

**KESİRLİ DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN  
TERS PROBLEM**

**Funda METİN**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ**

**HAZİRAN-2012**

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Funda METİN  
(101121123)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Haziran 2012

Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Haziran 2012

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Erdal BAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Etibar PENAHLI

: Doç. Dr. İsmet ÖZDEMİR

Haziran-2012

## ÖNSÖZ

Bu çalışmamı hazırlamamda bana destek veren, her konuda yardımlarını esirgemeyen, bilgilerinden her zaman yararlandığım hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ'a emeklerinden dolayı şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmalarım süresince bana zamanını ayıran, desteğini, sabrını ve bilgilerini esirgemeyen hocamız sayın Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya ve Matematik bölümünün tüm değerli öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Funda METİN  
ELAĞIĞ-2012

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖNSÖZ.....                                                       | II  |
| İÇİNDEKİLER.....                                                 | III |
| ÖZET.....                                                        | IV  |
| SUMMARY.....                                                     | V   |
| SEMBOLLER LİSTESİ.....                                           | VI  |
| 1. GİRİŞ.....                                                    | 1   |
| 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....                                 | 8   |
| 3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ....             | 20  |
| 3.1. Sturm-Liouville Problemi ve Spektral Veriler.....           | 20  |
| 3.2. Özfonksiyonların Sıfırları.....                             | 29  |
| 4. KESİRLİ DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM.....             | 36  |
| 4.1. Kesirli Difüzyon Denkleminin Çözümleri.....                 | 36  |
| 4.2. Sınır Değer Probleminde Seriyeye Açılım.....                | 39  |
| 4.3. Sınır Değer Problemi için Analitiklik.....                  | 41  |
| 4.4. Sınır Spektral Verilerinin Bulunması.....                   | 42  |
| 4.5. Sınır Spektral Verilerinden Potansiyelin Elde Edilmesi..... | 44  |
| 4.6. Üst Özdeğerlere göre Potansiyelin Tanımlanması.....         | 46  |
| 4.7. Alt Özdeğerlere göre Potansiyelin Tanımlanması.....         | 54  |
| 4.8. İkinci Başlangıç Şartı.....                                 | 56  |
| 4.9. Teklik Teoremi.....                                         | 59  |
| KAYNAKLAR.....                                                   | 63  |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                    | 65  |

## ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde spektral teori, kesirli diferansiyel denklemler, difüzyon denklemi hakkında genel bilgi verilmiş olup ikinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Sturm-Liouville problemi, özdeğerleri ve özfonksiyonları tanımlanarak özellikleri incelenmiş ve özfonksiyonlarının sıfırları verilmiştir. Tezin son bölümünde ise kesirli difüzyon denklemi ele alınmış, spektral veriler yardımıyla ters problem incelenmiştir. Bununla ilgili sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli diferansiyel denklem; Spektral analiz; Difüzyon denklemi; Ters problem; Caputo türevi; Asimptotik formül.

## SUMMARY

### Inverse Problem for Fractional Diffusion Operator

This study consists of four chapters. In the first chapter general concepts of spectral theory, fractional differential equations and diffusion equations are given.

In the second chapter, some basic definitions and theories are examined.

In the third chapter, Sturm-Liouville Problem, characteristic values and functions are defined.

The last chapter of this thesis is on the spectral analysis and the inverse problem for fractional diffusion equation and give some results.

**Key Words:** Fractional differential equations; Spectral analysis; Diffusion equation; Inverse problem; Caputo Derivative; Asymptotic formula.

## SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

|                     |                                                |
|---------------------|------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$        | : Doğal sayılar kümesi,                        |
| $\mathbb{R}$        | : Reel sayılar kümesi,                         |
| $\mathbb{C}$        | : Kompleks sayılar kümesi,                     |
| $D$                 | : Türev operatörü,                             |
| $L^2[a, b]$         | : Karesi integrallenebilen fonksiyonlar,       |
| $\varphi_n$         | : Öz fonksiyon,                                |
| $\lambda$           | : Öz değer,                                    |
| $\Gamma(z)$         | : Gamma fonksiyonu,                            |
| $q(x)$              | : Potansiyel fonksiyon,                        |
| $\alpha$            | : Alfa,                                        |
| $\rho(\lambda)$     | : Spektral fonksiyon,                          |
| $K(x, t)$           | : Çekirdek fonksiyonu,                         |
| ${}_0D_t^{-\alpha}$ | : $\alpha$ . kattan integral,                  |
| ${}_0D_t^\alpha$    | : $\alpha$ . mertebeden türev,                 |
| ${}_0^CD_t^\alpha$  | : $\alpha$ . kattan Caputo türevi,             |
| $E_\alpha$          | : Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, |
| $E_{\alpha, \beta}$ | : İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu. |

## 1. GİRİŞ

Fizik, sosyal bilimler, mühendislik gibi birçok bilim dalındaki problemlerin çözümü için bu problemlerin önce matematiksel ifadelerle formüle edilmesi gerekir. Buradan doğadaki bir büyüklüğün diğer büyüklüklere göre değişim hızı matematikte türev olarak ifade edilir. Bu yüzden her sürecin farklı değişim hızları, değişik türevler bulunduran bağıntılar olarak karşımıza çıkar. Bu bağıntıları karakterize eden fonksiyonların yanı sıra bu fonksiyonların birinci veya daha yüksek mertebeden türevlerini hatta kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferensiyel denklem ya da kesirli diferensiyel denklem denir. Kesirli diferensiyel denklem de matematiksel analizin bir koludur. Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümleri için kesirli türev ve integral hesaplamalarının iyi bilinmesi gerekir. Kesirli hesap tekniği; tam sayılı mertebeden türev ve integral hesap tekniğinin genişletilmiş şeklidir.

Kesirli hesaplamaların temeli 300 yıla dayanmaktadır. Bu süreç 1695 yılında ilk olarak L'Hospital'in Leibniz'e  $n$  tamsayı olmak üzere  $\frac{d^n y}{dx^n}$  türev ifadesindeki  $n$  tamsayısını  $\frac{1}{2}$  alsan olur mu? Diye bir soru yöneltmesiyle başladı. Leibniz bunun sonsuz seri yardımıyla tanımlanabileceğini söyledi ve

$$d^{1/2}x = x\sqrt{dx} : x$$

ifadesini  $1/2$ . mertebeden türev olduğunu belirtti.

1730 yılında Euler bu konu hakkında çalışmış ve Gamma fonksiyonunu tanımlamıştır. 1772 yılında J. L. Lagrange

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y$$

vermiş olduğu mertebesi tamsayı olan diferensiyel operatörler için üsler kuralı ile bu konuya dolaylı olarak katkı sağlamıştır. 1812'de P. S. Laplace kesirli türev ifadeleri tanımlamış ve 1819' da keyfi mertebeli bir türevden söz etmiştir. 1819' da S. F. Lacroix tümevarımdan faydalananarak  $y = x^m$  ve  $m$  pozitif bir tamsayı olmak üzere,  $x^m$ 'nin  $n$ . mertebeden türevini,

$$(m \geq n)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

şeklinde vermiş ve  $m = 1$ ,  $n = 1/2$  alarak

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

elde etmiştir. Yine 1823 yılında kesirli işlemleri ilk kullanan bilim adamı N. H. Abel olmuştur. Abel,

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt$$

integral denkleminde kesirli hesabı kullanmıştır. Bu denklemin sağ tarafına

$$\sqrt{\pi} [d^{-1/2}/dx^{-1/2}] f(x)$$

yazarak düzenleme yapmış ve

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x)$$

denklemini vermiştir. Abel, bu denklemde  $f(x)$ 'i belirleyerek kesirli hesapta önemli bir başarı sağlamıştır. Bu şekilde kesirli hesabın tarihçesine devam edersek, 1844'de Boole, sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümü için sembolik yöntemler geliştirerek, problemlerin çözümünde kesirli hesabı kullanmış ve bu alanda etkili çalışmalar kaydetmiştir. Bu çalışmaların temeli, kuvvet serileri ve diferensiyel denklemlerin çözümü olarak tanımlanan diferensiyel operatörün, keyfi bir fonksiyonunun genel açılımına dayanır. Boole'nin bu metotları, fonksiyonunun bazı sınıfları için dikkate değer görülmüş ve bir çok yönde kullanıma açık hale getirilmiştir.

1892'de Heaviside, elektromanyetik teorisinin bazı problemlerini çözmek için kesirli hesabı kullanmış ve ayrıca, genelleştirilmiş türevlerin uygulanmasında önemli bir adım atmıştır. 1920'de ise iletkenlik teorisinde, kesirli diferensiyelden yararlanmıştır. Bu çalışmadan yola çıkan Gemant, 1936'da, esneklik problemlerinde kullanmak üzere kesirli

diferensiyelden faydalanmıştır. Yine Weyl (1917), Hardy (1917), Littlewood (1925), Kober (1940), Kutner (1953), Lebesgue ve Lipschitz'in geliştirdikleri fonksiyonların kesirli türev ve integral özelliklerini incelemişlerdir.

Erdelyi (1939) ve Osler (1970), keyfi fonksiyonları içeren kesirli türev ve integral tanımlarını vermişlerdir. Riesz (1949), çok değişkenli fonksiyonlar için kesirli integral teorisi geliştirmiştir. Erdelyi (1964), integral denklemler için kesirli hesap tekniğine başvurmuştur ve Higgins (1967), diferensiyel denklemleri çözmek için kesirli integral operatörlerini kullanmıştır. Bunun gibi birçok matematikçi bu konu üzerine çalışmış fakat bazılarının tezi başarılı olmuştur. Biz şuan en yaygın olarak Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo ve Miller-Ross tanımlarını kullanmaktayız.

Kesirli hesaplamaların matematikteki uygulamaları 20. yy bitmeden ortaya konmuş fakat mühendislik ve bilimdeki başarıları geçtiğimiz yüzyıl içerisinde gerçekleşmiştir. Günümüzde ısı transferi, elektromanyetik, akustik, elektrokimya, sıvıların kimyasal analizi, difüzyon gibi birçok alanda uygulamasını görmekteyiz. Kesirli hesaplamalar bir çok denklemde hassasiyeti artırarak daha iyi sonuçlar elde etmemizi sağlamış ayrıca fiziksel denklemlerin yorumlanmasında büyük katkı sağlamıştır. Son yüzyıl boyunca kesirli analiz, viskoelastiklik ve sönüm, kaos, yayılım ve dalga hareketleri, filitreleme ve tersinemezlik, kontrolör tasarımı gibi pekçok alanda hassas modellemeler yapılmasında önemli katkılar sağlanmıştır. Ayrıca beyin analizinde sinir hücrelerinin karmaşık yapılı anormal davranışlarının modellenmesi ile ilgili çalışmalarıyla tıp alanında, fiyat analizi gibi doğrusal olmayan hareketlerin benzetimlerinin yapılması ile ilgili ekonomik alanda, depremde fay hatlarının anormal hareketlerinin incelenmesi ile ilgili pek çok alanda kesirli analiz kullanılmaktadır. Kullandığımız tanımlar arasında da Caputo tanımı başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren tanım olmuştur.

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik ve mekaniğin bir çok alanında kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları aynı zamanda lineer cebir ve titreşim teorisinin problemleridir. Bu problemler arasındaki benzerliklerden yararlanan ilk bilim adamı Hilbert olmuştur.  $I_2$  ve  $H$  soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra bu uzayda lineer self adjoint operatörler teorisi gelişmeye başlamış ve XIX. – XX. asırlarda üst seviyelere ulaşmıştır. Bu konu hakkında bir çok matematikçi

alışmış, bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış, bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz noktaya sahip olan diferensiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir.

G. D. Birkoff tarafından ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlayan keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı incelenmiştir. Daha sonraki yıllarda birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ise ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi daha sonra F. Riesz, J. von Neumann, K. O. Friedrichs gibi matematikçiler tarafından elde edilmiştir. 1946 yılında E. C. Titchmarsh ise ikinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım kazandırmıştır ve doğru ekseninde tanımlı azalan veya artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülünü vermiştir. Günümüzde bu operatöre bir boyutlu  $q(x)$  potansiyeli Schrödinger operatörü denir.

1949 yılında B. M. Levitan singüler diferensiyel operatörleri incelemiş ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde büyük çalışmalar yapmıştır. R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçilerde özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotikliğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konulara katkı sağlamıştır. Diferensiyel operatörler için ters problemle ilgili ilk sonuç ise V. A. Ambarstsumyan tarafından elde edilmiştir. Fakat spektral analizin ters problemler konusundaki temel alışması I. M. Gelfand ve B. M. Levitan tarafından yapıldı. 1964 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan Sturm-Liouville

operatörleri için ters probleminin iki spektruma göre tam çözümünü vermiştir. Son 20 yılda ise spektral veriler olarak özfonksiyonların sıfırları yani nodal noktalar ele alınarak, Sturm-Liouville operatörü ve diğer diferensiyel operatörleri için spektral teoremin bazı problemlerine yoğun bir şekilde çalışılmaktadır [15, 16].

Difüzyon denklemi maddenin korunumu prensibinden hareket edilerek,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c(\vec{r}, t) dv = - \oint_S \vec{J}(\vec{r}, t) d\vec{s}$$

şeklinde yazılır.  $c(\vec{r}, t)$  birim hacimdeki parçacık sayısını veren konsantrasyon,  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  ise, birim yüzeyden ve birim zamanda geçen parçacık sayısıdır. Bu denklemin sol tarafı  $V$  hacmindeki parçacık sayısındaki değişimi, sağ tarafı ise,  $V$  hacmini çevreleyen  $S$  yüzeyinden birim zamanda geçen parçacık miktarını verir. Kaynak veya kayıpların bulunmadığı durumlarda her iki terim de birbirine eşit olacaktır. Gauss teoremini kullanarak yüzey integralini hacim integraline çevirirsek, difüzyon denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c(\vec{r}, t) dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dv &= 0, \\ \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \right] dv &= 0 \end{aligned}$$

$V$  hacmi rasgele seçilebileceğinden, konsantrasyon için çözülecek diferensiyel denklemi de

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0$$

olarak elde ederiz. Ancak, bu denklem tek başına çözülemez:  $c(\vec{r}, t)$  ve  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  arasında bir bağıntıya ihtiyaç vardır. Parçacık akımı doğal olarak konsantrasyonun yüksek olduğu bölgelerden alçak olduğu bölgelere doğru olacağından, akım ve konsantrasyon gradyanı arasında alınacak

$$\vec{J} = -k \vec{\nabla} c(\vec{r}, t)$$

şeklinde doğrusal bir bağıntı pek çok durumda yeterli olacaktır. Burada  $k$  difüzyon sabitidir. Bu da bize  $c(\vec{r}, t)$  için çözülecek ve Fick difüzyon denklemi olarak da bilinen

denklemini verecektir:

$$\frac{\partial}{\partial t}c(\vec{r},t) - k\vec{\nabla}^2c(\vec{r},t) = 0 \quad (1.1.1)$$

Einstein, difüzyon problemlerinde konsantrasyonun aynı zamanda da bir parçacığın verilen bir noktada ve zamanda bulunma olasılığına orantılı olduğunu görür. Dolayısıyla,  $P(\vec{r},t)$  ile göstereceğimiz olasılık dağılımı konsantrasyon ile aynı (1.1.1) diferensiyel denklemi sağlayacaktır. Bu denklemin  $t = 0$  anında merkezde olan bir parçacık için çözümü, Gauss dağılımı olarak bilinen

$$P(\vec{r},t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4kt}\right)$$

formülü ile verilir. Bu dağılıma göre  $\vec{r}$ 'nin ortalama değerini gösteren  $\langle\vec{r}\rangle$  sıfır olmasına karşın, parçacığın merkezden zamanla uzaklaşmasını veren  $\vec{r}^2$ 'nin ortalama sapması ise,

$$\begin{aligned} \langle\vec{r}^2\rangle - \langle\vec{r}\rangle^2 &= \langle\vec{r}^2\rangle = \int r^2 P(\vec{r},t) d^3r \\ &= 6kt \end{aligned}$$

olacaktır. Burada dikkatimizi çeken

$$\langle\vec{r}^2\rangle > \propto t$$

ilişkisidir. Bu difüzyon denklemindeki zaman türevinin birinci dereceden olmasından kaynaklanmaktadır. Sistemdeki zaman ölçeği mesafe ölçeğinin karesi ile değişmektedir. Süre dört kat arttırılınca alınan yol sadece iki kat artmaktadır. Ancak, bazı deneylerde bu ilişkinin bozulduğu ve

$$\langle\vec{r}^2\rangle > \propto t^\alpha, \quad \alpha \neq 1$$

şeklinde olduğu görülmüştür. Bunun difüzyon denklemine yansımasının ise,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}P(\vec{r},t) - k_\alpha \vec{\nabla}^2P(\vec{r},t) = 0, \quad k_\alpha \neq 1$$

şeklinde olması beklenir.

