mezun oldum ve 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım.