

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LORENTZ UZAYINDA s -DEJENERE EĞRİLER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Zühal KÜÇÜKARSLAN
(08121103)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri**

TEMMUZ-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LORENTZ UZAYINDA s -DEJENERE EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Zühal KÜÇÜKARSLAN
(08121103)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

TEMMUZ-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LORENTZ UZAYINDA s -DEJENERE EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zühal KÜÇÜKARSLAN

(08121103)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11. 06. 2010

Tezin Savunulduğu Tarih: 06. 07. 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT(F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü)

TEMMUZ-2010

ÖNSÖZ

Yurtiçi Yüksek Lisans burs desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkürü borç bilirim.

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a, Sayın Hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e ve Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Zühal KÜÇÜKARSLAN
ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
2.1. Yarı-Öklid Uzay ve Yarı-Riemann Manifoldlar	2
2.2. Null Eğriler	5
3. s-DEJENERE EĞRİLER.....	9
3.1. s-Dejenere Eğriler ve Frenet Çatıları	9
3.2. s-Dejenere Eğrilerin Cartan Çatıları	13
3.3. Lorentz Uzay Formunda s-Dejenere Eğriler.....	15
3.4. M_1^4 de 2-Dejenere Eğriler.....	15
4. REKTİFİYAN EĞRİLER.....	17
4.1. E^4 Öklid Uzayında Rektifiyan Eğrilerin Karakterizasyonları.....	17
4.2. M_1^4 de 2-Dejenere Rektifiyan Eğriler ve Karakterizasyonları.....	20
5. SONUÇ.....	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	36

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Lorentz uzayı ve null eğrilerle ilgili temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde; s-dejenere eğrilerle ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında 4- boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğrilerle ilgili bazı tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümün ikinci kısmı tezimizin orijinal olan kısmını oluşturmaktadır. Bu kısımda, Lorentz uzayında s-dejenere eğrilerin özel bir hali olan 2-dejenere eğrilerin rektifiyan eğri olması durumunda bazı karakterizasyonlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Lorentz Uzayı, Null Eğri, Rektifiyan Eğri, s-Dejenere Eğri, 2-Dejenere Eğri.

SUMMARY

s-Degenerate Curves in Lorentz Space

This thesis consists of three chapters...

First chapter provides fundamental definitions and theorems related to Lorentz space/null curves and second chapter related to s-degenerate curves.

Third chapter first gives some definitions and theorems about rectifying curves in 4-dimensional Euclidean space. Then, our major contribution, characterizations when 2-degenerate curves becomes rectifying curves in the Lorentz space, is obtained in the second part. Note that a 2-degenerate curve is a special case of a s-degenerate curve.

Keywords: Lorentz Space , Null Curve, Rectifying Curve, s-Degenerate Curve, 2-Degenerate Curve.

SEMBOLLER LİSTESİ

E^4	: 4-boyutlu Öklid Uzay
g	: Simetrik Bilineer Form
M	: Yarı-Riemann Manifold
q	: Yarı-Riemann Manifoldun İndeksi
M_1^n	: n -boyutlu Lorentz Manifold
M_1^4	: 4-boyutlu Lorentz Uzay
$\{T, N, B_1, B_2\}$	: Hareketli Frenet Çatısı
α	: M_1^4 de Eğri
$\{W_1, L, W_2, N\}$	: 2-dejenere Eğri İçin Cartan Çatısı
γ	: s-dejenere Eğri
k_i	: i-inci Eğrilik Fonksiyonu
$T_p M$	: Tanjant Uzayı

1. GİRİŞ

Null incelemesine ait ilk kapsamlı çalışma [1] de Bonnor tarafından verilmiştir. Bu çalışmada Minkowski spacetime da null eğrilerin geometrisi üzerine geniş bir inceleme yapmış ve geodezik olmayan null eğriler için yapılan araştırmaların öncüsü olmuştur. Bejancu [2], bu çalışmayı Lorentz manifolduna genişletmiştir. Daha sonra Duggal ve Bejancu [3] “Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications” adlı kitabında null eğrilerin teorisini detaylı bir şekilde vermiştir. Son yıllarda null eğriler üzerine yapılan çalışmalar oldukça fazladır.

Null eğrilerin teorik fizikte de önemi oldukça büyüktür. Özellikle bu alandaki önemi sicim teorisi ile artmıştır. [4] de Nersessian ve Ramos, Minkowski spacetime’da bir geometrik parçacık modelinin null eğriler üzerinde oluşturulabileceğini göstermiştir. Null eğriler genel relativite teorisinin gelişmesinde de önemli bir rol oynar. Özellikle space-time’in causal yapısını, kara deliklerin, asimptotik flat sistemlerinin ve gravitational waves (yerçekim dalgalarının) yapısını anlamakta kullanılan bir teoridir.

Herhangi bir s -dejenere eğri ($s > 1$) bir uzayın bir lightlike hiperyüzeyinde yatan bir space-like eğridir. Literatürü incelediğimizde s -dejenere eğriler ilk olarak [5] de Ferrandez, Gimenez ve Lucas tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada s -dejenere helisleri karakterize ettiler ve dört boyutta 2-dejenere helislerin tam bir sınıflandırmasını elde ettiler.

s -dejenere eğriler üzerinde karakterizasyonlara literatürde raslanır. Bu nedenle bu çalışmada Lorentz uzayında s -dejenere eğriler incelendi. [6] ve [7] de verilen rektifiyan eğriler kavramı, M_1^4 Lorentz uzay formunda 2-dejenere eğriler için karakterize edilip, bununla ilgili bazı teoremler ifade ve ispat edildi.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Yarı-Öklid Uzay ve Yarı-Riemann Manifolds

2.1.1 Tanım: V , bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v \in V$ için

$$(i): g(u, v) = g(v, u)$$

$$(ii): g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$$

$$g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$$

özelliklerine sahip ise, g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [8].

2.1.2 Tanım : V bir n -boyutlu reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear form

$$g : V \times V \rightarrow R$$

olsun. $\forall v \in V$ için $g(\xi, v) = 0$ olacak şekilde bir $\xi \neq 0 \in V$ vektörü mevcut ise g ye V üzerinde dejenere simetrik bilinear form denir. Aksi taktirde g ye non-dejenere denir.

g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$g(u, v) = 0 \Rightarrow u = 0$$

olmasıdır. Bir V reel vektör uzayı üzerindeki simetrik bilinear form, V uzayının altuzayı üzerine dejenere veya non-dejenere bir bilinear forma indirgenir [3].

2.1.3 Tanım: V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. V nin

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına, g ye göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir. $RadV$ 'nin boyutuna g 'nin nullluk derecesi denir ve $nullV$ ile gösterilir. Eğer $nullV > 0$ ise g dejenere, $nullV = 0$ ise g non-dejenere [3].

2.1.4. Tanım: g , V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu simetrik bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir;

1) Definit Durum: Eğer,

- i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g simetrik bilinear formuna pozitif definit,
- ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g simetrik bilinear formuna negatif definit denir.

2) Semi-definit Durum: Eğer,

- i) $\forall v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ ise g simetrik bilinear formuna pozitif semi-definit,
- ii) $\forall v \in V$ için $g(v, v) \leq 0$ ise g simetrik bilinear formuna negatif semi-definit denir.

3) Nondejenere Durum: Eğer,

$\forall w \in V$ için $g(v, w) = 0$ iken $v = 0$ ise g simetrik bilinear formuna non-dejenere simetrik bilinear form denir [8].

2.1.5. Tanım: V , bir reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \rightarrow R$$

simetrik bilinear form olsun. $W \subset V$ olmak üzere

$$g|_W : W \times W \rightarrow R$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W altvektör uzayının boyutuna g simetrik biliner formun indeksi denir ve q ile gösterilir [8].

2.1.6. Tanım: Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilinear g formuna, V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (yarı Öklid metriği) ve (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir [3].

2.1.7. Tanım: V , yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,

- i) g pozitif tanımlı ve $q=0$ ise g ye Öklid metriği, (V, g) 'ye de Öklid uzayı,
- ii) g 'nin indeksi $q=1$ ise g 'ye Lorentz (Minkowski) metriği, (V, g) yede Lorentz (Minkowski) uzayı,
- iii) g dejenere ise V vektör uzayına göre light-like (dejenere) vektör uzayı denir [3].

2.1.8. Tanım: V , yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,

- i) $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye space-like,
- ii) $v \neq 0$ iken $g(v, v) < 0$ ise v ye time-like,
- iii) $v \neq 0$ ise $g(v, v) = 0$ ise v ye light-like (null veya izotropik) vektör denir. $v \in V$ vektörünün bu üç tipine v 'nin causal karakteri denir [3].

2.1.9. Tanım: V , bir reel vektör uzayı ve $W \subset V$ de bir alt uzay olsun. Bu durumda $g|_W$, dejenere ise W ye light-like (dejenere) alt uzay denir.

