

**REGÜLER VE SİNGÜLER DİFERANSİYEL
OPERATÖRLER İÇİN FARKLI SPEKTRAL
VERİLERE GÖRE TERS PROBLEM**

Tüba GÜLŞEN

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI
MAYIS-2015**

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**REGÜLER VE SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN FARKLI
SPEKTRAL VERİLERE GÖRE TERS PROBLEM**

DOKTORA TEZİ

Tüba GÜLŞEN

(111121201)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22.04.2015

MAYIS-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER VE SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLER İÇİN FARKLI
SPEKTRAL VERİLERE GÖRE TERS PROBLEM

DOKTORA TEZİ

Tüba GÜLŞEN

(111121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 22.04.2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 15.05.2015

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (A.Ü)

Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü)

Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)

Doç. Dr. Murat ŞAT (E.Ü)

MAYIS-2015

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde, engin bilgi birikimini tam olarak bir eğitimci üslubu ve sıfatıyla, yüksek makamın alçak gönüllülüğü içerisinde, aktarmasına ve böyle bir çalışmanın planlanması, düzenli bir şekilde yürütülmesi sürecinde her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Yurt içi Doktora burs desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı ebeveynlerime, kardeşime ve eşime de teşekkür ederim.

Tüba GÜLŞEN

ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SİMGELER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	12
2.1. Diferansiyel Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar.....	12
3. DİRAC OPERATÖRÜ.....	22
3.1. Bir Boyutlu Dirac Sistemi.....	22
3.2. Kanonik Dirac Operatörü için Matris Dönüşüm Operatörü	24
4. BESSEL OPERATÖRÜ.....	34
4.1. Bessel Diferansiyel Denklemi, Temel Özellikleri.....	34
4.2. Bessel Operatörü için İsospektral Problem.....	39
5. DİFÜZYON OPERATÖRÜ.....	50
5.1. Difüzyon Operatörünün Bazı Fiziksel ve Spektral Özellikleri.....	50
5.2. Difüzyon Operatörü için İsospektral Problem.....	52
6. DİRAC SİSTEMİ İÇİN İSOSPEKTRAL PROBLEM.....	66
6.1. İsospektral Problem.....	66
7. ARALIĞIN İÇ NOKTASINDA SÜREKSİZLİĞE SAHİP DİRAC OPERATÖRÜ.....	74
7.1. Sınır Şartları Özdeğere Bağımlı Dirac Sistemi.....	74
7.2. Operatörün Teorik Tanımlanması.....	74
7.3. Asimptotik Formüller.....	80
7.4. Sınır Şartları Özdeğere Bağımlı Dirac Sistemi için İkinci Tür Problem.....	82
7.5. İkinci Tür Problem için Operatörün Teorik Tanımlanması.....	83
7.6. İkinci Tür Problem için Asimptotik Formüller.....	88
KAYNAKLAR.....	92
ÖZGEÇMİŞ.....	

ÖZET

Regüler ve Singüler Diferansiyel Operatörler için Farklı Spektral Verilere göre Ters Problem

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde; Sturm-Liouville, Bessel, Difüzyon ve Dirac operatörlerinin spektral teorisinin tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde ve sunulan tezde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; bir boyutlu stasyoner Dirac operatörünün genel görüntüsü ve kanonik formları, özdeğerler için asimptotik formül, kanonik Dirac operatörü için matris dönüşüm operatörü incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; Bessel diferansiyel denklemi ve temel özellikleri verilmiş, dönüşüm operatörü ve Gelfand-Levitan integral denkleminde faydalanılarak Bessel operatörü için isospektral problem incelenmiştir.

Beşinci bölümde; Difüzyon operatörünün bazı fiziksel ve spektral özellikleri verilmiş ve bu operatör için isospektral problem incelenmiş ve genel durumda çekirdekler için genel dejenerelik farklı bir yöntemle elde edilmiştir.

Altıncı ve yedinci bölümde aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Dirac operatörü için iki farklı problem ele alınmış, bu problemlerin özdeğer ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bessel operatörü, Difüzyon operatörü, Dirac operatörü, İsospektral Problem, Özdeğer, Özfonksiyon, Genel dejenerelik.

SUMMARY

The Inverse Problem According to Different Spectral Datas for Regular and Singular Differential Operators

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter the history of spectral theory of Sturm-Liouville, Bessel, Diffusion and Dirac operators were given.

In the second chapter some fundamental definitions, often used in spectral theory of differential operators, were given.

In the third part general form, canonic forms, asymptotic formula for eigenvalues of one-dimensional stationary Dirac operator and matrix transmutation operator of canonic Dirac operator were investigated.

In the fourth chapter Bessel differential equation and basic properties of this equation were given and the isospectrality problem for Bessel operator is investigated by using transmutation operator and Gelfand-Levitan integral equation.

In the fifth chapter some physical and spectral properties of the diffusion operator were given and isospectrality problem for this operator is examined and in the general case general degeneracy of the kernels is obtained by a different method.

In the six and seven chapter two different problems for discontinuous Dirac operator is considered and asymptotic formulas of eigenvalues and eigenfunctions for this operator were obtained.

Keywords: Bessel operator, Diffusion operator, Dirac operator, Isospectrality problem, Eigenvalues, Eigenfunctions, General Degeneracy.

SİMGELER LİSTESİ

$L_2[a,b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H	: Hilbert uzayı
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: n . özdeğer
φ_n	: n . özfonksiyon
$K(x,y)$	: Çekirdek fonksiyonu
α_n	: n . normlaştırıcı sayı
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekanığın çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX–XX. asırlarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırmacı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması probleminin ise Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E. C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılım formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörler teorisinde spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörler için ters problem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Bazı spektral verilere göre operatörün tanımlanması,
2. Spektral verilere göre operatörün birebir olarak tanımlanması,
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması için yöntem araştırması.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan' a [1] aittir. 1929 yılında V. A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1 $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ 'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (1.1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \quad (1.2)$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) = 0$ dır.

Bu çalışmadan sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a aittir [2].

Teorem 1.2 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ ler (1.1) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (1.4)$$

sınır şartları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ 'ler ise (1.1) denklemini ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \quad (1.5)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,$$

sınır şartları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir. (h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılardır).

G. Borg'un bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı spektrumları olduğu farz edilir ve operatör bu diziler yardımıyla belirtilir. Yani, bu tip operatörün varlığının önceden belli olduğu kabul edilir. G. Borg, aynı çalışmada bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, V. A. Ambartsumyan'ın sonucu istisnai bir durum olarak düşünülmektedir.

Bu çalışmadan sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik şartını sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson [3], [4] ispatlamıştır. Ayrıca N. Levinson negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının potansiyeli birebir olarak tanımladığını göstermiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş öteleme teorisinde J. Delsarte [5], J. Lions [6] ve B. M. Levitan [7] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A. V. Povzner [8] göstermiştir.

Daha sonra ikinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A. N. Tichonov [9] ve V. A. Marchenko [10] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik problemlerinin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (1.6)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \quad (1.7)$$

sayıları verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V. A. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmada G. Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımı ile vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. V. A. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda M. G. Krein [11], [12] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili bir yöntem vermiştir. Fakat bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli şart $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1949 yılında V. A. Marchenko'nun çalışması yayınlanmadan önce A. N. Tichnok [9] tarafından V. A. Marchenko'nun ispatladığı teklik teoremine denk olan bir teorem ispatlanmıştır.

Teorem 1.3 $\lambda < 0$ için

$$U'' + \lambda \rho^2(x)U = 0, \quad x > 0, \quad U(\infty) = 0,$$

probleminin çözümü $U(x, \lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve

$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0 \text{ dir. } R(\lambda) = \frac{U'(0, \lambda)}{U(0, \lambda)} \text{ olsun. Bu durumda } \lambda < 0 \text{ olduğunda } R(\lambda) \text{ fonksiyonu}$$

nuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [13,14], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şartları verdiler. Ayrıca bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemler sürekli bir artış göstermiştir. Buna kanıt olarak 1967 yılında bir grup Amerikan fizik ve matematikçileri G. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura [15] ve P. Lax [16] tarafından bulunan bazı kısmi türevli lineer olmayan evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki

bağıntı gösterilebilir. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde fizikçi ve matematikçiler tarafından araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçesi detaylı bir şekilde L. D. Faddeev'in [17] çalışmasında verilmiştir.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [18], H. E. Moses [19] ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0, \infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasymov ve B. M. Levitan [20] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$B \frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \quad (1.9)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \quad (1.10)$$

$$(y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \quad H_1 \neq H) \quad (1.11)$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$, (1.9) denkleminin

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ fonksiyonu (1.9), (1.10) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x) \in L^2(0, \infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f^T(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = 0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty f^T(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (1.12)$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 1.4

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}$$

ve

$$F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} (1 - \cos \lambda x) / \lambda \\ -\sin \lambda x / \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \cos \lambda y) / \lambda - \frac{\sin \lambda y}{\lambda} \end{pmatrix} d\sigma(\lambda)$$

olmak üzere $y \leq x$ için $K(x, y)$ matris fonksiyonu

$$F(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, s) F(s, y) ds = 0 \quad (1.13)$$

integral denklemini sağlar.

Teorem 1.5 $\rho(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $g(x) \in L^2(0, \infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyonu ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x, \lambda) dx, \quad s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

- 2.

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}, \quad c(x, \lambda) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \lambda x) / \lambda \\ -\sin \lambda x / \lambda \end{pmatrix}$$

olacak biçimde

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^T(y, \lambda) d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci merteben sürekli $f''(x, y) \equiv F(x, y)$ türeve sahiptir.

Bu takdirde her sabit $x \geq 0$ için (1.13) integral denklemi her iki değişkene göre sürekli olan bir tek $K(x, y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 1.6 $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (1.9), (1.10) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerek ve yeterdir:

1. $g(x) \in L^2(0, \infty)$ keyfi sonlu vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x) s(x, \lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ dır.

- 2.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x, \lambda) c^T(y, \lambda) d\left(\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\right)$$

matris fonksiyonu, $F_{11}(x, 0) = F_{21}(x, 0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x, y) \equiv F(x, y)$ türeve sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasymov ve T. T. Dzhabiev [21] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teorem ispatlanmıştır:

Teorem 1.7 $p(x)$ ve $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve k . mertebeden türevleri $L^2(0, \pi)$ 'de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile (1.9), (1.10) ve (1.9), (1.11) problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının sıralı olması, yani

$$\dots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \dots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1} < \dots$$

2. $\alpha \neq \beta$, $0 \leq \beta$, $\alpha \leq \pi$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2$ ve $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_{n,k}|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Ayrıca $\{\mu_n\}$ normlaştırıcı sayıları için

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.14)$$

bağıntısının sağlandığını göstermiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar Levitan [7,22] tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine özgü bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotik formüllerinin bulunması ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular Keldysh [23], Courant [24], Birman, Solomyak [25], Maslov [26] ve birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır.

Singüler Sturm-Liouville operatörler ailesinden olan ve sıfır noktasında $\frac{l(l+1)}{x^2}$

şeklinde tekilliğe sahip operatörler için spektral fonksiyona göre ters problemi Stashevskaya [27,28], dönüşüm operatöründen faydalananak ise Volk [29] incelemiştir. Daha sonra iki spektruma göre ters problemi Gasymov [30,31] ve kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problemi Panakhov [32,33] ele almıştır. Ayrıca jeofizikte birçok uygulamaları olan Bessel operatörleri için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri Watson [34], Chadani, Sabatier [35], Carlson [36] ve birçok matematikçi tarafından ele alınmış ve çözülmüştür [37-45].

Özdeğer parametresine bağlı adi diferansiyel denklemler için sınır-değer problemleri ilk defa C.Sturm-J. Liouville tarafından 19. yüzyılın ilk yarısında matematiksel fizik alanında Fourier yöntemi ile ele alınmıştır. Yaklaşık 50 yıl sonra bu konuda ilk ciddi sonuçlar Birkhoff [46] tarafından bulunmuştur. Birkhoff, özdeğer parametresine bağlı adi diferansiyel denklemlerin temel çözüm sistemindeki çözümler için asimptotik eşitlikler elde etmiş, regüler sınır şartlarını tanımlamış ve bu regüler sınır değer probleminde özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teorem ispatlamıştır.

Walter [47], hem denklemde hem de sınır şartlarında özdeğer parametresi içeren ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin uygun Hilbert uzaylarında kendine eşlenik operatörle bağlantısını kurmuş ve bu şekildeki problemler için operatörün teorik yorumunu vermiştir. Bunlarla birlikte bu çalışmada Hilbert uzaylarında kendine eşlenik operatör teorisinden yararlanarak özfonksiyonlar için açılım teoremi ispatlanmıştır.

Ancak Schneider [48], sınır şartlarının bir tanesinde özdeğer parametresi içeren uygun problem için açılım teoremini farklı bir yöntemle, S-hermityen yöntemiyle araştırmıştır. Fakat Schneider bu çalışmasında açılım teoremini sadece düzgün fonksiyonlar için ispatlamıştır.

Fulton [49], çalışmalarında bu tipten problemlerin araştırılmasında Titchmarsh'ın klasik yöntemlerinin sınır şartlarında özdeğer parametresi içeren problemlere de uygulanabileceğini (özellikle özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüllerin bulunmasında) göstermiştir. Fulton bu çalışmasında klasik yöntemlerle Walter 'un operatör-teorik yöntemini birlikte gözönüne alarak yeni bir yöntem geliştirmiştir. Bu çalışmada özdeğer parametresinin sınır şartlarının sadece bir tanesinde lineer olarak bulunduğu durum için özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiği bulunmuş ve farklı açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Daha sonraki yıllarda bu konularla ilgili en önemli çalışmalar Hinton [50], Shkalikov [51], Zayed ve İbrahim [52], Kerimov ve Allahverdiev [53], Kerimov ve Memedov [54] ve Yakubov [55] tarafından yapılmıştır.

Aralığın bir iç noktasında çözümün kendisi veya türevi üzerinde süreksizlik içeren sınır değer problemleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır [56-70]. Çözümlerin sağ ve sol limitlerini içeren böyle koşullara geçiş koşulları denir. Böyle problemler süreksiz özellikler, örneğin ısı ve kütle transferi, nokta kütlelerle ayrıca yüklenen, ip titreşimi problemleri, dağılma(kırılma) problemleri ile ilgilidir [71-73] ve başka çeşitli fiziksel problemlerde ortaya çıkar [74]. Ayrıca, geçiş koşullu bazı problemler ince katmanlı levha (yani kalınlığında farklı özellikler yığılı materyaller ile oluşan levha) için termal ısı iletiminde ortaya çıkar. Levhadaki çözümle tabakanın eşleşen bölgesinde çözümün temel yapısının analizi, parçalı sürekli katsayılı ve geçiş koşullu ikinci-mertebeden diferensiyel operatörler için özdeğer probleminin gözönüne alınmasına olanak sağlar [75]. Bu tür problemler özel olarak genel durumdakinden farklıdır ve bunların araştırılması, değişkenlerine ayırma yöntemine dayalı özel bir yaklaşım gerektirir. Problemin özfonksiyonları genel olarak gözönüne alınan aralığın bir iç noktasında süreksizdir.

[76] ve [77] de süreksiz Dirac sistemleriyle ilgili sampling teoriler verilmiştir. [77] ve [78] çalışmalarında sınır koşullarının birinde özdeğer parametresi bulunan Dirac sistemi, [79,80] de ise aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip spektral teoremin düz ve ters problemleri incelenmiştir. [81] de ise, süreksizlik koşullarının birinde ve sınır koşullarının

her ikisinde de özdeğer parametresi bulunan Dirac operatörleri incelenmiş ve bu konu birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır [82-87].

Bu çalışmada $[-1,0) \cup (0,1]$ aralığında sınır koşullarında özdeğer parametre bulunan ve $x=0$ süreksizlik noktasındaki geçiş koşulları ile verilen regüler Dirac sisteminden oluşan problem gözönüne alınmıştır ve Tharwat'ın [76-77]'deki çalışmalarına göre, bu problem için özdeğerler ve özfonksiyonların asimptotik formülleri hesaplanmıştır.

Şimdi, $q(x)$ reel sürekli fonksiyon, h ve H reel sayılar olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (1.15)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (1.16)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (1.17)$$

problemi gözönüne alınsın. (1.15)-(1.17) şeklindeki bütün problemlerle aynı spektruma sahip olan problemlere, isospektral problem denir.

Skaler Sturm-Liouville denklemleri için isospektral problemler birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. İlk olarak bu problem Borg [2], Trubowitz [88-90] ve Pöschel-Trubowitz [91] tarafından incelenmiştir. Daha sonra Jodeit ve Levitan [92], dönüşüm operatörü ve Gelfand-Levitan integral denklemine dayalı yeni bir yöntemle bu problemi ele almışlardır. Ayrıca, Jodeit, Levitan ve Chern [93], gözönüne alınan problemleri hem aynı spektrumlu hem de özfonksiyonları aynı başlangıç koşullu (sınır koşullu) alarak potansiyellerin bazı isospektral kümelerini kurmuşlardır. Vektörel durumda Sturm-Liouville denklemi için isospektral problem ise, [94-96]'da çalışılmıştır.

Difüzyon operatörü için ilk kez gerekli altyapıyı oluşturan ve bu problem için ters problemi ele alan Jaulent ve Jean olmuştur [97].

Gasymov ve Guseinov, iki türlü ters problemi (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılara göre ters problem ve iki spektruma göre ters problemi) spektral parametre üzerinde ikinci dereceden bağımlılık olarak aşağıdaki Sturm-Liouville özdeğer problemi olarak gözönüne almıştır [98]:

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q(x))y = \lambda^2 y, \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (1.18)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (1.19)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (1.20)$$

Burada $q(x), p(x)$ reel-değerli fonksiyonlar, h ve H reel sayılar ve λ spektral parametredir. (1.18) denklemi için dönüşüm operatörlerinin çekirdekleri mevcut olduğundan bu

denklem sonlu veya sonsuz aralıkta ters problem olarak araştırılabilir [99,100]. (1.18) denklemini genel kullanım formülasyonlarında tek olarak çözülür. Şöyle ki; $q(x)$, $p(x)$ fonksiyonları spektral ölçüme göre (özellikle özdeğerler ve normlaştırıcı sayılara göre) veya iki spektruma göre tek olarak tanımlanır.

Nabiev [101], difüzyon operatörü için hemen hemen periyodik ters problemi incelemiştir. Weyl fonksiyonunu kullanarak Buterin ve Yurko [102], ters spektral problemi sınır değer problemi olarak gözönüne almıştır. Koyunbakan ve Panakhov [103], $[0, \pi]$ sonlu aralığında difüzyon operatörü için yarı ters problemi araştırmışlardır. Koyunbakan [104] ve Yang [105] difüzyon operatörü için nodal problemi incelemiştir. Sat ve Panakhov [106], bu denklem için sonlu aralıkta Levitan yöntemini kullanarak çekirdeklerin genel dejenereliğini elde etmiştir. Daha sonra Guseinov [107], difüzyon operatörü için ters problemi sonlu aralıkta gözönüne almış ve dönüşüm operatörlerinin çekirdekleri için önemli formüller vermiştir.

Bu çalışmada Bessel diferansiyel denklemi, difüzyon operatörü ve daha sonra Dirac sistemi için aynı spektruma sahip (isospektral) iki problem gözönüne alınmıştır. Bu problemler için Gelfand-Levitan integral denkleminde faydalanılarak özel formüller bulunmuş ve Levitan yönteminden farklı olarak genel durumda çekirdeklerin genel dejenereliği gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

2.1. Diferansiyel Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar

Bu bölümde, sunulan tezde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzak)

X bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

$$M1) d(x, y) \geq 0,$$

$$M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$M3) d(x, y) = d(y, x),$$

$$M4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

şeklindeir. (X, d) ikilisine ise bir metrik uzak denir. Bir uzak üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir [108].

Tanım 2.1.2 (Tam Uzak)

Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzak denir. $l_\infty, c, C[a, b], \mathbb{R}^n$ gibi uzaylar tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir [109].

Tanım 2.1.3 (Normlu Uzak)

X bir lineer uzak olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzak denir. Bu şartlar

$\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0,$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$N3) \|kx\| = |k| \|x\|, k \text{ skalerdir},$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

şeklindeir [109].

Tanım 2.1.4 (Hilbert Uzakı)

$K, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzakı olsun. $\langle, \rangle: X \times X \rightarrow K$ dönüşümü

aşağıdaki özelliklere sahipse $\langle, \rangle$ 'ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle, \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

- 1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- 2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,$
- 3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$
- 4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, x, y, z \in X.$

Ayrıca,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

metriğine göre tam iç çarpım uzayına ise Hilbert uzayı denir [108].

Tanım 2.1.5 ($L_2[a, b]$ Uzayı)

$a \leq t \leq b$ olmak üzere $(L_2[a, b])$ uzayı,

$$(L_2[a, b]) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ dir) [108].

Tanım 2.1.6 (Sınır Şartları)

Sınırlı bir D bölgesinde fiziksel bir olayın matematiksel davranışı kontrol etmek isteniyorsa, D bölgesinin sınırında, genellikle bağımlı değişkene bağlı bazı şartlar yüklenmesi gerekir. Verilen bu sınır değerlerine diferensiyel denklem için sınır şartları denir. Sınır şartları 3'e ayrılır [110].

1) Dirichlet Sınır Şartı: Bu durumda u fonksiyonu sınırlı bir D bölgesinin sınırı üzerinde tanımlıdır. $D = (0, L)$ bölgesinde Dirichlet sınır şartları; $u(0) = \alpha, u(L) = \beta$ şeklinde tanımlanır. Burada α, β sabittir. Bir dikdörtgensel bölgede $0 < x < L_1, 0 < y < L_2$ olmak üzere Dirichlet sınır şartları; $u(0, y), u(L_1, y), u(x, 0)$ ve $u(x, L_2)$ olarak verilir. Eğer bağımlı değişken u , sınırın herhangi bir noktasında sıfır ise bu sınır şartına homojen sınır şartı, aksi takdirde homojen olmayan sınır şartı denir.

2) Neumann Sınır Şartı: Bir L uzunluğu için Neumann sınır şartları

$$u_x(0, t) = \alpha, u_x(L, t) = \beta$$

olarak tanımlanır.

3) Karışık (Robin) Sınır Şartı: Bu durumda u bağımlı değişkenin bir lineer kombinasyonu ve $\frac{du}{dn}$ normal türevi sınır üzerinde tanımlıdır. Eğer $u(0, y) + u_x(0, y)$ veya $u(L_1, y) + u_x(L_1, y)$ gibi şartlar varsa bu sınır şartları karışık(Robin) sınır şartlarıdır.

Tanım 2.1.7 (Başlangıç Şartları)

Difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi kısmi diferensiyel denklemlerin çoğu zamana bağlıdır. Başlangıç zamanı olan $t=0$ anında bağımlı değişkenin başlangıç değerleri verilmelidir. Birinci mertebeden bir diferensiyel denklemde başlangıç şartı $u(x, 0)$, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemde başlangıç şartı ise $u(x, 0)$ ve $u_t(x, 0)$ şeklindedir [110].

Tanım 2.1.8 (Operatör)

Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [111].

Tanım 2.1.9 (Lineer Operatör)

E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y 'de bulunan ve E_x de tanımlı $y = Ax$ operatörü göz önüne alınsın. A operatörü için

- 1) $x_1, x_2 \in E_x$ olmak üzere $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$,
- 2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x \in E_x$ için $A(\lambda x) = \lambda A(x)$,

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [111].

Tanım 2.1.10 (Sınırlı Operatör)

X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [111].

Tanım 2.1.11 (Süreklili Operatör)

X ve Y normlu uzaylar, L bir operatör, $x_0 \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|Lx - Lx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $x_0 \in X$ noktasında L operatörü süreklidir denir [111].

Tanım 2.1.12 (Adjoint Operatör)

H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer

$L^* : H_1 \rightarrow H_2$ operatörü

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L 'nin adjointi denir. Eğer $L^* = L$ ise L 'ye self-adjoint operatör denir [111].

Tanım 2.1.13 (Simetrik Operatör)

H Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer operatörü verilsin.

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle,$$

eşitliği her $x, y \in D(A)$ için sağlanıyorsa, A operatörüne simetrik operatör denir. Simetrik operatörlerin bütün özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere uygun özfonksiyonları ortogonaldır [112].

Tanım 2.1.14 (Dönüşüm Operatörü)

E Hilbert lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \rightarrow E$, $B : E \rightarrow E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

- i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,
- ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır.

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [113].

Tanım 2.1.15 (Spektrum)

$L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ 'lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [114].

Tanım 2.1.16 (Rezolvent Operatörü)

Herhangi λ için $L - \lambda I$ operatörü tersi mevcut olacak şekilde $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne

$$Lx - \lambda x = y \text{ veya } (L - \lambda I)x = y$$

denkleminin rezolvent operatörü denir [114].

Tanım 2.1.17 (Özdeğer, Özfonksiyon)

L sınırlı lineer bir operatör olsun. L operatörünün tanım kümesinde

$$Ly = \lambda y,$$

olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y

fonksiyonuna ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir [113].

Tanım 2.1.18 (Özdeğer, Özvektör Fonksiyonu)

$D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x, \lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [113].

Tanım 2.1.19 (Sturm-Liouville Operatörü)

$p(x)$, $q(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denklemi

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda w(x)y, \quad (2.1.1)$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferensiyel denklemdir. $w(x)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu veya yoğunluk fonksiyonu denir. Sınır şartlarını sağlayan yukarıdaki denklemin aşikar olmayan çözümleri için λ değerlerini bulmak, Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan problemin bir parçasıdır.

(2.1.1) denkleminde $w(x) = 1$ alınırsa

$$Lu = \lambda u,$$

özdeğer problemi elde edilir.

Uygulamalarda sık sık kullanılan en temel operatörlerden birisi de $q(x)$ reel değerli ve $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

formundaki Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatör için $y(x)$ çözüm fonksiyonları cümlesi diferensiyellenebilir ve $[a, b]$ aralığının uç noktalarında verilmiş şartlarla belirlenir. L operatörü için sık kullanılan sınır şartlardan biri

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0, \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0, \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$Ly \equiv -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \quad (2.1.2)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0, \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

sınır şartlarını gözönüne alalım. (2.1.2)-(2.1.3) sınır değer problemine Sturm-Liouville problemi denir. (2.1.3) sınır şartını $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y(a) \cot \alpha + y'(a) &= 0, \\ y(b) \cot \beta + y'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

biçiminde de yazabiliriz. (2.1.4)'de $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ alınırsa

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0, \\ y'(b) + Hy(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

sınır şartları elde edilir. Eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli fonksiyon; H ve h sayıları da sonlu ise (2.1.2)-(2.1.5) problemine regüler Sturm-Liouville problemi, bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir [113].

Tanım 2.1.20 (Analitik Fonksiyon)

$f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının herhangi bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [115].

Tanım 2.1.21 (Tam Fonksiyon)

$f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'ye tam fonksiyon denir. e^z , $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır [115].