Daha sade şekilde ifade edersek bir parabolik denklem olan

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

bu denkleme difüzyon olaylarının incelenmesi ile ilgisinde dolayı bir boyutlu difüzyon denklemini ve  $k$  bir sabit olmak üzere

$$k\nabla^2\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

denklemine genelleştirilmiş difüzyon denklemi denir.

Fizikte difüzyon denklemi bazı durumlarda ortaya çıkmıştır bu durumlar; katılarda ısı iletimi, eş yapılı cisimler içinde difüzyon, nötronların madde içinde yavaşlatılması, burkaçın difüzyonu ve iletken ortamlarda ortaya çıkmış ve kullanılmıştır.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 2.1.**  $\sum f_k$ , bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun.  $\sum f_k$  serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır  $\iff \forall \varepsilon > 0$  için  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  öyleki  $\forall x \in A$  ve her  $n > m \geq n_0$  için

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon$$

dır [2].

**Tanım 2.2.**  $(f_n)$  dizisi  $f$  fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsaktır  $\iff$  Her  $\varepsilon > 0$  için en az bir  $n_0$  vardır öyle ki  $\forall n \geq n_0$  ve  $\forall x \in A$  için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olmasıdır. Burada  $n_0$  noktası sadece  $\varepsilon$ 'a bağlıdır [2].

**Tanım 2.3.** Bir  $f(z)$  kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir  $z_0$  noktasının  $\delta$  komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyorsa  $f(z)$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında analitiktir denir [17].

**Tanım 2.4.**  $f(z)$  kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise  $f(z)$ 'e tam fonksiyon denir [5].

**Tanım 2.5.**  $0 < |z - z_0| < R$  bölgesinde  $f(z)$  analitik fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

ise  $z_0$ 'a  $f(z)$ 'in kutup noktası denir [17].

**Tanım 2.6.** Sadece G cümlesinin noktalarını içeren  $z_0 \in G$  noktasının komşuluğu varsa  $z_0$ 'a  $G$  nin iç noktası denir [5].

**Tanım 2.7.**  $f(z)$  fonksiyonunun  $z_0$  noktası ayırık tekil noktası olsun.  $z_0$  noktası hariç basit düzeltilebilir  $\gamma$  eğrisinin iç noktalarının tamamında ve  $\gamma$  eğrisinde  $f(z)$  analitik olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

integraline  $z_0$  noktasına nazaran  $f(z)$  fonksiyonunun rezidüsü denir [5].

**Tanım 2.8.** Noktaları sadece kutup noktalarından oluşan fonksiyonlara meramorf fonksiyon denir [5].

**Tanım 2.9.**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

denklemleri ile tanımlanan,  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  veya  $F(s)$ 'ye  $f(t)$  fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir [9].

**Tanım 2.10.**  $a \leq x \leq b$  olmak üzere,

$$L^2[a, b] = \left\{ f(x) : \int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty \right\}$$

bu uzayda iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlıdır [5].

**Teorem 2.11.** (İkinci ortalama değeri)  $f(x)$  ve  $g(x)$   $[a, b]$  aralığında tanımlı  $g(x)$  azalan veya artan bir fonksiyon olmak üzere ve  $[a, b]$  aralığında bir  $c$  noktası için

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx$$

dir.

**Tanım 2.12.** Gamma fonksiyonuna faktöriyel genelleştirilmiş fonksiyonu denir.  $\Gamma(z)$  ile göstereceğimiz gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{N} \quad (2.1.1)$$

integrali ile tanımlanır [20].

En belirgin özellikleri

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z) = (z-1)! \quad z \in \mathbb{N}$$

eşitliklerini sağlamasıdır. Bu ifadeler kısmi integrasyon yöntemiyle kolayca elde edilebilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z+1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt$$

olur. Kısmi integrasyon kullanarak bu integrali bir defa integre edelim.

$u = t^z, dv = e^{-t} dt$  olsun. Bu taktirde  $du = z t^{z-1} dt, v = -e^{-t}$  olur. Bu ifadeleri

$$\int u dv = uv - \int v du$$

formülünde yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} t^z dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=b} + z \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \end{aligned}$$

olur, buradan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1.2}$$

elde ederiz. Bu ifade gamma fonksiyonu için bir rektürasyon formülüdür.

(2.1.1) integralinde  $z = 1$  alırsak,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^0 dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1$$

dir. (2.1.2) eşitliğinde  $z = 1, 2, \dots$  değerleri için

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

...

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!$$

elde ederiz. Bu formülden anlaşılmaktadır ki gamma fonksiyonu faktöriyelin genelleştirilmesidir.

**Tanım 2.13.**  $m, n$  kompleks sayı olmak üzere Beta fonksiyonu  $B(m, n)$  ile gösterilir ve

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad (\operatorname{Re}(m) > 0, \operatorname{Re}(n) > 0)$$

şeklinde tanımlanır [20].

Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu arasında

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \operatorname{Re}(m) > 0, \operatorname{Re}(n) > 0$$

bağıntısı vardır. ve

$$B(m, 1-m) = \Gamma(m) \Gamma(1-m) \quad \operatorname{Re}(m) > 0, \operatorname{Re}(n) > 0$$

şeklinde kullanılır.

**Tanım 2.14.**  $e^z$  üstel fonksiyonun genelleştirilmesi olan ve 1903 yılında Mittag-Leffler tarafından bulunan bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

olarak ifade edilir. İki parametrelili fonksiyon tipi ise

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

seri açılımı şeklinde tanımlanmıştır [20].  $\alpha$  ve  $\beta$  nın belli değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu temel fonksiyonlara indirgenebilir.

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \\
E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \\
&= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}
\end{aligned}$$

ve genel olarak

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}$$

elde edilir.

Hiperbolik sinüs ve cosinüs fonksiyonları Mittag-Leffler fonksiyonunun özel hal-leridir. Yani;

$$\begin{aligned}
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \\
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

**Teorem 2.15.**  $\alpha < 2, \beta$  keyfi reel bir sayı olmak üzere,  $\mu$  de

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$$

ve  $C$  bir reel sabit iken,

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}$$

dır.  $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi, |z| \geq 0$  [20].

**Tanım 2.16.** Riemann-Liouville kesirli türev tanımı  $q > 0$ ,  $q \in \mathbb{R}$  ve  $n - 1 \leq q \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere,

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-n+q}}$$

şeklindedir. Kesirli integral tanımında  $q > 0$ ,  $q \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-q}}$$

şeklindedir [20]. Riemann-Liouville yaklaşımının bazı özellikleri şöyledir:

I.  $p > 0, q > 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^{-q} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = {}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t)$$

dir.

II.  $p > 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t)$$

dir. Fakat  $(k-1 \leq p < k)$  için

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$$

dir. Eğer  $0 \leq p < 1$  ise yukarıdaki ifade

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{p-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

olarak elde edilir.

III.  $p > 0, q > 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{p-q} f(t)$$

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \quad 0 \leq k-1 \leq q < k$$

dir.

IV.  $n$  tamsayı olmak üzere eğer  $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = \left( {}_a D_t^p \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t).$$

$m-1 \leq p < m$  ve  $n-1 \leq q < n$  olmak üzere

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(-p-j+1)} \quad (2.1.3)$$

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(-q-j+1)} \quad (2.1.4)$$

dir. Ayrıca (2.1.3) ve (2.1.4) denklemlerinin eşit olması için

$$[{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$[{}_a D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

şartlarının sağlanması gerekir.

**Tanım 2.17.**  $m, m \leq p < m+1$  şartını sağlayan bir tamsayı,  $f(t)$  fonksiyonu sürekli ve  $f^{(k)}(t), (k = 1, 2, \dots, m+1)$  türevleri de  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli olsun. Bu takdirde  $f(t)$  fonksiyonunun  $p$ -inci mertebeden Grunwald-Letnikov kesirli türevi,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

dir [20]. Burada

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{r!}$$

olarak alınmıştır.

Ayrıca polinomlar için  $f(t) = (t-a)^\beta$  olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun kesirli türevini,

$${}_a D_t^p (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)} (t-a)^{\beta-p}$$

şeklinde tanımlamıştır

$f(t)$  fonksiyonu  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun  $p$  mertebeden Grunwald-Letnikov kesirli integrali

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t - rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p+1)(p+2) \dots (p+r-1)}{r!}$$

dir.

Eğer  $f'(t)$  türevi  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli ise o zaman (2.1.6) denkleminde bir defa kısmi integrasyon uygularsak

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau$$

elde edilir.  $f(t)$  fonksiyonu  $[a, t]$  kapalı aralığında  $m+1$  defa sürekli diferensiyellenebilir ise o zaman (2.1.6) denkleminde

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

elde edilir. Grunwald-Letnikov yaklaşımının bazı özellikleri şöyledir;

I. Grunwald-Letnikov kesir mertebeden türev operatörü lineerdir.

II.  $n$  tamsayı ve  $p > 0$  olmak üzere  $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  ise

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t)$$

dir.

III.  $0 \leq m < p < m+1$  ve  $0 \leq n < q < n+1$  olsun.

Eğer  $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, r-1; r = \max(n, m))$  ise

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$$

eşitliği mevcuttur.

IV.  $0 \leq m < p < m + 1$  ve  $q < 0$  olsun. Eğer  $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, m - 1)$

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$$

olur.

V.  $p < 0$  ve  $q$  herhangi bir reel sayı olmak üzere

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t)$$

elde edilir.

Grunwald-Letnikov yaklaşımının, Riemann-Liouville yaklaşımı ile ilişkisine bakacak olursak, eğer  $f(t)$  fonksiyonu  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli ve  $m + 1$  defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde her  $p (0 \leq m \leq p < m + 1)$  için  ${}_a D_t^p f(t)$  Riemann-Liouville kesirli türevi mevcuttur ve Grunwald-Leetnikov kesirli türevine eşittir. Gerçekten de Riemann-Liouville kesirli türev tanımında  $m + 1$  kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \left( \frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t - \tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (2.1.7)$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) (t - a)^{-p+k}}{\Gamma(-p + k + 1)} \quad (2.1.8)$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

$$= {}_a D_t^p f(t)$$

elde edilir. Sonuç olarak eğer  $t \geq a$  için  $f(t)$  fonksiyonu  $m + 1$  mertebeden sürekli türevlere sahipse o zaman (2.1.5)'de verilen Grunwald-Letnikov kesirli türev tanımı ile (2.1.7)'de verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı birbirine denktir. Bunun yanında (2.1.7)'de verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı  $f(t)$  fonksiyonu üzerinde bazı şartlar gerektirir. Gerçektende  $f(t)$  fonksiyonunun integrallenebilir olması (2.1.7)'de verilen integralin varlığı için yeterlidir ve bu integral  $m + 1$  kez diferensiyellenebilirdir.

Şimdi (2.1.8) denkleminin özel halini düşünelim. Eğer  $f(t)$  fonksiyonu sürekli ve  $f'(t)$ ,  $[a, t]$  kapalı aralığında sürekli olsun. O zaman her  $p$  ( $0 < p < 1$ ) için Riemann-Liouville kesirli türevi ve Grunwald-Letnikov kesirli türevi mevcut ve

$${}_a D_t^p f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau$$

olarak yazılır.

$f(t)$  fonksiyonu  $m+1$  mertebeden sürekli türevlere sahip ve  $m \leq p < m+1$  olmak üzere

$$[{}_a D_t^p f(t)]_{t=a} = 0 \quad (2.1.9)$$

şartı

$$f^{(j)}(a) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.1.10)$$

şartına denktir. Gerçekten de (2.1.10) şartı sağlanır ve sonra (2.1.8)'da  $t \rightarrow a$  alınırsa (2.1.9) elde edilir. Diğer taraftan (2.1.9) şartı sağlanırsa (2.1.8)'nin her iki tarafı  $(t-a)^{p-j}$  ( $j = m-1, m-2, \dots, 2, 1, 0$ ) ile çarpılır ve  $t \rightarrow a$  için limit alınırsa  $f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m-2)}(a) = 0, \dots, f''(a) = 0, f'(a) = 0, f(a) = 0$  elde edilir. Bu da (2.1.10) şartıdır. Böylece

$$[{}_a D_t^p f(t)]_{t=a} = 0 \iff f^{(j)}(a) = 0, (j = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

elde edilir.

**Tanım 2.18.** Riemann-Liouville yaklaşımı  $t = a$  da kesirli türevinin limit değerleriyle verilen başlangıç şartlarını içermektedir. Örneğin;

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\dots \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-3} f(t) &= b_n, \end{aligned}$$

dir. Burada  $b_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$  dir. Böyle başlangıç koşullarında oluşan başlangıç değer problemi Riemann-Liouville yaklaşımı ile başarıyla çözülebilir. Bu çözümler pratikte kullanışsızdır. Çünkü böyle başlangıç şartlarının fiziksel karşılığı mevcut değildir.

Bu durum M.Caputo tarafından geliştirilen,  $y'(a), y''(a), \dots$  gibi tamsayı mertebeden türevlerin  $t = a$  noktasındaki limit değerlerini içeren kesirli türevlere sahip diferensiyel denklemler için verilen başlangıç-değer problemlerinin başlangıç şartlarını formülize eden Caputo yaklaşımı ile çözülmüştür. Caputo kesir mertebeden türev tanımı,  $f(t)$  fonksiyonu  $n$  defa sürekli diferensiyellenebilir olmak üzere  $n - 1 \leq \alpha \leq n$  için

$${}_a^C D_t^\alpha = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}$$

olarak Caputo tarafından tanımlanmıştır [20].

**Tanım 2.19.**  $\operatorname{erf}(x)$  ile gösterilen hata fonksiyonu

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyona ilişkin aşağıdaki değerler ve eşitlikler mevcuttur.

- 1)  $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$
- 2)  $\operatorname{erf}(0) = 0$
- 3)  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

**Tanım 2.20.**  $\operatorname{Anger} J(v, x)$  fonksiyonu homojen olmayan bessel denkleminin çözümüdür.

$\operatorname{Anger} J(v, x)$  fonksiyonu

$$xy'' + xy' + (x-v)y = \frac{(x-v) \sin(v\pi)}{\pi}$$

denklemini sağlar.

**Tanım 2.21.** Eğer  $x \rightarrow 0$  (veya  $x \rightarrow \infty$ ) iken  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$  ise  $f(x) = o(g(x))$  ve  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$  sınırlı ise  $f(x) = O(g(x))$  olarak gösterilir [18].