Genel olarak W 'nin diki

$$W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu iki uzay arasında, $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ bağıntısı vardır [3].

2.1.10. Tanım: V , bir light-like vektör uzayı ve V nin radikal uzayı $RadV$ 'ye tümleyen olan non-dejenere alt uzaya görüntü (screen subspace) denir SV ile gösterilir [3].

2.1.11. Tanım: R^n , n -boyutlu Öklid uzayı olsun. R^n üzerinde $0 \leq q \leq n$ olmak üzere, q tamsayısı için

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^q x_i y_i + \sum_{i=q+1}^n x_i y_i, \forall x, y \in R^n$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınarak elde edilen uzaya q indeksli n -boyutlu yarı-Öklid uzay denir ve R_q^n ile gösterilir [8].

2.1.12. Tanım: n -boyutlu R_q^n yarı-Öklid uzayına;

- i) $q=0$ ise R^n Öklid uzayı,
- ii) $q=1$ ve $n \geq 2$ ise R_1^n Minkowski n -uzay,
- iii) $q=1$ ve $n=4$ ise R_1^4 Minkowski space-time denir [8].

2.1.13. Tanım: M , bir C^∞ n -manifold olsun. Buna göre; M üzerinde,

- i) Bir g Riemann metriği tanımlı ise M ye Riemann manifold,
- ii) Bir g Lorentz metriği tanımlı ise M ye Lorentz manifold denir ve (M, g) ile gösterilir

[9].

2.1.14. Tanım: M , bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y) \rightarrow g(X, Y)$$

biçiminde tanımlı simetrik, bilinear, non-dejenere fonksiyonuna M üzerinde bir metrik tensör denir [8].

2.1.15. Tanım: M , bir C^∞ manifold olsun. M , bir g metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye yarı-Riemann manifold denir [8].

2.1.16. Tanım: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldun indeksi denir, $indM$ veya q ile gösterilir. M manifoldunun q indeksi için $0 \leq q \leq boyM$ eşitsizliği vardır [8].

2.1.17. Tanım: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün q indeksi için;
i) $q=0$ ise $\forall p \in M$ için $g|_p$, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan M bir Riemann manifolddur;
ii) $q=1$ ve $n \geq 2$ ise M bir Lorentz manifolddur [8].

2.2. Null Eğriler

2.2.1. Tanım: M , n -boyutlu C^∞ manifold olsun. $\forall p \in M$ için T_pM tanjant uzayların ayrık birleşimi olan

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

ye M nin tanjant demeti (tanjant bundle) denir. TM tanjant demetinin kesitine M üzerinde vektör alanı denir [3].

2.2.2. Tanım: M sabit q indeksli reel $(n+2)$ -boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. I, R de bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir dönüşümüne M de bir eğri adı verilir [8].

M de bir eğri, $i : \alpha \rightarrow M$ immersiyonu şeklinde de tanımlanır. Şimdi α , M üzerinde

diferensiyellenebilir bir eğri ve α üzerinde bir koordinat komşuluğu U olsun. U ya karşılık gelen lokal parametrenin de t olduğunu kabul edelim. Bu taktirde α eğrisi lokal olarak $\forall t \in I$ için,

$$\alpha_i = \alpha_i(t), \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, n+2\}, \quad \text{rank} \left[\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_{n+2}}{dt} \right] = 1$$

denklemleri ile verilir [3].

2.2.3. Tanım: M , bir $(n+2)$ -boyutlu Lorentz manifold ve $\alpha: I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin $t \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü ya da tanjant vektörü

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_{n+2}}{dt} \Big|_t \right)$$

şeklinde tanımlanır [8].

2.2.4. Tanım: M , bir $(n+2)$ -boyutlu Lorentz manifold ve $\alpha: I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α nın tanjant vektörü $\frac{d\alpha}{dt}$ olmak üzere

- i) $g\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) > 0$ ise α ya space-like eğri,
- ii) $g\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) < 0$ ise α ya time-like eğri,
- iii) $g\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0$ ve $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ ise α ya null veya light-like eğri denir [8].

M bir $(n+2)$ -boyutlu Lorentz manifoldu ve α , M de bir null eğri olsun. α nın tanjant demetine $T\alpha$ diyelim. α nın non-null eğri olması durumunda da, ξ_p , p noktasında α ya teğet null vektör olmak üzere

$$T\alpha^\perp = \bigcup_{p \in \alpha} T_p\alpha^\perp; \quad T_p\alpha^\perp = \{v_p \in T_pM : g(v_p, \xi_p) = 0\}$$

tanımlayalım. Burada $T\alpha^\perp, \alpha$ üzerinde $(n+1)$ -ranklı bir vektör demetidir.

$$g(\xi_p, \xi_p) = 0$$

olduğundan α nın $T\alpha$ tanjant demeti $T\alpha^\perp$ in bir alt vektör demeti olup rankı 1 dir.

Şimdi $T\alpha^\perp$ de $T\alpha$ nın tümleyeni olan $S(T\alpha^\perp)$ vektör demetini göz önüne alalım. Bu

taktirde

$$T\alpha^\perp = T\alpha \perp S(T\alpha^\perp)$$

yazabiliriz. $p \in \alpha$ noktasında $S(T\alpha^\perp)$ in lifleri $T_p\alpha^\perp$ in en az bir görüntü (ekran) altuzayı olup $S(T\alpha^\perp)$ non-dejenere bir vektör demetidir. Dolayısıyla

$$TM|_\alpha = S(T\alpha^\perp) \perp S(T\alpha^\perp)^\perp$$

olur. Burada $S(T\alpha^\perp)^\perp$, $TM|_\alpha$ da $S(T\alpha^\perp)$ ortogonal tümleyen vektör demetidir [3].

2.2.5. Teorem: M bir Lorentz manifoldu, M de bir null eğri α ve α nın görüntü (ekran=screen) vektör demeti $S(T\alpha^\perp)$ olsun. Bu taktirde E , α üzerine rankı 1 olan bir tek vektör demeti olup, her bir $U \subset \alpha$ koordinat komşuluğu üzerinde

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\alpha}{dt}, N \right\rangle &= 1 \\ \langle N, N \rangle &= \langle N, X \rangle = 0, \forall X \in \Gamma(S(T\alpha^\perp)|_U) \end{aligned} \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(E|_U)$ mevcuttur [8].

Buradaki E vektör demetine α nın null transversal demeti denir ve $ntr(\alpha)$ ile gösterilir. Şimdi

$$tr(\alpha) = ntr(\alpha) \perp S(T\alpha^\perp) \quad (2.2)$$

vektör demetini göz önüne alalım. Bu $tr(\alpha)$ vektör demeti $TM|_\alpha$ ve (2.1) ifadelerine göre tümleyen uzayıdır ancak $TM|_\alpha$ da $T\alpha$ ya ortogonal değildir. Böylece

$$TM|_\alpha = T\alpha \oplus tr\alpha = (T\alpha \oplus ntr\alpha) \perp S(T\alpha^\perp)$$

elde edilir [3].

2.2.6. Tanım: (2.2) eşitliği ile verilen $tr(\alpha)$ ya α nın $S(T\alpha^\perp)$ e göre transversal vektör demeti denir. Teorem 2.2.5 de verilen N vektör alanına α nın $\frac{d\alpha}{dt}$ ye göre null transversal vektör alanı denir [3].

2.2.7. Tanım: M , bir Lorentz manifoldu olsun. M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere, M üzerinde α eğrisi boyunca

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$$

ise α eğrisine bir geodezik eğri adı verilir [8].

2.2.8. Tanım: M , bir Lorentz manifoldu ve M üzerinde bir null eğri α olsun. Eğer α null eğrisi için

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$$

ise α eğrisine null geodeziği adı verilir [3].

3. s-DEJENERE EĞRİLER

3.1. s-Dejenere Eğriler ve Frenet Çatıları

E , bir reel vektör uzayı ve g E üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. E nin

$$RadE = \{ \xi \in E : g(\xi, v) = 0, \forall v \in E \}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına, g ye göre E uzayının radikal (veya null) uzayı denir. $RadE$ 'nin boyutuna g nin nullluk derecesi denir ve q_E ile gösterilir. Eğer $q_E > 0$ ise g dejenere, $q_E = 0$ ise g non-dejenere denir [3].

3.1.1. Tanım: Eğer $g(u, v) = 0$ ise u ve v vektörleri ortogonaldır denir ve $u \perp v$ şeklinde cümlesi ortogonaldır denir [10].

3.1.2. Tanım: V nin $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ olacak şekilde E_1 ve E_2 gibi iki ortogonal alt uzayı verilsin, E_1 ve E_2 nin ortogonal direkt toplamı $E_1 \perp E_2$ şeklinde yazılır [5].