Tanım 2.1.22 (Normlaştırmacı Sayılar)

$$ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \quad (2.1.6)$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,$$

Sturm-Liouville sınır değer problemini gözönüne alalım. Burada λ spektral parametre, h ve H reel sayılar, $q(x) \in L_2(0, \pi)$ dir. $\varphi(x, \lambda)$ ise

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h,$$

başlangıç şartlarını sağlayan (2.1.6) denkleminin çözüm fonksiyonu olsun. $\varphi_n = \varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları için

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx,$$

eşitliği ile tanımlı α_n sayılarına normlaştırıcı sayılar denir [116].

Teorem 2.1.1 (Rouche Teoremi)

f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan ve sonlu sayıda kutup yerleri dışında analitik olan fonksiyonlar ve γ , B bölgesinde bulunan f ve g nin hiçbir sıfır ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. Eğer γ üzerinde $|f(z) - g(z)| \leq |f(z)|$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ eşitliği geçerlidir. Burada Z_f ve Z_g , $f(z)$ ve $g(z)$ 'nin γ 'nın sınırlandığı bölge içindeki sıfırlarının sayısını; P_f ve P_g ise $f(z)$ ve $g(z)$ 'nin γ 'nın sınırlandığı bölge içindeki kutuplarının sayısını göstermektedir. Eğer f ve g , B içindeki analitik fonksiyonlarsa $Z_f = Z_g$ [117].

Tanım 2.1.23 (Tam Fonksiyonun Mertebesi)

$f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r 'ler için

$$M(r) < \exp(r^\mu) \quad (2.1.7)$$

eşitsizliği sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$ 'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir [117].

Tanım 2.1.24 (Tam Fonksiyonun Türü)

$f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r 'ler için

$$M(r) < \exp(ar^\rho)$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir. (2.1.7) eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir [117].

Tanım 2.1.25 (Volterra İntegral Denklemi)

$K(x, y)$ karesel bir bölgede tanımlı sürekli bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) \phi(y) dy$$

integral denkleminde $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyonuna göre ikinci tür Volterra integral denkleminin denir [118].

Tanım 2.1.26 (O ve o sembolleri)

$x \in X$ olduğunda verilen x 'ler için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa

$f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $x \rightarrow x_0$ iken $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır [119,120].

Tanım 2.1.27 (Noktasal Yakınsaklık)

(f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada her bir $x \in A$ için bir n_0 bulunacağından n_0 sayısı hem ε 'a hem de x noktasına bağlıdır [121].

Tanım 2.1.28 (Düzgün Yakınsaklık)

(f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir [121].

Tanım 2.1.29 (Parseval Eşitliği)

$f(x), g(x) \in L_2(a, b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u) g(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \left(\int_a^b f(u) \phi(u, \lambda_n) du \right) \left(\int_a^b g(u) \phi(u, \lambda_n) du \right)$$

dir [122].

Tanım 2.1.30 (Genel Dejenerelik)

Eğer

$$K(x, s) = \sum_{n=0}^N f_n(x) g_n(s), \quad s \leq x$$

ise $K(x, s)$ çekirdeği genel dejeneredir denir [122].

Teorem 2.1.2 (Levitan)

$\{\lambda_n\}_0^\infty$ ve $\{\lambda'_n\}_0^\infty$ spektrumları çakışsın. $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ ve $\{\tilde{\lambda}'_n\}_0^\infty$ spektrumları ise sonlu $n=0,1,\dots,N$ için $\tilde{\lambda}_n \neq \tilde{\lambda}'_n$ ve $n > N$ için $\tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda}'_n$ olsun. Bu takdirde ters problemin temel integral denklemi

$$K(x,s) + F(x,s) + \int_0^x K(x,t)F(t,s)ds = 0, \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

genel dejeneredir [122].

Tanım 2.1.31 (Sobolev Uzayı)

(a,b) aralığında tanımlı, $(k-1)$. mertebeden türevleri mutlak sürekli olan ve $f, f'', f''', \dots, f^{(k)} \in L_2(a,b)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a,b)$ ile gösterilir [123].

Tanım 2.1.32 (Dirac-Delta Fonksiyonu)

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a_0 \\ 0, & t \geq t_0 + a \end{cases}$$

olmak üzere

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t-t_0)$$

fonksiyonuna Dirac-Delta fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

$$1) \quad \delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases},$$

$$2) \quad \int_0^\infty \delta(t-t_0) dt = 1,$$

3) Herhangi sürekli bir $G(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \delta(t-a) G(t) dt = G(a)$$

özellikleri ile karakterize edilir [124].

Tanım 2.1.33 (Hankel Dönüşümü)

$f(r)$ fonksiyonunun ν -inci mertebeden Hankel dönüşümü

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(r) J_\nu(kr) dr,$$

şeklindedir. Burada J_ν , ν -inci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur $\left(\nu > -\frac{1}{2}\right)$

[125].

Teorem 2.1.3 (Birinci Fubini Teoremi)

$B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ve $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu taktirde

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

şeklindedir [121].

Teorem 2.1.4 (İkinci Fubini Teoremi)

$\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ ve

$B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ olsun. $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli veya parçalı sürekli ise

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

şeklindedir [121].

3. DİRAC OPERATÖRÜ

3.1 Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x), (i, k = 1, 2), [0, \pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$L = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x) = p_{21}(x) \quad (3.1.1)$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli vektör fonksiyonu

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$\left(B \frac{d}{dx} + L(x) - \lambda I \right) y = 0, \quad (3.1.2)$$

denklemini, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 &= \lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx} + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 &= \lambda y_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)$ – potansiyel fonksiyon, m – parçacığın kütlesi olacak biçimde

$$p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0 \text{ ve } p_{11}(x) = V(x) + m, \quad p_{22}(x) = V(x) - m \quad (3.1.4)$$

olurken relativistik kuantum teorisinde (3.1.2) sistemi 1-boyutlu stasyonere Dirac sistemi olarak bilinmektedir [113].

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z, \quad (3.1.5)$$

denklem sistemine Dirac denkleminin **I. kanonik formu** denir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z, \quad (3.1.6)$$

denklem sistemine ise Dirac denkleminin **II. kanonik formu** denir. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerine (3.1.2) sisteminin kanonik formları da denir. (3.1.2) denklem sisteminin spektral teorisinin çeşitli sorunlarını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfî vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında

homojen sınır şartları sağlandığında) (3.1.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken (3.1.5) kanonik denkleminde faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (3.1.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (3.1.6) kanonik denkleminde faydalanmak kolaylık sağlar.

(3.1.5) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2' + \{p(x) - \lambda\}y_1 = 0, \quad y_1' - \{r(x) - \lambda\}y_2 = 0, \quad (3.1.7)$$

$$y_2(0) \cos \alpha + y_1(0) \sin \alpha = 0, \quad (3.1.8)$$

$$y_2(\pi) \cos \beta + y_1(\pi) \sin \beta = 0, \quad (3.1.9)$$

sınır problemi gözönüne alınsın. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı

çözümü $y(x, \lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda_1) \\ y_2(x, \lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1 'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ 'e de özvektör fonksiyonu denir [122].

Lemma 3.1.1 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $z(x, \lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldır, yani,

$$\int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1)z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1)z_2(x, \lambda_2)\}dx = 0$$

dir [122].

İspat: $y(x, \lambda_1)$ ve $z(x, \lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (3.1.7) sisteminin çözümleri olduğundan,

$$y_2'(x, \lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\}y_1(x, \lambda_1) = 0$$

$$y_1'(x, \lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\}y_2(x, \lambda_1) = 0$$

$$z_2'(x, \lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\}z_1(x, \lambda_2) = 0$$

$$z_1'(x, \lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\}z_2(x, \lambda_2) = 0$$

dir. Bu denklemler sırası ile $z_1(x, \lambda_2)$, $-z_2(x, \lambda_2)$, $-y_1(x, \lambda_1)$ ve $y_2(x, \lambda_1)$ ile çarpılıp ve daha sonra sonuçlar toplanırsa,

$$\frac{d}{dx} \{y_1(x, \lambda_1)z_2(x, \lambda_2) - y_2(x, \lambda_1)z_1(x, \lambda_2)\} = (\lambda_1 - \lambda_2) \{y_1(x, \lambda_1)z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1)z_2(x, \lambda_2)\},$$

elde edilir. Bu son eşitlik x 'e göre 0'dan π 'ye integrallenirse

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1)z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1)z_2(x, \lambda_2)\}dx$$

$$= \{y_1(x, \lambda_1)z_2(x, \lambda_2) - y_2(x, \lambda_1)z_1(x, \lambda_2)\} \Big|_0^\pi,$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1)z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1)z_2(x, \lambda_2)\} dx = 0$$

veya

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y^T(x, \lambda_1)z(x, \lambda_2) dx = 0,$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, $y(x, \lambda_1)$ ve $z(x, \lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonal olurlar. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.2 (3.1.7)-(3.1.9) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir [122].

İspat: Aksini varsayalım yani, $\lambda_1 = u + iv$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel fonksiyonlar ve α, β sayıları reel olduğu için Dirac operatörünün genel denkleminde eşleniği alınırsa, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = u - iv$ sayısı da bir özdeğerdir. λ_2 ye karşılık gelen $\bar{y}(x, \lambda_1)$ özvektör fonksiyonudur. Bu takdirde Lemma 3.1.1'den dolayı

$$(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1) \int_0^\pi \{y_1(x, \lambda_1)\bar{y}_1(x, \lambda_1) + y_2(x, \lambda_1)\bar{y}_2(x, \lambda_1)\} dx = 0$$

ve

$$(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1) \int_0^\pi \left\{ |y_1(x, \lambda_1)|^2 + |y_2(x, \lambda_1)|^2 \right\} dx = 0,$$

olur. $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$ olduğundan, $y_1(x, \lambda_1)$ ve $y_2(x, \lambda_1)$ sıfır olur ki, bu da özvektör fonksiyonlarının sıfır olmaması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz. Bu da ispatı tamamlar.

3.2 Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

A_1 ve A_2 iki lineer diferansiyel operatör, E_1 ve E_2 ise iki lineer fonksiyonel uzay olsun.

Tanım 3.2.1 $X : E_1 \rightarrow E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

$$1. A_1 X = X A_2, \tag{3.2.1}$$

$$2. X^{-1} \text{ mevcut ve sürekli,}$$

ise X 'e A_1 ve A_2 operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [113].

Lemma 3.2.1 λ özdeğerine karşılık gelen A_2 operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda \in E_1$, yani

$$A_2 \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda,$$

olmak üzere aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda = X \varphi_\lambda$, A_1 operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$A_1 \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$$

şeklindedir [113].

İspat. $A_1 X = X A_2$ olduğundan

$$A_1 \psi_\lambda = A_1 X \varphi_\lambda = X A_2 \varphi_\lambda = X \lambda \varphi_\lambda = \lambda X \varphi_\lambda = \lambda \psi_\lambda,$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2.2 Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatör çifti için X_{A_1, A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1, A_2} : E_2 \rightarrow E_3$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2, A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2, A_3} : E_1 \rightarrow E_2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, A_1 ve A_3 operatör çifti için X_{A_1, A_3} dönüşüm operatörü,

$$X_{A_1, A_3} : E_1 \rightarrow E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1, A_3} = X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3},$$

formülü ile ifade edilir [113].

İspat. Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1 X_{A_1, A_2} = X_{A_1, A_2} A_2,$$

$$A_2 X_{A_2, A_3} = X_{A_2, A_3} A_3,$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2, A_3} A_3 X_{A_2, A_3}^{-1}$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemde yerine yazılırsa

$$A_1 X_{A_1, A_2} = X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3} A_3 X_{A_2, A_3}^{-1},$$

veya

$$A_1 X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3} = X_{A_1, A_2} X_{A_2, A_3} A_3,$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, ($i=1,2$), her sonlu aralıkta ($0 \leq x \leq b < \infty$) integrallenebilir reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$A_1 = \begin{pmatrix} p_1(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix} = B \frac{d}{dx} + Q_1(x), \quad (3.2.2)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} p_2(x) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix} = B \frac{d}{dx} + Q_2(x), \quad (3.2.3)$$

operatörleri göz önüne alınsın. Keyfi sonlu reel h_1 sayısı için

$$f_2(0) - h_1 f_1(0) = 0, \quad (3.2.4)$$

sınır şartını sağlayan $[0, b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0) - h_2 g_1(0) = 0, \quad (3.2.5)$$

sınır şartını sağlayan $[0, b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferansiyellenebilen

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi $f(x) \in E_1$ için

$$X \{f(x)\} = R(x)f(x) + \int_0^x K(x,s)f(s)ds, \quad (3.2.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu veya 2×2 tipinde kare matrislerdir.

(3.2.2) ve (3.2.6)'dan,

$$\begin{aligned} A_1 X \{f(x)\} &= BR'(x)f(x) + BR(x)f'(x) + Q_1(x)R(x)f(x) + BK(x,x)f(x) \\ &\quad + \int_0^x \{BK'_x(x,s) + Q_1(x)K(x,s)\}f(s)ds, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

dir. Diğer taraftan (3.2.3) ve (3.2.6) dan dolayı

$$XA_2 \{f(x)\} = R(x)Bf'(x) + R(x)Q_2(x)f(x) + \int_0^x K(x,s) \{Bf'(s) + Q_2(s)f(s)\} ds,$$

dir. Son eşitlikte kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} XA_2 \{f(x)\} &= R(x)Bf'(x) + R(x)Q_2(x)f(x) + K(x,x)Bf(x) - K(x,0)Bf(0) \\ &\quad + \int_0^x \{K(x,s)Q_2(s) - K'_s(x,s)B\} f(s)ds, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

elde edilir. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör fonksiyonu olduğu için (3.2.1) eşitliğinden dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (3.2.7), (3.2.8)'in integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$ lerin katsayıları için

$$BR(x) = R(x)B, \quad (3.2.9)$$

elde edilir. Eğer

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix},$$

şeklinde alınırsa (3.2.9) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

olduğundan

$$\delta(x) = \alpha(x), \quad \gamma(x) = -\beta(x),$$

bulunur, yani $R(x)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}, \quad (3.2.10)$$

olur.

Şimdi $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları hesaplınsın. Bunun için (3.2.7) ve (3.2.8) de, $f(x)$ in katsayıları eşitlenirse $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$BR'(x) + Q_1(x)R(x) - R(x)Q_2(x) = K(x,x)B - BK(x,x), \quad (3.2.11)$$

$$K(x,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix},$$

olmak üzere $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanarak (3.2.11) denklemini

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x) \\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -K_{12}(x,x) & K_{11}(x,x) \\ -K_{22}(x,x) & K_{21}(x,x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x) \\ -K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) + [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) & \alpha'(x) + [p_1(x) - r_2(x)]\beta(x) \\ -\alpha'(x) + [p_2(x) - r_1(x)]\beta(x) & -\beta'(x) + [r_1(x) - r_2(x)]\alpha(x) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -[K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x)] & K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x) \end{pmatrix}, \quad (3.2.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple (3.2.12) denklemlerinden

$$\alpha'(x) + [p_1(x) - r_2(x)]\beta(x) = -\alpha'(x) + [p_2(x) - r_1(x)]\beta(x),$$

$$\beta'(x) - [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) = -\beta'(x) + [r_1(x) - r_2(x)]\alpha(x),$$

bulunur, yani

$$\begin{aligned} 2\alpha'(x) + q(x)\beta(x) &= 0, \\ -2\beta'(x) + q(x)\alpha(x) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

olur. Burada

$$q(x) = p_1(x) - p_2(x) + r_1(x) - r_2(x), \quad (3.2.14)$$

şeklinde (3.2.13) sisteminde bulunan birinci eşitliği $\alpha(x)$ ile ikinci eşitliği de $\beta(x)$ ile çarpıp, birinciden ikinci çıkarılırsa

$$2\alpha(x)\alpha'(x) + 2\beta(x)\beta'(x) = 0,$$

yani

$$(\alpha^2(x) + \beta^2(x))' = 0,$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^2(x) + \beta^2(x) = \alpha^2(0) + \beta^2(0), \quad (3.2.15)$$

bulunur.

$$f_1(0) = 1, \quad f_2(0) = h_1, \quad (3.2.16)$$

şartları sağlanmak üzere $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferansiyellenebilir

olsun. Bu takdirde $f(x)$ in (3.2.4) sınır şartını sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x) \in E_1$

dir. Yine kabul edilsin ki, $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı,

dolayısıyla (3.2.5) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X\{f(x)\} = g(x), \quad (3.2.17)$$

olsun. Bu takdirde $x=0$ için (3.2.17) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (3.2.6) ve (3.2.10) bağıntılarına göre

$$X\{f(0)\} = g(0) = R(0)f(0)$$

veya

$$\begin{aligned} g_1(0) &= \alpha(0)f_1(0) + \beta(0)f_2(0), \\ g_2(0) &= -\beta(0)f_1(0) + \alpha(0)f_2(0), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden (3.2.5) sınır şartı ve (3.2.16) şartları göz önüne alınmak üzere son eşitliklerin birincisi h_2 sayısı ile çarpılıp, daha sonra ikinciden çıkarıldığında,

$$\beta(0) = \frac{h_1 - h_2}{1 + h_1 h_2} \alpha(0),$$

elde edilir.

$$\alpha(0) = 1, \quad (3.2.18)$$

alınırsa,

$$\beta(0) = \frac{h_1 - h_2}{1 + h_1 h_2}, \quad (3.2.19)$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0) + \beta^2(0) = \frac{(1 + h_1^2)(1 + h_2^2)}{(1 + h_1 h_2)^2} = \chi^2, \quad (3.2.20)$$

olur. Şimdi (3.2.15), (3.2.18)-(3.2.20) eşitliklerinden faydalanılarak (3.2.13) sistemi çözül-sün. Eğer,

$$\alpha(x) = \chi \sin k(x) \text{ ve } \beta(x) = \chi \cos k(x), \quad (3.2.20')$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x) = k'(x)\chi \cos k(x) \text{ ve } \beta'(x) = -k'(x)\chi \sin k(x),$$

bulunur. Bu değerler (3.2.13) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x q(z) dz + \arcsin \frac{1}{\chi},$$

eşitliği elde edilir. Bu değerler (3.2.20') de yerine yazılırsa, $q(x)$ fonksiyonu (3.2.14) formülü, χ sayısı ise (3.2.20) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha(x) = \chi \sin \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x q(z) dz + \arcsin \frac{1}{\chi} \right\}, \quad (3.2.21)$$

$$\beta(x) = \chi \cos \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x q(z) dz + \arcsin \frac{1}{\chi} \right\}, \quad (3.2.22)$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (3.2.7) ve (3.2.8) de integral altındaki ifadeler eşitlenirse, $K(x, s)$ matris çekirdeği için,

$$K'_s(x, s)B + BK'_x(x, s) = K(x, s)Q_2(s) - Q_1(x)K(x, s), \quad (3.2.23)$$

matris denklemi veya

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(s) & 0 \\ 0 & r_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(x, s) & K_{12}(x, s) \\ K_{21}(x, s) & K_{22}(x, s) \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x, s) & (r_2(s) - p_1(x))K_{12}(x, s) \\ (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x, s) & (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x, s) \end{pmatrix}, \\ & \left. \begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x, s), \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= (r_2(s) - p_1(x))K_{12}(x, s), \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= (p_2(s) - r_1(x))K_{21}(x, s), \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= (r_2(s) - r_1(x))K_{22}(x, s), \end{aligned} \right\} \quad (3.2.23') \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Sonuç olarak (3.2.8) ifadesinde $f(0)$ 'ı içeren terim ((3.2.7)'de

benzer terim olmadığı için) sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x, 0)Bf(0) = 0,$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x, 0) & K_{11}(x, 0) \\ -K_{22}(x, 0) & K_{21}(x, 0) \end{pmatrix} f(0) = 0,$$

bu ise

$$K_{12}(x, 0)f_1(0) = K_{11}(x, 0)f_2(0),$$

$$K_{22}(x, 0)f_1(0) = K_{21}(x, 0)f_2(0),$$

denklem sistemine eşdeğerdir. (3.2.4) sınır şartından dolayı

$$K_{12}(x, 0) = h_1 K_{11}(x, 0), \quad K_{22}(x, 0) = h_1 K_{21}(x, 0) \quad (3.2.24)$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x, 0) = \varphi(x), \quad K_{21}(x, 0) = \psi(x) \quad (3.2.25)$$

ele alınırsa (3.2.24) ve (3.2.25) şartları, $K(x, s)$ matris çekirdeği için

$$K(x, s)|_{s=0} = \begin{pmatrix} \varphi(x) & h_1 \varphi(x) \\ \psi(x) & h_1 \psi(x) \end{pmatrix}, \quad (3.2.26)$$

fonksiyonunu tanımlar. Burada (3.2.26), (3.2.23) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemi tanımlar ve bu problem çözülebilirdir [126].

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$A_1 = \begin{pmatrix} p_1(x) & \frac{d}{dx} + q_1(x) \\ -\frac{d}{dx} + q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} = B \frac{d}{dx} + Q_1(x),$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} p_2(x) & \frac{d}{dx} + q_2(x) \\ -\frac{d}{dx} + q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_2(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -p_2(x) \end{pmatrix} = B \frac{d}{dx} + Q_2(x),$$

olmak üzere (3.2.11) denklemi

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) - q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x) + q_1(x)\alpha(x) \\ q_1(x)\alpha(x) + p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x) + p_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) + q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x) - p_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x) - p_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} -K_{12}(x,x) & K_{11}(x,x) \\ -K_{22}(x,x) & K_{21}(x,x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}(x,x) & K_{22}(x,x) \\ -K_{11}(x,x) & -K_{12}(x,x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -\beta'(x) + (p_1 - p_2)\alpha(x) - (q_1 + q_2)\beta(x) & \alpha'(x) + (q_1 - q_2)\alpha(x) + (p_1 + p_2)\beta(x) \\ -\alpha'(x) + (q_1 - q_2)\alpha(x) + (p_1 + p_2)\beta(x) & -\beta'(x) + (p_2 - p_1)\alpha(x) + (q_1 + q_2)\beta(x) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} -[K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x)] & K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x) + K_{21}(x,x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
& \alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x) \\
& = -\alpha'(x) + [q_1(x) - q_2(x)]\alpha(x) + [p_1(x) + p_2(x)]\beta(x), \\
& \beta'(x) - [p_1(x) - p_2(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x) \\
& = -\beta'(x) + [p_2(x) - p_1(x)]\alpha(x) + [q_1(x) + q_2(x)]\beta(x),
\end{aligned}$$

bulunur, yani

$$2\alpha'(x) = 0, \quad 2\beta'(x) = 0,$$

dır. Burada c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$\alpha(x) = c_1$, $\beta(x) = c_2$ bulunur. Ayrıca (3.2.23) denkleminde

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

veya

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= (p_2(s) - p_1(x))K_{11}(x, s) + q_2(s)K_{12}(x, s) - q_1(x)K_{21}(x, s), \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s} + \frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s)K_{11}(x, s) - (p_1(x) + p_2(s))K_{12}(x, s) - q_1(x)K_{22}(x, s), \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s} - \frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{11}(x, s) + (p_1(x) + p_2(s))K_{21}(x, s) + q_2(x)K_{22}(x, s), \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} - \frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{12}(x, s) + q_2(s)K_{21}(x, s) + (p_1(x) - p_2(s))K_{22}(x, s), \end{aligned} \right\} \quad (3.2.27)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada (3.2.26), (3.2.27) sistemi ile birlikte bir Cauchy problemi tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

4. BESSEL OPERATÖRÜ

4.1 Bessel Diferensiyel Denklemini, Temel Özellikleri

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (4.1.1)$$

diferensiyel denkleminin

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \theta, \quad (4.1.2)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. Burada $q(x)$ fonksiyonu her sonlu aralıkta toplanabilir, θ ise keyfi reel sayı olsun. $\theta = \infty$ için başlangıç koşulu

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (4.1.3)$$

şeklinde olur.

Diferensiyel operatörlerin spektral teorisinden bilindiği gibi spektral fonksiyon olarak bilinen her sonlu aralıkta azalmayan sınırlı $\rho(\lambda)$ fonksiyonu vardır ve her $f(x) \in L^2(0, \infty)$ için

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (4.1.4)$$

açılımı sağlanır [127,128]. Burada

$$E_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \varphi(x, \lambda) dx, \quad (4.1.5)$$

şeklinde. (4.1.4) ve (4.1.5)'deki integraller $L^2_p(-\infty, \infty)$ ve $L^2(0, \infty)$ uzaylarında tanımlı metrik anlamında yakınsaktırlar. Bu durumda

$$\int_0^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_f^2(\lambda) d\rho(\lambda),$$

Parseval eşitliği sağlanır. Bunlara karşılık gelen $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonun tek olup olmadığı, diferensiyel operatörün çözümlerinin birinin veya her ikisinin $L^2(0, \infty)$ uzayından olmasıyla ilgilidir.

Spektral fonksiyonun diferensiyel operatörü birebir tanımladığını Marchenko [10,129] göstermiştir. Spektral fonksiyona göre diferensiyel operatörlerin tanımlanmasını Gelfand-Levitan [130] ve Krein [131,132] incelemiştir. Bu tür problemlere spektral analizin ters problemleri denir.

İkinci mertebeden değişken katsayılı diferensiyel denklemler arasında Bessel

diferensiyel denkleminin önemli bir yeri vardır. Matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinin çalışma alanına giren birçok problemin çözümünde bu denklem ve denklemin çözümü olan fonksiyonlarla sık karşılaşılır.

ν herhangi parametre olmak üzere

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (4.1.6)$$

şeklinde verilen denkleme ν -inci mertebeden Bessel diferensiyel denklemi denir. Bu şekildeki denklemin çözümü, ikinci mertebeden değişken katsayılı denklemlerin çözümü için kullanılan Frobeniüs metodu ile çözülür ve bu çözüm

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}, \quad (4.1.7)$$

şeklinde dir. Bu şekildeki $J_\nu(x)$ çözümüne birinci tür Bessel fonksiyonu, bu çözümün lineer bağımsız olan

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu x)},$$

çözümüne ise ikinci tür Bessel fonksiyonu denir. Bu durumda (4.1.6) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x),$$

olur. Bu çözüm ν 'nın tamsayı olması halinde elde edilir. Eğer ν bir tamsayı değilse

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x),$$

olur.

$$xz'' + z' + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) z = 0, \quad (4.1.8)$$

şeklinde verilen Bessel diferensiyel denklemi gözönüne alınsın. Bu denklemde $y = \sqrt{x}z$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} x^{-1/2} z + \sqrt{x} z', \\ y'' &= -\frac{1}{4} x^{-3/2} z + x^{-1/2} z' + x^{1/2} z'', \end{aligned}$$

olup buradan

$$z' = \frac{y' - \frac{1}{2} x^{-1/2} z}{x^{1/2}} = y' x^{-1/2} - \frac{1}{2} x^{-1} z,$$

$$z'' = y''x^{-1/2} + \frac{1}{4}zx^{-2} - z'x^{-1},$$

olur. Elde edilen bu değerler (4.1.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$y'' + \left(\frac{1}{4}x^{-2} + \lambda - x^{-2}v^2 \right) y = 0, \quad \text{veya}$$

$$y'' + \left(\lambda - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) y = 0,$$

denklemini elde edilir. Son denklemde $v - \frac{1}{2} = l$ dönüşümü yapılırsa,

$$y'' + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = 0,$$

elde edilir.