**Tanım 2.22.**  $f(x)$  fonksiyonu  $[-L, L]$  aralığında  $2L$  periyotlu periyodik bir fonksiyon olsun. Yani,  $f(x+2L) = f(x)$  olsun.  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier serisi açılımı

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)$$

şeklindedir.

Burada  $a_k$  ve  $b_k$  fourier katsayıları olup,  $(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx$$

değerlerine sahiptir.

### 3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Bu bölümün ilk kısmında Sturm-Liouville problemi ve spektral veriler tanıtılmış, ikinci kısmında ise özfonksiyonların sıfırları ve bununla ilişkili teoremler ve ispatları verilmiştir [15, 16].

#### 3.1. Sturm-Liouville Problemi ve Spektral Veriler

$q(x)$ ,  $[a, b]$  aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlı  $L$  operatörüne Sturm-Liouville operatörü denir. Ayrıca,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (3.1.1)$$

denkleminde Sturm-Liouville denklemi denir. Bu denklemin spektral özellikleri bulunurken genelde 3 tür sınır şartlarıyla gözönüne alınır.

1. Ayrık sınır şartları:

$$y(a, \lambda) \cos \alpha + y'(a, \lambda) \sin \alpha = 0 \quad (3.1.2)$$

$$y(b, \lambda) \cos \beta + y'(b, \lambda) \sin \beta = 0 \quad (3.1.3)$$

2. Periyodik ve antiperiyodik sınır şartları:

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda), \quad y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda)$$

$$y(a, \lambda) = -y(b, \lambda), \quad y'(a, \lambda) = -y'(b, \lambda)$$

3. Uçları sabitlenmiş sınır şartları:

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$$

$$y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$$

şeklinde dir. (3.1.1) denkleminde (3.1.2) ve (3.1.3) sınır şartlarıyla Sturm-Liouville problemi denir. (3.1.2) sınır şartında her iki tarafı  $\sin \alpha$ ' ya ve (3.1.3) sınır şartlarında her iki tarafı  $\sin \beta$ ' ya bölersek

$$y(a, \lambda) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + y'(a, \lambda) = 0$$

$$y(b, \lambda) \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + y'(b, \lambda) = 0$$

olur. Buradan

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -h, \quad \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = H$$

şeklinde alırsak,

$$y'(a, \lambda) - hy(a, \lambda) = 0 \tag{3.1.4}$$

$$y'(b, \lambda) + Hy(b, \lambda) = 0 \tag{3.1.5}$$

sınır şartlarını elde ederiz. Eğer  $h = \infty$  ise  $(\sin \alpha = 0)$ ,

$$y(a, \lambda) = 0$$

$H = \infty$  ise  $(\sin \beta = 0)$ ,

$$y(b, \lambda) = 0$$

olur.

(3.1.1)–(3.1.3) Sturm-Liouville probleminde  $q(x) \in C[a, b]$  ve  $h, H$  sonlu reel sayılar ise bu takdirde Sturm-Liouville problemine regüler, bu şartlardan biri sağlanmaz ise singüler Sturm-Liouville problemi denir.

$y \in L_2[a, b]$  olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

denklemini sağlayan  $y \neq 0$  fonksiyonu mevcutsa  $\lambda$ 'ya  $L$  operatörünün özdeğeri,  $y(x, \lambda)$  fonksiyonunada  $\lambda$ 'ya karşılık gelen özfonksiyonu denir. Buna göre aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 3.1.1.**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  olmak üzere  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  özdeğerlerine karşılık gelen  $y(x, \lambda_1)$  ve  $y(x, \lambda_2)$  özfonksiyonları ortogonaldır. Yani,

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \quad x \in [0, \pi]$$

dir.

**İspat.**  $f$  ve  $g$  sürekli ve ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$Lf = f''(x) - q(x)f(x)$  eşitliğini göz önüne alalım. İki fonksiyonun Wronskian determinantı

$$W_x \{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

şeklindedir .  $Lfg(x)$  ifadesini 0 'dan  $\pi$  'ye integrallersek ve birinci terime iki kez kısmi integrasyon uygularsak;

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Lfg(x)dx &= \int_0^\pi \{f''(x) - q(x)f(x)\}g(x)dx \\ &= \int_0^\pi f''(x)g(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^\pi g(x)df'(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx \\ &= f'(x)g(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi g'(x)f'(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx \\ &= f'(x)g(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi g'(x)df(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx \\ &= f'(x)g(x) \Big|_0^\pi - g'(x)f(x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)g''(x)dx - \int_0^\pi q(x)f(x)g(x)dx \\ &= f'(\pi)g(\pi) - f'(0)g(0) - g'(\pi)f(\pi) + g'(0)f(0) \\ &\quad + \int_0^\pi [g''(x) - q(x)g(x)]f(x)dx \\ &= -W_\pi \{f, g\} + W_0 \{f, g\} + \int_0^\pi Lfg(x)dx \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

elde ederiz.

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$$

sınır şartını kullanırsak,  $W_\pi \{f, g\} = 0$  ve  $W_0 \{f, g\} = 0$  olup, (3.1.6) eşitliğinde yerine yazarak

$$\int_0^\pi Lfg(x)dx = \int_0^\pi Lgf(x)dx \quad (3.1.7)$$

eşitliği elde edilir.  $f(x)$  yerine  $y(x, \lambda_1)$  ve  $g(x)$  yerine  $y(x, \lambda_2)$  alırsak ve

$$Ly(x, \lambda_1) = \lambda_1 y(x, \lambda_1), \quad Ly(x, \lambda_2) = \lambda_2 y(x, \lambda_2)$$

ifadeleri (3.1.7) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \lambda_1 y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx &= \int_0^\pi \lambda_2 y(x, \lambda_2) y(x, \lambda_1) dx \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$  için

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0$$

elde edilir. Yani  $y(x, \lambda_1)$  ve  $y(x, \lambda_2)$  fonksiyonları diktir ve böylece lemma ispatlanmıştır.

**Lemma 3.1.2.**

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi]$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

**İspat.** Kabul edelim ki  $\lambda_1 = u + iv$  kompleks bir özdeğer olsun.  $q(x)$  fonksiyonu  $[0, \pi]$  aralığında reel değerli sürekli fonksiyon,  $\alpha, \beta$  reel sayı olduğundan dolayı

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$  sayısı da özdeğer olur. Bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon  $y(x, \overline{\lambda_1}) = \overline{y(x, \lambda_1)}$  'dir. Bu takdirde Lemma 3.1.1 gereğince,

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) \overline{y(x, \lambda_1)} dx = 0$$

olur. Yani;

$$\int_0^\pi |y(x, \lambda_1)|^2 dx = 0$$

olduğundan  $y(x, \lambda_1) = 0$  olur. Halbuki  $y(x, \lambda_1) \neq 0$  olduğundan bu bir çelişkidir. O halde özdeğer kompleks olamaz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

**Teorem 3.1.3.**  $q(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli, reel değerli bir fonksiyon ve

$$L\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} + q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in [a, b] \quad (3.1.8)$$

denkleminin,

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'_x(a, \lambda) = -\cos \alpha \quad (3.1.9)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü  $\varphi(x, \lambda)$  olsun. Bu takdirde her reel  $\alpha$  için  $x \in [a, b]$  olacak biçimde bir tek  $\varphi(x, \lambda)$  çözümü vardır. Ayrıca her sabit  $x \in [a, b]$  için  $\varphi(x, \lambda)$  çözümü  $\lambda$ 'ya göre bir tam fonksiyondur.

**İspat.** Başlangıç fonksiyonunu

$$\varphi_0(x, \lambda) = \sin \alpha - (x - a) \cos \alpha$$

olarak seçelim. Bu fonksiyon (3.1.8) denkleminin (3.1.9) koşullarını sağlayan çözümüdür.  $n > 0$  için,

$$\varphi_n(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_{n-1}(t, \lambda) (x - t) dt \quad (3.1.10)$$

şeklinde olsun.  $q(x) \in [a, b]$  aralığında sürekli olduğu için sınırlıdır.

Yani  $|q(x)| < M'$  dir.  $|\lambda| \leq N$  olsun. Bu takdirde  $\forall x \in [a, b]$  için  $|\varphi_0(x, \lambda)| \leq K$  olur. Böylece  $n = 1$  için (3.1.10) denklemi

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x - t) dt$$

şeklinde olur. Bu sebeple

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda)| &= \left| \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x - t) dt \right| \\
&\leq \int_a^x \{|q(t)| + |\lambda|\} |\varphi_0(t, \lambda)| |x - t| dt \\
&\leq (M + N) K \int_a^x (x - t) dt \\
&= (M + N) K \left( -\frac{(x - t)^2}{2} \right) \Big|_a^x \\
&= \frac{1}{2} (M + N) K (x - a)^2
\end{aligned}$$

elde edilir.  $n = 2$  için

$$\varphi_2(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_1(t, \lambda) (x - t) dt \quad (3.1.11)$$

$$\varphi_1(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \varphi_0(t, \lambda) (x - t) dt \quad (3.1.12)$$

(3.1.11) eşitliğinden (3.1.12) çıkarılıp eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)| &= \left| \int_a^x \{q(t) - \lambda\} [\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)] (x - t) dt \right| \\
&\leq \int_a^x |q(t) - \lambda| |\varphi_1(t, \lambda) - \varphi_0(t, \lambda)| |x - t| dt \\
&\leq \frac{1}{2} (M + N) (M + N) K \int_a^x (t - a)^2 (x - t) dt \\
&= \frac{(M + N)^2 K (b - a) (x - a)^3}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{K (M + N)^2 (b - a) (x - a)^3}{3!}
\end{aligned}$$

olur. Böylece bu süreci devam ettirirsek,

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
|\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| &\leq \frac{K (M + N)^n (b - a)^{n-1} (x - a)^{n+1}}{(n + 1)!}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)\} \quad (3.1.13)$$

$x \in [a, b]$  için  $|\lambda| \leq N$  olacak biçimde  $\lambda$ 'ya göre düzgün yakınsak olur. Şimdi  $n \geq 2$  için  $\varphi(x, \lambda)$ 'nın  $\lambda$ 'ya göre tamlığını gösterelim.

$$\begin{aligned} \varphi'_n(x, \lambda) - \varphi'_{n-1}(x, \lambda) &= \int_a^x \{q(t) - \lambda\} \{\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)\} dt \\ \varphi''_n(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} \varphi_{n-1}(x, \lambda) \\ \varphi''_{n-1}(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} \varphi_{n-2}(x, \lambda) \\ \varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} [\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)] \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.1.13) eşitliğini  $x$ 'e göre iki kez diferensiyellersek

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda)\} \\ &= \varphi''_1(x, \lambda) - \varphi''_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda)\} \\ &= [q(x) - \lambda] \left[ \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)\} \right] \\ &= \{q(x) - \lambda\} \varphi(x, \lambda) \end{aligned}$$

olacak şekilde  $\exists \varphi(x, \lambda)$  çözümü mevcuttur. Yani  $\varphi(x, \lambda)$ , (3.1.8) denkleminin (3.1.9) başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümüdür. Ayrıca (3.1.13) serisi düzgün yakınsak olduğu için  $\varphi(x, \lambda)$  fonksiyonu  $\lambda$ 'ya göre tam fonksiyondur.

**Teorem 3.1.4.** (3.1.8) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (3.1.14)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü  $\varphi(x, \lambda)$ ,

$$\psi(0, \lambda) = 0, \quad \psi'(0, \lambda) = 1 \quad (3.1.15)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü  $\psi(x, \lambda)$  olsun. Bu takdirde (3.1.8) – (3.1.14) ve (3.1.8) – (3.1.15) problemlerinin çözümleri olan  $\varphi(x, \lambda)$  ve  $\psi(x, \lambda)$  fonksiyonları için sırasıyla aşağıdaki bağıntılar söz konusudur:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda}(x - \tau)] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau \quad (3.1.16)$$

$$\psi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda}(x - \tau)] q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau \quad (3.1.17)$$

**İspat.** Önce (3.1.16) eşitliğini göstereyim,  $\varphi(x, \lambda)$ , (3.1.8) denkleminin çözümü olduğu için,

$$-\varphi''(\tau, \lambda) + q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) = \lambda \varphi(\tau, \lambda)$$

denklemini,

$$q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) = \varphi''(\tau, \lambda) + \lambda \varphi(\tau, \lambda)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1.16) eşitliğinin sağında bulunan integrali hesaplayalım,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin [\sqrt{\lambda}(x - \tau)] q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} [\varphi''(\tau, \lambda) + \lambda \varphi(\tau, \lambda)] d\tau \\ &= \lambda \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\ &\quad + \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau \quad (3.1.18) \end{aligned}$$

olur. Şimdi son eşitliğin sağında bulunan ikinci integrali hesaplayalım. Bunun için iki kez kısmi integrasyon uygulayalım,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi''(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} d\varphi'(\tau, \lambda) \\ &= \left\{ \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi'(\tau, \lambda) \Big|_0^x - \int_0^x \varphi'(\tau, \lambda) d \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \\ &= \varphi'(x, \lambda) \left\{ \sin \sqrt{\lambda}(x - x) \right\} - \varphi'(0, \lambda) \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - 0) \right\} \\ &\quad + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi'(\tau, \lambda) d\tau \\ &= -h \sin(\sqrt{\lambda} x) + \sqrt{\lambda} \int_0^x \cos \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} d\varphi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -h \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \left\{ \varphi(\tau, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x - \tau)) \right\} \Big|_0^x \\
&\quad - \sqrt{\lambda} \int_0^x \varphi(\tau, \lambda) d \cos \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} d\tau \Big\} \\
&= -h \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \left\{ \varphi(x, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x - x)) - \varphi(0, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda}(x - 0)) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\lambda} \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \right\} \\
&= -h \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \left( \varphi(x, \lambda) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \right) - \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.1.19)'i (3.1.18) formülünde yerine yazalım,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= -h \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) \\
&\quad - \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau \\
&\quad + \lambda \int_0^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} \varphi(\tau, \lambda) d\tau
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau &= -h \sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) \\
\sqrt{\lambda} \varphi(x, \lambda) &= \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) + h \sin(\sqrt{\lambda}x) \\
&\quad + \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda}(x - \tau) \right\} q(\tau) \varphi(\tau, \lambda) d\tau
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafını  $\sqrt{\lambda}$ 'ya bölersek (3.1.16) eşitliğini elde ederiz. Şimdi de (3.1.17) eşitliğinin sağlandığını gösterelim,  $\psi(x, \lambda)$ , (3.1.8) denkleminin (3.1.15) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}
-\psi''(x, \lambda) + q(x) \psi(x, \lambda) &= \lambda \psi(x, \lambda) \\
q(x) \psi(x, \lambda) &= \psi''(x, \lambda) + \lambda \psi(x, \lambda)
\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \left[ \sqrt{\lambda} (x - \tau) \right] q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau &= \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \tau) \right\} \psi''(\tau, \lambda) d\tau \\ &+ \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \tau) \right\} \psi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

son eşitliğin sağında bulunan birinci integrale iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa ve (3.1.15) başlangıç koşulları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \tau) \right\} \psi''(\tau, \lambda) d\tau &= -\sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} \psi(x, \lambda) \\ &- \lambda \int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \tau) \right\} \psi(\tau, \lambda) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^x \sin \left\{ \sqrt{\lambda} (x - \tau) \right\} q(\tau) \psi(\tau, \lambda) d\tau = -\sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} \psi(x, \lambda)$$

eşitliği bulunur, bu eşitliğin her iki tarafı  $\sqrt{\lambda}$  'ya bölünüp,  $\psi(\tau, \lambda)$  çekilirse (3.1.17) eşitliğini elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerin oluşturduğu cümleye bu problemin spektrumu denir. Özdeğerler, öz fonksiyonlar, öz fonksiyonlarından oluşan normlaştırmacı sayılara spektral veriler denir.  $q(x)$  potansiyelinin bilinerek spektral verilerin bulunması problemine düz spektral problem denir. Spektral verilerden  $q(x)$  potansiyelinin bulunmasına da ters problem denir.