3.1.3. Tanım: M_1^n n-boyutlu Lorentz manifold ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow M_1^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. γ eğrisi boyunca herhangi bir V vektör alan için, V' γ boyunca V nin kovaryant türevidir.

$E_i(t) = Sp\{\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^n(t)\}$ olarak yazılsın, Burada $t \in I$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ dir. d sayısı $d = \max\{i : boyE_i(t) = i, \text{ her } t \text{ için}\}$ olacak şekilde tanımlanır.

3.1.4. Tanım: $Rad(E_s) \neq \{0\}$ ve her $j < s$ için $Rad(E_j) = \{0\}$ olacak şekilde s , $(0 < s \leq d)$, varsa ve her t için, $(1 \leq i \leq d)$, olacak şekilde $boyRad(E_i(t))$ sabit ise $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M_1^n$ eğrisine s-dejenere eğridir denir.

3.1.5. Lemma: $(E, \langle, \rangle)$ bir bilineer uzay ve F , E nin bir hiperdüzlemi olsun. $q_F = boyRad(F)$ ve $q_E = boyRad(E)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar vardır.

i) Eğer $q_F = 0$ ve $q_E = 1$ ise $E = F \perp span\{L\}$ olacak şekilde bir L null vektör vardır.

ii) Eğer $q_F = q_E \in \{0,1\}$ ise $E = F \perp \text{span}\{V\}$ olacak şekilde bir birim non-null V vektör vardır.

Ayrıca $\text{Rad}(E) = \{0\}$ ise V tek olarak belirtilir.

iii) Eğer $q_F = 1$ ve $q_E = 0$, $L \in \text{Rad}(F)$ ve F_1 non-dejenere olacak şekilde $F = F_1 \perp L$ ise bu taktirde $\langle L, N \rangle = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ ve $E = (\text{span}\{L\} \oplus \text{span}\{N\}) \perp F_1$ olacak şekilde bir tek N null vektörü vardır [5].

İspat:

i) F non-dejenere olsun. Bu taktirde $E = F \perp F^\perp$ olup burada belirli bir L vektörü için $F^\perp = \text{span}\{L\}$ dir. Burada $\text{Rad}(E) \subset F^\perp$ olup $\text{Rad}(E) = F^\perp$ olur. Buna göre L bir null vektördür.

ii) $q_F = q_E = 1$ olduğunu kabul edelim. F_1 non-dejenere ve L null olacak şekilde $F = F_1 \perp \text{span}\{L\}$ olduğunu göz önüne alalım. Bu taktirde $E = F_1 \perp F_1^\perp$ olur. boy $F_1^\perp = 2$ olduğundan $F_1^\perp = \text{span}\{L\} \oplus \text{span}\{V\}$ olur ki burada $\text{Rad}(E) = \text{span}\{L\}$ ve V , $F^\perp$ de bir non-null vektördür. Böylece benzer şekilde diğer durumda göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

iii) Benzer şekilde $F = F_1 \perp \text{span}\{L\}$ olduğunu kabul edelim. Burada $F_1^\perp = \text{span}\{L\} \oplus \text{span}\{V\}$ dir. $\text{Rad}(E) = \{0\}$ olduğundan $\langle L, V \rangle \neq 0$ dir. Ayrıca N vektör alanı

$$N = \frac{\varepsilon}{\langle L, V \rangle} \left(V - \frac{\langle V, V \rangle}{2\langle L, V \rangle} L \right)$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $\langle N, N \rangle = 0$, $\langle L, N \rangle = \varepsilon$ ve $N \in F_1^\perp$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Frenet çatıların bulunması için, sırasıyla, dört durum vardır [5].

1. Durum. $d = n$ ve $s \leq d$ olması durumu:

Bu halde, γ eğrisinin belirli $\left\{ \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{m+3} \right\}$ eğrilik fonksiyonları için aşağıdaki

eşitlikler elde edilir;

$$\gamma' = \bar{k}_1 W_1,$$

$$W_1' = \bar{k}_2 W_2,$$

$$W_i' = -\bar{k}_i W_{i-1} + \bar{k}_{i+1} W_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq s-2,$$

$$W_{s-1}' = -\bar{k}_{s-1} W_{s-2} + \varepsilon \bar{k}_s L,$$

$$L' = \varepsilon \bar{k}_{s+1} L + \bar{k}_{s+2} W_s,$$

$$W_s' = \varepsilon \bar{k}_{s+3} L - \varepsilon \bar{k}_{s+2} N,$$

$$N' = -\bar{k}_s W_{s-1} - \varepsilon \bar{k}_{s+1} N - \bar{k}_{s+3} W_s + \bar{k}_{s+4} W_{s+1},$$

$$W_{s+1}' = -\varepsilon \bar{k}_{s+4} L + \bar{k}_{s+5} W_{s+2},$$

$$W_j' = -\bar{k}_{j+3} W_{j-1} + \bar{k}_{j+4} W_{j+1}, \quad s+2 \leq j \leq m-1,$$

$$W_m' = -\bar{k}_{m+3} W_{m-1}.$$

$\mathfrak{S} = \{W_1, \dots, W_{s-1}, L, W_s, N, W_{s+1}, \dots, W_m\}$ cümlesi γ boyunca Frenet çatısı olarak adlandırılır. Yukarıdaki denklemler $\mathfrak{S}$ cümlesine göre γ nın Frenet eşitlikleri olarak adlandırılır [5].

2. Durum. $d < n$ ve $s = d$ olması durumu:

Birinci duruma benzer şekilde L null vektör olacak şekilde $\{W_1, \dots, W_{s-1}, L\}$ cümlesinin varlığı gösterilebilir. $\{W_1, \dots, W_{s-1}\}$ cümlesi space-like vektörlerin ortonormal cümlesi olup

$E_d = span\{W_1, \dots, W_{s-1}, L\}$ dir. Böylece γ eğrisinin belirli $\left\{ \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{s+1} \right\}$ eğrilik

fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\gamma' = \bar{k}_1 W_1,$$

$$W_1' = \bar{k}_2 W_2,$$

$$W_i' = -\bar{k}_i W_{i-1} + \bar{k}_{i+1} W_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq s-2,$$

$$W_{s-1}' = -\bar{k}_{s-1} W_{s-2} + \varepsilon \bar{k}_s L,$$

$$L' = \varepsilon \bar{k}_{s+1} L.$$

[5].

3. Durum. $d < n$ ve $s = d-1$ olması durumu:

Birinci duruma benzer şekilde, $E_d = span\{W_1, \dots, W_{s-1}, L, W_s\}$ cümlesi aşağıdaki denklemlerle elde edilir.

$$W_{s-1}' = -\bar{k}_{s-1} W_{s-2} + \varepsilon \bar{k}_s L,$$

$$L' = \varepsilon \bar{k}_{s+1} L + \bar{k}_{s+2} W_s,$$

$$W_s' = \varepsilon \bar{k}_{s+3} L.$$

[5].

4. Durum. $d < n$ ve $s < d-1$ olması durumu:

Burada $E_d = span\{W_1, \dots, W_{s-1}, L, W_s, N, W_{s+1}, \dots, W_{d-2}\}$ dir. Eğrilerin non-dejenere olması durumu [12] de çalışılmıştır, Eğer M_1^n Lorentz uzay form ise bu taktirde γ d-boyutlu non-dejenere total geodezik light-like altmanifold da yatar [5].

3.1.6. Özellik: s -dejenere eğrilerde s tipi, eğrinin parametresinden bağımsızdır.

$\bar{t}$ bir diğer parametre olsun ve $\gamma(t) = \beta(\bar{t}(t))$ şeklinde yazılsın. t ye göre diferensiyel

alınırsa $\gamma^i(t) = \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) \beta^j(\bar{t})$ elde edilir, yani

$$E_i = \text{span}\{\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)\} = \text{span}\{\beta'(t), \dots, \beta^{(i)}(t)\}$$

olup, kabul doğrudur.

Diğer taraftan, $\Phi: M_1^n \rightarrow M_1^n$ bir izometri ve $\bar{\gamma}(t) = (\Phi \circ \gamma)(t)$ olsun. Böylece γ boyunca her bir V vektör alanı için

$\frac{\bar{D}}{dt}(d\Phi_{\gamma(t)}V(t)) = d\Phi_{\gamma(t)}\left(\frac{D}{dt}V(t)\right)$ olur. Burada D_t ve $\bar{D}_t$, sırasıyla, γ ve $\bar{\gamma}$ boyunca kovaryant türevlerdir.

Buna göre $\langle \gamma^{(i)}(t), \gamma^{(j)}(t) \rangle = \langle \bar{\gamma}^{(i)}(t), \bar{\gamma}^{(j)}(t) \rangle$ olur ki bu Lorentz dönüşümü altında bu eğri çeşitlerinin değişmez olduğu anlamına gelir. Yani s -dejenere eğrilerde s tipi Lorentz dönüşümleri altında değişmez [5].