[28] çalışmasında ise,

$$L[y] + \lambda y = -y'' + \left[q(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y + \lambda y = 0, \quad (4.1.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x, \lambda)}{x^n} = -\frac{1}{2^{n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}, \quad (4.1.10)$$

problemi için ters problem incelenmiştir. Burada n , pozitif tam sayıdır. Bu tür operatörler, tam n 'ler için karesel simetrik potansiyel enerjilere sahip Schrödinger operatörünün değişkenlerine ayrıldığı süreçte elde edilir. $n=1$ için özel olarak (4.1.1), (4.1.3) problemi elde edilir.

Teorem 4.1.1

1. Her $x > 0$ için $\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{\lambda}|x|} d\rho(\lambda)$ integrali mevcuttur.

2. $\lambda \geq 0$ için $\sigma(\lambda) = -\frac{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \rho(\lambda)$, $\lambda \leq 0$ için $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda)$ alınırsa,

$0 \leq x < \infty$, $0 \leq u < \infty$ için

$$F(x, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x \sqrt{t} J_v(t\sqrt{\lambda}) dt \right\} \left\{ \int_0^u \sqrt{t} J_v(t\sqrt{\lambda}) dt \right\} \lambda^{-v} d\sigma(\lambda) \quad \left(v = n - \frac{1}{2} \right),$$

fonksiyonu dördüncü mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

3. $(0, x)$ aralığında $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun artma noktaları $N(x)$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{\sqrt{x}} = \infty.$$

(Özel olarak, $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun artma noktalarının sonlu bir limite sahip olması yeterlidir.)

koşullarını sağlayan azalmayan $\rho(\lambda)$ fonksiyonu mevcutsa, (4.1.9) denklemi ve (4.1.10) koşulu ile tanımlı ikinci mertebeden bir tek diferensiyel operatör mevcuttur, öyle ki $\rho(\lambda)$ bu operatörün spektral fonksiyonu olur. Bu durumda $q(x)$ fonksiyonu sürekli olmak üzere

$$q(x) = 2 \frac{dK(x, x)}{dx},$$

ile tanımlanır [28].

(4.1.9) diferensiyel denkleminin birebir tanımlanması problemi, [10,128-131] çalışmalarında incelenmiştir. Marchenko, (4.1.9) diferensiyel denkleminin spektral fonksiyona göre birebir olarak tanımlandığını ispatlamıştır. Bessel denklemi için benzer problem ise aşağıdaki şekildedir:

Teorem 4.1.2 $L_1[y] = y'' - \left[q_1(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y$, $L_2[y] = y'' - \left[q_2(x) + \frac{n(n-1)}{x^2} \right] y$ operatörleri aynı spektral fonksiyona sahipse, $q_1(x) = q_2(x)$ dir [28].

İspat: $y_1(x, \lambda)$ ile $L_1[y] + \lambda y = 0$ denkleminin, $y_2(x, \lambda)$ ile $L_2[y] + \lambda y = 0$ denkleminin çözümleri gösterilsin. $0 < x \leq a$ aralığında $u_1(x, \lambda) = y_1(x, \lambda)$, $x > a$ için $u_1(x, \lambda) = 0$ ve $0 < x \leq a$ aralığında $u_2(x, \lambda) = y_2(x, \lambda)$, $x > a$ için $u_2(x, \lambda) = 0$ olsun (a herhangi pozitif sayıdır).

$$E_{1\mu}(\lambda) = \int_0^a u_1(x, \mu) y_1(x, \lambda) dx,$$

olmak üzere

$$u_1(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) y_1(x, \lambda) d\rho(\lambda). \quad (4.1.11)$$

$L^2(0, \infty)$ uzayındaki yakınsaklık anlamında (4.1.11) eşitliğindeki integral yakınsaktır.

$$u_{1N}(x, \mu) = \int_{-N}^N E_{1\mu}(\lambda) y_1(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

olsun. $y_1(x, \lambda)$ 'yi $y_2(x, \lambda)$ 'ya dönüştüren $V = V_{L_2} V_{L_1}^{-1}$ dönüşüm operatörü $u_{1N}(x, \mu)$ fonksiyonuna uygulanırsa,

$$Vu_{1N}(x, \mu) = \int_{-N}^N E_{1\mu}(\lambda) y_2(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

elde edilir. $L^2(0, \infty)$ uzayında $u_{1N}(x, \mu)$ fonksiyonu $u_1(x, \mu)$ fonksiyonuna yakınsar.

Dolayısıyla $Vu_{1N}(x, \mu)$ fonksiyonları $L^2(0, a)$ uzayında $Vu_1(x, \mu)$ fonksiyonuna yakınsar.

$0 \leq x \leq a$ aralığında $Vu_1(x, \mu) = u_2(x, \mu)$ olduğundan

$$u_2(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) y_2(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

dır. Buradaki integral $L^2(0, a)$ uzayındaki yakınsaklık anlamındadır. Son integralin her iki tarafı $u_2(x, \mu)$ ile çarpılıp x 'e göre 0'dan a 'ya integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_0^a y_2^2(x, \mu) dx &= \int_0^a \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) u_2(x, \mu) y_2(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_{1\mu}(\lambda) \int_0^a u_2(x, \mu) y_2(x, \lambda) dx \right\} d\rho(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_{1\mu}(\lambda) E_{2\mu}(\lambda) d\rho(\lambda) \\ &\leq \sqrt{\int_0^a y_1^2(x, \mu) dx} \sqrt{\int_0^a y_2^2(x, \mu) dx}, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^a y_2^2(x, \mu) dx \leq \int_0^a y_1^2(x, \mu) dx, \quad (4.1.12)$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_0^a y_1^2(x, \mu) dx \leq \int_0^a y_2^2(x, \mu) dx, \quad (4.1.13)$$

olduğu gösterilebilir. (4.1.12) ve (4.1.13) karşılaştırılırsa, her sonlu $a \geq 0$ için

$$\int_0^a y_1^2(x, \mu) dx = \int_0^a y_2^2(x, \mu) dx,$$

sağlanır. Böylece

$$|y_1(x, \lambda)| = |y_2(x, \lambda)|, \quad (4.1.14)$$

elde edilir. Bu durumda $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ fonksiyonları aynı anda sıfır olabilirler. Bu taktirde her sonlu aralıkta bunlar sadece sonlu sayıda sıfıra sahip olurlar. Aksi taktirde bu fonksiyonların birinci mertebeden türevleri bu noktalarda da sıfıra eşit olur ve ikinci mertebeden diferensiyel denklemin çözümleri olan $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ fonksiyonları özdeş olarak sıfıra eşit olur. Bu sebeple, $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ 'nin sadece işaret farkıyla farklı olduğu (4.1.14)'den elde edilir. Buradan $q_1(x) = q_2(x)$ 'dir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.3 $\rho(\lambda)$ fonksiyonu Teorem 4.1.1'in 1. ve 2. koşulunu sağlarsa,

$$\int_1^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^{n+1}} < \infty,$$

dir [28].

4.2 Bessel Operatörü için İsospektral Problem

$q_0(x)$ reel diferensiyellenebilir fonksiyon, H_0 sabit reel sayı olmak üzere

$$-y'' + \left(q_0(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = \lambda y, \quad x \in (0, 1] \quad (4.2.1)$$

$$y(0, \lambda) = 0, \quad (4.2.2)$$

$$y'(1, \lambda) + H_0 y(1, \lambda) = 0, \quad (4.2.3)$$

Bessel problemi gözönüne alınsın. $\varphi_0(x, \lambda)$, (4.2.1) denkleminin $\varphi_0(0, \lambda) = 0$, $\varphi_0'(0, \lambda) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. (4.2.1)-(4.2.3) probleminin $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ özdeğerleri

$$\varphi_0'(1, \lambda) + H_0 \varphi_0(1, \lambda) = 0, \quad (4.2.4)$$

denkleminin kökleridir ve λ_n 'lere karşılık gelen özfonksiyonlar ise $\varphi_0(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ 'dır.

$$f(x, u) + K(x, u) + \int_0^x K(x, t) f(t, u) dt = 0, \quad (0 < u \leq x \leq 1) \quad (4.2.5)$$

Gelfand-Levitan integral denkleminin çekirdeği

$$f(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(u, \lambda_n), \quad (4.2.6)$$

şeklinde sürekli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilirdir. Ayrıca

$$f(x,u) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u}, \quad (4.2.7)$$

olsun. Bu fonksiyon ikinci mertebeden sürekli türevlere sahiptir ve aşağıdaki teorem sağlanır:

Teorem 4.2.1 Sabit x için

$$f(x,u) + K(x,u) + \int_0^x f(u,t)K(x,t)dt = 0, \quad (0 < u \leq x \leq 1) \quad (4.2.8)$$

integral denklemi bilinmeyen $K(x,u)$ fonksiyonuna göre bir tek çözüme sahiptir. Bu durumda $K(x,u)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türevlere sahiptir [28].

İspat: İntegral denklemler teorisinden (4.2.8) denkleminin tek çözümünün olması için

$$g(u) + \int_0^x f(u,t)g(t)dt = 0, \quad (4.2.9)$$

eşlenik homojen denklem sisteminin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu göstermenin yeterli olduğu bilinmektedir.

$$I(g) = \int_0^x g^2(t)dt + \int_0^x \int_0^x f(u,t)g(t)g(u)dtd u = 0,$$

karesel formülünü gözönüne alalım ve $[0, x]$ aralığının hemen hemen her yerinde sıfıra eşit olmayan her $g(t)$ fonksiyonu için $I(g) > 0$ olduğunu gösterelim. Önce varsayalım ki $g(t)$ fonksiyonu $0 \leq t \leq x$ aralığında sürekli türevlere sahiptir ve $g(x) = 0$ 'dır. İki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I(g) = \int_0^x g^2(t)dt + \int_0^x \int_0^x F(u,t)g'(t)g'(u)dtd u = 0,$$

elde edilir. Son eşitlikte $F(x,u)$ yerine

$$F(x,u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x J_v(t\sqrt{\lambda})dt \right\} \left\{ \int_0^u J_v(t\sqrt{\lambda})dt \right\} \lambda^{-n} d\sigma(\lambda),$$

yazılırsa

$$I(g) = \int_0^x g^2(t)dt + \int_0^x \int_0^x \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t J_v(v\sqrt{\lambda})dv \right) \left(\int_0^u J_v(v\sqrt{\lambda})dv \right) \lambda^{-n} d\sigma(\lambda) \right\} g'(t)g'(u)dtd u$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x g^2(t) dt + \int_0^x \int_0^x \left\{ \int_{-\infty}^t J_v(v\sqrt{\lambda}) dv \right\} \left(\int_0^u J_v(v\sqrt{\lambda}) dv \right) \lambda^{-n} d\rho(\lambda) \left\{ g'(t)g'(u) dt du - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x \int_0^x \left\{ \int_{-\infty}^t J_v(v\sqrt{\lambda}) dv \right\} \left(\int_0^u J_v(v\sqrt{\lambda}) dv \right) d(\sqrt{\lambda}) \right\} g'(t)g'(u) dt du,
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

bulunur. $\rho(\lambda)$ fonksiyonu için Teorem 4.1.1'in 1. koşulu,

$$\left| \int_0^x J_v(t\sqrt{\lambda}) dt \right| < \frac{C}{\sqrt{\lambda}}, \quad (0 \leq x < \infty, \lambda > 0) \tag{4.2.11}$$

eşitsizliği ve Lemma 4.1.3 kullanılarak,

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq x \\ 0 \leq u \leq x}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t J_v(v\sqrt{\lambda}) dv \right\} \left\{ \int_0^u J_v(v\sqrt{\lambda}) dv \right\} \lambda^{-n} d\rho(\lambda) < \infty. \tag{4.2.12}$$

Burada (4.2.10)'un sağ tarafında Fubini teoreminden dolayı integral sınırları değiştirilirse

$$I(g) = \int_0^x g^2(t) dt + \int_{-\infty}^\infty \lambda^{-n} G^2(\lambda) d\rho(\lambda) - \int_0^\infty G^2(\lambda) d(\sqrt{\lambda}), \tag{4.2.13}$$

elde edilir. Burada

$$G(\lambda) = \int_0^x g'(t) \left\{ \int_0^t J_v(v\sqrt{\lambda}) dv \right\} dt = - \int_0^x g(t) J_v(t\sqrt{\lambda}) dt, \tag{4.2.14}$$

dir. Hankel dönüşümü için Parseval bağıntısı ve (4.2.14)'den

$$\int_0^\infty G^2(\lambda) d(\sqrt{\lambda}) = \int_0^x g^2(t) dt, \tag{4.2.15}$$

olur. Böylece (4.2.13)'in görüntüsü

$$I(g) = \int_{-\infty}^\infty \lambda^{-n} G^2(\lambda) d\rho(\lambda), \tag{4.2.16}$$

şeklinde olur. (4.2.16) eşitliğinde eğer $I(g) = 0$ ise $g(t) \equiv 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.2 (4.2.8) integral denkleminin çözümü

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] K = \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} - \left[q_0(u) + \frac{l(l+1)}{u^2} \right] K, \quad 0 < u \leq x \leq 1 \tag{4.2.17}$$

kısmi diferensiyel denkleminin çözümüdür. Burada

$$q(x) = q_0(x) + 2 \frac{d}{dx} K(x, x), \tag{4.2.18}$$

şeklindedir. Ayrıca $K(x, u)$,

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x [q(t) - q_0(t)] dt - f(0, 0), \quad (4.2.19)$$

$$K(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (4.2.20)$$

sınır koşullarını sağlar [29].

İspat: $J = f(x, u) + K(x, u) + \int_0^x K(x, t) f(t, u) dt = 0, \quad (0 < u \leq x \leq 1)$

olsun. $q(x)$, (4.2.18) ile tanımlı ve $q_0(x)$ (4.2.1) denkleminin potansiyeli olmak üzere

$$\mathfrak{J} = J_{xx} - J_{uu} - \left[q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] J + \left[q_0(u) + \frac{l(l+1)}{u^2} \right] J = 0, \quad (4.2.21)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} + K(x, x) f(x, u) + \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} f(t, u) dt, \\ J_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{dK(x, x)}{dx} f(x, u) + K(x, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} f(x, u) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} f(t, u) dt, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial K}{\partial u} + \int_0^x \frac{\partial f(t, u)}{\partial u} K(x, t) dt, \\ J_{uu} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \int_0^x \frac{\partial^2 f(t, u)}{\partial u^2} K(x, t) dt, \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

elde edilir. (4.2.23)'de integraldeki $\frac{\partial^2 f(t, u)}{\partial u^2}$ terimi yerine $\frac{\partial^2 f(t, u)}{\partial t^2}$ alınır ve elde edilen

integralde iki kez kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} K(x, t) dt &= K(x, x) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=x} - K(x, 0) \frac{\partial f(t, u)}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} f(x, u) \\ &\quad + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} f(0, u) + \int_0^x f \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} dt, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

olur. (4.2.24), (4.2.23)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} J_{uu} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + K(x, x) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=x} - K(x, 0) \frac{\partial f(t, u)}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} f(x, u) \\ &\quad + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} f(0, u) + \int_0^x f \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} dt. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

(4.2.22), (4.2.25) ve J 'nin tanımı (4.2.21)'de gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{dK(x, x)}{dx} f(x, u) + K(x, x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \Big|_{t=x} f(x, u) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} f(t, u) dt \\ & - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} - K(x, x) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=x} + K(x, 0) \frac{\partial f(t, u)}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=x} f(x, u) - \frac{\partial K}{\partial t} \Big|_{t=0} f(0, u) \\ & - \int_0^x f \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} dt + \left(-q(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} + q_0(u) + \frac{l(l+1)}{u^2} \right) \left(f(x, u) + K(x, u) + \int_0^x K(x, t) f(t, u) dt \right),\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} = & \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \left(-q(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} + q_0(u) + \frac{l(l+1)}{u^2} \right) K \right] \\ & + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left(-\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{u^2} \right) f \right] + \\ & + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \left(-q(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} + q_0(u) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) K \right] f(t, u) dt,\end{aligned}\tag{4.2.26}$$

bulunur. (4.2.19) ve (4.2.20) koşulları sağlanır. Burada

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left(-\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{l(l+1)}{u^2} \right) f \right] = 0,$$

olduğundan, (4.2.26)'dan

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} = & \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \left(-q(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} + q_0(u) + \frac{l(l+1)}{u^2} \right) K \right] \\ & + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \left(-q(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} + q_0(u) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) K \right] f(t, u) dt,\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$g(t) = \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \left(-q(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} + q_0(u) + \frac{l(l+1)}{u^2} \right) K \right],$$

fonksiyonunun (4.2.9) homojen integral denkleminin çözümü olması ve böylece sıfıra eşit olması demektir. Bu ise (4.2.17) kısmi diferensiyel denkleminin sağlandığını gösterir.

Not edelim ki bu teoremin ispatı farklı yöntemlerle de ele alınmıştır.

Teorem 4.2.3 Eğer $K(x, y)$, (4.2.5) integral denkleminin bir çözümü ve böylece (4.2.17)-(4.2.19)-(4.2.20) probleminin bir çözümü ise, her λ kompleks sayısı için

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt,\tag{4.2.27}$$

fonksiyonu

$$q(x) = q_0(x) + 2 \frac{d}{dx} K(x, x),$$

olmak üzere

$$-y'' + \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = \lambda y, \quad x \in (0, 1] \quad (4.2.28)$$

denkleminin çözümüdür [28].

İspat: (4.2.27)'de x 'e göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda) &= \varphi'_0(x, \lambda) + K(x, x) \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} \varphi_0(t, \lambda) dt, \\ \varphi''(x, \lambda) &= \varphi''_0(x, \lambda) + \frac{dK(x, x)}{dx} \varphi_0(x, \lambda) + K(x, x) \varphi'_0(x, \lambda) \\ &\quad + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \varphi_0(t, \lambda) dt, \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi_0(x, \lambda)$, (4.2.1) denkleminin çözümü olduğundan

$$\varphi''_0(x, \lambda) = \left(q_0(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} - \lambda \right) \varphi_0(x, \lambda),$$

ifadesi yukarıdaki son denklemde gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= \left(q_0(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} - \lambda \right) \varphi_0(x, \lambda) + \frac{dK(x, x)}{dx} \varphi_0(x, \lambda) \\ &\quad + K(x, x) \varphi'_0(x, \lambda) + \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{t=x} \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \varphi_0(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

bulunur. (4.2.27) denkleminin her iki yanını λ ile çarpılırsa

$$\lambda \varphi(x, \lambda) = \lambda \varphi_0(x, \lambda) + \lambda \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt,$$

olur.

$$\lambda \varphi_0(t, \lambda) = -\varphi''_0(t, \lambda) + \left(q_0(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \varphi_0(t, \lambda), \quad \text{yerine yazılırsa}$$

$$\begin{aligned} \lambda \varphi(x, \lambda) &= \lambda \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \left[-\varphi''_0(t, \lambda) + \left(q_0(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \varphi_0(t, \lambda) \right] dt, \\ &= \lambda \varphi_0(x, \lambda) - \int_0^x K(x, t) \varphi''_0(t, \lambda) dt + \int_0^x \left(q_0(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

elde edilir. Son eşitlikteki ilk integralde kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x,t)\varphi_0''(t,\lambda)dt &= K(x,x)\varphi_0'(x,\lambda) - K(x,0)\varphi_0'(0,\lambda) - \frac{\partial K}{\partial t}\Big|_{t=x}\varphi_0(x,\lambda) \\ &\quad + \frac{\partial K}{\partial t}\Big|_{t=0}\varphi_0(0,\lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\varphi_0(t,\lambda)dt, \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.20) koşulu gözönüne alınırsa

$$\int_0^x K(x,t)\varphi_0''(t,\lambda)dt = K(x,x)\varphi_0'(x,\lambda) - \frac{\partial K}{\partial t}\Big|_{t=x}\varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\varphi_0(t,\lambda)dt, \quad (4.2.31)$$

olur. (4.2.31), (4.2.30)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda\varphi(x,\lambda) &= \lambda\varphi_0(x,\lambda) - K(x,x)\varphi_0'(x,\lambda) + \frac{\partial K}{\partial t}\Big|_{t=x}\varphi_0(x,\lambda) \\ &\quad - \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\varphi_0(t,\lambda)dt + \int_0^x \left(q_0(t) + \frac{l(l+1)}{t^2}\right)K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt, \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

ve (4.2.27) denkleminde

$$-\left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\varphi(x,\lambda) = -\left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\varphi_0(x,\lambda) - \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt, \quad (4.2.33)$$

elde edilir. (4.2.29), (4.2.32) ve (4.2.33) denklemleri taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned} \varphi'' - \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\varphi + \lambda\varphi &= \left(q_0(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} - \lambda\right)\varphi_0(x,\lambda) + \frac{dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\lambda) \\ &\quad + K(x,x)\varphi_0'(x,\lambda) + \frac{\partial K}{\partial x}\Big|_{t=x}\varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\varphi_0(t,\lambda)dt \\ &\quad - \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\varphi_0(x,\lambda) - \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt \quad (4.2.34) \\ &\quad + \lambda\varphi_0(x,\lambda) - K(x,x)\varphi_0'(x,\lambda) + \frac{\partial K}{\partial t}\Big|_{t=x}\varphi_0(x,\lambda) - \int_0^x \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\varphi_0(t,\lambda)dt \\ &\quad + \int_0^x \left(q_0(t) + \frac{l(l+1)}{t^2}\right)K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt. \end{aligned}$$

veya buradan tam diferensiyelin tanımından

$$\begin{aligned} \varphi'' - \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\varphi + \lambda\varphi &= (q_0(x) - q(x))\varphi_0(x,\lambda) + \frac{2dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\lambda) \\ &\quad + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2}\right)K - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \left(q_0(t) + \frac{l(l+1)}{t^2}\right)K\right]\varphi_0(t,\lambda)dt, \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.17) denkleminde ve (4.2.18) bağıntısından son denklem

$$\varphi'' - \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \varphi + \lambda \varphi = 0,$$

şeklini alır. Böylece ispat tamamlanır.

(4.2.1)-(4.2.3) problemine isospektral olan problemi elde etmek için $\varphi(x, \lambda_n)$ 'in bazı reel H 'lar için

$$\varphi'(x, \lambda_n) + H\varphi(x, \lambda_n) = 0,$$

sınır koşulunu sağladığını göstermek gerekir ve ayrıca H için bir formül elde edilecektir.

(4.2.5) ve (4.2.6) bağıntılarından

$$\begin{aligned} K(x, u) &= -f(x, u) - \int_0^x K(x, t) f(t, u) dt \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(x, \lambda_k) \varphi_0(u, \lambda_k) - \int_0^x K(x, t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(t, \lambda_k) \varphi_0(u, \lambda_k) \right) dt \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(u, \lambda_k) \left[\varphi_0(x, \lambda_k) + \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda_k) dt \right], \end{aligned}$$

olup (4.2.27) denkleminde

$$K(x, u) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(u, \lambda_k) \varphi(x, \lambda_k), \quad (4.2.35)$$

bulunur. Diğer taraftan (4.2.1)-(4.2.3) probleminin çözüm fonksiyonu

$$\varphi_0(x, \lambda) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{\lambda})^v} J_v(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x K_1(x, t) \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{\lambda})^v} J_v(\sqrt{\lambda}t) dt, \quad v = l + \frac{1}{2} \quad (4.2.36)$$

şeklinde,

$$-y'' + \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = \lambda y, \quad x \in (0, 1] \quad (4.2.37)$$

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y'(1, \lambda) + Hy(1, \lambda) = 0, \quad (4.2.38)$$

probleminin çözüm fonksiyonu ise

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{\lambda})^v} J_v(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x K_2(x, t) \frac{\sqrt{t}}{(\sqrt{\lambda})^v} J_v(\sqrt{\lambda}t) dt, \quad v = l + \frac{1}{2} \quad (4.2.39)$$

şeklinde. Burada $K_1(x, t)$ ve $K_2(x, t)$ çekirdek fonksiyonlarıdır.

(4.2.27)'de bir kez türev alınırsa

$$\varphi'(x, \lambda) = \varphi_0'(x, \lambda) + K(x, x) \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} \varphi_0(t, \lambda) dt,$$

olur. Buradan ve (4.2.27)'den

$$\varphi'(x, \lambda) + H\varphi(x, \lambda) = \varphi_0'(x, \lambda) + H\varphi_0(x, \lambda) + K(x, x)\varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x \left(\frac{\partial K}{\partial x} + HK \right) \varphi_0(t, \lambda) dt,$$

elde edilir. Son denklemden $x=1$ ve $\lambda = \lambda_n$ alınır

$$\begin{aligned} \varphi'(1, \lambda_n) + H\varphi(1, \lambda_n) &= \varphi_0'(1, \lambda_n) + H\varphi_0(1, \lambda_n) + K(1, 1)\varphi_0(1, \lambda_n) \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{\partial K}{\partial x} + HK \right) \Big|_{x=1} \varphi_0(t, \lambda_n) dt, \end{aligned}$$

olup (4.2.3) ve (4.2.38) koşullarından

$$(H - H_0)\varphi_0(1, \lambda_n) + K(1, 1)\varphi_0(1, \lambda_n) + \int_0^1 \left(\frac{\partial K}{\partial x} + HK \right) \Big|_{x=1} \varphi_0(t, \lambda_n) dt = 0. \quad (4.2.40)$$

Diğer taraftan $n \rightarrow \infty$ iken (4.2.36) çözümü için $\varphi_0(1, \lambda_n) \rightarrow (-1)^n \left(\sqrt{\lambda_n} \right)^{-\nu}$ olduğundan

(4.2.40)'dan

$$H - H_0 + K(1, 1) = 0, \quad (4.2.41)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial K}{\partial x} + HK \right) \Big|_{x=1} \varphi_0(t, \lambda_n) dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

bulunur [32]. (4.2.41) ve (4.2.35) birlikte gözönüne alınırsa

$$H - H_0 - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_0(1, \lambda_k) \varphi(1, \lambda_k) = 0,$$

ve buradan

$$H = H_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\lambda_k)^{-\nu}, \quad (4.2.42)$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_k \sim \pi^2 \left(k - \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \right)$ dir.

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi^2(x, \lambda_n) dx,$$

(4.2.37)-(4.2.38) probleminin normlaştırıcı sayısı olsun. Bu durumda aşağıdaki lemma sağlanır.

Lemma 4.2.4

$$\alpha_n = |\varphi(1, \lambda_n)| |\dot{D}(\lambda_n)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.43)$$

şeklindedir. Burada $\dot{D}(\lambda_n)$, $D(\lambda_n)$ 'nin λ_n 'e göre türevini belirtir.