### 3.2. Özfonksiyonların Sıfırları

(3.1.1) – (3.1.3) Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım.  $q(x) = 0$  olacak şekilde aşağıdaki basit sınır-değer problemi

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 \end{aligned}$$

dir. Bu problemin özdeğerleri  $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2 \dots$  olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\varphi(x, \lambda_0) = \varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi(x, \lambda_1) = \varphi_1(x) = \cos x,$$

$$\varphi(x, \lambda_2) = \varphi_2(x) = \cos 2x, \dots, \varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x) = \cos nx, \dots$$

şeklindedir. Böylece sıfırdan başlanacak şekilde özdeğerlerin artış sırasına göre özfonksiyonlar dizisini oluşturmuş oluruz.

$\varphi(x, \lambda_n)$  özfonksiyonlarının sıfırları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- 1)  $n$ . özfonksiyon olan  $\varphi(x, \lambda_n)$  'nin  $[0, \pi]$  aralığında tam olarak  $n$  -tane sıfırı vardır.
- 2)  $n$ . ve  $(n + 1)$ . öz fonksiyonların sıfırları sıralıdır (veya çaprazlaşırlar).

Yani  $n$ . özfonksiyonun ardışık iki sıfırı arasında  $(n + 1)$ . özfonksiyonun bir sıfırı bulunur. Özfonksiyonların bu özellikleri genel halde de sağlanır.

### Örnek 3.2.1.

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

probleminde  $\varphi_2(x) = \cos 2x, \varphi_3(x) = \cos 3x$  olup

$$\varphi_2(x) = 0 \implies \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} + k \right), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$k = 0 \implies x_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$k = 1 \implies x_1 = \frac{3\pi}{4},$$

$$k = 2 \implies x_2 = \frac{5\pi}{4} \notin, \dots, \notin [0, \pi]$$

$$\varphi_3(x) = 0 \implies \cos 3x = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \left( \frac{1}{2} + k \right), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$k = 0 \implies x_0 = \frac{\pi}{6},$$

$$k = 1 \implies x_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$k = 2 \implies x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$k = 3 \implies x_3 = \frac{7\pi}{6} \notin [0, \pi]$$

olur.

**Teorem 3.2.2. (1.Mukayese Teoremi)**

$$u'' + g(x)u = 0 \quad (3.2.1)$$

$$v'' + h(x)v = 0 \quad (3.2.2)$$

şeklinde verilen iki denklemi göz önüne alalım. Eğer  $[a, b]$  aralığının tamamı üzerinde  $g(x) < h(x)$  ise bu takdirde birinci denklemin aşıkâr olmayan herhangi bir çözümünün her iki sıfırı arasında ikinci denklemin her çözümünün en az bir sıfırı vardır.

**İspat.** (3.2.1) denklemi  $v$  ile (3.2.2) denklemini  $u$  ile çarpıp birbirinden çıkarırsak

$$\begin{aligned} v/ u'' + g(x)u &= 0 \\ u/ v'' + h(x)v &= 0 \\ u''v - v''u + (g(x) - h(x))uv &= 0 \\ u''v - v''u &= \frac{d}{dx}(u'v - v'u) = (h(x) - g(x))uv \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

denklemini elde ederiz.  $u$ 'nın ardışık iki sıfırını  $x_1$  ve  $x_2$  ile gösterelim.

Kabul edelim ki  $v$ 'nin  $(x_1, x_2)$  aralığında sıfırı bulunmasın. Bu taktirde (3.2.3) eşitliğini  $x_1$ 'den  $x_2$ 'ye kadar integrallersek

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}(u'v - v'u) dx &= (u'v - v'u)|_{x_1}^{x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (h(x) - g(x))u(x)v(x) dx \end{aligned}$$

$$u'(x_2)v(x_2) - v'(x_2)u(x_2) - u'(x_1)v(x_1) + v'(x_1)u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (h(x) - g(x))u(x)v(x) dx$$

elde edilir.

Şimdi  $(x_1, x_2)$  aralığında  $v$ 'nin sıfıra eşit olmadığını kabul edelim. Genelliği bozmadan  $(x_1, x_2)$  aralığında  $u(x) > 0$ ,  $v(x) > 0$  alabiliriz. Dolayısıyla bir önceki eşitliğin sağ tarafı pozitiftir.  $u(x) > 0$  olduğu için  $x_1$  noktasında  $u(x)$  fonksiyonu artandır. Dolayısıyla  $u'(x_1) > 0$ 'dır. Benzer şekilde  $x_2$  noktasında da  $u(x)$  fonksiyonu azalandır ve  $u'(x_2) < 0$  olduğu sonucuna varılır. Bu sebeple  $u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0$

dir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece  $(x_1, x_2)$  aralığında  $v$ 'nin sıfırlarının varlığı ispatlanmış olur.

**Sonuç 3.2.3.**  $g(x) < -m^2 < 0$  ve  $(-\infty \leq a \leq x \leq b \leq \infty)$  olmak üzere

$$y'' + g(x)y = 0$$

denkleminin her çözümünün en fazla bir sıfırı vardır.

**İspat.**  $g(x) < h(x) = -m^2 < 0$  ise

$$y'' - m^2y = 0$$

denkleminin çözümünün sıfırının olmadığını göstereceğiz. Bu denklemin çözüm fonksiyonu  $e^{mx}$  şeklinde olsun.  $m^2e^{mx} - m^2e^{mx} = 0$  olduğundan  $e^{mx} \neq 0$  için sıfırları var olmadığı için her sonlu aralıkta  $y'' + g(x)y = 0$  denkleminin en fazla bir sıfırı vardır.

**Teorem 3.2.4. (2. Mukayese Teoremi)**

(3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerinin

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha \quad (3.2.4)$$

$$v(a) = \sin \alpha, \quad v'(a) = -\cos \alpha \quad (3.2.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri  $u(x)$  ve  $v(x)$  olsun. Ayrıca  $[a, b]$  aralığının tamamında  $g(x) < h(x)$  olsun.

Eğer  $u(x)$  fonksiyonu,  $a < x \leq b$  aralığında  $m$ -tane sıfıra sahip ise, bu takdirde  $v(x)$  fonksiyonunun aynı aralıkta en az  $m$ -tane sıfırları mevcut olup,  $v(x)$ 'in  $k$ . sıfırı  $u(x)$ 'in  $k$ . sıfırından küçüktür.

**İspat.**  $u(x)$ 'in  $a$  noktasına en yakın ve  $a$ 'dan farklı sıfırını  $x_1$  ile gösterelim. Bir önceki teoreme dayanarak  $v(x)$ 'in  $(a, x_1)$  aralığında en az bir sıfıra sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Aksine bu aralıkta  $v(x)$  'in sıfıra sahip olmadığını kabul edelim.

Genelliği bozmadan  $(a, x_1)$  aralığında  $u(x) > 0$  ve  $v(x) > 0$  olsun.  $u(x_1) = 0$  olduğundan  $u(x)$  fonksiyonu  $x_1$  noktasının bir komşuluğunda azalandır. Bu nedenle  $u'(x_1) \leq 0$ 'dır. (3.2.3) eşitliğini  $a$ 'dan  $x_1$ 'e integrallersek

$$u'(x_1)v(x_1) = \int_a^{x_1} (h(x) - g(x))u(x)v(x)dx$$

elde edilir.  $(a, x_1)$  aralığında  $u(x) > 0$ ,  $v(x) > 0$  ve  $g(x) < h(x)$  olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı pozitifdir. Fakat sol tarafı pozitif değildir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

**Lemma 3.2.5.** Eğer  $x_0 (a < x_0 < b)$ ,  $\varphi(x, \lambda)$  özfonksiyonunun sıfırı ise bu durumda yeterince küçük  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $\exists \delta > 0$  bulmak mümkün ki  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$  olacak şekilde  $\varphi(x, \lambda)$  fonksiyonunun  $|x - x_0| < \varepsilon$  için sadece bir tek sıfırı vardır.

**Teorem 3.2.6. (Sturm Osilasyon Teoremi)**

(3.1.1)–(3.1.3) Sturm-Liouville problemini sınırsız olarak artan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  özdeğerleri vardır. Bu takdirde  $\lambda_m$  özdeğerlerine karşılık gelen  $\varphi(x, \lambda_m)$  özfonksiyonunun  $a < x < b$  aralığında  $m$ -tane sıfırı vardır.

**İspat.**

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha \quad (3.2.6)$$

başlangıç şartlarını sağlayan (3.1.1) denkleminin çözümü  $\varphi(x, \lambda)$  olsun. 2.Mukayese teoreminden dolayı  $\lambda$  artarken  $\varphi(x, \lambda)$  fonksiyonunun sıfırlarının sayısı azalır.

$a \leq x \leq b$ ,  $|q(x)| < c$  olsun. Bu takdirde (3.1.1) denklemini

$$-y'' + (\lambda + c)y = 0 \quad (3.2.7)$$

denkleminle karşılaştıralım. (3.2.7) denkleminin (3.2.6) başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün görüntüsü

$$y(x, \lambda) = \sin \alpha \cosh \left\{ (-\lambda - c)^{1/2} (x - a) \right\} - \frac{\cos \alpha}{(-\lambda - c)^{1/2}} \sinh \left\{ (-\lambda - c)^{1/2} (x - a) \right\}$$

şeklindedir.  $\lambda$  parametresinin negatif değerlerinin mutlak değerlerinin yeterince büyük değerleri için bu fonksiyonun sıfır noktalarının mevcut olmadığı aşikârdır. Bu nedenle tekrar 2.Mukayese teoreminden faydalanarak  $\lambda$  parametresinin negatif değerlerinin mutlak değerlerinin yeterince büyük değerleri için  $\varphi(x, \lambda)$  fonksiyonunun sıfırlarının mevcut olmadığı sonucuna varılır. Karşılaştırma için

$$-y'' + (\lambda - c)y = 0$$

denklemini seçersek pozitif ve sınırsız olarak artan  $\lambda$  'lar için (3.1.1)–(3.1.3) probleminin çözümü olan  $\varphi(x, \lambda)$  fonksiyonunun sıfırlarının sayısının  $[a, b]$  aralığında sınırsız olarak arttığını elde ederiz.

Şimdi  $\varphi(x, \lambda) = 0$  denklemini göz önüne alalım. Bu durumda Lemma 3.2.5'den dolayı bu denklemin kökleri  $\lambda$  'ya bağlı sürekli fonksiyonlardır.

Diğer yandan 2.Mukayese teoreminden dolayı  $\lambda$ 'lar artarken  $\varphi(x, \lambda)$  fonksiyonunun her sıfırı sola kaymış olur. Sıfırlarının sayısı azalmadığı için  $a$  noktasının dışında sıfır noktası bulunamaz. Bu sebeple Lemma 3.2.5'den dolayı bu fonksiyonun yeni sıfırları  $b$  noktasından içeri girer.  $\varphi(b, \lambda) = 0$  olmak üzere  $\mu_1$  ile bu eşitliği sağlayan  $\lambda$  parametresinin ikinci değerini gösterelim. Böylece  $\varphi(b, \mu_m) = 0$  olacak şekilde,  $\varphi(x, \mu_m)$  fonksiyonu açık  $(a, b)$  aralığının içerisinde  $m$ -tane sıfıra sahip olmak üzere  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}, \mu_m, \dots$  sayı dizisi elde edilir. Eğer  $\sin \beta = 0$  ise bu takdirde (3.1.3) sınır şartının sağlandığını görürüz. Dolayısıyla  $\mu_m$  'ler özdeğerlerdir. Ayrıca (3.1.1) – (3.1.3) probleminin çözümü olan  $\varphi(x, \lambda)$ , (3.2.6) başlangıç koşullarını sağladığı için bu çözümün (3.1.2) sınır koşulunu da sağladığını görürüz. Böylece bu durumda  $\sin \beta = 0$  durumunda teorem ispatlanmış olur.

Şimdi  $\sin \beta \neq 0$  olsun.  $u(x)$  ve  $v(x)$  ise 1.Mukayese teoreminde göz önüne alınan fonksiyonlar olsun. (3.2.1), (3.2.2), (3.2.6) başlangıç koşullarını sağlayan denklemler olsunlar. (3.2.1), (3.2.2)'yi göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ u^2 \left( \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right) \right\} &= 2uu' \left[ \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right] + u^2 \left[ \frac{u''}{u} - \frac{v''}{v} \right] - u^2 \left( \frac{(u')^2}{u^2} - \frac{(v')^2}{v^2} \right) \\ &= \frac{(u'v - v'u)}{v^2} + u^2 \{h(x) - g(x)\} > 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

elde edilir.

Bu sebeple  $v'$  nin sıfıra dönüşmediği her aralıkta  $u^2 \left[ \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right]$  fonksiyonu monoton artandır.  $u(x), v(x)$  fonksiyonlarının  $(a, b)$  aralığında eşit sayıda sıfıra sahip olduğunu varsayalım.  $x$  ile  $u(x)$  fonksiyonunun  $b$  noktasına en yakın sıfırını gösterelim.

$x_i \leq x \leq b$  aralığında  $v(x)$  fonksiyonunun sıfırlarının mevcut olmadığını gösterelim.

Gerçekten 2. Mukayese teoreminden dolayı  $a$  ve  $x_i$  noktaları arasında  $v(x)$

fonsiyonunun en az  $i$ -adette sıfırları bulunur. Eğer  $v(x)$  fonksiyonu  $x_i \leq x \leq b$

aralığında sıfıra sahip olursa bu takdirde  $(a, b)$  aralığında  $v(x)$  fonksiyonu varsayımımızın tersine  $u(x)$  fonksiyonundan daha fazla sıfıra sahip olur. (3.2.8) eşitliğini  $x_i$  ve  $b$  arasında integrallersek

$$u^2(b) \left[ \frac{u'(b)}{u(b)} - \frac{v'(b)}{v(b)} \right] > u^2(x_i) \left[ \frac{u'(x_i)}{u(x_i)} - \frac{v'(x_i)}{v(x_i)} \right] = 0$$

ise

$$\frac{u'(b)}{u(b)} > \frac{v'(b)}{v(b)} \quad (3.2.9)$$

$\mu_m < \lambda' < \lambda'' < \mu_{m+1}$  olacak şekilde  $u(x)$  yerine  $\varphi(x, \lambda')$ ,  $v(x)$  yerine  $\varphi(x, \lambda'')$  alırsak (3.2.9) eşitsizliğinden dolayı  $\frac{\varphi'(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)}$  fonksiyonu  $(\mu_m, \mu_{m+1})$

aralığında monoton azalır ve  $\varphi(b, \mu_m) = \varphi(b, \mu_{m+1})$  olduğu için  $\frac{\varphi'(b, \lambda)}{\varphi(b, \lambda)} = -\cot \beta$  olmak üzere  $(\mu_m, \mu_{m+1})$  aralığında bir tane  $\lambda_{m+1}$  noktası bulunur. Dolayısıyla bu noktada (3.1.3) şartı sağlanır. Bu ise  $\lambda_{m+1}$ ' in bir özdeğer olması demektir.  $\varphi(x, \lambda_{m+1})$  ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur. Böylece  $(a, b)$  aralığında  $\varphi(x, \lambda_{m+1})$  fonksiyonunun  $(m+1) -$  tane sıfırı vardır. Bununla teorem ispatlanmıştır.