3.2. s -Dejenere Eğrilerin Cartan Çatıları

Bu bölümde Lorentz dönüşümleri altında değişmez olacak şekilde eğrilik sayılarının minimum olması durumunda Frenet çatısı verilmiştir. Bu birinci durumun sınırlandırılmış halidir. Genelliği bozmadan, γ nın $W_1 = \gamma'$ ve $\bar{k}_1 = 1$ olması durumunda yay uzunluğu ile parametrelendirildiğini kabul edelim. $\bar{k}_s = \varepsilon$ alınarak 3.1.5 Lemma göz önüne alınırsa $\{W_1, \dots, W_{s-1}, L\}$ cümlesi bulunur. Buna göre yalnız W_s in bulunması gerekli olur.

Kabul edelim ki W_s ve W_s^* iki farklı Frenet çatısından türetilmiş iki farklı vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \{W_1, \dots, W_{s-1}, L, W_s, N, W_{s+1}, \dots, W_m\} &\rightarrow \left\{ \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_s = 1, \bar{k}_{s+1}, \dots, \bar{k}_{m+3} \right\}, \\ \{W_1, \dots, W_{s-1}, L, W_s^*, N^*, W_{s+1}^*, \dots, W_m^*\} &\rightarrow \left\{ \bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_s = 1, \bar{k}_{s+1}^*, \dots, \bar{k}_{m+3}^* \right\} \end{aligned}$$

dir. Gerekli işlemler sonucu

$$W_s^* = fL + W_s, \quad N^* = -\frac{1}{2}f^2L + N - fW_s, \quad \bar{k}_{s+1}^* = \bar{k}_{s+1} - f\bar{k}_{s+2}, \quad (3.1)$$

olduğu gösterilir. Burada $f : I \rightarrow R$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Dolayısıyla

$f, \bar{k}_{s+1}^* = 0$ olacak şekilde seçilebilir. Buradan belirli $\{k_1, \dots, k_m\}$ eğrilik fonksiyonları için, 1. Durumdaki Frenet çatısı tekrardan aşağıdaki şekilde elde edilir [5].

$$\gamma' = W_1,$$

$$W_1' = k_1 W_2,$$

$$W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq s-2,$$

$$W_{s-1}' = -k_{s-2} W_{s-2} + L,$$

$$L' = k_{s-1} W_s,$$

$$W_s' = \varepsilon k_s L - \varepsilon k_{s-1} N,$$

$$N' = -\varepsilon W_{s-1} - \varepsilon k_s W_s + k_{s+1} W_{s+1},$$

$$W_{s+1}' = -\varepsilon k_{s+1} L + k_{s+2} W_{s+2},$$

$$W_j' = -k_j W_{j-1} + k_{j+1} W_{j+1}, \quad s+2 \leq j \leq m-1,$$

$$W_m' = -k_m W_{m-1}. \quad (3.2)$$

3.2.1. Teorem: $\gamma : I \rightarrow M_1^n$, $n = m+2$, $s > 1$ olacak şekilde birim s -dejenere eğri olsun.

Kabul edelim ki $T_{\gamma(t)}M_1^n$ de $\{\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n)}(t)\}$ tarafından gerilsin. Bu taktirde (3.2) şeklinde bir tek Frenet çatısı vardır [5].

3.2.2. Tanım: $s > 1$ olacak şekilde bir s -dejenere eğrisi yukardaki koşulları sağlarsa bir s -dejenere Cartan eğri denir ve (3.2) denklemi γ nın Cartan çatısı ya da Cartan gösterimi olarak adlandırılır.

Burada $m > s$ olduğunda $\varepsilon = -1$ ve $i \neq s$ için $k_i > 0$ olduğu gözlenir ve $\{\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n)}(t)\}$ nin pozitif ya da negatif yönlendirilmiş olmasına göre, sırasıyla, $k_m > 0$ ya da $k_m < 0$ olur.

Aksine, $m = s$ olduğunda $\{\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n)}(t)\}$ nin pozitif ya da negatif olarak yönlendirilmiş olmasına göre, sırasıyla, $\varepsilon = 1$ ya da $\varepsilon = -1$ olur ve $i \neq s$ için $k_i > 0$ dır [5].

3.3. Lorentz Uzay Formunda s -Dejenere Eğriler

$\gamma: I \rightarrow M_1^n(c)$ s -dejenere Cartan eğri olsun, $M_1^n(c)$ $c = 0, c = 1$ ve $c = -1$ olmasına göre, sırasıyla, R_1^n, S_1^n ve H_1^n e karşılık gelir. D_t , γ boyunca $M_1^n(c)$ de kovaryant türev olarak tanımlansın. Böylece γ boyunca V vektör alanı için $D_t V = V' + c \langle V, \gamma' \rangle \gamma$ elde edilir. Burada $\langle, \rangle$ metriği R_1^n, R_1^{n+1} ya da R_2^{n+1} de tanımlanan standart metriktir. Eğer $\{W_1, \dots, W_{s-1}, L, W_s, N, W_{s+1}, \dots, W_m\}$ Cartan gösterimi ise, (3.2) denkleminde aşağıdaki eşitlikler yazılır [5];

$$\begin{aligned}
\gamma' &= W_1, \\
W_1' &= k_1 W_2 - c \gamma, \\
W_i' &= -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq s-2, \\
W_{s-1}' &= -k_{s-2} W_{s-2} + L, \\
L' &= k_{s-1} W_s, \\
W_s' &= \varepsilon k_s L - \varepsilon k_{s-1} N, \\
N' &= -\varepsilon W_{s-1} - \varepsilon k_s W_s + k_{s+1} W_{s+1}, \\
W_{s+1}' &= -\varepsilon k_{s+1} L + k_{s+2} W_{s+2}, \\
W_j' &= -k_j W_{j-1} + k_{j+1} W_{j+1}, \quad s+2 \leq j \leq m-1, \\
W_m' &= -k_m W_{m-1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.4. M_1^4 de 2-Dejenere Eğriler

Bu bölümde M_1^4 Lorentz uzay formunda 2-dejenere eğrilerin sınıflandırılması ve Cartan çatısı verilmiştir.

3.4.1. Tanım: Bir 2-dejenere α eğrisinde $\{W_1, L, W_2, N\}$ pseudo-ortonormal bazı

$$\langle L, L \rangle = \langle N, N \rangle = 0, \langle L, N \rangle = \langle N, L \rangle = \varepsilon, \varepsilon = \pm 1$$

$$\langle L, W_i \rangle = \langle N, W_i \rangle = 0, 1 \leq i \leq 2$$

şartlarını sağlar [5].

4. REKTİFİYAN EĞRİLER

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda 4-boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğriyle ilgili [7] de çalışılmış olan tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci kısım ise bu çalışmamın orijinal olan kısmıdır. Bu kısımda 4-boyutlu Lorentz uzayında 2-dejenere eğrilerin rektifiyan eğri olması için tanımlar ve teoremler verilmiş ve 2-dejenere rektifiyan eğriler karakterize edilmiştir.

4.1. E^4 Öklid Uzayında Rektifiyan Eğrilerin Karakterizasyonları

Bu kısımda E^4 Öklid uzayındaki temel tanımlar ve rektifiyan eğrilerin bazı karakterizasyonları verilecektir.

4.1.1. Tanım: $I \subseteq \mathbb{R}$ açık alt cümle olmak üzere diferensiyellenebilir

$$\alpha: I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

fonksiyonu verilmiş olsun. (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ e E^n de bir eğri denir. t ye α eğrisinin yay parametresi ve I ya da α eğrisinin parametre aralığı adı verilir [10].

4.1.2. Tanım: E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) gibi iki koordinat komşuluğu verilsin

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta: J \rightarrow I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M nin bir parametre değişimi denir [10].

4.1.3. Tanım: M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [10].

4.1.4. Tanım: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için; $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Her bir $1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir [10].

4.1.5. Tanım: $n=3$ özel halinde, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet 3-ayaklısını gözönüne alalım:

$$Sp\{T(s), N(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya oskülatör düzlem,

$$Sp\{N(s), B(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya normal düzlem ve

$$Sp\{T(s), B(s)\}$$

vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya rektifiyan düzlem denir.

Burada, oskülatör kelimesi yapışan anlamında, normal dik anlamında ve rektifiyan kelimesi de tamamlayan anlamındadır [10].

4.1.6. Tanım: T teğet ve B binormal vektör alanı olmak üzere, Öklid 3-uzayında yer vektörü, eğrinin T teğet ve B binormal vektör alanları tarafından gerilen rektifiyan düzleminde yatan eğriye rektifiyan eğri denir.

Buna göre E^3 teki rektifiyan eğrinin seçilmiş bir orijine göre yer vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

denklemini sağlar.

Burada $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, yay uzunluğu parametresi için keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlardır [10].