İspat Keyfi λ ve μ için (4.2.1)'den

$$\begin{aligned} -\varphi''(x, \lambda) + \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \varphi(x, \lambda) &= \lambda \varphi(x, \lambda), \\ -\varphi''(x, \mu) + \left(q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \varphi(x, \mu) &= \mu \varphi(x, \mu), \end{aligned}$$

ve buradan

$$\varphi''(x, \lambda) \varphi(x, \mu) - \varphi(x, \lambda) \varphi''(x, \mu) = (\mu - \lambda) \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \mu),$$

olup

$$\frac{d}{dx} [\varphi'(x, \lambda) \varphi(x, \mu) - \varphi(x, \lambda) \varphi'(x, \mu)] = (\mu - \lambda) \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \mu),$$

bulunur. Son ifadede 0'dan 1'e integral alınırsa

$$\int_0^1 \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \mu) dx = \frac{\varphi'(1, \lambda) \varphi(1, \mu) - \varphi(1, \lambda) \varphi'(1, \mu)}{\mu - \lambda}.$$

$\varphi'(1, \lambda) = -H\varphi(1, \lambda)$ olduğundan $\mu \rightarrow \lambda$ iken son bağıntıdan

$$\int_0^1 \varphi^2(x, \lambda) dx = \varphi'(1, \lambda) \dot{\varphi}(1, \lambda) - \varphi(1, \lambda) \dot{\varphi}'(1, \lambda).$$

$\lambda = \lambda_n$ alınırsa $\varphi'(1, \lambda_n) = -H\varphi(1, \lambda_n)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -\varphi(1, \lambda_n) [\dot{\varphi}'(1, \lambda_n) + H\dot{\varphi}(1, \lambda_n)] \\ &= -\varphi(1, \lambda_n) \dot{D}(\lambda_n) = |\varphi(1, \lambda_n)| |\dot{D}(\lambda_n)|, \end{aligned}$$

Burada $D(\lambda) = \varphi'(1, \lambda) + H\varphi(1, \lambda)$ şeklindedir. Bununla ispat tamamlanır.

(4.2.1)-(4.2.3) ve (4.2.37)-(4.2.38) problemlerini tekrar gözönüne alalım.

$$\alpha_{n,0} = \int_0^1 \varphi_0^2(x, \lambda_n) dx, \quad \alpha_n = \int_0^1 \varphi^2(x, \lambda_n) dx,$$

olsun. Bu durumda (4.2.5) integral denkleminin bilinmeyen fonksiyonu

$$f(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right) \varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(u, \lambda_n), \quad (4.2.44)$$

şeklindedir. (4.2.6) ile (4.2.44) birlikte gözönüne alınırsa

$$c_n = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}},$$

olur. (4.2.43) formülünden

$$c_n = \frac{1}{|\dot{D}(\lambda_n)|} \left(\frac{1}{|\varphi(1, \lambda_n)|} - \frac{1}{|\varphi_0(1, \lambda_n)|} \right), \quad (4.2.45)$$

olup (4.2.42) formülünden

$$H = H_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n)^{-\nu}}{|\dot{D}(\lambda_n)|} \left(\frac{1}{|\varphi(1, \lambda_n)|} - \frac{1}{|\varphi_0(1, \lambda_n)|} \right), \quad (4.2.46)$$

bulunur.

Şimdi (4.2.1)-(4.2.3) ve (4.2.37)-(4.2.38) problemlerinin farklı $\{\lambda_n\}_0^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_0^{\infty}$ spektrumlarına sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$f(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \varphi_0(x, \mu_n) \varphi_0(u, \mu_n) - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \varphi_0(x, \lambda_n) \varphi_0(u, \lambda_n) \right).$$

(4.2.42) formülünden

$$H = H_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right) (\lambda_n)^{-\nu}$$

$$H = H_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\mu_n)^{-\nu}}{|\dot{E}(\mu_n)| |\varphi(1, \mu_n)|} - \frac{(\lambda_n)^{-\nu}}{|\dot{D}(\lambda_n)| |\varphi_0(1, \lambda_n)|} \right). \quad (4.2.47)$$

Burada $D(\lambda) = \varphi'_0(\pi, \lambda) + H_0 \varphi_0(\pi, \lambda)$, $\varepsilon(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H \varphi(\pi, \lambda)$ dir.

5. DİFÜZYON OPERATÖRÜ

5.1 Difüzyon Operatörünün Bazı Fiziksel ve Spektral Özellikleri

Jaulent ve Jean [97] difüzyon operatörü için ters problemi ele almış ve bu operatörün esas altyapısını kurmuşlardır.

Parçacıkların çarpışması sırasında etkileşimleri tanımlama problemi, fizikte ilginç bir temel oluşturur. Birçok durumda tanımlama, iyi bilinen teorik modele uygulanabilir. Özellikle bu, iki tane dönmeyen parçacıkların çarpışmasıyla ilgilidir ve s – dalga bağlanma enerjisi ve s – dalga saçılma matrisinin çarpışma deneylerine göre tamamen bilindiği varsayılır. V dairesel durgun potansiyelli s – dalga Schrödinger denklemi

$$y'' + [E - V(x)]y = 0, \quad x \geq 0 \quad (5.1.1)$$

şeklinde. Burada potansiyel fonksiyon bir şekilde enerjiye bağlıdır ve $U(x)$ ve $Q(x)$ kompleks-değerli fonksiyonlar olmak üzere enerji bağımlılığı

$$V(x, E) = U(x) + 2\sqrt{E}Q(x), \quad (5.1.2)$$

şeklinde. (5.1.1), sıfır kütleli bir tanecik için $Q(x)$ durgun potansiyelli ve $U(x) = -Q^2(x)$ ek koşulu ile $\sqrt{E}$ enerjili Klein-Gordon s – dalga denkleminde indirgenir [97].

Klein Gordon denklemi, kuantum alan teorisindeki en önemli matematiksel modellerden biri olarak gözönüne alınır. Bu denklem relativistik fizikte ortaya çıkar ve genellikle dağıtıcı dalga olayını tanımlamak için kullanılır. Ayrıca lineer olmayan optik ve plazma fiziğinde de ortaya çıkar. Klein-Gordon denklemi, fizikte lineer ve lineer olmayan formlarda ortaya çıkar [110].

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right)^2 - \left(\frac{1}{i} \nabla - e\vec{A} \right)^2 \right] \psi = m^2 \psi, \quad (5.1.3)$$

Klein Gordon denklemi gözönüne alınsın. Bu denklemden belli dönüşümler yardımıyla difüzyon denklemini elde etmek mümkündür [133]. ϕ skaler potansiyeli, $\vec{A}(r, t)$ vektör potansiyelinde e dönmeyen yük parçacığını ve m kütleli ifade eder. Burada $\hbar = c = 1$ doğal birimleri kullanılmıştır. $\vec{A}(r, t) = 0$ ve skaler potansiyel zamandan bağımsız olduğu durumda (5.1.3) denklemi

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2ei\phi \frac{\partial}{\partial t} + e^2 \phi^2 \right] \psi = m^2 \psi, \quad (5.1.4)$$

denkleminde indirgenir.

$$\psi(r, t) = \varphi(r) e^{-iEt}$$

alınırsa (5.1.4) denklemi

$$\left[\nabla^2 - (E - e\phi)^2 \right] \varphi(r) = m^2 \varphi(r), \quad (5.1.5)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \psi_t(r, t) &= -\varphi(r) iE e^{-iEt}, \\ \psi_{tt}(r, t) &= -\varphi(r) E^2 e^{-iEt}, \end{aligned}$$

şeklinindedir. Bu denklem iyi bilinen Klein-Gordon denklemidir. (5.1.5) küresel simetrik potansiyel enerjili dalga denklemi küresel koordinatlarda

$$\left\{ \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + (E - e\phi)^2 \right\} \varphi = m^2 \varphi, \quad (5.1.6)$$

olarak yazılabilir. (5.1.6) denkleminde ilk olarak dairesel ve açısal kısımlar

$$\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi),$$

şeklinde ayrılarak ve φ ile bölünerek

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[(E - e\phi)^2 - m^2 \right] r^2 = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right], \quad (5.1.7)$$

elde edilir. (5.1.7)'nin sol tarafı sadece r 'ye ve sağ tarafı sadece θ 'ya bağlı olduğundan l kuantum yörünge sabiti olmak üzere her iki tarafı $l(l+1)$ gibi bir sabite eşit olmalıdır. Böylece (5.1.7) denklemi, Klein Gordon denklemi için $l=0,1,2,\dots$ olmak üzere $V=e\phi$ skaler potansiyelli

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[(E^2 - m^2) + V(V - 2E) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad (5.1.8)$$

dairesel denklemini verir.

(5.1.8) denkleminde $R = \frac{\psi(r)}{r}$ alınırsa, $E^2 = K^2 + m^2$ olmak üzere

$$\psi''(r) + \left[K^2 + V(V - 2E) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi(r) = 0,$$

bulunur. $l=m=0$ için

$$\psi''(r) + [V^2 - 2KV] \psi(r) = -K^2 \psi(r). \quad (5.1.9)$$

5.2 Difüzyon Operatörü için İsospektral Problem

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q(x))y = \lambda^2 y, \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (5.2.1)$$

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

ve

$$-y'' + (2\lambda p(x) + q_0(x))y = \lambda^2 y, \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} y'(0) - h_0 y(0) &= 0, \\ y'(\pi) + H_0 y(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

difüzyon problemleri gözönüne alınsın. Burada λ spektral parametre, $q(x) \in W_2^1(0, \pi)$, $q_0(x) \in W_2^1(0, \pi)$, $p(x) \in W_2^2(0, \pi)$, h, H, h_0 ve H_0 sonlu reel sayılardır. (5.2.1)-(5.2.2) ve (5.2.3)-(5.2.4) problemleri isospektral yani aynı $\lambda_n (n \in \mathbb{Z})$ spektruma sahip olsun. $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ler için

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,n}}{n}, \quad (5.2.5)$$

asimptotik formülü sağlanır. Burada

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(t) dt, \quad c_1 = \frac{1}{\pi} \left[h + H + \int_0^\pi (q(t) + p^2(t)) dt \right], \quad \sum_n |c_{1,n}|^2 < \infty.$$

(5.2.1) probleminin $\varphi(0, \lambda) = 1, \varphi'(0, \lambda) = h$ şartını sağlayan çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. $\varphi(x, \lambda)$ çözümü

$$\varphi(x, \lambda) = \cos[\lambda x - \alpha(x)] + \int_0^x A(x, t) \cos(\lambda t) dt + \int_0^x B(x, t) \sin(\lambda t) dt, \quad (5.2.6)$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha(x) = xp(0) + 2 \int_0^x [A(\xi, \xi) \sin \alpha(\xi) - B(\xi, \xi) \cos \alpha(\xi)] d\xi,$$

dir. $A(x, t)$ ve $B(x, t)$ çekirdekleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} - 2p(x) \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} - q(x) A(x, t) &= \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} + 2p(x) \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} - q(x) B(x, t) &= \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$q(x) = -p^2(x) + 2 \frac{d}{dx} [A(x, x) \cos \alpha(x) + B(x, x) \sin \alpha(x)], \quad (5.2.8)$$

$$A(0, 0) = h, \quad B(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (5.2.9)$$

$$\alpha(x) = \int_0^x p(t) dt,$$

probleminin çözümleridir. (5.2.3) denkleminin $\varphi_0(0, \lambda) = 1$, $\varphi'_0(0, \lambda) = h_0$ şartını sağlayan çözümü $\varphi_0(x, \lambda)$ olsun. $\varphi_0(x, \lambda)$ çözümü aşağıdaki formda ifade edilir [107]:

$$\varphi_0(x, \lambda) = \cos[\lambda x - \alpha(x)] + \int_0^x A_0(x, t) \cos(\lambda t) dt + \int_0^x B_0(x, t) \sin(\lambda t) dt. \quad (5.2.10)$$

(5.2.10)'daki $A_0(x, t)$ ve $B_0(x, t)$ çekirdekleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_0(x, t)}{\partial x^2} - 2p(x) \frac{\partial B_0(x, t)}{\partial t} - q_0(x) A_0(x, t) &= \frac{\partial^2 A_0(x, t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 B_0(x, t)}{\partial x^2} + 2p(x) \frac{\partial A_0(x, t)}{\partial t} - q_0(x) B_0(x, t) &= \frac{\partial^2 B_0(x, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$q(x) = -p^2(x) + 2 \frac{d}{dx} [A_0(x, x) \cos \alpha(x) + B_0(x, x) \sin \alpha(x)], \quad (5.2.12)$$

$$A_0(0, 0) = h, \quad B_0(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial A_0(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (5.2.13)$$

probleminin çözümleridir. (5.2.6) ile (5.2.10) taraf tarafa çıkarılırsa

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x (A(x, t) - A_0(x, t)) \cos(\lambda t) dt + \int_0^x (B(x, t) - B_0(x, t)) \sin(\lambda t) dt, \quad (5.2.14)$$

(5.2.7) ve (5.2.11) taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (A - A_0)}{\partial x^2} - 2p(x) \frac{\partial (B - B_0)}{\partial t} - q(x) A + q_0(x) A_0 &= \frac{\partial^2 (A - A_0)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 (B - B_0)}{\partial x^2} + 2p(x) \frac{\partial (A - A_0)}{\partial t} - q(x) B + q_0(x) B_0 &= \frac{\partial^2 (B - B_0)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

elde edilir. α_n , $\rho(\lambda)$ ve $\alpha_{n,0}$, $\rho_0(\lambda)$ sırasıyla (5.2.1)-(5.2.2) ve (5.2.3)-(5.2.4) problemlerinin normlaştırıcı sayısı ve spektral fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi p(x) \varphi^2(x, \lambda_n) dx, \\ \alpha_{n,0} &= \int_0^\pi \varphi_0^2(x, \lambda_n) dx - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi p(x) \varphi_0^2(x, \lambda_n) dx, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}, \quad \rho_0(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_{n,0}},$$

dir. (5.2.1)-(5.2.2) problemi için Gelfand-Levitan integral denklemleri

$$\begin{aligned} & F_{11}(x, t) \cos \alpha(x) + F_{12}(x, t) \sin \alpha(x) + A(x, t) \\ & + \int_0^x A(x, \xi) F_{11}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) F_{12}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x) \\ & F_{21}(x, t) \cos \alpha(x) + F_{22}(x, t) \sin \alpha(x) + B(x, t) \\ & + \int_0^x A(x, \xi) F_{21}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) F_{22}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x) \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

veya tek bir denklem olarak

$$\begin{aligned} & (F_{11}(x, t) + F_{21}(x, t)) \cos \alpha(x) + (F_{12}(x, t) + F_{22}(x, t)) \sin \alpha(x) + A(x, t) + B(x, t) \\ & + \int_0^x A(x, \xi) (F_{11}(\xi, t) + F_{21}(\xi, t)) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) (F_{12}(\xi, t) + F_{22}(\xi, t)) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x) \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

şeklindedir. (5.2.17)'deki $F_{11}(x, t)$, $F_{12}(x, t)$, $F_{21}(x, t)$ ve $F_{22}(x, t)$ fonksiyonları

$$F_{11}(x, t) = \frac{1}{\pi} \cos(c_0 x) \cos(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \cos((n+c_0)x) \cos((n+c_0)t) \right\}, \quad (5.2.19)$$

$$F_{12}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin(c_0 x) \cos(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \sin((n+c_0)x) \cos((n+c_0)t) \right\}, \quad (5.2.20)$$

$$F_{21}(x, t) = \frac{1}{\pi} \cos(c_0 x) \sin(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \cos(\lambda_n x) \sin(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \cos((n+c_0)x) \sin((n+c_0)t) \right\}, \quad (5.2.21)$$

$$F_{22}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin(c_0 x) \sin(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \sin((n+c_0)x) \sin((n+c_0)t) \right\}, \quad (5.2.22)$$

şeklindedir. Benzer şekilde (5.2.3)-(5.2.4) problemi için Gelfand-Levitan integral denklemleri

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_{11}(x, t) \cos \alpha(x) + \tilde{F}_{12}(x, t) \sin \alpha(x) + A_0(x, t) \\ & + \int_0^x A_0(x, \xi) \tilde{F}_{11}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B_0(x, \xi) \tilde{F}_{12}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x) \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_{21}(x, t) \cos \alpha(x) + \tilde{F}_{22}(x, t) \sin \alpha(x) + B_0(x, t) \\ & + \int_0^x A_0(x, \xi) \tilde{F}_{21}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B_0(x, \xi) \tilde{F}_{22}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x) \end{aligned}$$

veya tek bir denklem olarak

$$\begin{aligned} & (\tilde{F}_{11}(x, t) + \tilde{F}_{21}(x, t)) \cos \alpha(x) + (\tilde{F}_{12}(x, t) + \tilde{F}_{22}(x, t)) \sin \alpha(x) + A_0(x, t) + B_0(x, t) \\ & + \int_0^x A_0(x, \xi) (\tilde{F}_{11}(\xi, t) + \tilde{F}_{21}(\xi, t)) d\xi + \int_0^x B_0(x, \xi) (\tilde{F}_{12}(\xi, t) + \tilde{F}_{22}(\xi, t)) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x) \end{aligned}$$

şeklindedir. (5.2.23) deki $\tilde{F}_{11}(x, t)$, $\tilde{F}_{12}(x, t)$, $\tilde{F}_{21}(x, t)$ ve $\tilde{F}_{22}(x, t)$ fonksiyonları

$$\tilde{F}_{11}(x, t) = \frac{1}{\pi} \cos(c_0 x) \cos(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \cos((n+c_0)x) \cos((n+c_0)t) \right\}, \quad (5.2.24)$$

$$\tilde{F}_{12}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin(c_0 x) \cos(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \sin((n+c_0)x) \cos((n+c_0)t) \right\}, \quad (5.2.25)$$

$$\tilde{F}_{21}(x, t) = \frac{1}{\pi} \cos(c_0 x) \sin(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \cos(\lambda_n x) \sin(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \cos((n+c_0)x) \sin((n+c_0)t) \right\}, \quad (5.2.26)$$

$$\tilde{F}_{22}(x, t) = \frac{1}{\pi} \sin(c_0 x) \sin(c_0 t) + \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \sin((n+c_0)x) \sin((n+c_0)t) \right\}. \quad (5.2.27)$$

Teorem 5.2.1 (5.2.17) ((5.2.23)) Gelfand-Levitan integral denklemi her sürekli $\alpha(x)$

fonksiyonu için bir tek $A(x, t)$ ve $B(x, t)$ ($A_0(x, t)$ ve $B_0(x, t)$) çözümüne sahiptir ve bu çözüm

$$A(x, t) = A_1(x, t) \cos \alpha(x) + A_2(x, t) \sin \alpha(x),$$

$$B(x, t) = B_1(x, t) \cos \alpha(x) + B_2(x, t) \sin \alpha(x),$$

şeklinde $\alpha(x)$ fonksiyonuna bağımlıdır. Burada $A_1(x, t)$ ve $B_1(x, t)$, (5.2.17) sisteminin

$\alpha(x) \equiv 0$ olmak üzere

$$F_{11}(x, t) + A_1(x, t) + \int_0^x A_1(x, \xi) F_{11}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B_1(x, \xi) F_{12}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x)$$

$$F_{21}(x, t) + B_1(x, t) + \int_0^x A_1(x, \xi) F_{21}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B_1(x, \xi) F_{22}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x)$$

şeklinde çözümü, $A_2(x, t)$ ve $B_2(x, t)$, (5.2.17) sisteminin $\alpha(x) \equiv \pi/2$ olmak üzere

$$F_{12}(x, t) + A_2(x, t) + \int_0^x A_2(x, \xi) F_{11}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B_2(x, \xi) F_{12}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x)$$

$$F_{22}(x, t) + B_2(x, t) + \int_0^x A_2(x, \xi) F_{21}(\xi, t) d\xi + \int_0^x B_2(x, \xi) F_{22}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (0 \leq t < x)$$

şeklinde çözümüdür [107].

Teorem 5.2.2 Eğer $A(x, t)$ ve $B(x, t)$ ($A_0(x, t)$ ve $B_0(x, t)$) (5.2.17) ((5.2.23)) integral denklem sisteminin ve böylece (5.2.7)-(5.2.9) ((5.2.11)-(5.2.13)) probleminin çözümleri ise,

1) Her λ kompleks sayısı için

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x (A(x, t) - A_0(x, t)) \cos(\lambda t) dt + \int_0^x (B(x, t) - B_0(x, t)) \sin(\lambda t) dt, \quad (5.2.28)$$

fonksiyonu

$$q(x) = q_0(x) + 2 \frac{d}{dx} \left[(A(x, x) - A_0(x, x)) \cos \alpha(x) + (B(x, x) - B_0(x, x)) \sin \alpha(x) \right],$$

olmak üzere (5.2.1) denkleminin çözümüdür.

2) $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h_0 - \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right) = h$ başlangıç şartını

sağlar.

İspat.

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda) &= \varphi_0'(x, \lambda) + (A(x, x) - A_0(x, x)) \cos(\lambda x) + (B(x, x) - B_0(x, x)) \sin(\lambda x) \\ &+ \int_0^x \frac{\partial(A - A_0)}{\partial x} \cos(\lambda t) dt + \int_0^x \frac{\partial(B - B_0)}{\partial x} \sin(\lambda t) dt, \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= \varphi_0''(x, \lambda) + \frac{d(A(x, x) - A_0(x, x))}{dx} \cos(\lambda x) - \lambda(A(x, x) - A_0(x, x)) \sin(\lambda x) \\ &+ \frac{d(B(x, x) - B_0(x, x))}{dx} \sin(\lambda x) + \lambda(B(x, x) - B_0(x, x)) \cos(\lambda x) \\ &+ \frac{\partial(A - A_0)}{\partial x} \Big|_{t=x} \cos(\lambda x) + \frac{\partial(B - B_0)}{\partial x} \Big|_{t=x} \sin(\lambda x) \\ &+ \int_0^x \frac{\partial^2(A - A_0)}{\partial x^2} \cos(\lambda t) dt + \int_0^x \frac{\partial^2(B - B_0)}{\partial x^2} \sin(\lambda t) dt, \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

ve

$$\begin{aligned}
(2\lambda p(x) + q(x))\varphi &= (2\lambda p(x) + q(x))\varphi_0 + (2\lambda p(x) + q(x)) \int_0^x (A(x,t) - A_0(x,t)) \cos(\lambda t) dt \\
&\quad + (2\lambda p(x) + q(x)) \int_0^x (B(x,t) - B_0(x,t)) \sin(\lambda t) dt. \quad (5.2.31)
\end{aligned}$$

(5.2.9) ve (5.2.13) gözönüne alınarak (5.2.31)'de bir kez kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
(2\lambda p(x) + q(x))\varphi &= (2\lambda p(x) + q(x))\varphi_0 + 2p(x)(A(x,x) - A_0(x,x))\sin(\lambda x) \\
&\quad - 2p(x) \int_0^x \frac{\partial(A - A_0)}{\partial t} \sin(\lambda t) dt - 2p(x)(B(x,x) - B_0(x,x))\cos(\lambda x) \\
&\quad + 2p(x) \int_0^x \frac{\partial(B - B_0)}{\partial t} \cos(\lambda t) dt + q(x) \int_0^x (A(x,t) - A_0(x,t)) \cos(\lambda t) dt \\
&\quad + q(x) \int_0^x (B(x,t) - B_0(x,t)) \sin(\lambda t) dt, \quad (5.2.32)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.2.28)'den

$$\lambda^2 \varphi = \lambda^2 \varphi_0 + \lambda^2 \int_0^x (A(x,t) - A_0(x,t)) \cos(\lambda t) dt + \lambda^2 \int_0^x (B(x,t) - B_0(x,t)) \sin(\lambda t) dt, \quad (5.2.33)$$

(5.2.33)'de iki kez kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \varphi &= \lambda^2 \varphi_0 + \lambda(A(x,x) - A_0(x,x))\sin(\lambda x) + \frac{\partial(A - A_0)}{\partial t} \Big|_{t=x} \cos(\lambda x) - \frac{\partial(A - A_0)}{\partial t} \Big|_{t=0} \\
&\quad - \int_0^x \frac{\partial^2(A - A_0)}{\partial t^2} \cos(\lambda t) dt - \lambda(B(x,x) - B_0(x,x))\cos(\lambda x) + \lambda(B(x,0) - B_0(x,0)) \\
&\quad + \frac{\partial(B - B_0)}{\partial t} \Big|_{t=x} \sin(\lambda x) - \int_0^x \frac{\partial^2(B - B_0)}{\partial t^2} \sin(\lambda t) dt, \quad (5.2.34)
\end{aligned}$$

olur. (5.2.9) ve (5.2.13) kullanılarak (5.2.30), (5.2.32) ve (5.2.34)'den

$$\begin{aligned}
&\varphi'' - (2\lambda p(x) + q(x))\varphi + \lambda^2 \varphi = \\
&= \varphi_0'' - (2\lambda p(x) + q(x))\varphi_0 + \lambda^2 \varphi_0 + \frac{d(A(x,x) - A_0(x,x))}{dx} \cos(\lambda x) \\
&\quad + \frac{d(B(x,x) - B_0(x,x))}{dx} \sin(\lambda x) + \frac{\partial(A - A_0)}{\partial x} \Big|_{t=x} \cos(\lambda x) \\
&\quad + \frac{\partial(B - B_0)}{\partial x} \Big|_{t=x} \sin(\lambda x) + \frac{\partial(A - A_0)}{\partial t} \Big|_{t=x} \cos(\lambda x) + \frac{\partial(B - B_0)}{\partial t} \Big|_{t=x} \sin(\lambda x) \\
&\quad - 2p(x)(A(x,x) - A_0(x,x))\sin(\lambda x) + 2p(x)(B(x,x) - B_0(x,x))\cos(\lambda x) \\
&\quad + \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2(A - A_0)}{\partial x^2} - 2p(x) \frac{\partial(B - B_0)}{\partial t} - q(x)(A - A_0) - \frac{\partial^2(A - A_0)}{\partial x^2} \right\} \cos(\lambda t) dt
\end{aligned}$$

$$+\int_0^x \left\{ \frac{\partial^2 (B-B_0)}{\partial x^2} + 2p(x) \frac{\partial (A-A_0)}{\partial t} - q(x)(B-B_0) - \frac{\partial^2 (B-B_0)}{\partial t^2} \right\} \sin(\lambda t) dt. \quad (5.2.35)$$

Böylece

$$\begin{aligned} & \varphi'' - (2\lambda p(x) + q(x))\varphi + \lambda^2 \varphi = \\ & = \varphi_0'' - (2\lambda p(x) + q(x))\varphi_0 + \lambda^2 \varphi_0 \\ & + \frac{2d(A(x,x) - A_0(x,x))}{dx} \cos(\lambda x) + \frac{2d(B(x,x) - B_0(x,x))}{dx} \sin(\lambda x) \\ & - 2p(x)(A(x,x) - A_0(x,x)) \sin(\lambda x) + 2p(x)(B(x,x) - B_0(x,x)) \cos(\lambda x) \\ & + \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2 (A-A_0)}{\partial x^2} - 2p(x) \frac{\partial (B-B_0)}{\partial t} - q(x)(A-A_0) - \frac{\partial^2 (A-A_0)}{\partial x^2} \right\} \cos(\lambda t) dt \\ & + \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2 (B-B_0)}{\partial x^2} + 2p(x) \frac{\partial (A-A_0)}{\partial t} - q(x)(B-B_0) - \frac{\partial^2 (B-B_0)}{\partial t^2} \right\} \sin(\lambda t) dt, \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

dir. $\varphi_0(x, \lambda)$, (5.2.3)'ün çözümü olduğundan

$$\varphi_0'' - (2\lambda p(x) + q(x))\varphi_0 + \lambda^2 \varphi_0 = (q_0(x) - q(x))\varphi_0,$$

olur. (5.2.10)'dan

$$\begin{aligned} (q_0(x) - q(x))\varphi_0 &= (q_0(x) - q(x)) \cos[\lambda x - \alpha(x)] + (q_0(x) - q(x)) \int_0^x A_0(x, t) \cos(\lambda t) dt \\ &+ (q_0(x) - q(x)) \int_0^x B_0(x, t) \sin(\lambda t) dt, \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$[p^2(x) + q(x)] \cos \alpha(x) = \frac{2d(A(x,x))}{dx} + 2p(x)B(x,x) - p'(x) \sin \alpha(x), \quad (5.2.38)$$

$$[p^2(x) + q(x)] \sin \alpha(x) = \frac{2d(B(x,x))}{dx} - 2p(x)A(x,x) + p'(x) \cos \alpha(x), \quad (5.2.39)$$

$$[p^2(x) + q_0(x)] \cos \alpha(x) = \frac{2d(A_0(x,x))}{dx} + 2p(x)B_0(x,x) - p'(x) \sin \alpha(x), \quad (5.2.40)$$

$$[p^2(x) + q_0(x)] \sin \alpha(x) = \frac{2d(B_0(x,x))}{dx} - 2p(x)A_0(x,x) + p'(x) \cos \alpha(x). \quad (5.2.41)$$

şeklinde [107]. (5.2.38) ile (5.2.40) ve (5.2.39) ile (5.2.41) taraf tarafa çıkarılırsa

$$[q(x) - q_0(x)] \cos \alpha(x) = \frac{2d(A(x,x) - A_0(x,x))}{dx} + 2p(x)(B(x,x) - B_0(x,x)), \quad (5.2.42)$$

$$[q(x) - q_0(x)] \sin \alpha(x) = \frac{2d(B(x,x) - B_0(x,x))}{dx} - 2p(x)(A(x,x) - A_0(x,x)). \quad (5.2.43)$$

(5.2.42) ve (5.2.43)'den

$$\begin{aligned}
& (q(x) - q_0(x)) \cos[\lambda x - \alpha(x)] = \\
& = \left[\frac{2d(A(x, x) - A_0(x, x))}{dx} + 2p(x)(B(x, x) - B_0(x, x)) \right] \cos(\lambda x) \\
& + \left[\frac{2d(B(x, x) - B_0(x, x))}{dx} - 2p(x)(A(x, x) - A_0(x, x)) \right] \sin(\lambda x),
\end{aligned} \tag{5.2.44}$$

bulunur. (5.2.37) ve (5.2.44), (5.2.36)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \varphi'' - (2\lambda p(x) + q(x))\varphi + \lambda^2 \varphi = \\
& = \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2(A - A_0)}{\partial x^2} - 2p(x) \frac{\partial(B - B_0)}{\partial t} - q(x)A(x, t) + q_0(x)A_0(x, t) - \frac{\partial^2(A - A_0)}{\partial x^2} \right\} \cos(\lambda t) dt \\
& + \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2(B - B_0)}{\partial x^2} + 2p(x) \frac{\partial(A - A_0)}{\partial t} - q(x)B(x, t) + q_0(x)B_0(x, t) - \frac{\partial^2(B - B_0)}{\partial t^2} \right\} \sin(\lambda t) dt.
\end{aligned}$$

Son bağıntıda (5.2.15) gözönüne alınırsa

$$\varphi'' - (2\lambda p(x) + q(x))\varphi + \lambda^2 \varphi = 0,$$

elde edilir. Böylece $\varphi(x, \lambda)$, (5.2.1) denkleminin çözümüdür. Ayrıca (5.2.28)'de $x = 0$

alınırsa $\varphi(0, \lambda) = \varphi_0(0, \lambda) = 1$ bulunur. İkinci şartın ispatı ileride ele alınacaktır.