**Teorem 3.2.7. (Açılım Teoremi)** Eğer  $f(x)$  ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olsun.  $f(x)$  fonksiyonu (3.1.1) – (3.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre mutlak ve düzgün yakınsak Fourier seri açılımı,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$v_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} y(x, \lambda_n), \quad c_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx$$

dir.

## 4. KESİRLİ DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

### 4.1. Kesirli Difüzyon Denkleminin Çözümü

Aşağıdaki sınır değer problemini gözönüne alalım. Öyle ki,

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) - q(x) u(x, t) \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - hu(0, t) &= 0 \\ u_x(\pi, t) + Hu(\pi, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (4.1.3)$$

(4.1.1) denklemi (4.1.2) sınır şartlarını ve (4.1.3) yan şartını sağlayan kesirli mertebeden difüzyon problemidir. Burada  ${}_0^C D_t^\alpha u(x, t)$ ,

$${}_0^C D_t^\alpha u(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u'(x) dx$$

ile tanımlanan Caputo kesirli türev operatörüdür. Bu çalışmada Caputo kesirli türevini kullanacağız. (4.1.2) sınır şartını açık bir şekilde yazacak olursak

$$\begin{aligned} u(0, t) \cos \alpha + u_x(0, t) \sin \alpha &= 0 \\ u(\pi, t) \cos \beta + u_x(\pi, t) \sin \beta &= 0 \end{aligned}$$

olup

$$h = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad H = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$$

alalım. Buradan hareketle düz problem için aşağıdaki dört sınır şartını ele alalım.

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - hu(0, t) &= 0 & h \neq \infty & \text{ise} \\ u(0, t) &= 0 & h = \infty & \text{ise} \\ u_x(\pi, t) + Hu(\pi, t) &= 0 & H \neq \infty & \text{ise} \\ u(\pi, t) &= 0 & H = \infty & \text{ise} \end{aligned}$$

Şimdi  $H$  ve  $h$  sabit olmak üzere

$$-\varphi''(x, \lambda) + q(x) \varphi(x, \lambda) = \lambda \varphi(x, \lambda), \quad 0 < x < \pi \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad h \neq \infty \text{ ise} \\ \varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1 \quad h = \infty \text{ ise} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(\pi, \lambda) + H \varphi(\pi, \lambda) = 0 \quad H \neq \infty \text{ ise} \\ \varphi(\pi, \lambda) = 0 \quad H = \infty \text{ ise} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. (4.1.5) ve (4.1.6) sınır şartları altında bu problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları sırasıyla  $\lambda_n$  ve  $\varphi(x, \lambda_n)$  dir.

Bütün sınır şartları için  $\|\psi_n\|_2 = 1$  olmak üzere  $\psi_n(x)$ , normlaştırıcı özfonksiyonu ve  $\varphi(x, \lambda_n)$  nin  $L_2[0, \pi]$ 'de normu  $\alpha_n$  olarak ifade edilsin. Bu durumda

$$\alpha_n = \|\varphi(x, \lambda_n)\|_2, \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x, \lambda_n)$$

dır. Yan sınır şartı olarak aldığımız  $f \in L_2[0, \pi]$  fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} c_n \varphi(x, \lambda_n) \\ c_n &= \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\alpha_n} = \frac{\langle f, \varphi(x, \lambda_n) \rangle}{\alpha_n^2} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

şeklinde Fourier serisine açabiliriz.

Değişken değiştirme metodu kullanılarak (4.1.1) denkleminin seri çözümlerini elde edebiliriz,  $u(x, t)$ , (4.1.1) denkleminin çözümü olsun. Bu takdirde

$$u(x, t) = T(t) \varphi(x)$$

şeklinde iki fonksiyonun çarpımı olarak alalım. Şimdi bu son ifadenin (4.1.1) denklemindeki türevlerini alırsak

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) = {}_0^C D_t^\alpha T(t) \varphi(x)$$

ve

$$u_{xx}(x, t) = T(t) \varphi''(x)$$

olur. Bu türevleri (4.1.1) denkleminde yerine yazarsak

$${}_0^C D_t^\alpha T(t) \varphi(x) = T(t) \varphi''(x) - q(x) T(t) \varphi(x)$$

elde ederiz. Her iki tarafı  $T(t) \varphi(x)$  ifadesine bölersek

$$\frac{{}_0^C D_t^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - q(x)$$

olup eşitliğin sol tarafı  $t$  ye sağ tarafı  $x$  e bağlı olduğundan bu eşitlik sabit bir sayıya eşittir. O halde

$$\frac{{}_0^C D_t^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - q(x) = -\lambda$$

yazabiliriz. Buradan

$${}_0^C D_t^\alpha T_n(t) = -\lambda T_n(t), \quad T_n(0) = c_n$$

ve

$$-\varphi''(x, \lambda_n) + q(x) \varphi(x, \lambda_n) = \lambda \varphi(x, \lambda_n)$$

bulunur.

$${}_0^C D_t^\alpha T_n(t) = -\lambda T_n(t), \quad T_n(0) = c_n$$

Kesirli mertebeden başlangıç değer problemini çözelim. Bunun için her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

Caputo'nun Laplace dönüşümü olan

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned} s^\alpha T(s) - s^{\alpha-1} T_n(0) &= -\lambda_n T(s) \\ s^\alpha T(s) + \lambda_n T(s) &= s^{\alpha-1} T_n(0) \\ (s^\alpha + \lambda_n) T(s) &= s^{\alpha-1} T_n(0) \end{aligned}$$

elde ederiz.  $T_n(0) = c_n$  olduğundan

$$\begin{aligned} (s^\alpha + \lambda_n) T(s) &= c_n s^{\alpha-1} \\ T(s) &= c_n \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \lambda_n)} = c_n \frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + \lambda_n)} \end{aligned}$$

olur. Şimdi ise her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$T_n(t) = c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)$$

buluruz. Burada  $E_\alpha(x)$ ,

$$E_\alpha(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

ile tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonudur. Buradan (4.1.1) denkleminin  $u$  çözümün seri gösterimi

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(x, \lambda_n) \quad (4.1.8)$$

olur. Türevi de

$$u_x(x, t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(x, \lambda_n) \quad (4.1.9)$$

şeklindedir.

## 4.2. Sınır Değer Probleminde Seriyeye Açılım

**Lemma 4.2.1.** (4.1.8) ve (4.1.9) serileri  $t > 0$ , için  $[0, \pi]$  aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

**İspat:** Lemmayı Düzgün yakınsaklık prensibinden faydalananarak gösterelim.  $h \neq \infty$  durumu için  $\varphi(x, \lambda_n)$  özfonksiyonlarının asimptotik formülü

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

dır. Türevi de

$$\varphi'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + h \cos \sqrt{\lambda} x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

şeklindedir ve özdeğerler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (4.2.1)$$

dır. Buradan

$$\varphi(x, \lambda_n) = O(1), \quad \varphi'(x, \lambda_n) = O(n), \quad x \in [0, \pi] \quad (4.2.2)$$

olur.  $h = \infty$  için  $\varphi(x, \lambda_n)$  asimptotik formülü ve türevi

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ \varphi'(x, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \end{aligned}$$

dir. Özdeşler için ise asimptotik formüller

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad H \neq \infty \text{ ise} \\ \sqrt{\lambda_n} &= n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad H = \infty \text{ ise} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

şeklindedir. Buradan

$$\varphi(x, \lambda_n) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varphi'(x, \lambda_n) = O(1) \quad x \in [0, \pi] \quad (4.2.4)$$

dır. Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$|E_\alpha(z)| < \frac{C}{1+|z|}, \quad \frac{\alpha\pi}{2} < \mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$$

olacak şekilde sınırlıdır. Buradan,

$$|E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)| < \frac{C}{1+\lambda_n |t|^\alpha}, \quad 0 \leq |\arg(t)| \leq \mu \leq \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right\} \quad (4.2.5)$$

elde edilir.

Böylece  $t > 0$  için,

$$E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq N} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(x, \lambda_n) \right|^2 &\leq \sum_{n \geq N} |c_n|^2 \sum_{n \geq N} |E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(x, \lambda_n)|^2 \\ &\leq C \sum_{n \geq N} |c_n|^2 \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^4} \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

olur.  $x \in [0, \pi]$  olmak üzere  $N$  yeteri kadar büyük seçilirse (4.1.8) serisi  $[0, \pi]$  aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Benzer şekilde (4.1.9) serisi için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq N} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(x, \lambda_n) \right|^2 &\leq \sum_{n \geq N} |c_n|^2 \sum_{n \geq N} |E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(x, \lambda_n)|^2 \\ &\leq C \sum_{n \geq N} |c_n|^2 \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

yazılabilir.

$N$  yeteri kadar büyük seçilirse (4.1.9) serisi  $[0, \pi]$  aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Bu ise Mittag-Leffler fonksiyonunun serileri olarak  $x = 0$  ve  $x = \pi$  sınır noktalarında ki fonksiyon görüntülerini elde etmemizi sağlar. Buradan aşağıdaki tabloyu verebiliriz [21].

| $h$           | $x = 0$ değerinde                                                                       |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $= \infty$    | $u_x(0, t) = \sum_{n > 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)$                            |
| $\neq \infty$ | $u(0, t) = \sum_{n > 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)$                              |
| $H$           | $x = \pi$ değerinde                                                                     |
| $= \infty$    | $u_x(\pi, t) = \sum_{n > 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(\pi, \lambda_n)$ |
| $\neq \infty$ | $u(\pi, t) = \sum_{n > 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(\pi, \lambda_n)$    |

(4.2.6)

### 4.3-Sınır Değer Problemi için Analitiklik

**Lemma 4.3.1.** Sınır değerleri  $(0, \infty)$  aralığında kısıtlı ve  $0 \leq |\arg(t)| \leq \mu \leq \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right\}$  açı aralığında analitiktir.

**İspat:** (4.2.1) – (4.2.4) den 4 durum için ( $h = \infty, h \neq \infty, H = \infty, H \neq \infty$ )

$$\varphi(\pi, \lambda_n) = O(1), \quad \varphi'(\pi, \lambda_n) = O(n), \quad \lambda_n \sim n^2 \quad (4.3.1)$$

dır.

$$\left\{ t, \infty > t_1 \geq |t| \geq t_0 > 0, 0 \leq |\arg(t)| \leq \mu \leq \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\right\} \right\}$$

cümlesini K cümlesi olarak alalım.  $E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)$ , Mittag-Leffler fonksiyonu K üzerinde analitiktir. (4.2.5) ve (4.3.1) asimptotik formüllerden kompakt K üzerinde yeteri kadar büyük N ler için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq N} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(x, \lambda_n) \right|^2 &\leq \sum_{n \geq N} |c_n|^2 \sum_{n \geq N} |E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(\pi, \lambda_n)|^2 \\ &\leq C \sum_{n \geq N} |c_n|^2 \sum_{n \geq N} \frac{n^2}{(1 + \lambda_n t_0^\alpha)^2} \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Buradan

$$\sum_{n \geq N} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(\pi, \lambda_n)$$

K üzerinde bir analitik fonksiyona düzgün yakınsaktır. Böylece  $t_0 \rightarrow 0, t_1 \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow \min \left\{ \pi, \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right\}$  alındığında  $u_x(\pi, t)$ 'nin analitikliği sonucu çıkar.  $u(0, t)$ ,  $u_x(0, t)$ ,  $u(\pi, t)$  içinde ispat benzerdir.

Lemma 4.3.1 bize  $t \in (T_0, T_1)$  bazı zaman aralıkları üzerinde  $u(0, t)$  fonksiyon görüntüleri, analitik süreklilik ile  $t > 0$  için  $u(0, t)$  sınır değerlerinin tekliğinin ifade edilebileceğini gösterir.  $u_x(0, t)$ ,  $u_x(\pi, t)$ ,  $u(\pi, t)$  içinde benzerdir.

#### 4.4. Sınır Spektral Verilerinin Bulunması

Sınır spektral verileri olarak  $H \neq \infty$  durumunda  $\{\lambda_n, \varphi(\pi, \lambda_n)\}$ ,  $H = \infty$  durumunda ise  $\{\lambda_n, \varphi'(\pi, \lambda_n)\}$  cümlelerini alırız. Buna göre aşağıdaki Lemmayı verelim.

**Lemma 4.4.1.**  $c_n \neq 0$  olsun. Bu taktirde  $(T_0, T_1)$  üzerindeki sınır değerlerinden sınır spektral verilerini elde edebiliriz.

**İspat.** Lemma 4.3.1 den  $h \neq \infty$  durumunda  $u(0, t)$  fonksiyonu ve  $h = \infty$  durumunda  $u_x(0, t)$  fonksiyonu

$$0 \leq |\arg(t)| \leq \mu \leq \min \left\{ \pi, \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right\}$$

üzerinde analitiktirler. Buradan  $t \in (T_0, T_1)$  üzerinde  $x = 0$  değerlerinde  $u(0, t)$  ve  $u_x(0, t)$  fonksiyon görüntüleri  $t > 0$  için tektir. O halde  $x = 0$  için (4.2.6) gösterimli serilere sahiptirler.

O takdirde

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha), \quad t > 0 \tag{4.4.1}$$

serisini ele alalım. Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alalım.

Mittag-Leffler fonksiyonu için Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)\} = \int_0^\infty e^{-st} E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda_n}, \quad R(s) > 0$$

dır [20]. Burada  $\lambda_n \sim n^2$ ,  $\sum_{n \geq 0} |c_n|^2 < \infty$  ve

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{c_n R(s)^{\alpha-1}}{R(s)^\alpha + \lambda_n} \right|$$

serileri yakınsaktır. O zaman (4.4.1) in Laplace dönüşümünü alırken integral ve toplamı yer değiştirebiliriz. Bu taktirde

$$g(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda_n}$$

olur. Burada  $s$  yerine  $s^{\frac{1}{\alpha}}$  alıp eşitliğin her iki tarafını  $s^{\frac{1}{\alpha}}$  ile çarparsak;

$$s^{\frac{1}{\alpha}} g\left(s^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n s}{s + \lambda_n}$$

olur ki bu seriler  $R(s) > 0$  için analitik fonksiyonları ifade eder ve  $\{-\lambda_n\}_{n \geq 0}$  kutup noktalarında kompleks düzlemde bir meramorf fonksiyonlardır.  $\{-c_n \lambda_n\}_{n \geq 0}$  rezidülerine karşılık gelirler.

Böylece sol taraf olan  $\mathcal{L}\{g(t)\}$  fonksiyonunu yani  $g(t)$  fonksiyonunu bildiğimiz zaman  $t \in (T_0, T_1)$  olmak üzere  $c_n \neq 0$  aldığımızda  $\lambda_n$  ve  $c_n$ 'e ulaşabiliriz. Benzer şekilde  $H \neq \infty$  durumunda  $x = \pi$  sınır değerindeki fonksiyon görüntümüz

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(\pi, \lambda_n), \quad t \in (T_0, T_1)$$

formuna sahiptir.  $c_n \neq 0$  olduğu zaman  $g(t)$  nin Laplace dönüşümünden  $\{\lambda_n, c_n \varphi(\pi, \lambda_n)\}$  spektral verisini ifade edebiliriz. Buradan  $x = 0$  değerlerinden  $c_n$  i bulduğumuz takdirde  $\varphi(\pi, \lambda_n)$ 'i de bulabiliriz.