4.1.7. Tanım: E^3 Öklid uzayına benzer yaklaşımla, E^4 Öklid uzayındaki rektifiyan eğri; $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^4$ birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B_1, B_2\}$, E^4 de $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Frenet çatısı olsun, α eğrisinin $\alpha(s)$ yer vektörü, N nin dik tümleyeni olan $N^\perp = \{T, B_1, B_2\}$ de yatıyorsa, α birim hızlı eğrisine rektifiyan eğri denir.

Buradan E^4 teki bir α rektifiyan eğrinin seçilmiş herhangi bir orijine göre yer vektörü;

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \nu(s)B_2(s)$$

denklemini sağlar. Burada s yay uzunluk fonksiyonu $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\nu(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Bu tanımlardan sonra, rektifiyan eğriler eğrinin kendi eğrilik fonksiyonuna göre $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ cinsinden karakterize edilmiştir. E^4 teki herhangi bir eğrinin rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şartlar bulunarak E^4 teki bir rektifiyan eğri için açık bir denklem elde edilmiştir [7].

4.1.8. Teorem: α , E^4 de $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde α eğrisinin bir rektifiyan eğriye kongruent olması için gerek ve yeter şart,

$$\frac{k_1(s) k_3(s) (s+c)}{k_2(s)} + \left(\frac{k_1(s) k_2(s) + (s+c) (k_1'(s) k_2(s) - k_1(s) k_2'(s))}{k_2^2(s) k_3(s)} \right)' = 0, c \in R$$

olmasıdır [7].

4.1.9. Teorem: Tamamı E^4 de bulunan, $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri sabit ve sıfırdan farklı olan rektifiyan eğri yoktur [7].

4.1.10. Teorem: $\alpha = \alpha(s)$, E^4 de $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğriliklerine sahip birim hızlı eğri olsun. Bu takdirde

$$\textbf{a)} \quad k_1(s) = sbt > 0, k_2(s) = sbt \neq 0 \text{ ve } k_3(s) = \frac{1}{\sqrt{|-s^2 - 2cs - 2c_1|}}, c \in R, c_1 \in R^+.$$

$$\textbf{b)} \quad k_2(s) = sbt \neq 0, k_3(s) = sbt \neq 0 \text{ ve } k_1(s) = \frac{c_1 e^{ik_3(s)} + c_2 e^{-ik_3(s)}}{s+c}, c \in R, c_1, c_2 \in R^+.$$

$$\textbf{c)} \quad k_1(s) = sbt > 0, k_3(s) = sbt \neq 0 \text{ ve } k_2(s) = \frac{s+c}{c_1 e^{ik_3(s)} + c_2 e^{-ik_3(s)}}, c \in R, c_1, c_2 \in R^+.$$

ise α bir rektifiyan eğriye kongruenttir [7].

4.1.11. Teorem: $\alpha(s)$, E^4 de sıfırdan farklı $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğriliklerine sahip birim

hızlı rektifiyan eğri olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlanır.

i) $\rho(s) = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonu $\rho^2(s) = s^2 + c_1s + c_2$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R_0$ denklemini sağlar.

ii) Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni $\langle \alpha(s), T(s) \rangle = s + c$, $c \in R$ denklemini sağlar.

iii) Eğrinin yer vektörünün $\alpha^N(s)$ normal bileşeni sabit uzunluğa sahiptir ve $\rho(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv) Eğrinin yer vektörünün birinci binormal bileşeni ve ikinci binormal bileşeni, sırasıyla,

$$\langle \alpha(s), B_1(s) \rangle = \frac{k_1(s)(s+c)}{k_2(s)}$$

$$\langle \alpha(s), B_2(s) \rangle = \frac{k_1(s)k_2(s) + (s+c)(k_1'(s)k_2(s) - k_1(s)k_2'(s))}{k_2^2(s)k_3(s)}, c \in R$$

denklemlerini sağlar.

Tersine, eğer $\alpha(s)$ E^4 de sıfırdan farklı, $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğriliklerine sahip birim hızlı eğri olmak üzere, (i), (ii), (iii) ve (iv) durumlarından birini sağlarsa bir rektifiyan eğridir [7].

4.2. M_1^4 de 2-dejenere Rektifiyan Eğriler ve Karakterizasyonları

Bu kısımda M_1^4 Lorentz uzayındaki 2-dejenere rektifiyan eğrileri α ile gösterip, bu eğrilikleri eğrilik fonksiyonlarını kullanarak karakterize edeceğiz. Ayrıca bu kısımda g metriği yerine $\langle, \rangle$ ifadesi kullanılacak ve kısalığın hatırı için zaman zaman s parametresine bağlı olan $W_1(s), L(s), W_2(s), N(s)$ $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ifadeleri s parametresi kullanılmadan ifade edilecektir.

4.2.1. Tanım: $\alpha: I \subset R \rightarrow M_1^4$, eğrisi α' , α''' space-like α'' , α^{IV} null olmak üzere $\{W_1, L, W_2, N\}$ Cartan çatısına sahip ise α eğrisine 2-dejenere eğri adı verilir.

4.2.2. Tanım: α , M_1^4 uzayında bir 2-dejenere eğri ve $\{W_1, L, W_2, N\}$, M_1^4 de $\alpha(s)$ 2-dejenere eğrisi boyunca hareketli Cartan çatısı olsun. 2-dejenere α eğrisinin $\alpha(s)$ yer vektörü, W_2 nin dik tümleyenini olan $W_2^\perp = \{W_1, L, N\}$ de yatıyorsa, 2-dejenere α eğrisine 2-

dejenere rektifiyan eğri denir.

Buradan M_1^4 teki bir α rektifiyan eğrinin seçilmiş herhangi bir orjine göre yer vektörü;

$$\alpha(s) = \lambda(s)W_1(s) + \mu(s)L(s) + \nu(s)N(s) \quad (4.1)$$

denklemini sağlar. Burada s yay uzunluk fonksiyonu $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\nu(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Bu tanımlardan sonra, rektifiyan eğriler eğrinin kendi eğrilik fonksiyonuna göre $W_1, L, W_2, N(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ cinsinden karakterize edilmiştir. M_1^4 teki herhangi bir eğrinin rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şartlar bulunmuştur.

4.2.3. Tanım: $\{W_1, L, W_2, N\}$, 2-dejenere α eğrisi boyunca hareketli Cartan çatısı olsun. Burada W_1, L, W_2 ve N , sırasıyla teğet, birinci binormal, asli normal ve ikinci binormal vektör alanı olarak tanımlanır. Ayrıca W_1, W_2 space-like L, N null vektördür. Bu taktirde Cartan formülleri

$$\begin{bmatrix} W_1' \\ L' \\ W_2' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon k_2 & 0 & -\varepsilon k_1 \\ -\varepsilon & 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ L \\ W_2 \\ N \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

olarak verilir. Burada k_1 ve k_2 fonksiyonları, sırasıyla, 2-dejenere α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri olarak adlandırılır [5].

4.2.4. Teorem: α , M_1^4 de $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı olan 2-dejenere bir eğri olsun. Bu durumda 2-dejenere α eğrisinin bir rektifiyan eğriye kongruent olması için gerek ve yeter şart,

$$\left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) = \varepsilon + \frac{1}{c}, \quad c \neq 0 \in R$$

olmasıdır.

İspat: İlk olarak M_1^4 deki rektifiyan eğriler kendi eğrilik fonksiyonlar cinsinden karakterize edilecektir. $\alpha = \alpha(s)$, M_1^4 de 2-dejenere rektifiyan eğri, $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ sıfırdan farklı

eğrilikler olsun. 2-dejenere α eğrisinin yer vektörü $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\nu(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar cinsinden (4.1) denklemiyle belirtilmişti. Verilen (4.1) denkleminin s ye göre türevi alınarak ve (4.2) Cartan formülleri kullanılarak

$$W_1(s) = (\lambda'(s) - \varepsilon\nu(s))W_1(s) + (\lambda(s) + \mu'(s))L(s) \\ + (\mu(s)k_1(s) - \nu(s)k_2(s))W_2(s) + \nu'(s)N(s)$$

denklemini elde edilir.

Gerçekten;

$$\alpha(s) = \lambda(s)W_1(s) + \mu(s)L(s) + \nu(s)N(s)$$

dir.

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)W_1 + \lambda(s)W_1'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s) + \nu'(s)N(s) + \nu(s)N'(s)$$

(4.3)

olup, bu denklem $\forall s \in I \subset R$ için doğrudur.

Burada $\alpha' = W_1$ olduğundan ve (4.3) denkleminde

$$W_1' = L, L' = k_1W_2, W_2' = \varepsilon k_2L - \varepsilon k_1N \text{ ve } N' = -\varepsilon W_1 - k_2W_2$$

olduğu biliniyor. Bunlar (4.3) de yerine yazılırsa

$$W_1 = \lambda'W_1 + \lambda L + \mu' L + \mu(k_1W_2) + \nu' N + \nu(-\varepsilon W_1 - k_2W_2) \\ W_1 = (\lambda' - \varepsilon\nu)W_1 + (\lambda + \mu')L + (\mu k_1 - \nu k_2)W_2 + \nu' N \quad (4.4)$$

elde edilir.