Şimdi $F_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, 2$) fonksiyonlarını kullanarak $A(x, t)$, $A_0(x, t)$, $B(x, t)$ ve $B_0(x, t)$ için bazı formüller elde edilecektir.

(5.2.17)'deki ilk denklemden

$$A(x, t) = -F_{11}(x, t) \cos \alpha(x) - F_{12}(x, t) \sin \alpha(x) - \int_0^x A(x, \xi) F_{11}(\xi, t) d\xi - \int_0^x B(x, \xi) F_{12}(\xi, t) d\xi,$$

ve (5.2.19) ve (5.2.20)'den son denklem

$$\begin{aligned}
A(x, t) = & -\frac{1}{\pi} \cos(c_0 x) \cos(c_0 t) \cos \alpha(x) - \frac{1}{\pi} \sin(c_0 x) \cos(c_0 t) \sin \alpha(x) \\
& - \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \cos((n + c_0)x) \cos((n + c_0)t) \right\} \cos \alpha(x) \\
& - \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \sin((n + c_0)x) \cos((n + c_0)t) \right\} \sin \alpha(x) \\
& - \frac{1}{\pi} \int_0^x A(x, \xi) \cos(c_0 \xi) \cos(c_0 t) d\xi - \frac{1}{\pi} \int_0^x B(x, \xi) \sin(c_0 \xi) \cos(c_0 t) d\xi \\
& - \int_0^x A(x, \xi) \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \cos(\lambda_n \xi) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \cos((n + c_0)\xi) \cos((n + c_0)t) \right\} d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^x B(x, \xi) \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \sin(\lambda_n \xi) \cos(\lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \sin((n+c_0)\xi) \cos((n+c_0)t) \right\} d\xi, \\
A(x, t) = & - \frac{\cos(c_0 t)}{\pi} \left\{ \cos(c_0 x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x, \xi) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\cos(\lambda_n t)}{2\alpha_n} \left\{ \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x, \xi) \cos(\lambda_n \xi) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\cos((n+c_0)t)}{\pi} \left\{ \cos((n+c_0)x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x, \xi) \cos((n+c_0)\xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\cos((n+c_0)t)}{\pi} \left\{ \int_0^x B(x, \xi) \sin((n+c_0)\xi) d\xi \right\}, \tag{5.2.45}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde (5.2.23), (5.2.24) ve (5.2.25)'den

$$\begin{aligned}
A_0(x, t) = & - \frac{\cos(c_0 t)}{\pi} \left\{ \cos(c_0 x - \alpha(x)) + \int_0^x A_0(x, \xi) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x B_0(x, \xi) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\cos(\lambda_n t)}{2\alpha_{n,0}} \left\{ \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x A_0(x, \xi) \cos(\lambda_n \xi) d\xi + \int_0^x B_0(x, \xi) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\cos((n+c_0)t)}{\pi} \left\{ \cos((n+c_0)x - \alpha(x)) + \int_0^x A_0(x, \xi) \cos((n+c_0)\xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\cos((n+c_0)t)}{\pi} \left\{ \int_0^x B_0(x, \xi) \sin((n+c_0)\xi) d\xi \right\}, \tag{5.2.46}
\end{aligned}$$

olur. (5.2.45) ve (5.2.46) taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
A(x, t) - A_0(x, t) = & - \frac{\cos(c_0 t)}{\pi} \left\{ \int_0^x (A - A_0) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x (B - B_0) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\cos(\lambda_n t)}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x \left(\frac{A}{\alpha_n} - \frac{A_0}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\cos(\lambda_n t)}{2} \left\{ \int_0^x \left(\frac{B}{\alpha_n} - \frac{B_0}{\alpha_{n,0}} \right) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\cos((n+c_0)t)}{\pi} \left\{ \int_0^x (A - A_0) \cos((n+c_0)\xi) d\xi + \int_0^x (B - B_0) \sin((n+c_0)\xi) d\xi \right\} \tag{5.2.47}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
A(x, t) - A_0(x, t) = & -\frac{\cos(c_0 t)}{\pi} \left\{ \int_0^x (A - A_0) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x (B - B_0) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\cos(\lambda_n t)}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x \left(\frac{A}{\alpha_n} - \frac{A_0}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\cos(\lambda_n t)}{2} \left\{ \int_0^x \left(\frac{B}{\alpha_n} - \frac{B_0}{\alpha_{n,0}} \right) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \int_0^x (A - A_0) \left\{ \sum_n \frac{1}{\pi} \cos((n + c_0)\xi) \cos((n + c_0)t) \right\} d\xi \\
& + \int_0^x (B - B_0) \left\{ \sum_n \frac{1}{\pi} \sin((n + c_0)\xi) \cos((n + c_0)t) \right\} d\xi, \tag{5.2.48}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (5.2.17), (5.2.21) ve (5.2.22)'den $B(x, t)$ ve $B_0(x, t)$ için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\begin{aligned}
B(x, t) = & -\frac{\sin(c_0 t)}{\pi} \left\{ \cos(c_0 x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x, \xi) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\sin(\lambda_n t)}{2\alpha_n} \left\{ \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x, \xi) \cos(\lambda_n \xi) d\xi + \int_0^x B(x, \xi) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\sin((n + c_0)t)}{\pi} \left\{ \cos((n + c_0)x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x, \xi) \cos((n + c_0)\xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\sin((n + c_0)t)}{\pi} \left\{ \int_0^x B(x, \xi) \sin((n + c_0)\xi) d\xi \right\}, \tag{5.2.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0(x, t) = & -\frac{\sin(c_0 t)}{\pi} \left\{ \cos(c_0 x - \alpha(x)) + \int_0^x A_0(x, \xi) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x B_0(x, \xi) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\sin(\lambda_n t)}{2\alpha_n} \left\{ \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x A_0(x, \xi) \cos(\lambda_n \xi) d\xi + \int_0^x B_0(x, \xi) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\sin((n + c_0)t)}{\pi} \left\{ \cos((n + c_0)x - \alpha(x)) + \int_0^x A_0(x, \xi) \cos((n + c_0)\xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\sin((n + c_0)t)}{\pi} \left\{ \int_0^x B_0(x, \xi) \sin((n + c_0)\xi) d\xi \right\}. \tag{5.2.50}
\end{aligned}$$

(5.2.49) ve (5.2.50)'den faydalanarak

$$\begin{aligned}
B(x,t) - B_0(x,t) = & -\frac{\sin(c_0 t)}{\pi} \left\{ \int_0^x (A - A_0) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x (B - B_0) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\sin(\lambda_n t)}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x \left(\frac{A}{\alpha_n} - \frac{A_0}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\sin(\lambda_n t)}{2} \left\{ \int_0^x \left(\frac{B}{\alpha_n} - \frac{B_0}{\alpha_{n,0}} \right) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \sum_n \frac{\sin((n+c_0)t)}{\pi} \left\{ \int_0^x (A - A_0) \cos((n+c_0)\xi) d\xi + \int_0^x (B - B_0) \sin((n+c_0)\xi) d\xi \right\},
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
B(x,t) - B_0(x,t) = & -\frac{\sin(c_0 t)}{\pi} \left\{ \int_0^x (A - A_0) \cos(c_0 \xi) d\xi + \int_0^x (B - B_0) \sin(c_0 \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\sin(\lambda_n t)}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n x - \alpha(x)) + \int_0^x \left(\frac{A}{\alpha_n} - \frac{A_0}{\alpha_{n,0}} \right) \cos(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& - \sum_n \frac{\sin(\lambda_n t)}{2} \left\{ \int_0^x \left(\frac{B}{\alpha_n} - \frac{B_0}{\alpha_{n,0}} \right) \sin(\lambda_n \xi) d\xi \right\} \\
& + \int_0^x (A - A_0) \left\{ \sum_n \frac{1}{\pi} \cos((n+c_0)\xi) \sin((n+c_0)t) \right\} d\xi \\
& + \int_0^x (B - B_0) \left\{ \sum_n \frac{1}{\pi} \sin((n+c_0)\xi) \sin((n+c_0)t) \right\} d\xi. \tag{5.2.51}
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Diğer taraftan (5.2.6) ve (5.2.10)'da λ yerine λ_n alınırsa

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda_n) &= \cos[\lambda_n x - \alpha(x)] + \int_0^x A(x,t) \cos(\lambda_n t) dt + \int_0^x B(x,t) \sin(\lambda_n t) dt, \\
\varphi_0(x, \lambda_n) &= \cos[\lambda_n x - \alpha(x)] + \int_0^x A_0(x,t) \cos(\lambda_n t) dt + \int_0^x B_0(x,t) \sin(\lambda_n t) dt.
\end{aligned} \tag{5.2.52}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_n \frac{1}{\pi} \cos((n+c_0)x) \cos((n+c_0)t) &= \frac{1}{\pi} \cos(c_0 x) \cos(c_0 t) + \delta(x-t) \cos(c_0(x-t)), \\
\sum_n \frac{1}{\pi} \cos((n+c_0)x) \sin((n+c_0)t) &= \frac{1}{\pi} \cos(c_0 x) \sin(c_0 t) + \delta(x-t) \sin(c_0(x-t)), \\
\sum_n \frac{1}{\pi} \sin((n+c_0)x) \sin((n+c_0)t) &= \frac{1}{\pi} \sin(c_0 x) \sin(c_0 t) + \delta(x-t) \cos(c_0(x-t)),
\end{aligned} \tag{5.2.53}$$

olduğundan, (5.2.52) kullanılarak, (5.2.48) ve (5.2.51) denklemleri

$$A(x, t) - A_0(x, t) = -\sum_n \frac{\cos(\lambda_n t)}{2} \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n)}{\alpha_{n,0}} \right), \quad (5.2.54)$$

$$B(x, t) - B_0(x, t) = -\sum_n \frac{\sin(\lambda_n t)}{2} \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n)}{\alpha_{n,0}} \right), \quad (5.2.55)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2.28) de λ yerine λ_n alınırsa

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) + \int_0^x (A(x, t) - A_0(x, t)) \cos(\lambda_n t) dt + \int_0^x (B(x, t) - B_0(x, t)) \sin(\lambda_n t) dt.$$

Son denklemde (5.2.54) ve (5.2.55) gözönüne alınırsa

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) - \frac{x}{2} \sum_n \left(\frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x, \lambda_n)}{\alpha_{n,0}} \right). \quad (5.2.56)$$

Şimdi teorem 5.2.2' deki ikinci şartın sağlandığını gösterelim. (5.2.29) da $x=0$ alınırsa

$$\varphi'(0, \lambda) = \varphi'_0(0, \lambda) + (A(0, 0) - A_0(0, 0)).$$

(5.2.17) ve (5.2.23)'de $x=t=0$ alınırsa

$$\varphi'(0, \lambda) = \varphi'_0(0, \lambda) - (F_{11}(0, 0) - \tilde{F}_{11}(0, 0)).$$

(5.2.19) ve (5.2.24)'den

$$\varphi'(0, \lambda) = \varphi'_0(0, \lambda) - \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right),$$

elde edilir. $\varphi'(0, \lambda) = h$, $\varphi'_0(0, \lambda) = h_0$ olduğundan

$$h = h_0 - \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n,0}} \right), \quad (5.2.57)$$

bulunur.

Diğer taraftan $n \rightarrow \infty$ iken

$$((A(\pi, \pi) - A_0(\pi, \pi)) \cos(c_0 \pi) - ((B(\pi, \pi) - B_0(\pi, \pi)) \sin(c_0 \pi) = H_0 - H, \quad (5.2.58)$$

şeklindedir [106]. (5.2.54) ve (5.2.55)'de $x=\pi$ alınırsa son eşitlik

$$-\sum_n \frac{\cos((\lambda_n - c_0) \pi)}{2} \left(\frac{\varphi(\pi, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{\alpha_{n,0}} \right) = H_0 - H,$$

şeklinde olur. $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n \rightarrow n + c_0$ olduğundan

$$H = H_0 + \sum_n \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\varphi(\pi, \lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{\alpha_{n,0}} \right), \quad (5.2.59)$$

bulunur.

α_n normlaştırıcı sabiti için aşağıdaki lemma sağlanır.

Lemma 5.2.3

$$\alpha_n = \frac{1}{2\lambda_n} |\varphi(\pi, \lambda_n)| |\dot{D}(\lambda_n)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.60)$$

dir. Burada $\dot{D}(\lambda_n)$, $D(\lambda_n)$ 'nin λ_n 'e göre türevini belirtir.

İspat Keyfi λ ve μ için (5.2.1)'den

$$\begin{aligned} -\varphi''(x, \lambda) + (2\lambda p(x) + q(x))\varphi(x, \lambda) &= \lambda^2 \varphi(x, \lambda), \\ -\varphi''(x, \mu) + (2\mu p(x) + q(x))\varphi(x, \mu) &= \mu^2 \varphi(x, \mu), \end{aligned}$$

ve buradan

$$\varphi''(x, \lambda)\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \lambda)\varphi''(x, \mu) = \left[(\mu^2 - \lambda^2) - 2p(x)(\mu - \lambda) \right] \varphi(x, \lambda)\varphi(x, \mu),$$

olup

$$\frac{d}{dx} [\varphi'(x, \lambda)\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \lambda)\varphi'(x, \mu)] = (\mu - \lambda) [(\mu + \lambda) - 2p(x)] \varphi(x, \lambda)\varphi(x, \mu).$$

yazılabilir. Son ifadede 0'dan π 'ye integral alınırsa

$$\int_0^\pi [(\lambda + \mu) - 2p(x)] \varphi(x, \lambda)\varphi(x, \mu) dx = \frac{\varphi'(\pi, \lambda)\varphi(\pi, \mu) - \varphi(\pi, \lambda)\varphi'(\pi, \mu)}{\mu - \lambda}.$$

Böylece $\mu \rightarrow \lambda$ iken

$$2 \int_0^\pi (\lambda - p(x)) \varphi^2(x, \lambda) dx = \varphi'(\pi, \lambda) \dot{\varphi}(\pi, \lambda) - \varphi(\pi, \lambda) \dot{\varphi}'(\pi, \lambda).$$

elde edilir. $\lambda = \lambda_n$ alınırsa $\varphi'(\pi, \lambda_n) = -H\varphi(\pi, \lambda_n)$ olduğundan

$$2\lambda_n \alpha_n = -\varphi(\pi, \lambda_n) [\dot{\varphi}'(\pi, \lambda_n) + H\dot{\varphi}(\pi, \lambda_n)] = -\varphi(\pi, \lambda_n) \dot{D}(\lambda_n).$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\lambda_n} |\varphi(\pi, \lambda_n)| |\dot{D}(\lambda_n)|,$$

bulunur. Burada $D(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda)$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi (5.2.60) formülü kullanılarak (5.2.57) ve (5.2.59) aşağıdaki formda yazılabilir:

$$h = h_0 - \sum_n \frac{\lambda_n}{|\dot{D}(\lambda_n)|} \left(\frac{1}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - \frac{1}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)|} \right), \quad (5.2.61)$$

$$H = H_0 + \sum_n \frac{(-1)^n \lambda_n}{|\dot{D}(\lambda_n)|} \left(\frac{\varphi(\pi, \lambda_n)}{|\varphi(\pi, \lambda_n)|} - \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)|} \right). \quad (5.2.62)$$

(5.2.1)-(5.2.2) ve (5.2.3)-(5.2.4) problemlerinin spektrumları sırasıyla $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ olsun. Bu durumda $F_{ij}(x, t)$ ve $\tilde{F}_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, 2$) fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_{11}(x, t) - \tilde{F}_{11}(x, t) = \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \cos(\mu_n x) \cos(\mu_n t) - \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) \right\}, \quad (5.2.63)$$

$$F_{12}(x, t) - \tilde{F}_{12}(x, t) = \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \sin(\mu_n x) \cos(\mu_n t) - \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_n t) \right\}, \quad (5.2.64)$$

$$F_{21}(x, t) - \tilde{F}_{21}(x, t) = \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \cos(\mu_n x) \sin(\mu_n t) - \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \cos(\lambda_n x) \sin(\lambda_n t) \right\}, \quad (5.2.65)$$

$$F_{22}(x, t) - \tilde{F}_{22}(x, t) = \sum_n \left\{ \frac{1}{2\alpha_n} \sin(\mu_n x) \sin(\mu_n t) - \frac{1}{2\alpha_{n,0}} \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n t) \right\}. \quad (5.2.66)$$

(5.2.57) ve (5.2.60)'dan

$$h = h_0 - \sum_n \left(\frac{\mu_n}{|\varphi(\pi, \mu_n)| |\dot{\varepsilon}(\mu_n)|} - \frac{\lambda_n}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)| |\dot{D}(\lambda_n)|} \right). \quad (5.2.67)$$

Burada $D(\lambda) = \varphi'_0(\pi, \lambda) + H_0 \varphi_0(\pi, \lambda)$, $\varepsilon(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H \varphi(\pi, \lambda)$ dir. Bu durumda

$$A(x, t) - A_0(x, t) = - \sum_n \left[\frac{\cos(\mu_n t)}{2\alpha_n} \varphi(x, \mu_n) - \frac{\cos(\lambda_n t)}{2\alpha_{n,0}} \varphi(x, \lambda_n) \right], \quad (5.2.68)$$

$$B(x, t) - B_0(x, t) = - \sum_n \left[\frac{\sin(\mu_n t)}{2\alpha_n} \varphi(x, \mu_n) - \frac{\sin(\lambda_n t)}{2\alpha_{n,0}} \varphi(x, \lambda_n) \right], \quad (5.2.69)$$

ve (5.2.58) formülü bu durumda da geçerlidir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken (5.2.68) ve (5.2.69)'dan

$$A(\pi, \pi) - A_0(\pi, \pi) = - \sum_n (-1)^n \left(\frac{\varphi(\pi, \mu_n)}{2\alpha_n} - \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{2\alpha_{n,0}} \right), \quad (5.2.70)$$

$$H = H_0 + \sum_n (-1)^n \left(\frac{\mu_n \varphi(\pi, \mu_n)}{|\varphi(\pi, \mu_n)| |\dot{\varepsilon}(\mu_n)|} - \frac{\lambda_n \varphi_0(\pi, \lambda_n)}{|\varphi_0(\pi, \lambda_n)| |\dot{D}(\lambda_n)|} \right). \quad (5.2.71)$$

6. DİRAC SİSTEMİ İÇİN İSOSPEKTRAL PROBLEM

6.1 İsospektral Problem

$p_0(x)$ ve $q_0(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ aralığında reel diferensiyellenebilir fonksiyonlar, h_0 ve H_0 sabit reel sayılar olsun.

$$By' + Q_0(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (6.1.1)$$

$$\begin{aligned} y_2(0) - h_0 y_1(0) &= 0, \\ y_2(\pi) + H_0 y_1(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Dirac sistemi gözönüne alınsın. Burada

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) & q_0(x) \\ q_0(x) & -p_0(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

dir. $\varphi_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{01}(x, \lambda) \\ \varphi_{02}(x, \lambda) \end{pmatrix}$, (6.1.2)'nin $\varphi_{01}(0, \lambda) = 1$, $\varphi_{02}(0, \lambda) = h_0$ şartını sağlayan çözümünü olsun. Böylece her λ için $\varphi_0(x, \lambda)$, (6.1.2)'nin ilk sınır şartını sağlar. (6.1.1)-(6.1.2) probleminin özdeğerleri

$$\varphi_{02}(\pi, \lambda) + H_0 \varphi_{01}(\pi, \lambda) = 0, \quad (6.1.3)$$

denkleminin kökleridir. Karşılık gelen özfonksiyonlar $\varphi_0(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ dır.

$$F(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \varphi_0(x, \lambda) \varphi_0^T(y, \lambda), \quad (6.1.4)$$

matrisinin bileşenleri sürekli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir. Ayrıca bu serinin x ve y 'ye göre y ye göre düzgün yakınsak olduğu kabul edilsin. Burada

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t) F(t, y) dt = 0, \quad 0 \leq y < x \leq \pi, \quad (6.1.5)$$

integral denklem sistemi ele alınır. $F(x, y)$, y 'nin bilinmeyen matris fonksiyonudur, x parametredir ve $K(x, y)$ (y 'nin bilinmeyen matris fonksiyonu olarak) bilinmeyen matris fonksiyonu olarak bilinir [113].

Teorem 6.1.1 Her $n \geq 0$ için

$$\alpha_{n,0}^2 = \int_0^\pi \{ \varphi_{01}^2(x, \lambda) + \varphi_{02}^2(x, \lambda) \} dx, \quad (6.1.6)$$

olsun. Böylece (6.1.5) integral denklem sistemi her x , $0 \leq x \leq \pi$ için bir tek çözüme sahiptir [113].

İspat

$$h_x(y) + \int_0^x F(t, y) h_x(t) dt = 0, \quad (6.1.7)$$

homojen denklem sisteminin sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. (6.1.7) denklem sistemi sağdan $h_x(y)$ ile çarpılıp ve y 'ye göre 0'dan x 'e integre edilirse

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x F(t, y) h_x(t) h_x(y) dt dy = 0,$$

elde edilir. Burada (6.1.4)'den

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,0}^2} \varphi_0(t, \lambda) \varphi_0^T(y, \lambda) \right] h_x(t) h_x(y) dt dy = 0,$$

ve Dirac-Delta fonksiyonunun tanımından

$$\int_0^x h_x^2(y) dy + \int_0^x \int_0^x I \delta(t - y) h_x(t) h_x(y) dt dy = 0,$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^x h_x^2(y) dy = 0,$$

olup $h_x(y) = 0$ elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 6.1.2 (6.1.5) integral denklem sisteminin çözümü

$$B \frac{\partial K}{\partial x} + Q(x) K(x, y) = - \frac{\partial K}{\partial y} B + Q_0(y) K(x, y), \quad (6.1.8)$$

diferensiyel denklem sistemini sağlar. Burada

$$Q(x) = Q_0(x) + BK(x, x) - K(x, x)B, \quad (6.1.9)$$

ile tanımlıdır. Ayrıca $K(x, y)$,

$$BK(x, x) - K(x, x)B = Q(x) - Q_0(x), \quad (6.1.10)$$

$$K_{21}(x, 0) = K_{11}(x, 0) = 0, \quad (6.1.11)$$

şartlarını sağlar [113].

İspat

$$J = K(x, y) + F(x, y) + \int_0^x K(x, t)F(t, y)dt = 0, \quad (0 \leq y \leq x \leq \pi),$$

olsun. Böylece $Q(x)$, (6.1.9) açılımına sahip ve $Q_0(y)$ (6.1.1) sisteminin potansiyeli olmak üzere

$$\mathfrak{J} = BJ_x + J_y B + Q(x)J - Q_0(y)J = 0, \quad (6.1.12)$$

şeklinde tanımlansın.

$$BJ_x = B \frac{\partial K}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial x} + BK(x, x)F(x, y) + \int_0^x B \frac{\partial}{\partial x} (K(x, t)) F(t, y) dt,$$

$$J_y B = \frac{\partial K}{\partial y} B + \frac{\partial F}{\partial y} B + \int_0^x K(x, t) \frac{\partial}{\partial y} (F(t, y)) B dt,$$

ifadesinin sağında bulunan integral için $\frac{\partial}{\partial y} (F(t, y)) B$ ifadesi yerine $-B \frac{\partial}{\partial t} (F(t, y))$ alınır-
sa ve elde edilen integralde kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned} -\int_0^x K(x, t) B \frac{\partial}{\partial t} (F(t, y)) dt &= -[K(x, t) B F(t, y)] \Big|_0^x + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (K(x, t)) B F(t, y) dt, \\ -\int_0^x K(x, t) B \frac{\partial}{\partial t} (F(t, y)) dt &= -K(x, x) B F(x, y) + K(x, 0) B F(0, y) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (K(x, t)) B F(t, y) dt, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\mathfrak{J}$ 'nin tanımından $K(x, 0) = F(x, 0) = 0$ olup $K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = 0$ ve $K(x, 0) B F(0, y) = 0$ bulunur. Böylece

$$J_y B = \frac{\partial K}{\partial y} B + \frac{\partial F}{\partial y} B - K(x, x) B F(x, y) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (K(x, t)) B F(t, y) dt,$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Q(x)J &= Q(x)K + Q(x)F + Q(x) \int_0^x K(x, t)F(t, y)dt, \\ -Q_0(y)J &= -Q_0(y)K - Q_0(y)F - Q_0(y) \int_0^x K(x, t)F(t, y)dt, \end{aligned}$$

olup bu ifadeler (6.1.12)'de yerine yazılırsa

$$\mathfrak{J} = \left[B \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} B + Q(x)K - Q_0(y)K \right] + \int_0^x \left[B \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial t} B + Q(x)K - Q_0(t)K \right] F(t, y) dt = 0,$$

elde edilir. Diğer taraftan $K(x, y)$, (6.1.10) ve (6.1.11) şartlarını sağlar. Bu ise yukarıdaki son denklem için

$$h_x(y) = B \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} B + Q(x)K - Q_0(y)K,$$

matris fonksiyonunun (6.1.7) homojen integral denkleminin çözümü olması ve böylece sıfıra eşit olması demektir. Bu (6.1.8) denklem sisteminin sağlandığını ispatlar.