$H = \infty$  ve  $x = \pi$  değeri için ise

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi'(\pi, \lambda_n), \quad t \in (T_0, T_1)$$

formuna sahiptir. Aynı şekilde  $c_n \neq 0$  olduğu zaman  $g(t)$  nin Laplace dönüşümünden  $\{\lambda_n, c_n \varphi'(\pi, \lambda_n)\}$  i ifade edebiliriz.  $x = 0$  değerinden  $c_n$  bilindiği zaman  $\varphi'(\pi, \lambda_n)$  bulunur. Böylece  $c_n \neq 0$  olduğu zaman sınırdaki fonksiyon görüntülerinden sınır spektral verilerini bulabiliriz. Bu da bize  $c_n \neq 0$  şartının önemini gösterir. Bu şart

$$c_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\alpha_n}$$

olduğundan

$$\langle f, \psi_n \rangle \neq 0 \quad (4.4.2)$$

şartına denktir.

#### 4.5. Sınır Spektral Verilerine Göre Potansiyelin Elde Edilmesi

Bu bölümde (4.4.2)'de verilen  $f$  başlangıç şartının seçiminden önce  $q$ 'nun elde edilmesi için sınır spektral verilerinin önemini elde edeceğiz.  $q$ 'nun elde edilmesi için  $\{\lambda_n, \varphi'(\pi, \lambda_n)\}$  sınır spektral verileri yeterlidir. Şimdi bazı durumlara göre sonuçlar verelim.

**Lemma 4.5.1.**  $H = \infty$ , durumunda  $\{\lambda_n, \varphi'(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$  ve  $H \neq \infty$  durumunda  $\{\lambda_n, \varphi(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$  sınır spektral verileri  $q$  potansiyelini tek olarak ifade eder.

**İspat:** İspatı  $\lambda$  lar için  $\varphi(x, \lambda)$  çözümünün analitik özelliğini kullanarak yapacağız. (4.1.4) – (4.1.5) ün özdeğerleri  $\lambda_n$  ler,  $H \neq \infty$  durumu için  $\varphi'(\pi, t) + H\varphi(\pi, t)$  ifadesinin sıfırlarıdır.  $H = \infty$  ise  $\varphi(x, \lambda)$ 'nin sıfırlarıdır. O halde bu durumlar için

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) & H \neq \infty \\ \varphi(\pi, \lambda) & H = \infty \end{cases}$$

tam fonksiyonu  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  sıfırları tarafından tek olarak ifade edilir. Bu taktirde  $\psi(\lambda)$ ,

$$\psi(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{n \geq 1} \left( \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2} \right)$$

tam fonksiyonun sıfırlarına açılımı şeklinde yazabiliriz. Buradan  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  biliniyorsa  $\psi(\lambda)$  ve  $\partial_\lambda \psi(\lambda)$  tek olarak ifade edebiliriz. O halde şimdi  $\psi(\lambda)$  ve  $\{\varphi(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$  fonksiyonlarından  $\alpha_n$  normunu bulalım.

$$\partial_\lambda \varphi(\pi, \lambda) = \dot{\varphi}(\pi, \lambda)$$

ile gösterilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned}-\varphi''(x, \lambda) + q(x) \varphi(x, \lambda) &= \lambda \varphi(x, \lambda) \\ -\dot{\varphi}''(x, \lambda) + q(x) \dot{\varphi}(x, \lambda) &= \lambda \dot{\varphi}(x, \lambda) + \varphi(x, \lambda)\end{aligned}$$

denklemlerini ele alırsak ve ilk denklemi  $\dot{\varphi}(x, \lambda)$  ve ikinci denklemi  $-\varphi(x, \lambda)$  ile çarparsak

$$\begin{aligned}-\varphi''(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) + q(x) \varphi(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) &= \lambda \varphi(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) \\ \dot{\varphi}''(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - q(x) \varphi(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) &= -\lambda \varphi(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) - \varphi^2(x, \lambda)\end{aligned}$$

bulunur. Taraf tarafa toplar gerekli işlemleri yaparsak

$$\dot{\varphi}(x, \lambda) \varphi''(x, \lambda) - \dot{\varphi}''(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) = \varphi^2(x, \lambda)$$

elde ederiz. Bu eşitliği

$$(\varphi'(x, \lambda) \partial_\lambda \varphi(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda) \partial_\lambda \varphi'(x, \lambda))' = \varphi^2(x, \lambda)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan  $H \neq \infty$  ise

$$\begin{aligned}\alpha_n^2 &= \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^\pi (\varphi' \partial_\lambda \varphi - \varphi \partial_\lambda \varphi')' dx \\ &= (\varphi' \partial_\lambda \varphi - \varphi \partial_\lambda \varphi') \Big|_0^\pi \\ &= \varphi'(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi(\pi, \lambda_n) - \varphi(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi'(\pi, \lambda_n) \\ &\quad - \varphi'(0, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi(0, \lambda_n) + \varphi(0, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi'(0, \lambda_n) \\ &= \varphi'(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi(\pi, \lambda_n) - \varphi(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi'(\pi, \lambda_n) \\ &= -\varphi(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \psi(\lambda_n)\end{aligned}$$

olur ki burada  $\partial_\lambda \psi(\lambda_n)$  ve  $\varphi(\pi, \lambda_n)$  bilinirse  $\alpha_n$  normlaştıracı sayıları bulunur.  $H = \infty$  durumu içinde benzer şekilde  $\varphi(\pi, \lambda_n) = 0$  dır. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha_n^2 &= \varphi'(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi(\pi, \lambda_n) - \varphi(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \varphi'(\pi, \lambda_n) \\ &= \varphi'(\pi, \lambda_n) \partial_\lambda \psi(\lambda_n)\end{aligned}$$

olur ki burada da  $\partial_\lambda \psi(\lambda_n)$  ve  $\varphi'(\pi, \lambda_n)$  bilinirse  $\alpha_n$  normlaştıracı sayılarını buluruz. Demek ki  $H \neq \infty$  durumundaki  $\{\lambda_n, \varphi(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$  ve  $H = \infty$  durumundaki  $\{\lambda_n, \varphi'(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$  sınır spektral verilerinden  $\alpha_n$  normlaştıracı sayıları bulunur.

Gelfand Levitan-Gasymov [15, 16] teorisine göre  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  spektral verilerinin tamamı bilinirse potansiyel  $q$ 'nın tekliğini elde ederiz. Gerçekten (4.1.4) ve (4.1.5), (4.1.6) sınır şartlarını sağlayan Sturm-Liouville problemi için spektral verilerin tamamı spektral fonksiyonlarla,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \alpha_n \quad (4.5.4)$$

şeklinde ifade edilir.

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda}x) \cos(\sqrt{\lambda}t) d\left(\Gamma(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda_+}\right)$$

alalım ki burada  $\lambda > 0$  ise  $\lambda_+ = \lambda$  ve  $\lambda_+ = 0$  dir. Diferensiyellenebilirliği bilinen  $K(x, t)$  için

$$F(x, t) + K(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0, \quad 0 \leq t \leq x \leq \pi$$

Volterra integral denklemini çözerek,  $q$  fonksiyonu

$$q(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} K(x, x)$$

elde edilir.  $H = \infty$  olduğu zaman

$$\{\lambda_n, \varphi'(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$$

veya  $H \neq \infty$  olduğu zaman

$$\{\lambda_n, \varphi(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$$

sınır spektral verileri  $q$  potansiyelini tek olarak ifade eder.

#### 4.6. Büyük Özdeğerlere göre Potansiyelin Tanımlanması

$u(0, t)$  veya  $u_x(0, t)$  değerlerine göre  $\lambda_n$  özdeğerlerini nasıl bulunduğunu biliyoruz.

Buna göre  $f \in L_2(0, \pi)$ ,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \varphi(x, \lambda_n)$$

var iken (4.4.1)'den  $\lambda_n$  özdeğerlerini elde etmemiz için  $n \geq 0$  için  $c_n \neq 0$  olduğunu göstermemiz gerekir. Buradaki problem  $\varphi(x, \lambda_n)$  ortogonal sisteminin bilinmemesidir.  $c_n \neq 0$  iken bunu sağlamak kolay değildir. Şimdi aşağıdaki Lemmayı verelim.

**Lemma 4.6.1.**  $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$  olmak üzere  $f(x) = x^\alpha$  yan sınır şartını ele alalım. Bu takdirde  $n \geq N$  için ve  $N > 0$  için  $c_n \neq 0$  dır.

**İspat.**  $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$  şartı için  $f \in L_2(0, \pi)$  yakınsaktır. İspatı 3 durumda ele alacağız.

a)  $h \neq \infty, H \neq \infty$  ise  $\psi_n$  normlaştırılmış fonksiyonu,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

asimptotik formülüne sahiptir [16].  $f(x) = x^\alpha$  alırsak

$$\int_0^\pi f(x) \psi_n(x) dx$$

integralinde  $f(x)$  ve  $\psi_n(x)$  yerine yazılıp  $\xi = nx$  değişken değiştirmesi yaparsak

$$\int_0^\pi f(x) \psi_n(x) dx = n^{-\alpha-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{n\pi} \xi^\alpha \cos \xi d\xi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz. Bu eşitlikteki son integral  $n \rightarrow \infty$  için sifıra yakınsamaz.

$$c(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{n\pi} \xi^\alpha \cos \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \xi^\alpha \cos \xi d\xi = 2^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.6.1)$$

olur. Böylece

$$\alpha_n c_n = \int_0^\pi f(x) \psi_n(x) dx = \frac{c(\alpha)}{n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

dir. Buradan (4.1.7) eşitliğinden

$$\alpha_n c_n n^{\alpha+1} \rightarrow c(\alpha) \neq 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olur. Böylece  $f(x) = x^\alpha$  seçersek,  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ ,  $n \geq N$  için öyle bir  $N > 0$  vardır ki  $c_n \neq 0$  dır.

b)  $h = \infty$  ve  $H \neq \infty$  durumunu ele alalım.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty$$

asimptotik formülünün varolduğunu biliyoruz. Buradan

$$\alpha_n c_n = \int_0^\pi x^\alpha \psi_n(x) dx = \frac{\tilde{c}(\alpha)}{(n + \frac{1}{2})^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

yazabiliriz. Burada  $\tilde{c}(\alpha)$ ,

$$\tilde{c}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \xi^\alpha \sin \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(\alpha + 1) \sin \frac{(\alpha + 1)\pi}{2} \neq 0 \quad (4.6.2)$$

ile tanımlanır. Sonuç olarak  $n \geq N$  için öyle bir  $N > 0$  vardır ki  $c_n \neq 0$  dır.

**c)** Son olarak  $h = H = \infty$  durumunda

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

asimptotik formülünü alırız. Buradan

$$\alpha_n c_n = \int_0^\pi x^\alpha \psi_n(x) dx = \frac{\tilde{c}(\alpha)}{n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

olur  $\tilde{c}(\alpha)$ , (4.6.2) ile ifade edilir.  $n \geq N$  için öyle bir  $N > 0$  vardır ki  $c_n \neq 0$  dır.

**Lemma 4.6.2.**  $\|q\|_1 \leq Q$  ve  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$ ,  $h \neq \infty$  durumunda

$$N = \max \left\{ 4Q^2 \frac{c(\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{3}{\alpha}} \pi^{2-\frac{1}{\alpha}}} \left[ 1 + \frac{\pi}{\alpha+1} (Q+h) \right]^{-\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (4.6.3)$$

ve  $h = \infty$  durumunda

$$N = \max \left\{ 4Q^2 \frac{\tilde{c}(\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{3}{\alpha}} \pi^{2-\frac{1}{\alpha}}} \left[ 1 + \frac{\pi}{\alpha+1} Q \right]^{-\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (4.6.4)$$

vardır ki  $\lambda_n \geq N$  için  $c_n \neq 0$  dır. Burada ki  $c(\alpha)$ , (4.6.1) ile  $\tilde{c}(\alpha)$ , (4.6.2) tarafından verilen eşitliktir.

**İspat:** İki durumda gösterelim

**a)**  $h \neq \infty$  durumunda

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) \varphi(t, \lambda) dt \quad (4.6.5)$$

vardır buradan her iki tarafın normunu alırsak

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty &\leq 1 + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \|q\|_1}{\sqrt{\lambda}} \\
\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty - \frac{\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \|q\|_1}{\sqrt{\lambda}} &\leq 1 + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \\
\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \left(1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}\right) &\leq 1 + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \\
\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty &\leq \frac{1 + \frac{h}{\sqrt{\lambda}}}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}}
\end{aligned} \tag{4.6.6}$$

elde ederiz. Burada  $\sqrt{\lambda} > \|q\|_1$  dir.

Şimdi (4.6.5) denkleminde  $\cos \sqrt{\lambda}x$  sol tarafa geçirip her iki tarafın normu alınır ve (4.6.6) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi(x, \lambda) - \cos \sqrt{\lambda}x\right\|_\infty &\leq \frac{h}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \|q\|_1}{\sqrt{\lambda}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ h + \frac{1 + \frac{h}{\sqrt{\lambda}}}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \|q\|_1 \right] \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ \frac{h - \frac{h\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}} + \|q\|_1 + \frac{h\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\|q\|_1 + h}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}}
\end{aligned}$$

olur. Yine

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\pi x^\alpha \varphi(x, \lambda_n) dx - \int_0^\pi x^\alpha \cos \sqrt{\lambda_n}x dx \right| &\leq \left| \int_0^\pi x^\alpha \left[ \varphi(x, \lambda) - \cos \sqrt{\lambda_n}x \right] dx \right| \\
&\leq \int_0^\pi x^\alpha \left| \varphi(x, \lambda) - \cos \sqrt{\lambda_n}x \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\|q\|_1 + h}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \int_0^\pi x^\alpha dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\|q\|_1 + h}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}
\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

olur.  $x^\alpha$  artarken 2. ortalama değ r teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\pi\sqrt{\lambda_n}}^\infty x^\alpha \cos x dx \right| &= \left| \left( \pi\sqrt{\lambda_n} \right)^\alpha \int_{\pi\sqrt{\lambda_n}}^c \cos x dx \right| \\
&\leq 2 \left( \pi\sqrt{\lambda_n} \right)^\alpha
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\left| \int_0^\pi x^\alpha \cos \sqrt{\lambda_n} x dx - \frac{\sqrt{\pi} c(\alpha)}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right| = \left| \int_0^\pi x^\alpha \cos \sqrt{\lambda_n} x dx - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^\alpha \cos t dt \right|$$

olur. İlk integralde

$$\sqrt{\lambda_n} x = t \implies \sqrt{\lambda_n} dx = dt \implies dx = \frac{dt}{\sqrt{\lambda_n}}$$

değişken değiştirme yaparsak

$$\int_0^{\pi\sqrt{\lambda_n}} \left( \frac{t}{\sqrt{\lambda_n}} \right)^\alpha \cos t \frac{dt}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{\pi\sqrt{\lambda_n}} t^\alpha \cos t dt$$

olur. Denklemden yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi x^\alpha \cos \sqrt{\lambda_n} x dx - \frac{\sqrt{\pi} c(\alpha)}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right| &= \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^{\pi\sqrt{\lambda_n}} t^\alpha \cos t dt - \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^\infty t^\alpha \cos t dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_{\pi\sqrt{\lambda_n}}^\infty t^\alpha \cos t dt \right| \\ &\leq 2 \left( \pi \sqrt{\lambda_n} \right)^\alpha \frac{1}{(\sqrt{\lambda_n})^{\alpha+1}} \\ &= \frac{2\pi^\alpha}{\sqrt{\lambda_n}} \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

elde ederiz. (4.6.7) ve (4.6.8) numaralı denklemleri taraf tarafa toplarsak ve

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi(x, \lambda_n) \rangle}{\alpha_n^2} \implies c_n \alpha_n^2 = \langle f, \varphi(x, \lambda_n) \rangle = \int_0^\pi f \varphi dx$$

eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\pi x^\alpha \varphi(x, \lambda) dx - \int_0^\pi x^\alpha \cos \sqrt{\lambda_n} x dx + \int_0^\pi x^\alpha \cos \sqrt{\lambda_n} x dx - \frac{\sqrt{\pi} c(\alpha)}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\|q\|_1 + h}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{2\pi^\alpha}{\sqrt{\lambda_n}} \end{aligned}$$

$$\left| c_n \alpha_n^2 - \frac{\sqrt{\pi} c(\alpha)}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right| \leq \frac{\pi^\alpha}{\sqrt{\lambda_n}} \left( \frac{\|q\|_1 + h}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi}{\alpha+1} + 2 \right)$$

elde ederiz.  $c(\alpha) > 0$  olduğundan ancak  $c_n \neq 0$  olması durumunda

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}c(\alpha)}{\sqrt{2}\lambda_n^{\frac{\alpha+1}{2}}} &> \frac{\pi^\alpha}{\sqrt{\lambda_n}} \left( \frac{\|q\|_1 + h}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi}{\alpha + 1} + 2 \right) \\ \lambda_n^{-\frac{\alpha}{2}} &> \frac{\sqrt{2}\pi^{\alpha-\frac{1}{2}}}{c(\alpha)} \left( \frac{\|q\|_1 + h}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi}{\beta + 1} + 2 \right) \\ \lambda_n &> \max \left\{ 4Q^2 \frac{c(\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{3}{\alpha}} \pi^{2-\frac{1}{\alpha}}} \left[ 1 + \frac{\pi}{\alpha + 1} (Q + h) \right]^{-\frac{2}{\alpha}} \right\}\end{aligned}$$

sağlanır.

