

1. TEMEL TANIM VE EŞİTSİZLİKLER

Fizik, mühendislik ve bir çok bilim dallarında karşılaşılan problemleri çözmek için önce problemler matematiksel ifadelerle formüle edilir. Matematiksel modelleri kurulan problemlerin daha sonra uygun teknik ve yöntemlerle çözümleri araştırılır. Bu kısımda, genel tanımını vereceğimiz diferensiyel denklemler teorik ve pratik açıdan oldukça önemli olup tüm bilim dallarında çok geniş uygulama alanlarına sahiptir [1-4]. Diferensiyel denklemler tanımını vermeden önce analiz derslerinden bildiğimiz adi ve kısmi türevleri kısaca verelim.

x bağımsız değişken, y de bu bağımsız değişkene bağlı bir değişken yani bağımlı değişken olsun. Bu durum $y = f(x)$ olarak yazılır. y ifadesinin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebeden adi türevleri

$$y' \equiv \frac{dy}{dx}, \quad y'' \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots$$

ile gösterilir.

x ve y bağımsız değişkenler, z de bu bağımsız değişkenlere bağlı bir değişken olsun. Bu durum $z = f(x, y)$ olarak yazılır. z ifadesinin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebeden kısmi türevleri

$$z_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_{xx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.

Bir bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini ihtiva eden bir denkleme *diferensiyel denklem* adı verilir.

Tanım 1.2.

Bir bağımlı değişkenin, bir tek bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden (adi) türevlerini içeren diferensiyel denkleme *adi türevli diferensiyel denklem* denir. Bir diferensiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n . mertebeden adi diferensiyel bir denklem genel olarak,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

kapalı şekilde gösterilebilir [5]. Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı ϕ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.2)$$

ise ϕ fonksiyonuna (1.1) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferensiyel denklemin genel çözümü, diferensiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Genel çözümdeki keyfi sabit veya sabitlerin belirli değerleri için elde edilen çözüme adi diferensiyel denklemin *özel çözümü* denir [6].

Tanım 1.3.

Bir bağımlı değişkenin, en az iki bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren denkleme *kısmi türevli diferensiyel denklem* denir.

$u = u(x, y, z, t)$ fonksiyonu x, y, z ve t bağımsız değişkenleriyle bir D bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. u fonksiyonunun x, y, z ve t değişkenlerine göre kısmi türevlerini içeren n . mertebeden bir kısmi diferensiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, \dots, u_{\underbrace{ttt \dots t}_{n-\text{tan } e}}) = 0 \quad (1.3)$$

şeklinde gösterilir.

Bir kısmi diferensiyel denklemdeki değişkenler Γ sınırına sahip bir D bölgesinde tanımlanır. t zaman değişkeni olmak üzere $t_1 < t < t_2$ aralığında ve D bölgesinde (x, y, z) noktasında ϕ fonksiyonu n . mertebeye kadar türevleri sürekli ise $\phi = \phi(x, y, z, t)$ fonksiyonuna n . mertebeden kısmi diferensiyel denklemin *çözümüdür* denir [7]. Kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir ve çözümleri bir yüzey ailesi olarak ortaya çıkar. Bundan dolayı, adi türevli diferensiyel denklemlere kıyasla kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Bir kısmi diferensiyel denklemin özel çözümünün bulunması için bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i) *Sınır şartları*: Sınırlı bir D tanım bölgesinde, bir fiziksel olayın matematiksel durumunu kontrol eden bir kısmi diferensiyel denklemde u bağımlı değişkeni D tanım bölgesinin sınırında yazılır. Yani sınır şartları kısmi diferensiyel denklemin sağlandığı D bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarını aşağıda tanımlanan üç farklı şekil ile verebiliriz:

a) *Dirichlet Sınır Şartları*:

Bu durumda, u fonksiyonu D bölgesinin Γ sınırı üzerinde yazılır. $0 < x < l$ olmak üzere l uzunluğundaki bir çubuk için sınır şartları α ve β olmak üzere $u(0) = \alpha$, $u(l) = \beta$

şeklinde tanımlanır.

$0 < x < l_1$ ve $0 < y < l_2$ olmak üzere bir dikdörtgensel tabak için sınır şartları $u(0, y) = \alpha_1$, $u(l_1, y) = \alpha_2$, $u(x, 0) = \beta_1$ ve $u(x, l_2) = \beta_2$ olarak yazılır. Eğer u bağımlı değişkeni sınırlar üzerindeki herhangi bir noktada sıfır ise sınır şartları homojen olarak adlandırılır. Aksi halde homojen değildir.

b) Neumann Sınır Şartları:

Bu durumda, sınır şartları u nun normalleri boyunca yani u nun türevinde yazılır. l uzunluğundaki bir çubuk için Neumann sınır şartları; $u_x(0, t) = \alpha$, $u_x(l, t) = \beta$ şeklindedir.

c) Karışık (mixed) veya Robin Sınır Şartları:

Bu durumda, u fonksiyonu ve aynı zamanda u nun n . türevi de sınırlar üzerinde belirlenir. Ve genellikle 2-boyutlu Laplace denklemlerinde kullanılır.