Teorem 6.1.3 Eğer $K(x, y)$, (6.1.5) integral denklem sisteminin bir çözümü ve böylece (6.1.8)-(6.1.10)-(6.1.11) probleminin bir çözümü ise,

1) Her λ kompleks sayısı için

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda) dt, \quad (6.1.13)$$

vektör-değerli fonksiyonu

$$Q(x) = Q_0(x) + BK(x, x) - K(x, x)B,$$

olmak üzere

$$By' + Q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (6.1.14)$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümüdür.

2) $\varphi(x, \lambda)$ vektör-değerli fonksiyonu

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h_0 = h, \quad (6.1.15)$$

şartlarını sağlar [134].

İspat Teoremin birinci şıkkının ispatı açıktır [113]. İkinci şıkkın sağlandığını gösterelim.

(6.1.13)'den

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{01}(x, \lambda) \\ \varphi_{02}(x, \lambda) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} K_{11}(x, t) & K_{12}(x, t) \\ K_{21}(x, t) & K_{22}(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(t, \lambda) \\ \varphi_{02}(t, \lambda) \end{pmatrix} dt,$$

olup

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_{01}(x, \lambda) + \int_0^x [K_{11}(x, t) \varphi_{01}(t, \lambda) + K_{12}(x, t) \varphi_{02}(t, \lambda)] dt,$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = \varphi_{02}(x, \lambda) + \int_0^x [K_{21}(x, t) \varphi_{01}(t, \lambda) + K_{22}(x, t) \varphi_{02}(t, \lambda)] dt,$$

bulunur. Yukarıdaki denklemlerde $x = 0$ alınırsa,

$$\varphi_1(0, \lambda) = \varphi_{01}(0, \lambda) = 1 \text{ ve } \varphi_2(0, \lambda) = \varphi_{02}(0, \lambda) = h_0 = h,$$

elde edilir.

Teorem 6.1.4 $\lambda_n, n \geq 0$, (6.1.1) ve (6.1.2) probleminin özdeğerleri olsun. Böylece λ yerine λ_n alınarak (6.1.13) ile tanımlı $\varphi(x, \lambda_n)$ vektör-değerli fonksiyonları

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \int_0^x \varphi_0^T(t, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_n) dt, \quad (6.1.16)$$

formülü ile tanımlanabilir [134].

İspat (6.1.4) ve (6.1.5) integral denklem sisteminden

$$\begin{aligned} K(x, t) &= -F(x, t) - \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_0(x, \lambda_k) \varphi_0^T(t, \lambda_k) - \int_0^x K(x, s) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_0(s, \lambda_k) \varphi_0^T(t, \lambda_k) \right) ds \\ &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\varphi_0(x, \lambda_k) + \int_0^x K(x, s) \varphi_0(s, \lambda_k) ds \right] \varphi_0^T(t, \lambda_k), \end{aligned}$$

bulunur. (6.1.13) gözönüne alınırsa

$$K(x, t) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \varphi_0^T(x, \lambda_k). \quad (6.1.17)$$

(6.1.13)'de λ yerine λ_n alınırsa

$$\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_0(x, \lambda_n) + \int_0^x K(x, t) \varphi_0(t, \lambda_n) dt,$$

olup (6.1.17)'den

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda_n) &= \varphi_0(x, \lambda_n) + \int_0^x \left(-\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \varphi_0^T(x, \lambda_k) \right) \varphi_0(t, \lambda_n) dt, \\ \varphi(x, \lambda_n) &= \varphi_0(x, \lambda_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x, \lambda_k) \int_0^x \varphi_0^T(t, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_n) dt, \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

(6.1.13) ve (6.1.16) formülleri, Dirac sistemi için isospektral problemi gözönüne almaya olanak sağlar. Şimdi h_0 ve H_0 'ın sonlu olduğu varsayalım. Teorem 6.1.3'de gösterildiği gibi, $\varphi(x, \lambda_n), n \geq 0$ vektör-değerli fonksiyonları (6.1.14) denklem sisteminin çözümleridir ve (6.1.15) şartlarını sağlarlar ve böylece sınır şartı

$$h = h_0, \quad (6.1.18)$$

olmak üzere

$$\varphi_2(0, \lambda) - h\varphi_1(0, \lambda) = 0,$$

şeklindedir. (6.1.1)-(6.1.2) isospektral probleminin elde edilmesi için $\varphi(x, \lambda_n)$ 'in $x = \pi$ noktasında bazı reel H 'lar için

$$\varphi_2(\pi, \lambda) + H\varphi_1(\pi, \lambda) = 0,$$

sınır şartını sağladığını göstermek gerekir. Ayrıca H için bir formül elde edilecektir.

(6.1.16)'da $x = \pi$ alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi(\pi, \lambda_n) &= \varphi_0(\pi, \lambda_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(\pi, \lambda_k) \int_0^{\pi} \varphi_0^T(t, \lambda_k) \varphi_0(t, \lambda_n) dt, \\ \varphi(\pi, \lambda_n) &= \varphi_0(\pi, \lambda_n) - c_n \alpha_{n,0}^2 \varphi(\pi, \lambda_n), \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_{n,0}^2 &= \int_0^{\pi} \varphi_0^T(t, \lambda_n) \varphi_0(t, \lambda_n) dt \\ &= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(t, \lambda_n) & \varphi_{02}(t, \lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(t, \lambda_n) \\ \varphi_{02}(t, \lambda_n) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi} \{ \varphi_{01}^2(t, \lambda_n) + \varphi_{02}^2(t, \lambda_n) \} dt, \end{aligned}$$

dir. (6.1.19) formülünden

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = \frac{\varphi_0(\pi, \lambda_n)}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2}, \quad (6.1.20)$$

elde edilir. (6.1.20) açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_1(\pi, \lambda_n) \\ \varphi_2(\pi, \lambda_n) \end{pmatrix} &= \frac{1}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} \begin{pmatrix} \varphi_{01}(\pi, \lambda_n) \\ \varphi_{02}(\pi, \lambda_n) \end{pmatrix}, \\ \varphi_1(\pi, \lambda_n) &= \frac{1}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} \varphi_{01}(\pi, \lambda_n), \quad \varphi_2(\pi, \lambda_n) = \frac{1}{1 + c_n \alpha_{n,0}^2} \varphi_{02}(\pi, \lambda_n). \end{aligned}$$

$\varphi_{02}(\pi, \lambda_n) + H_0 \varphi_{01}(\pi, \lambda_n) = 0$ olup $\varphi_{02}(\pi, \lambda_n) = -H_0 \varphi_{01}(\pi, \lambda_n)$ yukarıdaki son ifadede yerine yazılırsa

$$\varphi_2(\pi, \lambda_n) + H_0 \varphi_1(\pi, \lambda_n) = 0,$$

bulunur. Buradan

$$H = H_0, \quad (6.1.21)$$

olarak elde edilir [134].

$$\begin{aligned} By' + Q(x)y &= \lambda y, \\ y_2(0) - hy_1(0) &= 0, \\ y_2(\pi) + Hy_1(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

problemi gözönüne alınsın. $\varphi(x, \lambda_n)$, (6.1.22)'nin $\varphi_1(0, \lambda) = 1$, $\varphi_2(0, \lambda) = h$ şartlarını sağlayan çözümüdür. (6.1.22)'nin $\dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_{-0} < 0 < \lambda_{+0} < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ özdeğerleri tanıma göre

$$D(\lambda) = \varphi_2(\pi, \lambda) + H\varphi_1(\pi, \lambda) = 0,$$

denkleminin kökleridir. Bu da (6.1.22)'nin ikinci şartından elde edilir.

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \{ \varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n) \} dx, \quad n \geq 0,$$

olsun.

Lemma 6.1.5

$$\alpha_n^2 = \varphi_1(\pi, \lambda_n) \dot{D}(\lambda_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.23)$$

dir. Burada $\dot{D}(\lambda_n)$, $D(\lambda_n)$ 'nin λ_n 'e göre türevini belirtir [135].

İspat

$$B\varphi'(x, \lambda) + Q(x)\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda), \quad (6.1.24)$$

denkleminde λ 'ya göre türev alınırsa

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda) + Q(x)\dot{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \lambda\dot{\varphi}(x, \lambda), \quad (6.1.25)$$

olur. (6.1.24) $\dot{\varphi}(x, \lambda)$ ile, (6.1.25) de $\varphi(x, \lambda)$ ile skaler olarak çarpılırsa, sırasıyla,

$$B\varphi'(x, \lambda)\dot{\varphi}(x, \lambda) + Q(x)\varphi(x, \lambda)\dot{\varphi}(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda)\dot{\varphi}(x, \lambda),$$

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) + Q(x)\dot{\varphi}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) = \varphi^2(x, \lambda) + \lambda\dot{\varphi}(x, \lambda)\varphi(x, \lambda),$$

elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılırsa

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda)\varphi(x, \lambda) - B\varphi'(x, \lambda)\dot{\varphi}(x, \lambda) = \varphi^2(x, \lambda),$$

bulunur. $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında

$$\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle = \langle B\dot{\varphi}'(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle - \langle B\varphi'(x, \lambda), \dot{\varphi}(x, \lambda) \rangle,$$

şeklinde tanımlanır.

$$B\dot{\varphi}'(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}'_1 \\ \dot{\varphi}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}'_2 \\ -\dot{\varphi}'_1 \end{pmatrix},$$

$$B\varphi'(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_2 \\ -\varphi'_1 \end{pmatrix},$$

ifadeleri skalar olarak gözönüne alınırsa

$$\langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle = \langle (\dot{\varphi}'_2, -\dot{\varphi}'_1), (\varphi_1, \varphi_2) \rangle - \langle (\varphi'_2, -\varphi'_1), (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \rangle,$$

bulunur. Bu eşitlikte $[0, \pi]$ aralığında $\lambda = \lambda_n$ alınıp integrallenirse,

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \{ \varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n) \} dx,$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= \int_0^\pi \{ \dot{\varphi}'_2(x, \lambda_n) \varphi_1(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}'_1(x, \lambda_n) \varphi_2(x, \lambda_n) \} dx \\ &\quad - \int_0^\pi \{ \varphi'_2(x, \lambda_n) \dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) - \varphi'_1(x, \lambda_n) \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) \} dx, \end{aligned} \quad (6.1.26)$$

bulunur. İlk integralde kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \{ \dot{\varphi}'_2(x, \lambda_n) \varphi_1(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}'_1(x, \lambda_n) \varphi_2(x, \lambda_n) \} dx &= \left[\varphi_1(x, \lambda_n) \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1(x, \lambda_n) \varphi_2(x, \lambda_n) \right] \Big|_0^\pi \\ &\quad + \int_0^\pi \{ \dot{\varphi}'_1(x, \lambda_n) \varphi'_2(x, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(x, \lambda_n) \varphi'_1(x, \lambda_n) \} dx. \end{aligned}$$

Bu ifade (6.1.26)'da yerine yazılırsa

$$\alpha_n^2 = \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_2(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_2(0, \lambda_n) \varphi_1(0, \lambda_n) + \dot{\varphi}_1(0, \lambda_n) \varphi_2(0, \lambda_n)$$

bulunur. Burada $\varphi_1(0, \lambda_n) = 1$, $\varphi_2(0, \lambda_n) = h$ alınırsa,

$$\alpha_n^2 = \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n) - \dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_2(\pi, \lambda_n),$$

olur. Burada $\varphi_2(\pi, \lambda_n) + H\varphi_1(\pi, \lambda_n) = 0$ olup $\varphi_2(\pi, \lambda_n) = -H\varphi_1(\pi, \lambda_n)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= \dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n) + H\dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n) \varphi_1(\pi, \lambda_n), \\ &= \varphi_1(\pi, \lambda_n) [\dot{\varphi}_2(\pi, \lambda_n) + H\dot{\varphi}_1(\pi, \lambda_n)] \\ &= \varphi_1(\pi, \lambda_n) \dot{D}(\lambda_n), \end{aligned}$$

elde edilir.

7. ARALIĞIN İÇ NOKTASINDA SÜREKSİZLİĞE SAHİP DİRAC OPERATÖRÜ

7.1 Sınır Şartları Özdeğere Bağımlı Dirac Sistemi

Bu bölümde sınır şartları özdeğere bağımlı Dirac sistemi gözönüne alınmıştır. Sonra gözönüne alınan problem için bilinen bazı yöntemler kullanılarak çözümlerin varlık ve teklik sonuçları elde edilmiştir.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$l(\mathbf{u}) := B\mathbf{u}'(x) - P(x)\mathbf{u}(x) = \lambda\mathbf{u}(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \quad (7.1.1)$$

veya

$$\begin{aligned} u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] &= \lambda u_1(x), \\ u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] &= -\lambda u_2(x), \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Dirac sisteminin

$$l_1\mathbf{u} := \lambda u_1(-1) + (\lambda - a)u_2(-1) = 0, \quad (7.1.3)$$

$$l_2\mathbf{u} := u_1(1) - u_2(1) = 0 \quad (7.1.4)$$

özdeğere bağımlı sınır şartlarından ve $x = 0$ süreksizlik noktasındaki

$$\begin{aligned} l_3\mathbf{u} &:= u_1(0^-) = \delta u_1(0^+), \\ l_4\mathbf{u} &:= u_2(0^-) = \delta u_2(0^+). \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

şartlarını sağlayan sınır değer geçiş problemi gözönüne alınacaktır. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$ spektral parametre; $p(0^\pm) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} p(x)$, $q(0^\pm) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} q(x)$ sonlu limitlerine sahip $p(x)$ ve $q(x)$ reel-değerli fonksiyonları $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralığında sürekli, $\delta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ve $\delta \neq 0$ dır [87].

7.2 Operatörün Teorik Tanımlanması

Burada önce gözönüne alınan probleme uygun bir Hilbert uzayı, sonra da bu uzayda verilmiş sınır-değer-geçiş problemi ile aynı özdeğerlere sahip lineer operatör oluşturulacaktır. (7.1.1)-(7.1.5) probleminin teorik tanımlanması için $L = L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$,

$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ olmak üzere $H = L \oplus \mathbb{C}^2$ Hilbert uzayında,

$U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3)^T$, $V(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3)^T \in H$ elemanlarının iç çarpımı

$$\langle U, V \rangle_H := \int_{-1}^0 \mathbf{u}^T(x) \bar{\mathbf{v}}(x) dx + \delta^2 \int_0^1 \mathbf{u}^T(x) \bar{\mathbf{v}}(x) dx - \frac{1}{a} u_3 \bar{v}_3, \quad (7.2.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada T matris transpozunu belirtir ve $u_i, v_i \in L_2(-1, 1)$, $i = 1, 2$,

$u_3, v_3 \in \mathbb{C}$ dir.

$$\begin{aligned} R_{-1}(\mathbf{u}) &= -au_2(-1), \\ \tilde{R}_{-1}(\mathbf{u}) &= u_1(-1) + u_2(-1) \end{aligned}$$

olsun.

$$[-1, 0] \text{ ve } (0, 1] \text{ aralığında, sırasıyla,} \\ u_{(1)}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [-1, 0) \\ u(0^-), & x = 0 \end{cases}, \quad u_{(2)}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in (0, 1] \\ u(0^+), & x = 0 \end{cases}, \quad (7.2.2)$$

fonksiyonları tanımlansın.

$$A: D(A) \subseteq H \rightarrow H \text{ operatörü tanımlansın. } U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3)^T \in D(A)$$

için $u_{1(i)}, u_{2(i)} (i = 1, 2)$, $[-1, 0]$ ve $(0, 1]$ aralığında süreklidirler ve $u_i(0^\pm)$ sonlu limitlerine

sahiptirler; $l(\mathbf{u}) \in H$, $l_1 \mathbf{u} = l_3 \mathbf{u} = l_4 \mathbf{u} = 0$ ve

$$AU = \begin{pmatrix} u'_2 - p(x)u_1 - q(x)u_2 \\ u'_1 + q(x)u_1 - p(x)u_2 \\ -R_{-1}(\mathbf{u}) \\ u_1(1) - u_2(1) \end{pmatrix}, \quad U \in D(A),$$

dir. Böylece (7.1.1)-(7.1.5) problemi operatör formunda

$$AU = \lambda U.$$

şeklinde yazılır. (7.1.1)-(7.1.5) probleminin özdeğer ve özfonksiyonları, A operatörünün, sırasıyla, özdeğeri ve karşılık gelen öz elemanın ilk bileşenleri olarak tanımlanır [87].

Teorem 7.2.1 A operatörü simetriktir [87].

İspat $U, V \in D(A)$ için (7.2.1) formülünden

$$\begin{aligned} \langle AU, V \rangle_H &= \langle U, AV \rangle_H + W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^-) - W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; -1) + \delta^2 W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 1) \\ &\quad - \delta^2 W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^+) - \frac{1}{a} R_{-1}(\mathbf{u}) \tilde{R}_{-1}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

dir. Burada

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; x) = u_2(x) \bar{v}_1(x) - u_1(x) \bar{v}_2(x).$$

$\mathbf{u}$ ve $\bar{\mathbf{v}}$ (7.1.4) sınır şartını ve (7.1.5) geçiş şartlarını sağladığından, sırasıyla,

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 1) = 0, \quad (7.2.4)$$

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^-) = \delta^2 W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^+), \quad (7.2.5)$$

dir. Ayrıca,

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; -1) - \frac{1}{a} R_{-1}(\mathbf{u}) \tilde{R}_{-1}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{a} R_{-1}(\mathbf{v}) \tilde{R}_{-1}(\mathbf{u}), \quad (7.2.6)$$

olduğundan (7.2.4), (7.2.5) ve (7.2.6), (7.2.3)'de yerine yazılırsa

$$\langle AU, V \rangle_H = \langle U, AV \rangle_H,$$

elde edilir.

Lemma 7.2.2 (7.1.1)-(7.1.5) probleminin bütün özdeğerleri reeldir [87].

İspat $\bar{\lambda}_0$ ve $\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$, sırasıyla, (7.1.1)-(7.1.5) probleminin reel olmayan özdeğeri ve bu

özdeğere karşılık gelen aşikar olmayan özfonksiyonu olsun. (7.1.2) denklemlerinden,

$$\frac{d}{dx} \{u_1(x) \bar{u}_2(x) - \bar{u}_1(x) u_2(x)\} = (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \{ |u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2 \}, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1],$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralıklarında integrallenirse

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \int_{-1}^0 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx &= u_1(0^-) \bar{u}_2(0^-) - \bar{u}_1(0^-) u_2(0^-) \\ &\quad - [u_1(-1) \bar{u}_2(-1) - \bar{u}_1(-1) u_2(-1)], \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \int_0^1 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx &= u_1(1) \bar{u}_2(1) - \bar{u}_1(1) u_2(1) \\ &\quad - [u_1(0^+) \bar{u}_2(0^+) - \bar{u}_1(0^+) u_2(0^+)], \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

bulunur. (7.1.3), (7.1.4) sınır şartları ve (7.1.5) geçiş şartlarından, sırasıyla,

$$\begin{aligned} u_1(-1) \bar{u}_2(-1) - \bar{u}_1(-1) u_2(-1) &= a (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0), \\ u_1(1) \bar{u}_2(1) - \bar{u}_1(1) u_2(1) &= 0, \\ u_1(0^-) \bar{u}_2(0^-) - \bar{u}_1(0^-) u_2(0^-) &= \delta^2 [u_1(0^+) \bar{u}_2(0^+) - \bar{u}_1(0^+) u_2(0^+)], \end{aligned}$$

olur. Son üç bağıntı ve (7.2.7), (7.2.8) gözönüne alınırsa $\bar{\lambda}_0 \neq \lambda_0$ için

$$\int_{-1}^0 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx + \delta^2 \int_0^1 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx = -a, \quad (7.2.9)$$

dir. Bu ise

$$\int_{-1}^0 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx + \delta^2 \int_0^1 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx > 0,$$

ve $a > 0$ şartı ile çelişir. Bununla ispat tamamlanır.

Teorem 7.2.3 λ_1 ve λ_2 , (7.1.1)-(7.1.5) probleminin iki farklı özdeğeri olmak üzere bu problemin karşılık gelen $\mathbf{u}(x, \lambda_1)$ ve $\bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları

$$\int_{-1}^0 \mathbf{u}^T(x, \lambda_1) \bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2) dx + \delta^2 \int_0^1 \mathbf{u}^T(x, \lambda_1) \bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2) dx + \frac{1}{a} \tilde{R}_{-1}(\mathbf{u}) \tilde{R}_{-1}(\bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (7.2.10)$$

anlamında ortogonaldır [87].

İspat Yukarıdaki denklem $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralıklarında integrallenirse ve $\mathbf{u}(x, \lambda_1)$ ve $\bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2)$, (7.1.1)-(7.1.5) probleminin özfonksiyonları olduğundan $\bar{\lambda}_1 \neq \lambda_2$ için (7.2.10) formülü elde edilir.

Şimdi (7.1.2)'nin çözümlerinin özel bir temel sistemi oluşturulsun. [113]'deki Teorem 1.1'den, (7.1.2) nin temel sistem oluşturan iki çözümü

$$\varphi(., \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(., \lambda) \\ \varphi_2(., \lambda) \end{pmatrix}, \quad \psi(., \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(., \lambda) \\ \psi_2(., \lambda) \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Burada

$$\varphi_1(x, \lambda) = \begin{cases} \varphi_{11}(x, \lambda), & x \in [-1, 0] \\ \varphi_{12}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad \varphi_2(x, \lambda) = \begin{cases} \varphi_{21}(x, \lambda), & x \in [-1, 0] \\ \varphi_{22}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad (7.2.11)$$

$$\psi_1(x, \lambda) = \begin{cases} \psi_{11}(x, \lambda), & x \in [-1, 0] \\ \psi_{12}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad \psi_2(x, \lambda) = \begin{cases} \psi_{21}(x, \lambda), & x \in [-1, 0] \\ \psi_{22}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad (7.2.12)$$

fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] = \lambda u_1(x), \quad (7.2.13)$$

$$u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] = -\lambda u_2(x), \quad x \in (-1, 0),$$

$$u_1(-1) = (\lambda - a), \quad u_2(-1) = -\lambda. \quad (7.2.14)$$

başlangıç-değer problemi gözönüne alınsın. [113] Teorem 1.1'den bu problem, her sabit

$x \in [-1, 0]$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ 'ye göre tam fonksiyon olan bir tek $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x, \lambda) \\ \varphi_{21}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümüne sa-

hiptir. Benzer olarak, [113] Teorem 1.1'deki metod uygulanarak

$$u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] = \lambda u_1(x), \quad (7.2.15)$$

$$u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] = -\lambda u_2(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u_1(1) = 1, \quad u_2(1) = 1, \quad (7.2.16)$$

probleminin her sabit $x \in [0, 1]$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ parametresine göre tam fonksiyon olan bir tek

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \psi_{12}(x, \lambda) \\ \psi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix} \text{ çözümlüne sahip olduğu görülür.}$$

Şimdi $\varphi_{i1}(x, \lambda)$, $i = 1, 2$ cinsinden $\varphi_{i2}(x, \lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] &= \lambda u_1(x), \\ u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] &= -\lambda u_2(x), \quad x \in (0, 1), \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

$$u_1(0) = \frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0, \lambda), \quad u_2(0) = \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0, \lambda), \quad (7.2.18)$$

başlangıç değer problemi her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bir tek $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x, \lambda) \\ \varphi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümlüne sahiptir.

Benzer olarak $\psi_{i2}(x, \lambda)$, $i = 1, 2$ cinsinden $\psi_{i1}(x, \lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] &= \lambda u_1(x), \\ u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] &= -\lambda u_2(x), \quad x \in (-1, 0), \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

$$u_1(0) = \delta \psi_{12}(0, \lambda), \quad u_2(0) = \delta \psi_{22}(0, \lambda), \quad (7.2.20)$$

başlangıç değer problemi her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bir tek $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x, \lambda) \\ \psi_{21}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümlüne sahiptir.

(7.2.18) ve (7.2.20) şartlarından bu çözümlerin (7.1.5) geçiş şartlarını sağladığı bulunur.

Böylece bu çözümler tüm $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ için λ 'ya göre tam fonksiyonlardır.

$\varphi(\cdot, \lambda)$ ve $\psi(\cdot, \lambda)$ fonksiyonlarının $W(\varphi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda))$ Wronskiyanı

$$W(\varphi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\cdot, \lambda) & \varphi_2(\cdot, \lambda) \\ \psi_1(\cdot, \lambda) & \psi_2(\cdot, \lambda) \end{vmatrix},$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} w_i(\lambda) &= W(\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)) \\ &= \varphi_{1i}(x, \lambda)\psi_{2i}(x, \lambda) - \varphi_{2i}(x, \lambda)\psi_{1i}(x, \lambda), \quad x \in [-1, 0) \quad (x \in (0, 1]), \end{aligned}$$

Wronskiyanının $x \in [-1, 0) \quad (x \in (0, 1])$ a göre bağımsız ve tam fonksiyonlar oldukları açıktır.

(7.2.18) ve (7.2.20) bağıntıları gözönüne alınırsa her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda),$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir.

Sonuç 7.2.4 $w_1(\lambda)$ ve $w_2(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları çakışır [87].

Bu durumda $w(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu

$$w(\lambda) = w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda), \quad (7.2.21)$$

şeklinde olur.

Lemma 7.2.5 (7.1.1)-(7.1.5) probleminin tüm özdeğerleri, sadece $w(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır ve $w(\lambda)$ nın her sıfırı tek katlıdır (basittir) [87].

İspat $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları (7.1.3) sınır şartı ve (7.1.5) geçiş şartlarını sağladığından, (7.1.1)-(7.1.5) probleminin özdeğerlerini bulmak için, (7.1.4) sınır şartında $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları yerine yazılırsa bu denklemin kökleri bulunur.