Daha sonra (4.4) denklemini W_1 ile 2-dejenere eğri için Lorentz iç çarpımına tabi tutulursa,

$$\langle W_1, W_1 \rangle = \langle ((\lambda' - \varepsilon\nu)W_1 + (\lambda + \mu')L + (\mu k_1 - \nu k_2)W_2 + \nu' N), W_1 \rangle \\ \Rightarrow \langle W_1, W_1 \rangle = \langle (\lambda' - \varepsilon\nu)W_1, W_1 \rangle + \langle (\lambda + \mu')L, W_1 \rangle + \langle (\mu k_1 - \nu k_2)W_2, W_1 \rangle + \langle \nu' N, W_1 \rangle \\ \Rightarrow \langle W_1, W_1 \rangle = (\lambda' - \varepsilon\nu)\langle W_1, W_1 \rangle + (\lambda + \mu')\langle L, W_1 \rangle + (\mu k_1 - \nu k_2)\langle W_2, W_1 \rangle + \nu'\langle N, W_1 \rangle$$

olur. Burada $\langle W_1, W_1 \rangle = 1$, $\langle L, W_1 \rangle = \langle W_2, W_1 \rangle = \langle N, W_1 \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\lambda' - \varepsilon\nu = 1$$

bulunur.

Şimdi (4.4) denklemini L null vektör alan ile 2-dejenere eğri için Lorentz iç çarpımına tabi tutulursa,

$$\langle W_1, L \rangle = \langle ((\lambda' - \varepsilon\nu)W_1 + (\lambda + \mu')L + (\mu k_1 - \nu k_2)W_2 + \nu' N), L \rangle \\ \langle W_1, L \rangle = \langle (\lambda' - \varepsilon\nu)W_1, L \rangle + \langle (\lambda + \mu')L, L \rangle + \langle (\mu k_1 - \nu k_2)W_2, L \rangle + \langle \nu' N, L \rangle$$

$$\langle W_1, L \rangle = (\lambda' - \varepsilon v) \langle W_1, L \rangle + (\lambda + \mu') \langle L, L \rangle + (\mu k_1 - \nu k_2) \langle W_2, L \rangle + v' \langle N, L \rangle.$$

Buradan $\langle L, N \rangle = \varepsilon$, $\langle L, L \rangle = \langle W_1, L \rangle = \langle W_2, L \rangle = 0$, olduğu göz önüne alınırsa

$$v' = 0$$

elde edilir.

Yine (4.4) denklemi W_2 ile 2-dejenere eğri için Lorentz iç çarpımına tabi tutulursa,

$$\langle W_1, W_2 \rangle = \langle ((\lambda' - \varepsilon v) W_1 + (\lambda + \mu') L + (\mu k_1 - \nu k_2) W_2 + v' N), W_2 \rangle$$

$$\langle W_1, W_2 \rangle = \langle (\lambda' - \varepsilon v) W_1, W_2 \rangle + \langle (\lambda + \mu') L, W_2 \rangle + \langle (\mu k_1 - \nu k_2) W_2, W_2 \rangle + \langle v' N, W_2 \rangle$$

$$\langle W_1, W_2 \rangle = (\lambda' - \varepsilon v) \langle W_1, W_2 \rangle + (\lambda + \mu') \langle L, W_2 \rangle + (\mu k_1 - \nu k_2) \langle W_2, W_2 \rangle + v' \langle N, W_2 \rangle$$

olur. Burada $\langle W_2, W_2 \rangle = 1$, $\langle W_1, W_2 \rangle = \langle L, W_2 \rangle = \langle N, W_2 \rangle = 0$, olduğundan

$$\Rightarrow \mu k_1 - \nu k_2 = 0$$

elde edilir.

Son olarak (4.4) N null vektör alanı ile 2-dejenere eğri için Lorentz iç çarpımına tabi tutulursa,

$$\langle W_1, N \rangle = \langle ((\lambda' - \varepsilon v) W_1 + (\lambda + \mu') L + (\mu k_1 - \nu k_2) W_2 + v' N), N \rangle$$

$$\langle W_1, N \rangle = \langle (\lambda' - \varepsilon v) W_1, N \rangle + \langle (\lambda + \mu') L, N \rangle + \langle (\mu k_1 - \nu k_2) W_2, N \rangle + \langle v' N, N \rangle$$

$$\langle W_1, N \rangle = (\lambda' - \varepsilon v) \langle T, B_2 \rangle + (\lambda' - \varepsilon v) \langle L, N \rangle + (\mu k_1 - \nu k_2) \langle W_2, N \rangle + v' \langle N, N \rangle$$

olur. Burada $\langle L, N \rangle = \varepsilon$, $\langle N, N \rangle = \langle W_1, L \rangle = \langle W_2, L \rangle = 0$, olduğundan

$$\Rightarrow \lambda + \mu' = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\lambda' - \varepsilon v = 1 \tag{4.5}$$

$$v' = 0$$

$$\mu k_1 - \nu k_2 = 0$$

$$\lambda + \mu' = 0$$

bulunur. (4.5) denklemleri çözülürse

$$\lambda' = 0 \Rightarrow v(s) = c$$

olur. Bulunan bu ifadeler $\mu k_1 - \nu k_2 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu k_1 - \nu k_2 = 0 \Rightarrow \mu(s) = \frac{k_2(s)}{k_1(s)} c$$

elde edilir.

$\mu(s)$ in s ye göre kısmi türevi alınır

$$\mu'(s) = \left(\frac{k_2'(s)k_1(s) - k_1'(s)k_2(s)}{k_1^2(s)} \right) c$$

bulunur. Bu da $\lambda + \mu' = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda(s) = -\mu'(s) = \left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) c$$

dir. Böylece

$$\lambda(s) = \left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) c \quad (4.6)$$

$$\mu(s) = \frac{k_2(s)}{k_1(s)} c$$

$$\nu(s) = c$$

elde edilir. Burada $c \neq 0 \in R$ dir. Bu yolla $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\nu(s)$ fonksiyonlar 2-dejenere α eğrisinin $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilik fonksiyonlar cinsinden gösterilmiş olur. Üstelik (4.5) in en son denklemini ve (4.6) eşitliklerini kullanarak $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ile ilgili aşağıdaki eşitlik kolayca bulunabilir.

Gerçekten $\lambda' - \varepsilon\nu = 1$ alınır ve burada (4.6) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right)' c - \varepsilon c = 1, c \neq 0 \in R$$

veya

$$\left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right)' c = 1 + \varepsilon c$$

ya da

$$\left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right)' = \varepsilon + \frac{1}{c} \quad (4.7)$$

elde edilir.

Tersine; M_1^4 de herhangi bir 2-dejenere α eğrisinin $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğriliklerinin (4.7) denklemini sağladığı kabul edilsin. $X \in M_1^4$ vektörü

$$X(s) = \alpha(s) - \lambda(s)W_1(s) - \mu(s)L(s) - \nu(s)N(s)$$

olarak verildiği kabul edilip (4.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$X(s) = \alpha(s) - c \left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) W_1(s) - c \frac{k_2}{k_1} L(s) - cN(s)$$

yazılabilir. Burada X in sabit bir vektör olduğu gösterilirse α nın bir rektifiyan eğriye kongruent olduğu ispatlanmış olur. Böylece (4.2) ve (4.7) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$X'(s) = 0$ olduğu kolayca görülür. Gerçekten (4.2) ve (4.7) den

$$\begin{aligned} X'(s) = \alpha'(s) - c \left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right)' W_1(s) - \left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) L(s) \\ - c \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} \right) L(s) - c \frac{k_2(s)}{k_1(s)} k_1 W_2 - c(-\varepsilon W_1(s) - k_2(s) W_2(s)) \end{aligned}$$

olur. Burada $\alpha'(s) = W_1(s)$ olduğu ve yine (4.7) denkleminde

$$X'(s) = (1 - (1 + \varepsilon c) + \varepsilon c) W_1(s) + (-\lambda(s) - \mu'(s)) L + (-k_2(s)c + k_2(s)c) W_2(s) = 0$$

ve $X'(s) = 0$ bulunur bu da X in sabit bir vektör olduğu anlamına gelir. Bu ise α nın bir rektifiyan eğrisine kongruent olduğunu gösterir.

4.2.5. Teorem: Tamamı M_1^4 de bulunan, $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilikleri sabit ve sıfırdan farklı olan 2-dejenere rektifiyan eğri yoktur.

İspat: $k_1(s) = sbt$, $k_2(s) = sbt$ olsaydı $\left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} \right)' = 0$ olup buda (4.7) denklemiyle

çelişirdi. Dolayısıyla tamamı M_1^4 de bulunan, $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilikleri sabit ve sıfırdan farklı olan, 2-dejenere rektifiyan eğri yoktur.