**b)**  $h = \infty$  durumunu gözönüne alalım.

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) \varphi(t, \lambda) dt$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \|q\|_1}{\sqrt{\lambda}} \\ \|\varphi(x, \lambda)\|_\infty - \frac{\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \|q\|_1}{\sqrt{\lambda}} &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|q\|_1 \right) &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \|\varphi(x, \lambda)\|_\infty &\leq \frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|q\|_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|q\|_1 \right)}\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}\left\| \varphi(x, \lambda) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right\|_\infty &\leq \frac{\|\varphi(x, \lambda)\|_\infty \|q\|_1}{\sqrt{\lambda}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|q\|_1 \right)} \|q\|_1 \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\|q\|_1}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}}\end{aligned}$$

sonuç olarak

$$\begin{aligned}&\left| \int_0^\pi x^\alpha \varphi(x, \lambda) dx - \int_0^\pi x^\alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \frac{\|q\|_1}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \int_0^\pi x^\alpha dx = \frac{1}{\lambda} \frac{\|q\|_1}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{aligned}$$

olur.  $x^\alpha$  artarken 2. ortalama değeri teoreminden yararlanırsak

$$\begin{aligned} \left| \int_{\pi\sqrt{\lambda_n}}^{\infty} x^\alpha \sin x dx \right| &= \left| \left( \pi\sqrt{\lambda_n} \right)^\alpha \int_{\pi\sqrt{\lambda_n}}^c \sin x dx \right| \\ &\leq 2 \left( \pi\sqrt{\lambda_n} \right)^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\pi x^\alpha \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} dx - \frac{\sqrt{\pi} \tilde{c}(\alpha)}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^{\pi\sqrt{\lambda_n}} t^\alpha \sin t dt - \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_0^\infty t^\alpha \sin t dt \right| = \left| \frac{1}{\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}+1}} \int_{\pi\sqrt{\lambda_n}}^\infty t^\alpha \sin t dt \right| \\ &\leq \frac{2\pi^\alpha}{\lambda_n} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left| c_n \alpha_n^2 - \frac{\sqrt{\pi} \tilde{c}(\alpha)}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha}{2}+1}} \right| \leq \frac{1}{\lambda_n} \left( \frac{\|q\|_1}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + 2\pi^\alpha \right)$$

dir. Burada  $\tilde{c}(\alpha) > 0$  olduğunda ancak  $c_n \neq 0$  olduğu zaman

$$\frac{\sqrt{\pi} \tilde{c}(\alpha)}{\sqrt{2} \lambda_n^{\frac{\alpha}{2}+1}} > \frac{1}{\lambda_n} \left( \frac{\|q\|_1}{1 - \frac{\|q\|_1}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + 2\pi^\alpha \right)$$

eşitsizliği sağlanır o zaman

$$\lambda_n > \max \left\{ 4 \|q\|_1^2 \frac{\tilde{c}(\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{3}{\alpha}} \pi^{2-\frac{1}{\alpha}}} \left[ 1 + \frac{\pi \|q\|_1}{\alpha+1} \right]^{-\frac{2}{\alpha}} \right\}$$

dır. Lemma 4.6.2 bize şunu gösterir. Aranılan özdeğerlerin sayısını hesaplayabilmek için  $\|q\|_1$ 'in üst sınırı olan  $Q$  önemlidir. Açıkçası eğer  $q > 0$  ise bu takdirde

$$\|q\|_1 = \int_0^\pi q(x) dx$$

dir.

$$\sqrt{\lambda_n} = n + a_0 + \frac{a_1 + a_2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.6.9)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(x) dx \\
a_0 &= \begin{cases} \frac{1}{2} & h = \infty, H \neq \infty, \text{ veya } h \neq \infty, H = \infty \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \\
a_2 &= \begin{cases} 0 & h = \infty, H = \infty \\ \frac{h+H}{\pi} & h \neq \infty, H \neq \infty \\ \frac{H}{\pi} & h = \infty, H \neq \infty \\ \frac{h}{\pi} & h \neq \infty, H = \infty \end{cases}
\end{aligned}$$

özdeğerlerinin asimptotiklerinin bulunan sabitleridir.  $q > 0$  ile ilgili gerekli veriler varsa bu taktirde  $\|q\|_1$  özdeğerlerden hesaplanabilir.  $q \geq 0$  için gerekli spektral verilere göre  $\|q\|_1$  tanımlanır.

**Lemma 4.6.3.**  $q \geq 0$  ise bu takdirde

$$\|q\|_1 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sqrt{\lambda_n} - n - a_0 \right) n - a_2 \right]$$

olur.

**İspat.**  $q \geq -C$  durumunu yukarıdaki duruma indirgeyebiliriz.

$$-y''(x) + \tilde{q}(x)y(x) = \tilde{\lambda}y(x)$$

dönüşüm problemini göz önüne alalım ki buradaki  $\tilde{q} = q + C \geq 0$ ,  $\tilde{\lambda} = \lambda + C$  dır ve (4.1.5),(4.1.6) gibi aynı sınır koşullarına sahiptir. Böylece  $C$  den  $q$  ve  $\tilde{q}$  elde edebiliriz. Bunun için de

$$\|q(x) + C\|_1 = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sqrt{\lambda_n + C} - n - a_0 \right) n - a_2 \right]$$

ve

$$\|q\|_1 \leq \|q(x) + C\|_1 + \|C\|_1 = \|q(x) + C\|_1 + \pi C$$

olur.

**Sonuç 4.6.4.**  $q \geq -C$  verilirse, bu takdirde

$$\|q\|_1 \leq Q = \pi C + 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sqrt{\lambda_n + C} - n - a_0 \right) n - a_2 \right]$$

dir.

#### 4.7. Alt Özdeğerlere göre Potansiyelin Tanımlanması

Daha önceki kısımlarda yan şart olarak  $f(x) = x^\alpha$  alınarak problemimizi tanımlamıştık. Ancak alt sınırdaki özdeğerler için durum biraz daha farklıdır. Burada başlangıç koşullara ilaveten ekstra verilere ihtiyacımız vardır. Çünkü  $N$  tam olarak bilinmiyor.  $((k + a_0 - 1/2)^2, (k + a_0 + 1/2)^2)$  aralığının içinde bulunan  $(M - 1/2)^2$  den daha büyük  $M$  sayısı tüm özdeğerlerdir. Burada  $k \geq M$  ve  $a_0$ 'da (4.6.9) da tanımlandığı gibidir. Bu aralıklardan herbiri özdeğerlerden en az birini kapsar. Böylece  $M$  nin varlığı (4.6.9) ve Lemma 4.6.1'den çıkar.

Dolayısıyla  $((k + a_0 - 1/2)^2, (k + a_0 + 1/2)^2)$ ,  $k \geq M$  aralığındaki özdeğerleri  $\lambda_k$ 'lar ve bu sıralama  $k \geq P = \max(M, N)$  olduğundan rastgele bir şekilde sıralayabiliriz.

Şimdi varsayalım ki ilk ölçümlerden sonra  $(-\infty, \lambda_M)$  aralığında  $L$  tane özdeğer bulunsun.  $[\lambda_M, \lambda_P)$  aralığı  $\{\lambda_M, \dots, \lambda_{P-1}\}$ ,  $P - M$  tane özdeğer içerdiğinden  $(-\infty, \lambda_P)$  aralığındaki özdeğerlerin gerçek sayısı  $L + (P - M)$  dir.  $\lambda_p$  ve daha yukarısında sıralamanın gerçekleştiğini gözönüne alırsak bu yüzden  $\lambda_p$  den önce  $P$  tane özdeğer olmalıdır. Böylece ilk ölçümelerde  $M - L$  tane özdeğer bilinmez.  $M$ 'yi bilmekle aranan özdeğerlerin sayısını bulabiliriz.

Örneğin  $k \geq 50$  ile başlayarak  $((k + a_0 - 1/2)^2, (k + a_0 + 1/2)^2)$  aralıklarının her biri tam olarak bir  $q$ 'yu tanımlayan özdeğer içerir. Öyleki  $\lambda_k$  bu aralıklardan birine dahil olmadığı durumda bu özdeğerler rastgele sıralanabilir. Eğer hesaplanırsa  $\lambda_{50}$  den az yalnızca 40 özdeğer buluruz. Bu demektir ki ilk değerlerden sonra tam olarak 10 tane özdeğeri kaybederiz. Buradan sıralamadaki zorluk şudur ki kaybolan özdeğerler  $\lambda_{50}$  nin altında olmak zorunda değildir.

Şimdi  $\{\lambda_0, \dots, \lambda_{P-1}\}$  kümesindeki bütün aranan özdeğerleri bulmak için  $u(0, t)$  ailesinin mutlaka içerdiği aranan özdeğerleri sağlayan uygun başlangıç koşullarını seçerek bir metod vereceğiz. Başka bir deyişle her  $n = 0, \dots, P - 1$  için  $c_n \neq 0$  olduğunu garanti eden başlangıç koşullarını bulmaya ihtiyacımız vardır.

**Lemma 4.7.1.** Herbir  $j$  sabiti ve en az bir  $k = 0, \dots, j$  için

$$c_j(k) = \int_0^\pi x^k \varphi(x, \lambda_j) dx \neq 0$$

dir.

**İspat.**  $h \neq \infty$  durumunu gözönüne alalım.

$$c_j(k) = 0, \quad k = 0, \dots, j \quad (4.7.1)$$

olduğunu varsayalım. (4.1.4)'ün  $j$ . özfonksiyonları  $j$  kadar basit sifra sahiptir.  $a_{jk}$  lar (4.1.1) denkleminin sıfırları olsun. Bu taktirde  $\varphi(a_{jk}, \lambda) = 0$  dır.  $k = 1, \dots, j$  için  $a_{jk}$  sıfırlarını veren polinomu

$$P_j(x) = \varepsilon_j \prod_{k=1}^j (x - a_{jk}) = \sum_{k=0}^j b_k x^k \quad (4.7.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada ki  $\varepsilon_j$ ,  $P(0) = 1$  olduğunda seçilir.  $P_j$  polinomu ile  $\varphi(x, \lambda_j)$  aynı derece ve aynı köklere sahiptir. Her ikisi için de

$$P_j(0) = \varphi(0, \lambda_j) = 1$$

olur. O halde  $x \in [0, \pi]$  için aynı işarete sahiptirler.  $a_{jk} \neq x$ ,  $k = 1, 2, \dots, j$  ise

$$P_j(x) \varphi(x, \lambda_j) > 0$$

olur. Böylece

$$\int_0^\pi P_j(x) \varphi(x, \lambda_j) dx > 0 \quad (4.7.3)$$

sonucuna varılır. Buradan (4.7.1) ve (4.7.2) aynı anda gözönüne alınırsa

$$\int_0^\pi P_j(x) \varphi(x, \lambda_j) dx = \sum_{k=0}^j b_k \int_0^\pi x^k \varphi(x, \lambda_j) dx = \sum_{k=0}^j b_k c_j(k) = 0$$

olur. Buda (4.7.3) ile çelişir. Bu çelişkiye  $c_j(k) = 0$  ile düştük o halde  $c_j(k) \neq 0$  dir.

Yukarıdaki sonuca göre şunu diyebiliriz.

$$\left\{ u^{x^k}(0, t) \right\}_{k=0}^{P-1}$$

ailesiyle ilk  $P$  tane özdeğeri elde edebiliriz.  $P$  bilinmiyor.  $M - L$  tane aranan özdeğerlerin sayısının verisini kullanabiliriz. Böylece aranan özdeğerleri bulmak için  $u^{x^0}(0, t)$  değerlerinden başlarız. Eğer bu özdeğerlerden sonra hala bilinmeyen özdeğerler varsa bir sonraki  $u^{x^1}(0, t)$  değerine geçeriz ve böylelikle bütün  $M - L$  tane bilinmeyen özdeğerleri bulana kadar devam ederiz. Lemma 4.7.1 bu yöntemin bir noktada (en fazla  $u^{x^{P-1}}(0, t)$  değerinden sonra) duracağını garanti eder ve böylece değerlerinin sayısının sonlu olduğunu görüyoruz.

#### 4.8. İkinci Başlangıç Şartı

$q$ 'nın alt sınırı bilindiği zaman, aranan özdeğerleri bulmak için daha fazla özel şart gereklidir.

**Lemma 4.8.1.**  $q(x) \geq -C$  alırsak ki  $C$  negatif olmayan bir sayı ve

$$\chi_v(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < v \\ 0 & v \leq x < \pi \end{cases}$$

alalım burada

$$v = \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_n + C}} \quad (4.8.1)$$

dir.  $j = 0, \dots, n$  için bu takdirde

$$c_j = (\chi_v, \varphi_j) \neq 0$$

olur.

**İspat.**

$$-\varphi''(x, \lambda_n) + q(x)\varphi(x, \lambda_n) = \lambda_n\varphi(x, \lambda_n)$$

$$\varphi(0, \lambda_n) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda_n) = h$$

$$-\phi_n''(x) - C\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$$

$$\phi_n(0) = 1, \quad \phi_n'(0) = h$$

iki başlangıç değeri problemini karşılaştıralım.

$$-\phi_n''(x) - C\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x)$$

$$\phi_n(0) = 1, \quad \phi_n'(0) = h$$

probleminin çözümünü bulalım. Buradaki denklemin karakteristik denklemini yazacak olursak

$$\begin{aligned} -m^2 - C &= \lambda_n \\ m^2 &= -(\lambda_n + C) \\ m_{1,2} &= \pm\sqrt{-(\lambda_n + C)} \\ m_{1,2} &= \pm\sqrt{(\lambda_n + C)}i \end{aligned}$$

bu köklere göre çözüm

$$\phi_n(x) = e^\alpha (A \cos \beta + B \sin \beta)$$

olur. Bizim  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \sqrt{(\lambda_n + C)}$  dir. Gerekli işlemler yaparak

$$\phi_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n + C}x\right) + \frac{h}{\sqrt{\lambda_n + C}} \sin\left(\sqrt{\lambda_n + C}x\right)$$

elde ederiz.