(7.1.2) den $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda \neq \mu$ için

$$\frac{d}{dx} \{ \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(x, \mu) - \varphi_1(x, \mu) \varphi_2(x, \lambda) \} = (\mu - \lambda) \{ \varphi_1(x, \lambda) \varphi_1(x, \mu) + \varphi_2(x, \lambda) \varphi_2(x, \mu) \},$$

dir. Yukarıdaki denklem $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralıklarında integrallenirse ve (7.2.14), (7.2.18)

ve (7.2.20) başlangıç şartları gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left[\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{21}(x, \mu) - \varphi_{11}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda) \right] \Big|_{-1}^0 + \delta^2 \left[\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{21}(x, \mu) - \varphi_{11}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda) \right] \Big|_0^1 = \\ & = (\mu - \lambda) \int_{-1}^0 (\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{11}(x, \mu) + \varphi_{21}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda)) dx \\ & + (\mu - \lambda) \delta^2 \int_0^1 (\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{11}(x, \mu) + \varphi_{21}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda)) dx, \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

bulunur. (7.2.22)'nin her iki tarafı $(\lambda - \mu)$ ile bölünürse ve $\mu \rightarrow \lambda$ iken,

$$\begin{aligned} & a + \varphi_{22}(1, \lambda) \frac{\partial \varphi_{12}(1, \lambda)}{\partial \lambda} - \varphi_{12}(1, \lambda) \frac{\partial \varphi_{22}(1, \lambda)}{\partial \lambda} = \\ & = - \int_{-1}^0 (|\varphi_{11}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{21}(x, \lambda)|^2) dx - \delta^2 \int_0^1 (|\varphi_{12}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{22}(x, \lambda)|^2) dx, \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

bağıntısı bulunur. Böylece

$$w(\lambda) = -\delta^2 (\varphi_{12}(1, \lambda) - \varphi_{22}(1, \lambda)), \quad (7.2.24)$$

denkleminin sadece basit sıfırlara sahip olduğu gösterilmiş olunur.

Tersi varsayılın; yani λ^* , (7.2.24)'ün çift katlı kökü olsun. Bu takdirde

$$\varphi_{12}(1, \lambda^*) - \varphi_{22}(1, \lambda^*) = 0, \quad (7.2.25)$$

$$\frac{\partial \varphi_{12}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi_{22}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0, \quad (7.2.26)$$

olur. Bu denklemlerden

$$\varphi_{22}(1, \lambda^*) \frac{\partial \varphi_{12}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} - \varphi_{12}(1, \lambda^*) \frac{\partial \varphi_{22}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0, \quad (7.2.27)$$

bulunur. Böylece (7.2.27) ve (7.2.23) birlikte gözönüne alınırsa, $\lambda = \lambda^*$ için

$$\int_{-1}^0 \left(|\varphi_{11}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{21}(x, \lambda)|^2 \right) dx + \delta^2 \int_0^1 \left(|\varphi_{12}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{22}(x, \lambda)|^2 \right) dx = -a, \quad (7.2.28)$$

elde edilir. Buradan $\varphi_1(x, \lambda^*) = \varphi_2(x, \lambda^*) = 0$ elde edilir ki bu da çelişkidir. Lemmanın ispatı tamamlanır.

7.3 Asimptotik Formüller

$\{\varphi(., \lambda_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, (7.1.2)-(7.1.5) probleminin $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektör fonksiyonlarının dizisi olsun. $\psi(x, \lambda)$ nın (7.1.4)-(7.1.5)'i sağladığı gözönüne alınırsa özdeğerler

$$w(\lambda) \equiv \psi_{11}(1, \lambda) - \psi_{21}(1, \lambda) = 0, \quad (7.3.1)$$

ile tanımlıdır. Tüm özdeğerler basit olduğundan $\{\psi(., \lambda_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$,

$$\psi(x, \lambda_n) = c_n \varphi(x, \lambda_n), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.3.2)$$

şeklinde $\{\varphi(., \lambda_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ile bağıntılı diğer özvektör-fonksiyonlar dizisidir. Burada $c_n \neq 0$ 'ler sabitlerdir. Özdeğerler reel olduğundan özvektör-fonksiyonları reel-değerli olarak alınabilir.

Şimdi sabitlerin değişim yöntemi kullanılırsa, (7.1.2), (7.1.3), (7.2.11) ve (7.2.14) denklemleri, [113],

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(x, \lambda) &= \lambda \sin(\lambda(x+1)) + (\lambda - a) \cos(\lambda(x+1)) \\ &\quad - \int_{-1}^x \{p(t) \sin(\lambda(x-t)) + q(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad - \int_{-1}^x \{q(t) \sin(\lambda(x-t)) - p(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(x, \lambda) &= -\lambda \cos(\lambda(x+1)) + (\lambda - a) \sin(\lambda(x+1)) \\ &\quad + \int_{-1}^x \{p(t) \cos(\lambda(x-t)) - q(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_{-1}^x \{q(t) \cos(\lambda(x-t)) + p(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) - \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) \\ &\quad - \int_0^x \{p(t) \sin(\lambda(x-t)) + q(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad - \int_0^x \{q(t) \sin(\lambda(x-t)) - p(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt,\end{aligned}\quad (7.3.5)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{22}(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) + \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) \\ &\quad + \int_0^x \{p(t) \cos(\lambda(x-t)) - q(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_0^x \{q(t) \cos(\lambda(x-t)) + p(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt,\end{aligned}\quad (7.3.6)$$

denklemlerine dönüştürülür.

$|\lambda| \rightarrow \infty$ için $\varphi_{1i}(x, \lambda)$ ve $\varphi_{2i}(x, \lambda)$ ($i=1,2$) çözümleri $x, x \in [-1,0) \cup (0,1]$ e göre düzgün olan aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir [113]:

$$\varphi_{11}(x, \lambda) = \lambda \sin(\lambda(x+1)) + (\lambda - a) \cos(\lambda(x+1)) + O(1/\lambda), \quad (7.3.7)$$

$$\varphi_{21}(x, \lambda) = -\lambda \cos(\lambda(x+1)) + (\lambda - a) \sin(\lambda(x+1)) + O(1/\lambda), \quad (7.3.8)$$

$$\varphi_{12}(x, \lambda) = (1/\delta) \varphi_{11}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) - (1/\delta) \varphi_{21}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) + O(1/\lambda), \quad (7.3.9)$$

$$\varphi_{22}(x, \lambda) = (1/\delta) \varphi_{11}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) + (1/\delta) \varphi_{21}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) + O(1/\lambda). \quad (7.3.10)$$

Özdeğerlerin asimptotik formülü için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 7.3.1 (7.1.2)-(7.1.5) probleminin λ_n özdeğerleri aşağıdaki asimptotik formülü sağlar [87]:

$$\lambda_n = \frac{a(1+n\pi)}{2(a+1)} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.3.11)$$

İspat (7.1.2)-(7.1.5) probleminin özdeğerleri

$$\varphi_{12}(1, \lambda) - \varphi_{22}(1, \lambda) = 0, \quad (7.3.12)$$

denkleminin kökü olduğundan (7.3.12)'de (7.3.9) ve (7.3.10) asimptotik formüllerinden

$$\left[\frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \cos \lambda - \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \sin \lambda \right] - \left[\frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \sin \lambda + \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \cos \lambda \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0,$$

elde edilir ve buradan

$$\varphi_{11}(0^-, \lambda)(\cos \lambda - \sin \lambda) - \varphi_{21}(0^-, \lambda)(\cos \lambda + \sin \lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0, \quad (7.3.13)$$

olur. (7.3.7) ve (7.3.8)'den (7.3.13) denklemi

$$a \tan(2\lambda) + 2\lambda - a + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0, \quad (7.3.14)$$

dir. Büyük $|\lambda|$ 'lar için (7.3.14) denklemi

$$2\lambda_n = 1 - \frac{2}{a}\lambda_n + n\pi + \delta_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.3.15)$$

şeklinde çözümlere sahiptir [113]. Bu değerler (7.3.14)'de yerine koyulursa,

$$\tan \delta_n = O(1/n) \text{ yani } \delta_n = O(1/n),$$

elde edilir. Böylece özdeğerler için (7.3.11) asimptotik formülü bulunur.

(7.3.11) formülü kullanılarak, $\varphi(\cdot, \lambda_n)$ öz-vektör-fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formüller elde edilir [87]:

$$\varphi(x, \lambda_n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x, \lambda_n) \\ \varphi_{21}(x, \lambda_n) \end{pmatrix}, & x \in [-1, 0) \\ \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x, \lambda_n) \\ \varphi_{22}(x, \lambda_n) \end{pmatrix}, & x \in (0, 1], \end{cases}$$

olmak üzere

$$\varphi(x, \lambda_n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_n \sin(\lambda_n(x+1)) + (\lambda_n - a) \cos(\lambda_n(x+1)) + O(1/n) \\ -\lambda_n \cos(\lambda_n(x+1)) + (\lambda_n - a) \sin(\lambda_n(x+1)) + O(1/n) \end{pmatrix}, & x \in [-1, 0) \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} (\lambda_n \sin(\lambda_n(x+1)) + (\lambda_n - a) \cos(\lambda_n(x+1))) + O(1/n) \\ \frac{1}{\delta} (-\lambda_n \cos(\lambda_n(x+1)) + (\lambda_n - a) \sin(\lambda_n(x+1))) + O(1/n) \end{pmatrix}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

7.4 Sınır Şartları Özdeğere Bağımlı Dirac Sistemi için İkinci Tür Problem

$$l(\mathbf{u}) := B\mathbf{u}'(x) - P(x)\mathbf{u}(x) = \lambda\mathbf{u}(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \quad (7.4.1)$$

veya

$$\begin{aligned} u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] &= \lambda u_1(x), \\ u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] &= -\lambda u_2(x), \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Dirac sisteminin

$$l_1 \mathbf{u} := u_1(-1) + \lambda u_2(-1) = 0, \quad (7.4.3)$$

$$l_2 \mathbf{u} := \cos \alpha u_1(1) + \sin \alpha u_2(1) = 0, \quad (7.4.4)$$

özdeğere bağımlı sınır şartlarından ve $x = 0$ noktasındaki

$$\begin{aligned} l_3 \mathbf{u} &:= u_1(0^-) = \delta u_1(0^+), \\ l_4 \mathbf{u} &:= u_2(0^-) = \delta u_2(0^+). \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

geçiş şartlarını sağlayan sınır değer geçiş problemi gözönüne alınacaktır. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$ spektral parametre, $p(x)$ ve $q(x)$ reel-değerli fonksiyonları $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralığında sürekli ve $p(0^\pm) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} p(x)$, $q(0^\pm) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} q(x)$ sonlu limitlerine sahiptir, $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, \pi)$, $\delta \neq 0$ dır.

7.5 İkinci Tür Problem için Operatörün Teorik Tanımlanması

(7.4.1)-(7.4.5) probleminin teorik yorumu için $L = L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ olmak üzere $H = L \oplus \mathbb{C}^2$ Hilbert uzayında

$U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3)^T$ ve $V(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3)^T$ elemanlarının iç çarpımı

$$\langle U, V \rangle_H := \int_{-1}^0 \mathbf{u}^T(x) \bar{\mathbf{v}}(x) dx + \delta^2 \int_0^1 \mathbf{u}^T(x) \bar{\mathbf{v}}(x) dx - u_3 \bar{v}_3, \quad (7.5.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada T matris transpozunu belirtir ve $u_i, v_i \in L_2(-1, 1)$, $i = 1, 2$, $u_3, v_3 \in \mathbb{C}$ dir.

$$R_{-1}(\mathbf{u}) = u_1(-1),$$

$$\tilde{R}_{-1}(\mathbf{u}) = u_2(-1),$$

olsun. $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralığında, sırasıyla,

$$u_{(1)}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in [-1, 0) \\ u(0^-), & x = 0 \end{cases}, \quad u_{(2)}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in (0, 1] \\ u(0^+), & x = 0 \end{cases}, \quad (7.5.2)$$

fonksiyonları tanımlansın.

$A: D(A) \subseteq H \rightarrow H$ operatörü tanımlansın. $U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3)^T \in D(A)$

için $u_{1(i)}, u_{2(i)}$ ($i = 1, 2$), $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralığında sürekli dirler ve $u_i(0^\pm)$ sonlu limitlerine sahiptirler; $l(\mathbf{u}) \in H$, $l_1 \mathbf{u} = l_3 \mathbf{u} = l_4 \mathbf{u} = 0$ ve

$$AU = \begin{pmatrix} u_2' - p(x)u_1 - q(x)u_2 \\ u_1' + q(x)u_1 - p(x)u_2 \\ -R_{-1}(\mathbf{u}) \\ \cos \alpha u_1(1) + \sin \alpha u_2(1) \end{pmatrix}, \quad U \in D(A).$$

Böylece (7.4.1)-(7.4.5) problemi operatör formunda

$$AU = \lambda U.$$

şeklinde yazılır. (7.4.1)-(7.4.5) probleminin özdeğer ve özfonksiyonları, A operatörünün, sırasıyla, özdeğeri ve karşılık gelen öz elemanının ilk bileşenleri olarak tanımlanır.

Teorem 7.5.1 A operatörü simetriktir.

İspat $U, V \in D(A)$ için (7.5.1) formülünden

$$\begin{aligned} \langle AU, V \rangle_H = \langle U, AV \rangle_H + W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^-) - W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; -1) + \delta^2 W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 1) \\ - \delta^2 W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^+) - R_{-1}(\mathbf{u}) \tilde{R}_{-1}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

dir. Burada

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; x) = u_2(x) \bar{v}_1(x) - u_1(x) \bar{v}_2(x).$$

$\mathbf{u}$ ve $\bar{\mathbf{v}}$, (7.4.4) sınır şartı ve (7.4.5) geçiş şartlarını sağladığından, sırasıyla,

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 1) = 0, \quad (7.5.4)$$

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^-) = \delta^2 W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; 0^+), \quad (7.5.5)$$

olur. Ayrıca,

$$W_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}; -1) - R_{-1}(\mathbf{u}) \tilde{R}_{-1}(\mathbf{v}) = -R_{-1}(\mathbf{v}) \tilde{R}_{-1}(\mathbf{u}), \quad (7.5.6)$$

olduğundan (7.5.4), (7.5.5) ve (7.5.6), (7.5.3)'de yerine yazılırsa

$$\langle AU, V \rangle_H = \langle U, AV \rangle_H,$$

elde edilir.

Lemma 7.5.2 (7.4.1)-(7.4.5) probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat $\bar{\lambda}_0$ ve $\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$, sırasıyla, (7.4.1)-(7.4.5) probleminin reel olmayan özdeğeri ve bu

özdeğere karşılık gelen aşikar olmayan özfonksiyonu olsun. (7.4.2) denklemlerinden,

$$\frac{d}{dx} \{u_1(x) \bar{u}_2(x) - \bar{u}_1(x) u_2(x)\} = (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \{ |u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2 \}, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1],$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralıklarında integrallenirse

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \int_{-1}^0 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx &= u_1(0^-) \bar{u}_2(0^-) - \bar{u}_1(0^-) u_2(0^-) \\ &\quad - [u_1(-1) \bar{u}_2(-1) - \bar{u}_1(-1) u_2(-1)], \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) \int_0^1 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx &= u_1(1) \bar{u}_2(1) - \bar{u}_1(1) u_2(1) \\ &\quad - [u_1(0^+) \bar{u}_2(0^+) - \bar{u}_1(0^+) u_2(0^+)], \end{aligned} \quad (7.5.8)$$

bulunur. (7.4.3), (7.4.4) sınır şartları ve (7.4.5) geçiş şartlarından, sırasıyla,

$$u_1(-1) \bar{u}_2(-1) - \bar{u}_1(-1) u_2(-1) = \bar{\lambda}_0 - \lambda_0,$$

$$u_1(1) \bar{u}_2(1) - \bar{u}_1(1) u_2(1) = 0,$$

$$u_1(0^-) \bar{u}_2(0^-) - \bar{u}_1(0^-) u_2(0^-) = \delta^2 [u_1(0^+) \bar{u}_2(0^+) - \bar{u}_1(0^+) u_2(0^+)],$$

olur. Son üç bağıntı ve (7.5.7), (7.5.8) gözönüne alınırsa $\bar{\lambda}_0 \neq \lambda_0$ için

$$\int_{-1}^0 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx + \delta^2 \int_0^1 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx = -1, \quad (7.5.9)$$

dir. Bu ise

$$\int_{-1}^0 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx + \delta^2 \int_0^1 (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) dx > 0,$$

ile çelişir.

Teorem 7.5.3 λ_1 ve λ_2 , (7.4.1)-(7.4.5) probleminin iki farklı özdeğeri olmak üzere bu problemin karşılık gelen $\mathbf{u}(x, \lambda_1)$ ve $\bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları

$$\int_{-1}^0 \mathbf{u}^T(x, \lambda_1) \bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2) dx + \delta^2 \int_0^1 \mathbf{u}^T(x, \lambda_1) \bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2) dx + \tilde{R}_{-1}(\mathbf{u}) \tilde{R}_{-1}(\bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (7.5.10)$$

anlamında ortogonaldır.

İspat Yukarıdaki denklem $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralıklarında integrallenirse ve $\mathbf{u}(x, \lambda_1)$ ve $\bar{\mathbf{v}}(x, \lambda_2)$, (7.4.1)-(7.4.5)'nin özfonksiyonları olduğundan $\bar{\lambda}_1 \neq \lambda_2$ için (7.5.10) formülü elde edilir.

Şimdi (7.4.2)'nin çözümleri için özel bir temel sistem oluşturulsun. [113] Teorem 1.1'den, (7.4.2) nin temel sistem oluşturan iki çözümü

$$\varphi(., \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(., \lambda) \\ \varphi_2(., \lambda) \end{pmatrix}, \quad \psi(., \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_1(., \lambda) \\ \psi_2(., \lambda) \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Burada

$$\varphi_1(x, \lambda) = \begin{cases} \varphi_{11}(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \varphi_{12}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad \varphi_2(x, \lambda) = \begin{cases} \varphi_{21}(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \varphi_{22}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad (7.5.11)$$

$$\psi_1(x, \lambda) = \begin{cases} \psi_{11}(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \psi_{12}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad \psi_2(x, \lambda) = \begin{cases} \psi_{21}(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \psi_{22}(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}, \quad (7.5.12)$$

fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] = \lambda u_1(x), \quad (7.5.13)$$

$$u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] = -\lambda u_2(x), \quad x \in (-1, 0),$$

$$u_1(-1) = \lambda, \quad u_2(-1) = -1. \quad (7.5.14)$$

başlangıç-değer problemi gözönüne alınsın. [113] Teorem 1.1'den bu problem, her sabit

$x \in [-1, 0]$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ 'ye göre tam fonksiyon olan bir tek $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x, \lambda) \\ \varphi_{21}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümüne

sahiptir. Benzer olarak, [113] Teorem 1.1'deki metod uygulanarak

$$u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] = \lambda u_1(x), \quad (7.5.15)$$

$$u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] = -\lambda u_2(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u_1(1) = \sin \alpha, \quad u_2(1) = -\cos \alpha, \quad (7.5.16)$$

probleminin her sabit $x \in [0, 1]$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ parametresine göre tam fonksiyon olan bir tek

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \psi_{12}(x, \lambda) \\ \psi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümüne sahip olduğu görülür.

Şimdi $\varphi_{i1}(x, \lambda), i = 1, 2$ cinsinden $\varphi_{i2}(x, \lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] = \lambda u_1(x), \quad (7.5.17)$$

$$u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] = -\lambda u_2(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$u_1(0) = \frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0, \lambda), \quad u_2(0) = \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0, \lambda), \quad (7.5.18)$$

başlangıç değer problemi her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bir tek $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x, \lambda) \\ \varphi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümüne sahiptir.

Benzer olarak $\psi_{i2}(x, \lambda), i = 1, 2$ cinsinden $\psi_{i1}(x, \lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$u_2'(x) - [p(x)u_1(x) + q(x)u_2(x)] = \lambda u_1(x), \quad (7.5.19)$$

$$u_1'(x) + [q(x)u_1(x) - p(x)u_2(x)] = -\lambda u_2(x), \quad x \in (-1, 0),$$

$$u_1(0) = \delta \psi_{12}(0, \lambda), \quad u_2(0) = \delta \psi_{22}(0, \lambda), \quad (7.5.20)$$

başlangıç değer problemi her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bir tek $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x, \lambda) \\ \psi_{21}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümüne sahiptir.

(7.5.18) ve (7.5.20) şartlarından bu çözümler (7.4.5) geçiş şartlarını sağlar. Böylece bu çözümler tüm $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ için λ 'ya göre tam fonksiyonlardır.

$\varphi(., \lambda)$ ve $\psi(., \lambda)$ fonksiyonlarının $W(\varphi(., \lambda), \psi(., \lambda))$ Wronskiyanı

$$W(\varphi(., \lambda), \psi(., \lambda)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(., \lambda) & \varphi_2(., \lambda) \\ \psi_1(., \lambda) & \psi_2(., \lambda) \end{vmatrix},$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} w_i(\lambda) &= W(\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)) \\ &= \varphi_{1i}(x, \lambda)\psi_{2i}(x, \lambda) - \varphi_{2i}(x, \lambda)\psi_{1i}(x, \lambda), \quad x \in [-1, 0) \quad (x \in (0, 1]), \end{aligned}$$

Wronskiyanının $x \in [-1, 0) \quad (x \in (0, 1])$ a göre bağımsız ve tam fonksiyonlar oldukları açıktır. (7.5.18) ve (7.5.20) bağıntıları gözönüne alınırsa her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda),$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir.

Sonuç 7.5.4 $w_1(\lambda)$ ve $w_2(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları çakışır.

Bu durumda $w(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu

$$w(\lambda) = w_1(\lambda) = \delta^2 w_2(\lambda), \quad (7.5.21)$$

şeklinde gözönüne alınabilir.

Lemma 7.5.5 (7.4.1)-(7.4.5) probleminin tüm özdeğerleri, sadece $w(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır ve $w(\lambda)$ nın her sıfırı tek katlıdır (basittir).

İspat $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları (7.4.3) sınır şartı ve (7.4.5) geçiş şartlarını sağladığından, (7.4.1)-(7.4.5) probleminin özdeğerlerini bulmak için, (7.4.4) sınır şartında $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları yerine yazılırsa bu denklemin kökleri bulunur.

(7.4.2) den $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda \neq \mu$ için

$$\frac{d}{dx} \{ \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(x, \mu) - \varphi_1(x, \mu) \varphi_2(x, \lambda) \} = (\mu - \lambda) \{ \varphi_1(x, \lambda) \varphi_1(x, \mu) + \varphi_2(x, \lambda) \varphi_2(x, \mu) \}.$$

Yukarıdaki denklem $[-1, 0]$ ve $[0, 1]$ aralıklarında integrallenirse ve (7.5.14), (7.5.18) ve (7.5.20) başlangıç şartları gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left[\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{21}(x, \mu) - \varphi_{11}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda) \right] \Big|_{-1}^0 + \delta^2 \left[\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{21}(x, \mu) - \varphi_{11}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda) \right] \Big|_0^1 = \\
& = (\mu - \lambda) \int_{-1}^0 (\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{11}(x, \mu) + \varphi_{21}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda)) dx \\
& + (\mu - \lambda) \delta^2 \int_0^1 (\varphi_{11}(x, \lambda) \varphi_{11}(x, \mu) + \varphi_{21}(x, \mu) \varphi_{21}(x, \lambda)) dx,
\end{aligned} \tag{7.5.22}$$

bulunur. (7.5.22)'nin her iki tarafı $(\lambda - \mu)$ ile bölünürse ve $\mu \rightarrow \lambda$ iken,

$$\begin{aligned}
& 1 + \varphi_{22}(1, \lambda) \frac{\partial \varphi_{12}(1, \lambda)}{\partial \lambda} - \varphi_{12}(1, \lambda) \frac{\partial \varphi_{22}(1, \lambda)}{\partial \lambda} = \\
& = - \int_{-1}^0 (|\varphi_{11}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{21}(x, \lambda)|^2) dx - \delta^2 \int_0^1 (|\varphi_{12}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{22}(x, \lambda)|^2) dx,
\end{aligned} \tag{7.5.23}$$

bağıntısı bulunur. Böylece

$$w(\lambda) = -\delta^2 (\cos \alpha \varphi_{12}(1, \lambda) + \sin \alpha \varphi_{22}(1, \lambda)), \tag{7.5.24}$$

denkleminin sadece basit sıfırlara sahip olduğu göstermiş olunur.

Tersi varsayılın; yani λ^* , (7.5.24)'nin çift katlı kökü olsun. Böylece aşağıdaki iki bağıntı sağlanır:

$$\cos \alpha \varphi_{12}(1, \lambda^*) + \sin \alpha \varphi_{22}(1, \lambda^*) = 0, \tag{7.5.25}$$

$$\cos \alpha \frac{\partial \varphi_{12}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} + \sin \alpha \frac{\partial \varphi_{22}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0. \tag{7.5.26}$$

Bu denklemlerden

$$\varphi_{22}(1, \lambda^*) \frac{\partial \varphi_{12}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} - \varphi_{12}(1, \lambda^*) \frac{\partial \varphi_{22}(1, \lambda^*)}{\partial \lambda} = 0, \tag{7.5.27}$$

bulunur. (7.5.27) ve (7.5.23) birlikte gözönüne alınırsa, $\lambda = \lambda^*$ için

$$\int_{-1}^0 (|\varphi_{11}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{21}(x, \lambda)|^2) dx + \delta^2 \int_0^1 (|\varphi_{12}(x, \lambda)|^2 + |\varphi_{22}(x, \lambda)|^2) dx = -1, \tag{7.5.28}$$

dir. Buradan $\varphi_1(x, \lambda^*) = \varphi_2(x, \lambda^*) = 0$ elde edilir ki bu da çelişkidir. Lemmanın ispatı tamamlanır.

7.6 İkinci Tür Problem için Asimptotik Formüller

$\{\varphi(\cdot, \lambda_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, (7.4.2)-(7.4.5) probleminin $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektör fonksiyonlarının dizisi olsun. $\psi(x, \lambda)$ 'nın (7.4.4)-(7.4.5)'i sağladığı gözönüne alı-

nırsa özdeğerler

$$w(\lambda) \equiv \cos \alpha \psi_{11}(1, \lambda) + \sin \alpha \psi_{21}(1, \lambda) = 0, \quad (7.6.1)$$

ile tanımlıdır. Tüm özdeğerler basit olduğundan; $\{\psi(\cdot, \lambda_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$,

$$\psi(x, \lambda_n) = c_n \varphi(x, \lambda_n), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.6.2)$$

şeklinde $\{\varphi(\cdot, \lambda_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ile bağıntılı diğer öz-vektör-fonksiyonlar dizisidir. Burada $c_n \neq 0$ 'ler sabitlerdir. Özdeğerler reel olduğundan öz-vektör-fonksiyonları reel-değerli olarak alınabilir.