4.2.6. Teorem: $\alpha = \alpha(s)$, M_1^4 de $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ve eğriliklerine sahip 2-dejenere eğri olsun. Bu takdirde

a) $k_1(s) = sbt \neq 0$ ve $k_2(s) = - \left(k_1 \left(\varepsilon + \frac{1}{c} \right) \frac{s^2}{2} + c_1 s + c_2 \right)$, $c \in R$, $c_1, c_2 \in R^+$,

b) $k_2(s) = sbt \neq 0$ ve $k_1(s) = - \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{c}}{k_2} \right) \frac{s^2}{2} + c_1 s + c_2}$, $c \in R$, $c_1, c_2 \in R^+$,

ise 2-dejenere α eğrisi bir rektifiyan eğriye kongruenttir.

İspat:

a) $k_1(s) = sbt \neq 0$ ve $k_2(s)$ sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Burada $k_1(s)$ sabit olduğundan özel olarak $k_1(s) = k_1$ alınacaktır. (4.7) den,

$$\left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right)' = \varepsilon + \frac{1}{c}, c \neq 0 \in R$$

bulunur. Burada $k_1' = 0$ olduğu göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\left(\frac{k_2'(s)}{k_1} \right)' = \varepsilon + \frac{1}{c}$$

olur. Dolayısıyla

$$-(k_2'(s))' = k_1 \left(\varepsilon + \frac{1}{c} \right)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Elde edilen bu diferensiyel denklemin çözümü için,

yukarıdaki eşitlikte $k_1 \left(\varepsilon + \frac{1}{c} \right) = a$ denirse,

$$-(k_2'(s))' = a$$

$$-\int (k_2'(s))' ds = \int a ds$$

$$-k_2'(s) = as + c_1$$

$$-\frac{dk_2(s)}{ds} = as + c_1$$

$$-dk_2(s) = (as + c_1)ds$$

olur. Burada düzenlemeler yapılırsa,

$$k_2(s) = -\left(k_1 \left(\varepsilon + \frac{1}{c} \right) \frac{s^2}{2} + c_1 s + c_2 \right)$$

bulunur.

b) $k_1(s) \neq sbt$ ve $k_2(s) = sbt > 0$ olsun. Burada $k_1(s)$ sabit olduğundan özel olarak $k_1(s) = k_1$ alınacaktır. Bu fonksiyonlar (4.7) denkleminde kullanılarak

$$\left(\frac{k_1'(s)k_2(s) - k_2'(s)k_1(s)}{k_1^2(s)} \right)' = \varepsilon + \frac{1}{c}, c \neq 0 \in R$$

elde edilir. Burada $k_2' = 0$ olduğu göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_2 \left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)} \right)' = \varepsilon + \frac{1}{c}$$

$$\left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)} \right)' = \left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{c}}{k_2} \right)$$

diferensiyel denklemi bulunur. Elde edilen bu diferensiyel denklemin çözümü için, yukarıdaki

eşitlikte $\left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{c}}{k_2} \right) = b$ denirse,

$$\int \left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)} \right)' ds = \int b ds$$

$$\left(\frac{k_1'(s)}{k_1^2(s)} \right) = bs + c_1$$

$$\frac{d(k_1(s))}{k_1^2(s)} = (bs + c_1) ds$$

$$k_1(s) = - \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{c}}{k_2} \right) \frac{s^2}{2} + c_1 s + c_2}$$

bulunur.

4.2.7. Teorem: $\alpha(s)$, M_1^4 de sıfırdan farklı $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğriliklerine sahip 2-dejenere rektifiyan eğri olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlanır.

i) $\rho(s) = \|\alpha(s)\|$ uzaklık fonksiyonu $\rho^2(s) = s^2 c + c_1 s + c_2 + \frac{k_2(s)}{k_1(s)} c_3$, $c, c_2 \in R^+$

$c_1, c_3 \neq 0 \in R$ denklemini sağlar.

ii) Eğrinin yer vektörünün $\alpha^N(s)$ normal bileşeni ve $\rho(s)$ uzaklık fonksiyonu sabit uzunluğa sahip değildir.

İspat:

i) (4.1) denkleminden $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= \langle \lambda(s) W_1(s) + \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s), \lambda(s) W_1(s) + \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s) \rangle \\ &= \langle \lambda(s) W_1(s), \lambda(s) W_1(s) \rangle + \langle \mu(s) L(s), \nu(s) N(s) \rangle + \langle \nu(s) N(s), \mu(s) L(s) \rangle \\ &= \lambda^2(s) \langle W_1(s), W_1(s) \rangle + \mu(s) \nu(s) \langle L(s), N(s) \rangle + \mu(s) \nu(s) \langle N(s), L(s) \rangle \\ \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= \lambda^2(s) + 2\mu(s)\nu(s)\epsilon\end{aligned}$$

bulunur.

$$\lambda' = 1 + \epsilon c$$

olduğu göz önüne alınır,

$$\lambda = (1 + \epsilon c) s + c_1$$

elde edilir. İki tarafın karesi alınır,

$$\lambda^2(s) = ((1 + \epsilon c) s + c_1)^2 \Rightarrow \lambda^2(s) = (1 + \epsilon c)^2 s^2 + 2(1 + \epsilon c) s c_1 + c_1^2$$

olur. Burada $(1 + \epsilon c)^2 = c$, $2(1 + \epsilon c)c_1 = c_1$ ve $c_1^2 = c_2$ alıp denklemden yerine yazılırsa

$$\lambda^2(s) = s^2 c + c_1 s + c_2$$

elde edilir.

$$2\mu(s)\nu(s)\epsilon = 2 \frac{k_2}{k_1} c c \epsilon$$

eşitliğinde $2c^2\epsilon = c_3$ denirse

$$2\epsilon\mu(s)\nu(s) = \frac{k_2}{k_1} c_3$$

olur. Böylece;

$$\rho^2(s) = \|\alpha(s)\|^2 = s^2 c + c_1 s + c_2 + \frac{k_2(s)}{k_1(s)} c_3$$

olur ki bu da (i) nin ispatını tamamlar.

ii) M_1^4 de keyfi bir 2-dejenere α eğrisinin yer vektörü

$$\alpha(s) = m(s) W_1(s) + \alpha^N(s)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $m(s)$ keyfi diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha^N(s)$ de yer vektörünün normal bileşenidir. Eğer α 2-dejenere bir rektifiyan eğri ise (4.1) denklemi,

$$\alpha^N(s) = \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s)$$

olarak yazılır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}\alpha^N(s) &= \alpha(s) - m(s) W_1(s) \\ &= \lambda(s) W_1(s) + \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s) - m(s) T(s)\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\lambda(s)$ ve $m(s)$ keyfi olduğundan $\lambda(s) = m(s)$ olarak seçilebilir. Bu yukarıdaki eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\alpha^N(s) = \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s)$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\langle \alpha^N(s), \alpha^N(s) \rangle &= 2\mu(s) \nu(s) \mathcal{E} \\ \|\alpha^N(s)\| &= \frac{k_2(s)}{k_1(s)} c_3\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (i) halinden $\rho(s)$ in sabit olmayan bir fonksiyon olduğu biliniyor. Böylece (ii) de ispatlanmış olur.

4.2.8. Teorem: $\alpha(s)$, M_1^4 de sıfırdan farklı $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğriliklerine sahip 2-dejenere rektifiyan eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır.

i) Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni,

$$\langle \alpha(s), W_1(s) \rangle = \left(\frac{k_1'(s) k_2(s) - k_2'(s) k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) c, c \neq 0 \in \mathbb{R}$$

denklemini sağlar.

ii) Eğrinin yer vektörünün birinci binormal bileşeni ve ikinci binormal bileşeni, sırasıyla,

$$\langle \alpha(s), L(s) \rangle = c \mathcal{E} \tag{4.8}$$

$$\langle \alpha(s), N(s) \rangle = \frac{k_2}{k_1} c \mathcal{E}, c \neq 0 \in \mathbb{R}$$

denklemlerini sağlar.

Tersine; eğer $\alpha(s)$, M_1^4 de sıfırdan farklı $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğriliklerine sahip 2-dejenere eğri olmak üzere (i) ve (ii) durumlarından birini sağlarsa, bir rektifiyan eğridir.