(ii) *Başlangıç şartları:* Başlangıç şartları sistemin başlangıcında D bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Yani bağımlı değişkenin kendisi veya türevleri cinsinden bağımsız değişkenlerin bir tek değeri için verilmiş ise bu şartlara *başlangıç şartları* denir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi diferensiyel denkleme '*Cauchy problemi*' denir. Örneğin,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

ikinci mertebeden bir Cauchy problemidir.

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \quad (1.4)$$

genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. Diğer taraftan $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantını tanımlayalım [8].

<u>Diskriminant</u>	<u>Denklem Tipi</u>	<u>Örnek</u>	<u>İsimlendirme</u>
$\Delta > 0$	Hiperbolik	$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$	Dalga Denklemi
$\Delta = 0$	Parabolik	$u_t - k u_{xx} = 0$	Isı Denklemi
$\Delta < 0$	Eliptik	$u_{xx} + u_{yy} = 0$	Laplace Denklemi

Herhangi bir tipteki problemin çözümü, klasik Hadamard testi gereğince aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem, “iyi durumlu”, en az bir şartı sağlamaz ise “*kötü durumlu*” olarak adlandırılır. Bu şartlar;

- i. Varlık: En az bir çözüm vardır,
- ii. Teklik: En çok bir çözüm vardır,
- iii. Kararlılık: Çözüm verilere sürekli bağlıdır.

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını tarif etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konduğunda denklemi sağlayan bir çözüm yapılandırma. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir.

Birincisi açık bir mantıksal şart olup, ancak sadece fiziksel problemin bir çözüme sahip olması nedeniyle, matematiksel problemin bir çözüme sahip olacağını kolayca ifade edemeyeceğimiz akılda tutulmalıdır. Fiziksel problem bir tek çözüme sahip olabilir, ancak matematiksel problemin birden çok çözümü de olabilmektedir.

Son şart bir gerek şarttır. Uygulamada, ölçüm yönteminde küçük hatalar oluşabilir. Dolayısıyla, fiziksel olayı gösteren matematiksel problem için, verilerdeki küçük bir değişme, çözümde en fazla küçük bir değişikliğe yol açabilir.

Örnek olarak,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1.5)$$

Laplace denklemini $n > 0$ olmak üzere,

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = \frac{1}{n} \sin y \quad (1.6)$$

Cauchy verileriyle göz önüne alalım. Bu problemin değişkenlere ayrılma yöntemi ile elde edilen çözümü,

$$u_1(x, y) = \frac{1}{n^2} \sinh nx \sin y \quad (1.7)$$

şeklindedir. Başlangıç verileri $u(0, y) = 0$ ve $u_x(0, y) = 0$ iken problemin çözümü $u_2 = 0$ aşıkâr çözümüdür. İki başlangıç verisi arasındaki fark $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n^{-1} \sin y| = 0$$

olur. Yani, başlangıç verisinde küçük bir değişiklik olmuştur. Bu başlangıç verisine karşılık gelen çözümler farkının $y = \frac{\pi}{2}$ noktasında, n tek bir pozitif sayı olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken limit değerine bakalım;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| u_1\left(x, \frac{\pi}{2}\right) - u_2\left(x, \frac{\pi}{2}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sinh nx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2n^2} = \infty$$

olur. Yani, başlangıç verilerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde büyük bir değişikliğe yol açmıştır. Böylece (1.5) ve (1.6) Cauchy problemi iyi durumda olmadığı sonucuna varılır [10].

Tanım 1.4.

Ω , IR^n de bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. Ω üzerinde tanımlı, ölçülebilen ve

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, \quad x \in \Omega \quad (1.8)$$

özelliğini sağlayan tüm $u(x)$ fonksiyonlarının uzayına $L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. $L^p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır ve bu uzayda norm,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1.9)$$

şeklindedir.

Tanım 1.5.

Ω bölgesinde ölçülebilen bir u fonksiyonunu göz önüne alalım. Hemen hemen her $x \in \Omega$ için $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti bulunabiliyorsa u fonksiyonuna hemen hemen her yerde *sınırlı* denir. Böyle K ların en büyük alt sınırlarına da u fonksiyonunun Ω bölgesindeki *esas supremumu* denir ve $ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir. Böylece $L^\infty(\Omega)$ ile Ω bölgesinde tanımlı bütün hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonların sınıfı gösterilebilir ve $\|\cdot\|$ normu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|. \quad (1.10)$$

Tanım 1.6.