Sturm-Liouville mukayese teoreminden,  $\phi_n(x)$ 'in ilk pozitif sıfırları  $\varphi(x, \lambda_n)$ 'nın ilk pozitif sıfırlarından daha azdır.  $h \neq \infty$  durumundaki çözüm

$$\phi_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n + C}x\right) + \frac{h}{\sqrt{\lambda_n + C}} \sin\left(\sqrt{\lambda_n + C}x\right)$$

olur.

$h = 0$  ise  $\phi_n(x)$ 'in ilk pozitif sıfırı

$$\mu = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_n + C}}$$

dir.

$$\sqrt{\lambda_n + C} = t$$

alalım.  $\phi_n(x)$ 'in sıfırları için

$$\begin{aligned}\cos tx + \frac{h}{t} \sin tx &= 1 + \frac{h}{t} \tan tx = 0 \\ x &= \frac{1}{t} \arctan \left( -\frac{t}{h} \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n + C}} \arctan \left( -\frac{\sqrt{\lambda_n + C}}{h} \right)\end{aligned}$$

ifadesinden hareketle

$h > 0$  ise  $\phi_n(x)$ 'in ilk pozitif sıfırını

$$\mu > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n + C}}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

$h < 0$  ise  $\sqrt{\lambda_n + C} > |h|$ ,  $\phi_n(x)$ 'in ilk pozitif sıfırı

$$\mu > \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_n + C}}$$

dır.

$h = \infty$  ise

$$\phi_n(0) = 0, \quad \phi_n'(0) = 1$$

sınır şartlarına göre çözüm

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n + C}} \sin \left( \sqrt{\lambda_n + C} x \right)$$

olur. Böylece  $\phi_n(x)$ 'in ilk pozitif sıfırı

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n + C}}$$

dir. (4.8.1) tarafından verilen  $v$ 'nin tüm durumları için,  $\varphi(x, \lambda_n)$ 'nin ilk pozitif sıfırlarından daha azdır.  $\varphi(x, \lambda_n)$ 'nin ilk pozitif sıfırları,  $j = 0, \dots, n$  olmak üzere  $\varphi(x, \lambda_j)$  nin bazı pozitif sıfırlarından küçüktür. Böylece  $(0, v)$  aralığı üzerinde tüm  $\varphi(x, \lambda_j)$ ,  $j = 0, \dots, n$  nin işareti değişmez.

$$c_j = \frac{1}{\alpha_j^2} \int_0^\pi \chi_v(x) \varphi(x, \lambda_j) dx = \frac{1}{\alpha_j^2} \int_0^v \varphi(x, \lambda_j) dx \neq 0, \quad (j = 0, \dots, n)$$

Lemma 4.6.2 ve Lemma 4.7.1 birleştirilirse  $q(x) \geq -C$  ise  $u^{x^\alpha}(0, t)$  (veya  $u_x^{x^\alpha}(0, t)$   $h = \infty$  ise)'nin Mittag-Leffler serisi tüm  $\lambda_n \geq N$ 'leri içerir ki burada ki  $N$ , (4.6.3) yada (4.6.4) yardımıyla ifade edilir.

$$v = \frac{\pi}{4\sqrt{N + C}} \tag{4.8.2}$$

olur.

Bu taktirde  $\lambda_n \leq N$  durumunda  $u^{\chi_v}(0, t)$  (veya  $h = \infty$  durumunda  $u_x^{\chi_v}(0, t)$ ) taşınır. İki tane başlangıç koşulları  $x^\alpha$  ve  $\chi_v(x)$  bütün spektral verilerin yeniden tanımlanması için yeterlidir. Bu durum potansiyel  $q$  içinde aynıdır.

#### 4.9 Temel Sonuç

##### Teklik teoremi

$h, H \neq \infty$  durumlarında  $q$  potansiyelinin tekliğini göstereceğiz. Diğer durumlar için benzer şekildedir.

**Teorem 4.9.1.**  $q \in L_1(0, \pi)$  için  $T > 0, -1/2 < \beta < 0$  olsun. Öyle bir  $N > 0$  vardır ki, bir  $(T_0, T_1)$  zaman aralığında

$$u^{x^\beta}(\pi, t), u^{x^0}(\pi, t), u^{x^1}(\pi, t), \dots, u^{x^N}(\pi, t)$$

ve

$$u^{x^\beta}(0, t), u^{x^0}(0, t), u^{x^1}(0, t), \dots, u^{x^N}(0, t)$$

sonlu sayıdaki değerleri tarafından  $q$  tek olarak belirlenir.

**İspat.**  $N > 0$  için iki potansiyel  $q, \tilde{q} \in L_1(0, \pi)$  olduğunu varsayalım. Her iki potansiyeller için

$$\begin{aligned} &u^{x^\beta}(0, t), u^{x^0}(0, t), u^{x^1}(0, t), \dots, u^{x^N}(0, t) \\ &u^{x^\beta}(\pi, t), u^{x^0}(\pi, t), u^{x^1}(\pi, t), \dots, u^{x^N}(\pi, t) \end{aligned}$$

değerleri aynıdır. Buna göre

$q$  tarafından tanımlanan  $\{\lambda_n\}$ , özdeğerlerin cümlesi,  $\{\varphi(x, \lambda_n)\}$ , özfonksiyonlar cümlesi olsunlar. Aynı şekilde  $\tilde{q}$  için özdeğerlerin cümlesi  $\{\tilde{\lambda}_n\}$  ve özfonksiyonlarının cümlesi  $\{\tilde{\varphi}(x, \lambda_n)\}$  olsunlar.  $f \in L_2(0, \pi)$  iki fonksiyon içinde

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \varphi(x, \lambda_n) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n \tilde{\varphi}(x, \lambda_n)$$

şeklinde ifade edilir.  $q$  potansiyeli için difüzyon dağılımı,

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(x, \lambda_n)$$

dır.  $x = 0$  noktasındaki difüzyon

$$u(0, t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha)$$

dır.  $\tilde{q}$  potansiyeli için de difüzyon dağılımı

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n E_\alpha(-\tilde{\lambda}_n t^\alpha) \tilde{\varphi}(x, \lambda_n)$$

$x = 0$  noktasındaki difüzyon

$$\tilde{u}(0, t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n E_\alpha(-\tilde{\lambda}_n t^\alpha)$$

dir.  $u(0, t)$  nin  $t > 0$  için analitikliği sonlu  $(T_0, T_1)$  zaman aralığı üzerinde tekliğini ifade etmek için yeterlidir.

Böylece  $q$  ve  $\tilde{q}$  aynı

$$u^{x^\beta}(0, t), u^{x^0}(0, t), u^{x^1}(0, t), \dots, u^{x^N}(0, t), \quad t \in (0, \infty)$$

sınır fonksiyonlarını verir. Diğer bir deyişle

$$\sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n E_\alpha(-\tilde{\lambda}_n t^\alpha), \quad t > 0 \quad (4.9.1)$$

olur. (4.9.1)'in sağ ve sol taraflarının Laplace dönüşümleri aynıdır. Bu nedenle aynı rezidü ve aynı kutba sahiptirler. Lemma 4.4.1 ve (4.9.1)'den  $c_n \neq 0$  olmak üzere her  $n$  için  $k$  tektir öyle ki  $\lambda_n = \tilde{\lambda}_k$  ve  $c_n = \tilde{c}_k$  olduğu durumda  $n$  tektir. Bu nedenle

$$\{\lambda_n \mid c_n \neq 0\}$$

ve

$$\{\tilde{\lambda}_n \mid \tilde{c}_n \neq 0\}$$

cümleleri çakışır. Ancak

$$\{\lambda_n \mid c_n \neq 0, \ j = 0, \dots, N, \ x^j \text{ ve } x^\alpha \text{ dan en az bir } f \text{ için}\}$$

cümlesi  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  özdeğerlerin cümlesi ile çakışır ve

$$\{\tilde{\lambda}_n \mid \tilde{c}_n \neq 0, \ j = 0, \dots, N, \ x^j \text{ ve } x^\alpha \text{ dan en az bir } f \text{ için}\}$$

cümlesi  $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$  özdeğerlerin cümlesi ile çakışır. Bu nedenle  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$  dir.

Benzer şekilde  $\{\varphi(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0} = \{\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n)\}_{n \geq 0}$  gösterebiliriz.

$q$  potansiyeli için difüzyon dağılımı

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(x, \lambda_n)$$

dır.  $x = \pi$  noktasındaki difüzyon

$$u(\pi, t) = \sum_{n \geq 0} c_n E_\alpha(-\lambda_n t^\alpha) \varphi(\pi, \lambda_n)$$

dır.  $\tilde{q}$  için difüzyon dağılımı

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n E_\alpha(-\tilde{\lambda}_n t^\alpha) \tilde{\varphi}(x, \lambda_n)$$

$x = \pi$  noktasındaki difüzyon

$$\tilde{u}(\pi, t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n E_\alpha(-\tilde{\lambda}_n t^\alpha) \tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n)$$

dir.  $u(\pi, t)$  nin  $t > 0$  için analitikliği sonlu  $(T_0, T_1)$  zaman aralığı üzerinde tekliğini ifade etmek için yeterlidir. Böylece  $q$  ve  $\tilde{q}$  aynı

$$u^{x^\beta}(\pi, t), u^{x^0}(\pi, t), u^{x^1}(\pi, t), \dots, u^{x^N}(\pi, t), \quad t \in (0, \infty)$$

sınır fonksiyonlarını verir. Diğer bir deyişle  $f \in L_2(0, \pi)$  iki fonksiyon içinde

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \varphi(x, \lambda_n) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n \tilde{\varphi}(x, \lambda_n), \quad t > 0 \quad (4.9.2)$$

dir. (4.9.2)'in sağ ve sol taraflarının Laplace dönüşümleri aynıdır bu nedenle aynı rezidü ve aynı kutba sahiptirler. Lemma 4.4.1 ve (4.9.2)'den  $c_n \neq 0$  olmak üzere her  $n$  için  $k$  tektir öyle ki  $\lambda_n = \tilde{\lambda}_k$  ve  $c_n = \tilde{c}_k$  olduğu durumda  $n$  tektir. Bu nedenle

$$\{\lambda_n \mid c_n \neq 0\}$$

ve

$$\{\tilde{\lambda}_n \mid \tilde{c}_n \neq 0\}$$

cümleleri aymıdır. Ancak

$$\{\lambda_n \mid c_n \neq 0, j = 0, \dots, N, x^j \text{ ve } x^\alpha \text{ dan en az bir } f \text{ için}\}$$

cümlesi  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  özdeğerlerin cümlesi ile çakışır ve

$$\{\tilde{\lambda}_n \mid \tilde{c}_n \neq 0, j = 0, \dots, N, x^j \text{ ve } x^\alpha \text{ dan en az bir } f \text{ için}\}$$

cümlesi  $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$  özdeğerlerin cümlesi ile çakışır. Bu nedenle  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 0}$  dir ve buradan  $\{\alpha_n\}_{n \geq 0} = \{\tilde{\alpha}_n\}_{n \geq 0}$  olur. Fakat  $q$  potansiyeli  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$  tüm spektral verileri tarafından ifade edilir. Bu nedenle  $q = \tilde{q}$  olur.

**SONUÇ:** Bir kesirli difüzyon denklemini göz önüne alalım. Bu taktirde  $q \in L_1[0, \pi]$ ,  $t \in (T_0, T_1)$  için  $x = 0$  ve  $x = \pi$ 'de (4.2.6)'daki verilere göre  $q$  tek olarak tanımlanır.  $\|q\|_1, Q$  tarafından üstten sınırlı olduğu bilinirse  $N$ 'nin değerlerinin sayısı (4.6.3), (4.6.4) ve  $Q$  nun bir fonksiyonu tarafından bilinir. Eğer  $q(x) \geq -C$  alt sınırı bilinirse, bu takdirde en fazla iki spektral veri tarafından  $q$ 'nun tekliği belirlenir.

## KAYNAKLAR

1. **Anatoly, K., Harı, S., Juan, T.**, 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equation, Elsevier, Amsterdam.
2. **Balcı, L.**, 1998. Matematik Analiz, Cilt-2, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
3. **Baş, E.**, 2006. Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters Problemleri, Fırat Üni. Fen Bil. Enst. Dok. Tezi, Elazığ.
4. **Baş, E.**, 2007. A Uniqueness Theorem For Inverse Nodal Problems Having Special Singularity Type, International Journal of Applied Mathematics, **Vol.20**, No:6, 867-873.
5. **Başkan, T.**, 2005. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
6. **Baym, S., Wiley, J.**, 2006. Mathematical Methods in Science and Engineering, Sons Inc pub., Ankara.
7. **Boumenir, A. and Tuan, V.K.**, 2010. An inverse problem for the heat equation, Proc. Amer. Math. Soc., **Vol.138**, 3911-3921.
8. **Boumenir, A. and Tuan, V.K.**, 2010. Recovery of a heat equation by four measurements at one end, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **Vol.31**, No 2, 155-163.
9. **Cesur, Y.**, 2011. Diferensiyel Denklemler, Avcı Ofset, İstanbul.
10. **Çağhyan, M., Çelebi, O.**, 2010. Kısmi Diferensiyel Denklemler, Dora, Bursa.
11. **Gorenflo, R. and Mainardi, F.**, 2005. Power laws, random walks, and fractional diffusion processes as well scaled refinement limits. In: A. Le Méhauté, J.A. Tenreiro Machado, J.C. Trigeassou and J. Sabatier (Eds): Fractional Differentiation and its Applications. U-Books, , 497-516.

12. **Gorenflo, R., Mainardi, F., Moretti, D., Pagnini, G., Paradisi, P.,** 2002. Fractional diffusion probability distributions and random walk models, *Physica A*, **Vol.305**, No: 1/2, 106-112.
13. **Koyunbakan, H.,** 2007. Half-Inverse Problem for Diffusion Operators on the Finite Interval, *Jour of Math. Ana. App.*, 326, 1024-1030.
14. **Kreyszing, E.,** 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York.
15. **Levitan, B.M.,** 1987. *Inverse Sturm-Liouville Problems*, VNU Science Press, Utrecht.
16. **Levitan, B.M., Sargsjan, I.S.,** 1970. *Introduction to Spectral Theory, Self adjoint Ordinary Differential Operators*, Moscow, Nauka.
17. **Markushevich, A.I.,** 1977. *Introduction to Analytic Functions Theory I, II*, Moskow.
18. **Olver, F.W.J.,** 1974. *Introduction to Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
19. **Panakhov, E.S.,** 1965. On the determination the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra, *DAN SSSR* **Vol.161**, No:2, 274-276.
20. **Podlubny, I.,** 1999. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, USA.
21. **Tuan, V.K.,** 2011. Inverse Problem for Fractional Diffusion Equation, *Fractional Calculus, Applied Analysis*, **Vol.14**, no:1, 31-55.
22. **Yilmazer, R.,** 2010. N-Fractional Calculus Operator N-Method to Modified Hydrogen Atom Equation, *Mathematical Communications* 15, (21), 489-501.

## ÖZGEÇMİŞ

1987 Malatya doğumluyum. İlk, orta ve lise eğitimimi Maraş'ın Afşin ilçesinde tamamladım. 2006 yılında Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü'ne girdim. Dört yıllık eğitimimin ardından Fırat Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım. Halen Fırat Üniversitesinde yüksek lisans öğrencisiyim.