Şimdi sabitlerin değişim yöntemi kullanılırsa, (7.4.2), (7.4.3), (7.5.11) ve (7.5.14) denklemleri [113],

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(x, \lambda) &= \sin(\lambda(x+1)) + \lambda \cos(\lambda(x+1)) \\ &\quad - \int_{-1}^x \{p(t) \sin(\lambda(x-t)) + q(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad - \int_{-1}^x \{q(t) \sin(\lambda(x-t)) - p(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(x, \lambda) &= -\cos(\lambda(x+1)) + \lambda \sin(\lambda(x+1)) \\ &\quad + \int_{-1}^x \{p(t) \cos(\lambda(x-t)) - q(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_{-1}^x \{q(t) \cos(\lambda(x-t)) + p(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) - \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) \\ &\quad - \int_0^x \{p(t) \sin(\lambda(x-t)) + q(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad - \int_0^x \{q(t) \sin(\lambda(x-t)) - p(t) \cos(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22}(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) + \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) \\ &\quad + \int_0^x \{p(t) \cos(\lambda(x-t)) - q(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{11}(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_0^x \{q(t) \cos(\lambda(x-t)) + p(t) \sin(\lambda(x-t))\} \varphi_{21}(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (7.6.6)$$

denklemlerine dönüştürülür.

$|\lambda| \rightarrow \infty$ için $\varphi_{1i}(x, \lambda)$ ve $\varphi_{2i}(x, \lambda)$ ($i=1, 2$) çözümleri $x, x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ e göre düzgün olan aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir [113]:

$$\varphi_{11}(x, \lambda) = \sin(\lambda(x+1)) + \lambda \cos(\lambda(x+1)) + O(1/\lambda), \quad (7.6.7)$$

$$\varphi_{21}(x, \lambda) = -\cos(\lambda(x+1)) + \lambda \sin(\lambda(x+1)) + O(1/\lambda), \quad (7.6.8)$$

$$\varphi_{12}(x, \lambda) = (1/\delta) \varphi_{11}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) - (1/\delta) \varphi_{21}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) + O(1/\lambda), \quad (7.6.9)$$

$$\varphi_{22}(x, \lambda) = (1/\delta) \varphi_{11}(0^-, \lambda) \sin(\lambda x) + (1/\delta) \varphi_{21}(0^-, \lambda) \cos(\lambda x) + O(1/\lambda). \quad (7.6.10)$$

Özdeğerlerin asimptotik formülü için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 7.6.1 (7.4.2)-(7.4.5) probleminin λ_n özdeğerleri aşağıdaki asimptotik formülü sağlar:

$$\lambda_n = \frac{a+n\pi}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.6.11)$$

İspat (7.4.2)-(7.4.5) probleminin özdeğerleri

$$\cos \alpha \varphi_{12}(1, \lambda) + \sin \alpha \varphi_{22}(1, \lambda) = 0, \quad (7.6.12)$$

denkleminin kökü olduğundan; (7.6.12)'de (7.6.9) ve (7.6.10) asimptotik yaklaşım formüllerinden

$$\begin{aligned} & \cos \alpha \left[\frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \cos \lambda - \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \sin \lambda \right] \\ & + \sin \alpha \left[\frac{1}{\delta} \varphi_{11}(0^-, \lambda) \sin \lambda + \frac{1}{\delta} \varphi_{21}(0^-, \lambda) \cos \lambda \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0, \end{aligned}$$

ve buradan

$$\varphi_{11}(0^-, \lambda) \cos(\lambda - \alpha) - \varphi_{21}(0^-, \lambda) \sin(\lambda - \alpha) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0. \quad (7.6.13)$$

(7.6.7) ve (7.6.8)'den (7.6.13) denklemi

$$\tan(2\lambda - \alpha) + \lambda + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0, \quad (7.6.14)$$

formundadır. Buradan büyük $|\lambda|$ 'lar için (7.6.14) denklemi

$$2\lambda_n - \alpha = -\lambda_n + n\pi + \delta_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.6.15)$$

şeklinde çözümlere sahiptir, [113]. Bu değerler (7.6.14)'de yerine koyulursa,

$$\tan \delta_n = O(1/n) \text{ yani } \delta_n = O(1/n) \text{ elde edilir. Böylece özdeğerler için (7.6.11)}$$

asimptotik formülü bulunur.

(7.6.11) formülü kullanılarak, $\varphi(., \lambda_n)$ öz-vektör-fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formüller elde edilir.

$$\varphi(x, \lambda_n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x, \lambda_n) \\ \varphi_{21}(x, \lambda_n) \end{pmatrix}, & x \in [-1, 0) \\ \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x, \lambda_n) \\ \varphi_{22}(x, \lambda_n) \end{pmatrix}, & x \in (0, 1], \end{cases}$$

olmak üzere

$$\varphi(x, \lambda_n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_n(x+1)) + \lambda_n \cos(\lambda_n(x+1)) + O(1/n) \\ -\cos(\lambda_n(x+1)) + \lambda_n \sin(\lambda_n(x+1)) + O(1/n) \end{pmatrix}, & x \in [-1, 0) \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta}(\sin(\lambda_n(x+1)) + \lambda_n \cos(\lambda_n(x+1))) + O(1/n) \\ \frac{1}{\delta}(-\cos(\lambda_n(x+1)) + \lambda_n \sin(\lambda_n(x+1))) + O(1/n) \end{pmatrix}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

KAYNAKLAR

- [1] **Ambartsumyan, V. A.**, 1929. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, *Z. Physik*, **53**, 690-695.
- [2] **Borg, G.**, 1945. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der differentialgleichung durch die Eigenwerte, *Acta Math.*, **78**, 1-96.
- [3] **Levinson, N.**, 1949. The Inverse Sturm- Liouville Problem, *Mat. Tidsskr. B.*, pp. 25-30.
- [4] **Levinson, N.**, 1949. Criteria for the Limit-Point Case for Second-Order Linear Differential Operators, *Casopis. Pest. Mat. Fys.*, **74**, 17-20.
- [5] **Delsarte, J.**, 1938. Sur Certaines Transformations Fonctionnelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, *C. R. Hebd. Acad. Sci.*, **206**, 178-182.
- [6] **Delsarte, J. and Lions, J.**, 1957. Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, *Comm. Math. Helv.*, **32**(2), 113-128.
- [7] **Levitan, B. M.**, 1964. Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.
- [8] **Povzner, A. V.**, 1948. On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, *Mat. Sb.*, 23.
- [9] **Tichknof, A. N.**, 1949. Uniqueness Theorem for Jeophysics Problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. **69**, No:4, 797-800.
- [10] **Marchenko, V. A.**, 1950. Some Problems in the Theory of Second-Order Differential Operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **72**, 457-560.
- [11] **Krein, M. G.**, 1951. Solution of the Inverse Sturm-Liouville problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **76**, 21-24.
- [12] **Krein, M. G.**, 1954. On a Method of the Effective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **95**, 767-770.
- [13] **Gelfand, I. M. and Levitan, B. M.**, 1951. On the Determination of a Differential Equations by its Spectral Function, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math.*, **15**, 309-360.
- [14] **Levitan, B. M. and Gasymov, M. G.**, 1964. Determination of a Differential Equations by two its Spectra, *Russian Math Surveys*, **19**, 1-63.
- [15] **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.**, 1967. A Method for Solving the Korteweg-De Vries Equation, *Phys. Rev. Lett.*, v. **19**, 1095-1098.
- [16] **Lax, P.**, 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves,

Comm. Pure and Appl. Math., v. **21**, 467-490.

- [17] **Faddeev, L. D.**, 1964. Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation, *Trudy Mat. Inst. Steklow*, **73**, 314-336.
- [18] **Prats, F. and Toll, J.**, 1959. Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, *Phys. Rev.*, **113**, (1), 363-370.
- [19] **Moses, H. E.**, 1957. Calculation of the Scattering Potential for One-Dimensional Dirac Equation from Reflection Coefficient and Point Eigenvalues, *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **4**, 240.
- [20] **Gasymov, M. G. and Levitan, B. M.**, 1966. The Inverse Problem for the Dirac System, *Dokl. Akad. Nauk SSR*, **167**, 967-970.
- [21] **Gasymov, M. G. and Dzhabiev, T. T.**, 1955. On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, *Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator*, Baku- ELM., 46-71.
- [22] **Levitan, B. M.**, 1978. On the Determination of the Sturm-Liouville Operator from One and Two Spectra, *Math. USSR Izvestija*, Vol. **12**, 179-193.
- [23] **Keldysh, M. V.**, 1951. On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. **77**, No. 1.
- [24] **Courant, R. and Hilbert, D.**, 1953. *Methods of Mathematical Physics*, vol. **1**. New York: Wiley-Interscience.
- [25] **Birman, M. Sh. and Solomyak, M. Z.**, 1977. Asymptotic properties of the spectrum of differential equations, *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.*, **14**, VINITI, Moscow, 5-58.
- [26] **Maslov, V. P.**, 1976. *Operational methods*. Mir.
- [27] **Stashevskaya, V. V.**, 1953. On inverse problem of spectral analysis for a class of differential equations, *Dok. Akad. Nauk. SSSR*, **93**, 409-411.
- [28] **Stashevskaya, V. V.**, 1957. On the Spectral Analysis of Inverse Problems for Singular Differential Operators, *Notes of Harcoff State University and Mathematics Institution*, vol. **25**, 49-86.
- [29] **Volk, V. Y.**, 1953. On inversion formulas for a differential equation with a singularity at $x=0$, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **8**, 4, 141-151.
- [30] **Gasymov, M. G.**, 1965. Determination of a Sturm-Liouville equation with a singularity by two spectra, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **161**, 274-276.

- [31] **Gasymov, M. G.**, 1980. Spectral analysis of a class of second-order non-self-adjoint differential operators, *Functional analysis and its applications*, **14**, 1, 11-15.
- [32] **Panakhov, E. S.**, 1980. Inverse problem in two spectra for a differential operator with a singularity at zero, *Akad. Nauk Azerb. SSR Dokl.*, **36**, 6-10.
- [33] **Panakhov, E. S.**, 1981. The definition of differential operator with peculiarity in zero on two spectrum. *VINITI*, (4407), 1-16.
- [34] **Watson, G. A.**, 1962. *Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [35] **Chadan, K. and Sabatier, P. C.**, 1977. Inverse problems in quantum scattering theory.
- [36] **Carlson, R. A.**, 1997. Borg-Levinson theorem for Bessel operator, *Pacific Journal of Mathematics*, **177**(1), pp. 1-26.
- [37] **Guillot, J. C. and Ralston, J. V.**, 1988. Inverse spectral theory for a singular Sturm-Liouville operator on $[0, 1]$, *J. Differential Equations*, **76** (2), 353-373.
- [38] **Rundell, W. and Sacks, P. E.**, 1991. Reconstruction of a Radially Symmetric Potential from Two Spectral Sequences, *J. of Math. Anal. and Appl.*, **264**, 354-381.
- [39] **Zhornitskaya, L. A. and Serov, V. S.**, 1994. Inverse eigenvalue problems for a singular Sturm-Liouville operator on $[0, 1]$, *Inverse Problems*, **10** (4), 975-987.
- [40] **Panakhov, E. S. and Koyunbakan, H.**, 2003. Inverse problem for singular Sturm-Liouville operator, *Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan*, 113-126.
- [41] **Koyunbakan, H. and Panakhov, E. S.**, 2005. Half inverse problem for singular differential operator, *Applicable Analysis*, **84**, 3, 247-252.
- [42] **Serier, F.**, 2007. The inverse spectral problem for radial Schrödinger operators on $[0, 1]$, *J. Differential Equations*, **235** (1), 101-126.
- [43] **Wang, P. Y., Lin, S. D. and Srivastava, H. M.**, 2006. Remarks on a simple fractional-calculus approach to the solutions of the Bessel Differential equation of general order and some of its applications, *Comput. Math. Appl.*, **51**, 105-114.
- [44] **Albeverio, S., Hryniv, R. and Mykytyuk, Ya.**, 2007. Inverse spectral problems for Bessel operators, *Journal of Differential Equations*, **241**, 1, 130-159.
- [45] **Hryniv, R. and Sacks, P.**, 2010. Numerical solution of the inverse spectral problem for Bessel operators, *Journal of computational and applied mathematics*, **235**, 1, 120-136.

- [46] **Birkhoff, G. D.**, 1908. On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**, p. 219-231.
- [47] **Walter, G.**, 1973. Some general dynamical notions, *Recent Advances in Topological Dynamics* (Proc. Conf. Topological Dynamics, Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund), *Lecture Notes in Math.*, **318**, Berlin, New York: Springer-Verlag, pp. 120–125, doi:10.1007/BFb0061728, MR 0407821.
- [48] **Schneider, A.**, 1974. A note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition., *Math. Z.*, **136**, 163-167.
- [49] **Fulton, C. T.**, 1977. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, *Proc. Roy. Soc. Edin.*, **77A**, 293-308.
- [50] **Hinton, D.**, 1979. An Expansion Theorem for in Eigenvalue problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, *Quart. J. Math. Oxford*, (2), **30**, 33-42.
- [51] **Shkalikov, A. A.**, 1983. Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Condition, *Trudy Sem. Petrovsk*, **9**, 190-229.
- [52] **Zayed, E. M. E., Ibrahim, S. F. M.**, 1992. Regular Eigenvalue Problem with Eigenparameter in the Boundary Conditions, *Bull. Cal. Math. Soc.*, **84**, 379-393.
- [53] **Kerimov, N. B., Allakhverdiev, T. I.**, 1993. On a Boundary Value Problem II. *Differentsial'nye Uravneniya*, **29**, no. 6, 952-960.
- [54] **Kerimov, N. B. and Memedov, Kh. K.**, 1999. On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions, *Sibirsk. Math. Zh.*, **40**, no2, 325-335. English translation: 1999. *Siberian Math. J.*, **40**, no.2, 281-290.
- [55] **Yakubov, S. and Yakubov, Y.**, 1999. Abel basis of root functions of regular boundary value problems, *Math. Nachr.*, **197**, 157-187.
- [56] **Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Altınışık, N.**, 2003. Eigenvalues and Eigenfunctions of Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter in the Boundary Conditions, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **34**(3), 501-516.
- [57] **Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Altınışık, N.**, 2004. Eigenvalues and Eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, *Acta Mathematica Hungarica*, **102**(1-2), 159-175, 3.

- [58] **Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Muhtarov, F. S.**, 2004. On Discontinuous Sturm-Liouville problem with Transmission Conditions, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, Vol. **44-4**, 779-798.
- [59] **Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtarov, O. Sh.**, 2005. Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigendependent Boundary and Transmissions Conditions, *Acta Applicandae Mathematicae*, **86**, 329-344.
- [60] **Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtarov, O. Sh.**, 2005. Sturm-Liouville Problems with Eigendependent Boundary and Transmissions Conditions, *Acta Mathematica Scientia*, Vol. **25**, No. 4.
- [61] **Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Altınışık, N.**, 2006. Some Spectral Properties of Discontinuous Sturm-Liouville Problem with Containing Eigenparameter in one of Boundary Conditions, *Journal of Applicable Differential Equations*, Vol. **1**, No. 1, pp. 95-108.
- [62] **Kadakal, M. and Mukhtarov, O.**, 2010. Eigenvalues and eigenfunctions of Sturm-Liouville problem with two-point discontinuities containing eigenparameter-dependent boundary conditions, *Scientia Magna*, Vol. **6**, No. 4, 33-48.
- [63] **Bairamov, E., Ugurlu, E.**, 2011. The determinants of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions, *Math. Comput. Model*, **53**, 805-813.
- [64] **Bairamov, E., Ugurlu, E.**, 2012. On the characteristic values of the real component of a dissipative boundary value transmission problem, *Appl. Math Comput.*, **218**(19), 9657-9663.
- [65] **Altınışık, N., Mukhtarov, O. Sh. and Kadakal, M.**, 2012. Asymptotic Formulas for Eigenfunctions of the Sturm-Liouville Problems With Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, *Kuwait Journal of Science and Engineering*, **39** (1A) pp. 1-19.
- [66] **Ozkan, A. S.**, 2012. Inverse Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue-Dependent Boundary and Discontinuity Conditions, *Inverse Problems in Science and Engineering*, Vol. **20**, No. 6, 857-868.
- [67] **Yang, Q., Wang, W.**, 2012. Spectral properties of Sturm-Liouville operators with discontinuities at finite points, *Math. Sci.*, **6**, 34, 1-9.
- [68] **Tuna, H. and Eryilmaz, A.**, 2013. Dissipative Sturm-Liouville Operators with Transmission Conditions, *Abstract and Applied Analysis*, 1-7.

- [69] Allahverdiev, B. P., Bairamov, E., Ugurlu, E., 2013. Eigenparameter dependent Sturm–Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, **401**(1), 388–396.
- [70] Shahriari, M. and Akbarfam, A. J., 2014. Inverse Sturm-Liouville Problem with Discontinuity Conditions, *SCMA*, Vol. **1**, No. 1, 29-40.
- [71] Mukhtarov, O. Sh. and Yakubov, S., 2002. Problems for ordinary differential equations with transmission conditions, *Appl. Anal.*, Vol. **81**, 1033-1064.
- [72] Titeux, I. and Yakubov, Y., 1997. Completeness of root functions for thermal condition in a strip with piecewise continuous coefficients, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **7**, 1035-1050.
- [73] Likov, A. V. and Mikhailov, Y. A. , 1963. The theory of Heat and Mass Transfer, *Qosener-gaizdat*, (In Russian).
- [74] Wang, A. , Sun, J., Hao, X. and Yao, S., 2009. Completeness of Eigenfunctions of Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, *Methods and Applications of Analysis*, Vol. **16**, No. 3, pp. 299-312.
- [75] Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A., 1963. Equations of Mathematical Physics, Oxford and New York, Pergamon.
- [76] Tharwat, M. M., Yildirim, A. and Bhrawy, A. H. , 2013. Sampling of discontinuous Dirac systems, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. **34**, no. 3, pp. 323–348.
- [77] Tharwat, M. M., 2013. On sampling theories and discontinuous Dirac systems with eigenparameter in the boundary conditions, *Boundary Value Problems*, vol. **65**, 1-24.
- [78] Kablan, A. and Özden, T., 2013. A Dirac System with Transmission Condition and Eigenparameter in the Boundary Condition, *Abstract and Applied Analysis*, v. **2013**, Article ID 395457, 6 pages.
- [79] Kerimov, N. B., 2002. On a boundary value problem for the Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions, *Differential Equations*, vol. **38**, no. 2, pp. 164–174.
- [80] Amirov, R. Kh., 2005. On system of Dirac differential with discontinuity conditions inside an interval, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. **57**, pp. 712–727.

- [81] **Keskin, B. and Ozkan, A. S.**, 2011. Inverse spectral problems for Dirac operator with eigenvalue dependent boundary and jump conditions, *Acta Mathematica Hungarica*, vol. **130**, no. 4, pp. 309–320.
- [82] **Amirov, R. Kh.**, 2004. On a representation of solution of Dirac differential equation systems which have discontinuity in interval, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **12**(3), 297–308.
- [83] **Annaby, M. H., Tharwat, M. M.**, 2012. On the computation of the eigenvalues of Dirac systems, *Calcolo*, **49**(4), 221–240.
- [84] **Güldü, Y.**, 2013. A Half-Inverse Problem for Impulsive Dirac Operator with Discontinuous Coefficient, *Abstract and Applied Analysis*, Volume **2013**, Article ID 181809, 4 pages.
- [85] **Mamedov, K. R. and Akcay, O.**, 2014. Inverse Eigenvalue Problem for a Class of Dirac Operators with Discontinuous Coefficient, *Boundary Value Problems*, 110.
- [86] **Tuna, H., Eryılmaz, A.**, 2015. Completeness Theorem for Discontinuous Dirac Systems, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 15–23.
- [87] **Panakhov, E. S., Gulsen, T.**, 2015. On discontinuous Dirac systems with eigenvalue dependent boundary conditions, In Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014), *AIP Publishing*, Vol. **1648**, p. 260003.
- [88] **Isaacson, E.L. and Trubowitz, E.**, 1983. The inverse Sturm-Liouville problem I, *Comm. Pure Appl. Math.* v. **36**, pp 767–783.
- [89] **Isaacson, E. L., McKean, H. P. and Trubowitz, E.**, 1984. The inverse Sturm-Liouville problem II, *Comm. Pure Appl. Math.*, v. **37**, pp 1–11.
- [90] **Dahlberg, B. E. J. and Trubowitz, E.**, 1984. The inverse Sturm-Liouville Problem III, *Comm. Pure Appl. Math.*, v. **37**, pp. 255–267.
- [91] **Pöschel, J. and Trubowitz, E.**, 1987. *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, New York.
- [92] **Max Jodeit, Jr. and Levitan, B. M.**, 1997. The Isospectrality Problem for the Classical Sturm-Liouville Equation, *Advances in Differential Equation*, **2**, 297–318.
- [93] **Chern, H.-H.**, 1998. On the construction of isospectral vectorial Sturm–Liouville differential equation, preprint.
- [94] **Max Jodeit, Jr. and Levitan, B. M.**, 1998. Isospectral Vector-valued Sturm-Liouville Problems, *Letters in Math. Phys.*, **43**, 117–122 .

- [95] **Max Jodeit, Jr., Levitan, B.M.**, 1998. A characterization of some even vector-valued Sturm–Liouville problems, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **5** (3–4), pp. 166–181.
- [96] **Chelkak, D., Korotyaev, E.**, 2006. Parametrization of the isospectral set for the vector-valued Sturm–Liouville problem, *J. Funct. Anal.*, **241** (1), pp. 359–373.
- [97] **Jaulent, M., Jean, C.**, 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, *Communications in Mathematical Physics.*, **28**, 177–220.
- [98] **Gasymov, M. G. and Guseinov, G. Sh.**, 1981. Determination of a diffusion operator from spectral data, *Dokl. Akad. Nauk Azerbaijan SSR*, **37**(2), 19–22 (Russian).
- [99] **Maksudov, F. G. and Guseinov, G. Sh.**, 1987. On the solution of the inverse scattering problem for a quadratic pencil of one-dimensional Schrödinger operators on the whole axis, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **289**, 42–46 (Russian); English transl., 1987. *Soviet Math. Dokl.*, **34**, 34–38.
- [100] **Bairamov, E. and Çakar, Ö.**, 1999. An Eigenfunction Expansion for a Quadratic Pencil of a Schrödinger Operator with Spectral Singularities, *Journal of Differential Equations*, **151**, 268–289.
- [101] **Nabiev, I. M.**, 2004. The inverse spectral problem for the diffusion operator on an interval, *Matematicheskoy Fiziki, Analiza, Geometrii*, **11**, 302–313.
- [102] **Buterin, S. A., Yurko, V. A.**, 2006. Inverse spectral problem for pencils of differential operators on a finite interval, *Vesn. Bashkir. Univ.*, **4**, 8–12.
- [103] **Koyunbakan, H., Panakhov, E. S.**, 2007. Half-inverse problem for diffusion operators on the finite interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**, 1024–1030.
- [104] **Koyunbakan, H.**, 2008. The Inverse Nodal Problem for a Differential Operator with an Eigenvalue in the Boundary Conditions, *Applied Mathematics Letter*, **21**, 1301–1305.
- [105] **Yang, C. F.**, 2010. Reconstruction of the diffusion operator from nodal data, *Zeitschrift für Naturforschung*, **65**, 100–106.
- [106] **Sat, M. and Panakhov, E. S.**, 2014. Spectral Problem for Diffusion Operator, *Applicable Analysis*, Vol. **93**, No.6, 1178–1186.
- [107] **Guseinov, G. Sh.**, 2014. On Construction of a Quadratic Sturm–Liouville Operator Pencil From Spectral Data, *Proceedings of the Institute of Mathematics and*

Mechanics,, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Volume 40, Special Issue, Pages 1-12.

- [108] **Kreyszig, E.**, 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York.
- [109] **Bayraktar, M.**, 1994. *Fonksiyonel Analiz*, Atatürk üniversitesi yayınları, Erzurum, 314s.
- [110] **Waz Waz, A. M.**, 2002. *Partial Differential Equations Methods and Applications*, Saint Xavier University, Chicago.
- [111] **Musayev, B., Alp, M.**, 2000. *Fonksiyonel Analiz*, Balcı yayınları, Kütahya, 470s.
- [112] **Smirnov, V. I.**, 1964. *A Course of Higher Mathematics, Part 5*, Pregman Press, Oxford.
- [113] **Levitan, B. M., and Sargsyan, I. S.**, 1990. *Sturm-Liouville and Dirac Operators*, Netherlands.
- [114] **Naimark, M. A.**, 1968. *Linear Differential Operators*, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.
- [115] **Ocak, R.**, 1993. *Kompleks Analiz*, Atatürk Üni., Erzurum.
- [116] **Freiling, G. and Yurko, V.**, 2001. *Inverse Sturm-Liouville problems and their Applications*, Nova Science Pub. Inc., 305p.
- [117] **İdemen, M.**, 1999. *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*, Işık ün., İstanbul.
- [118] **Tricomi, F. G.**, 1967. *Integral Equations*, Interscience publishers, INC., Newyork.
- [119] **Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L. M., İbikli, E., Brown, S.**, 2000. *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 678s.
- [120] **Olver, F. W. J.**, 1974. *Introduction to asymptotics and special functions*, Academic pres, New York and London, 375p.
- [121] **Balcı, M.**, 1997. *Analiz II*, Balcı yayınları, Ankara, 420s.
- [122] **Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S.**, 1975. *Introduction to spectral Theory*, Rhode Island.
- [123] **Adams, R.A.**, 1978. *Sobolev Space*, Academic Press, New York.
- [124] **Çağhyan, M., Çelik, N., Doğan, S.**, 2010. *Adi Diferansiyel Denklemler*, Dora Yayınları, Bursa.
- [125] **Piessens, R.**, 2000. *The Hankel Transform, The Transforms and Applications Handbook: Second Edition*. Ed. Alexander D. Poularikas Boca Raton: CRC Press LLC.

- [126] **Sargsjan, I.S.**, 1966b. Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional Dirac System, *Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat.*, **1**, (6), 392-436.
- [127] **Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M.**, 1950. Theory of Linear Operators in a Hilbert Space, *Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit.*, Moscow—Leningrad, (Russian).
- [128] **Levitan, B. M.**, 1950. Expansion in Characteristic Functions of Differential Equations of the Second Order (in Russian), Gostekhizdat, Moscow.
- [129] **Marchenko, V. A.**, 1952. Some problems in the theory of linear differential operators, *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, **1**, 327-420.
- [130] **Gelfand, I. M. and Levitan, B. M.**, 1951. On identification of the differential expression via its spectral function, *Izv Akad Nauk SSSR* (in Russian), *Sek. Matem*, **15**, 309-360.
- [131] **Krein, M.G.**, 1952. On a Generalization of an Investigation by Stieltjes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **87**, 881-884.
- [132] **Krein, M. G.**, 1953b. On some cases of the effective determination of the density of a nonuniform string by its spectral function, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **93**, 617-620 (MR, 15, 796), translated by Friedman, M. D.
- [133] **Sharma, L. K., Luhanga, P. V. and Chimidza, S.**, 2011. Potentials for the Klein-Gordon and Dirac equations, *Chiang Mai Journal of Science*, **38**(4), 514-526.
- [134] **Panakhov, E. S. and Gulsen, T.**, 2014. Isospectrality Problem for Dirac System, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, Volume **40**, Special Issue, Pages 386–392.
- [135] **Amirov, R. Kh., Güldü, Y.**, 2005. Aralığın İç Noktasında Süreksizliğe Sahip Dirac Operatörünün Spektral Özellikleri, *C. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi*, Cilt 26, Sayı 1.

ÖZGEÇMİŞ

22.09.1987 yılında Elazığ' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Elazığ' da tamamladı. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı ve Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını bitirdi. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.

Tüba GÜLŞEN