İspat:

i) (4.1) ve (4.6) denklemleri birlikte kullanılarak

$$\langle \alpha(s), W_1(s) \rangle = c \left(\frac{k_1'(s) k_2(s) - k_2'(s) k_1(s)}{k_1^2(s)} \right), c \neq 0 \in R$$

olur. Gerçekten (4.1) den

$$\alpha(s) = \lambda(s)W_1(s) + \mu(s)L(s) + \nu(s)N(s)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), W_1(s) \rangle &= \langle \lambda(s) W_1(s) + \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s), W_1(s) \rangle \\ &= \lambda(s) \langle W_1(s), W_1(s) \rangle + \mu(s) \langle L(s), W_1(s) \rangle + \nu(s) \langle N(s), W_1(s) \rangle \\ \langle \alpha(s), W_1(s) \rangle &= \lambda(s) = \left(\frac{k_1'(s) k_2(s) - k_2'(s) k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) c \end{aligned}$$

olur ki bu da (ii) nin ispatıdır.

ii) Son olarak (4.1) ve (4.6) kullanılarak (4.8) kolayca elde edilir. Buda (iv) ün ispatıdır.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), L(s) \rangle &= \langle \lambda(s) W_1(s) + \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s), L(s) \rangle \\ \langle \alpha(s), L(s) \rangle &= \nu(s) \langle N(s), L(s) \rangle = c\mathcal{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), N(s) \rangle &= \langle \lambda(s) W_1(s) + \mu(s) L(s) + \nu(s) N(s), N(s) \rangle \\ &= \lambda(s) \langle W_1(s), N(s) \rangle + \mu(s) \langle L(s), N(s) \rangle + \nu(s) \langle N(s), N(s) \rangle \\ \langle \alpha(s), N(s) \rangle &= \frac{k_2}{k_1} c\mathcal{E} \end{aligned}$$

olur.

Tersine; (i) nin var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\langle \alpha(s), W_1(s) \rangle = \lambda$$

dir. Bu denklemin s ye göre iki kez türevi alınır ve (4.2) denklemini kullanılırsa

$$\langle \alpha(s), W_1(s) \rangle' = \lambda'$$

$$\langle \alpha'(s), W_1(s) \rangle + \langle \alpha(s), W_1'(s) \rangle = 1 + \varepsilon c$$

$$1 + \langle \alpha(s), L(s) \rangle = 1 + \varepsilon c$$

$$\langle \alpha(s), L(s) \rangle' = 0$$

$$\langle \alpha'(s), L(s) \rangle + \langle \alpha(s), L'(s) \rangle = 0$$

$$\langle W_1(s), L(s) \rangle + \langle \alpha(s), k_1(s) W_2(s) \rangle = 0$$

$$k_1(s) \langle \alpha(s), W_2(s) \rangle = 0$$

olur. $k_1(s) \neq 0$ olduğundan,

$$\langle \alpha(s), W_2(s) \rangle = 0.$$

Bu ise α nın 2-dejenere bir rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir.

Eğer (ii) sağlanıyorsa,

$$\langle \alpha(s), L(s) \rangle = c\varepsilon$$

denkleminin s ye göre türevi alınır ve (4.2) kullanılırsa yani;

$$\langle \alpha'(s), L(s) \rangle + \langle \alpha(s), L'(s) \rangle = 0$$

$$\langle W_1(s), L(s) \rangle + \langle \alpha(s), k_1(s) W_2(s) \rangle = 0$$

$$k_1(s) \langle \alpha(s), W_2(s) \rangle = 0$$

olur. $k_1(s) \neq 0$ olduğundan

$$\langle \alpha(s), W_2(s) \rangle = 0.$$

Bu ise α nın 2-dejenere bir rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir.

Benzer şekilde

$$\langle \alpha(s), N(s) \rangle = \frac{k_2}{k_1} c\varepsilon$$

dir. Bu denklemin s ye göre türevi alınır ve (4.2) denklemini kullanılırsa

$$\langle \alpha'(s), N(s) \rangle + \langle \alpha(s), N'(s) \rangle = \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} \right)' c\varepsilon$$

$$\langle W_1(s), N(s) \rangle + \langle \alpha(s), -\varepsilon W_1 - k_2(s) W_2 \rangle = \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} \right)' c\varepsilon$$

$$-\varepsilon \langle \alpha(s), W_1 \rangle - k_2(s) \langle \alpha(s), W_2 \rangle = \left(\frac{k_2'(s) k_1(s) - k_1'(s) k_2(s)}{k_1^2(s)} \right) c\varepsilon$$

olup, $\langle \alpha(s), W_1 \rangle = \lambda$ olduğu göz önüne alınıp (4.6) kullanılırsa,

$$-\mathcal{E} \left(\frac{k_1'(s) k_2(s) - k_2'(s) k_1(s)}{k_1^2(s)} \right) c - k_2(s) \langle \alpha(s), W_2 \rangle = \left(\frac{k_2'(s) k_1(s) - k_1'(s) k_2(s)}{k_1^2(s)} \right) c \mathcal{E}$$

$$k_2(s) \langle \alpha(s), W_2 \rangle = 0$$

olur, $k_2(s) \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\langle \alpha(s), W_2 \rangle = 0$$

elde edilir. Bu ise α nın 2-dejenere bir rektifiyan eğri olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

5.SONUÇ

Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.5 e bağılı üç tane sonuç elde edildi. Bu sonuçlar;

5.1.1. Sonuç: M_1^4 ’ deki herhangi 2-dejenere rektifiyan eğri 2-dejenere helis olamaz.

5.1.2. Sonuç: M_1^4 ’deki herhangi 2-dejenere rektifiyan eğrinin birinci ve ikinci eğriliklerinin her ikisi birden sabit olamaz.

5.1.3. Sonuç: M_1^4 ’ deki herhangi 2-dejenere rektifiyan eğrinin birinci ve ikinci eğriliklerinin her ikisi birden sıfır olamaz.

KAYNAKLAR

- [1] **Bonnor, W.B.**, 1969. Null Curves in a Minkowski Space-time, *Tensor*, 20, 229-242.
- [2] **Bejancu, A.**, 1994. Lightlike Curves in Lorentz Manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, **44**, (1-2), 145-155.
- [3] **Duggal, K. L. and Bejancu, A.**, 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, *Kluwer Academic Publishers*.
- [4] **Nersessian, A., Ramos, E.**, 1998. Massive Spinning Particles and Geometry of Null Curves, *Phys. Lett.*, B 444.
- [5] **Ferrandez A., Gimenez, A., and Lucas, P.**, 2003. s-Degenerate Curves in Lorentzian Space Forms, *Journal of Geometry and Physics* **45**, 116-129.
- [6] **Chen, B.Y., Dillen, F.**, 2003. When Does the Position Vector of A Space Curve Always Lie in Its Rectifying Plane?, *Amer. Math. Monthly* **110**, 147-152.
- [7] **Ilarslan, K., Nešović, E.**, 2008. Some Characterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space E^4 , *Turkish J. Math.* **32**, No.1 , 21-30.
- [8] **O' Neil, B.**, 1983. Semi-Riemannian Geometry, *Academic Press*, New York.
- [9] **Weinstein, T.**, 1996. An Introduction Lorentz Surface, *Walter de Gruyter and Co.*, New York.
- [10] **Hacısalıhoğlu H. H.**, 1993. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [11] **Ilarslan, K., Nešović, E., Petrović-Torgašev, M.**, 2003. Some Characterizations of Rectifying Curves in the Minkowski 3-space, *Novi Sad J.Math.* Vol. **33** (2), 23-32.
- [12] **Spivak, M.**, 1975. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, *Publish or Perish*, Boston.
- [13] **Chen, B.Y., Dillen, F.**, 2005. Rectifying Curves as Centroides and Extremal Curves, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica* **33**, No.2, 77-90.
- [14] **Ferrandez A., Gimenez, A., and Lucas, P.**, 2002. Null Generalized Helices in Lorentz Minkowski Space, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, No.39, 8243-8251.
- [15] **Hacısalıhoğlu H. H.**, 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- [16] **Inoguch, J., And Lee S.**, 2008. Null Curves in Minkowski 3-space, *International*

Electronic Journal of Geometry, Vol.1, No.2, 40-83.

- [17] **Millman, R.S., Parker, G. D.**, 1977. Elements of Differential Geometry, *Prentice Hall*, New Jersey.
- [18] **Struik, D. J.**, 1961. Differential Geometry, seconded., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [19] **Balgetir, H.**, 2002. Lorentz Uzayında Genelleştirilmiş Null Scrollar, *Doktora Tezi*, Elazığ.
- [20] **İlarslan, K. and Boyacıoğlu, Ö.**, 2008. Position Vectors of A Timelike and A Null Helix in Minkowski 3-Space. *Chaos Solitons and Fractals*, **38**, 1383-1389.
- [21] **Boran, A.İ.**, 2008. 4-boyutlu Minkowski Uzayında Null Eğriler ve Null Yüzeylerin Geometrisi, *Doktora Tezi*, Malatya.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Elazığ da doğdum. İlköğretimi Murat İlköğretim okulunda tamamladım. Orta öğrenimimi Elazığ Atatürk Lisesinde tamamlayıp 2004 yılında mezun oldum. 2004-2008 yılları arasında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak atandım. Halen aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.