$\Omega, \Omega_1 \subset IR^n$ iki bölge ve $\Omega_1 \subset \Omega$ olsun. Eğer $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ ise Ω_1 bölgesine, Ω bölgesinin *kesin alt bölgesi* denir ve $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.7.

$L^p_{loc}(\Omega)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : u \in L^p(\Omega_1), \quad \forall \Omega_1 \subset\subset \Omega\}$$

Tanım 1.8.

Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve u da Ω bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. u fonksiyonunun desteği aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Eğer $\text{supp } u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonuna Ω bölgesinde *kompakt dayanaklı fonksiyon* denir.

Tanım 1.9.

Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve m pozitif bir tamsayı olsun. $C^m(\Omega)$ ile Ω bölgesinde tanımlı ve $|\alpha| \leq m$ mertebesinden sürekli kısmi türevleri olan fonksiyonların uzayı gösterilir.

$C^\infty(\Omega)$ ile Ω bölgesinde tanımlı olan ve her mertebeden sürekli kısmi türevleri olan fonksiyonların sınıfı gösterilir.

$C_0^\infty(\Omega)$ ile de, $C^\infty(\Omega)$ sınıfından olan kompakt destekli fonksiyonların sınıfı belirtilir.

Tanım 1.10.

α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pozitif tamsayılar olsun. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sıralı n -lisine *çoklu indis* denir. $|\alpha|$ ile α 'nın boyu yani

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

ile gösterilir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$ mertebesinden diferansiyel operatörüdür ve $u \in C^\alpha(\Omega)$ ise,

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.11.

$u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ olsun. Eğer $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için,

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx$$

oluyorsa v fonksiyonuna u fonksiyonun Ω bölgesinde $|\alpha|$ mertebesinde $D^\alpha u$ tipinden *genelleştirilmiş türevi* denir.

Tanım 1.12.

Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, m pozitif bir sayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $D^\alpha u$, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

ile tanımlanan $W^{m,p}(\Omega)$ uzayına *Sobolev uzayı* denir. Bu uzayda norm,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklindedir. Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır. Eğer $p = 2$ ise bir Hilbert uzayıdır.

1.1. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Tanım 1.13. (Cauchy Eşitsizliği):

$f, g \in L^2(\Omega)$ ise, $fg \in L^1(\Omega)$ 'dır ve

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

dır.

Tanım 1.14. (Hölder Eşitsizliği):

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ ise $fg \in L^1(\Omega)$ 'dır ve

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

dır.

Tanım 1.15. (ε -Young Eşitsizliği):

$\varepsilon > 0$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve p, q eşlenik sayıları için

$$|ab| \leq \varepsilon^p \frac{|a|^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^q} \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.16. (Genelleştirilmiş Young Eşitsizliği):

$p_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda verilen

$\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ sayıları için

$$|a_1 a_2 \dots a_n| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^{p_i}}{p_i}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.17. (Poincare Eşitsizliği):

Ω kümesi $\mathbb{R}^n$ 'de sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ da C^1 sınıfından olsun. $1 \leq p < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda sadece n ve p sayıları ile Ω bölgesine bağlı bir C sayısı vardır öyle ki, her $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\left\| u + \int_{\Omega} u dx \right\| \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.18. (Friedrichs Eşitsizliği):

Ω sınırlı bir bölge olsun. Öyle bir $c(\Omega) > 0$ sabiti vardır ki $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.19. (Wirtinger Eşitsizliği):

$w \in L^2[0, l]$ olsun. $\lambda = l^2/\pi^2$ olmak üzere

$$\int_0^l w^2(x) dx \leq \lambda \int_0^l w_x^2(x) dx$$

eşitsizliği sağlanır.

2. Dördüncü Mertebeden Doğrusal Olmayan Bir Dalga Denkleminin Çözümlerinin Davranışı

Bu bölümde, sondaj borusu dinamiğini belirten dördüncü mertebeden doğrusal olmayan bir dalga denklemi ele alınmıştır. Sondaj borusu, bir gemi ya da platformdan deniz tabanına uzanıp delme operasyonlarında kullanılan ve matkap kordonu ile delme işleminde ortaya çıkan çamuru zapteden ince, uzun, dikey bir borudur. Amacımız aşağıdaki problemin sıfır çözümünün global asimptotik olarak kararlı olduğunu göstermektir.

$$\begin{cases} mu_{tt} + ku_{xxxx} - [a(x)u_x]_x + \gamma u_{tx} + bu_t |u_t|^p = 0, \\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

Bu problemde m , k , b ve p verilen pozitif sayılardır. γ ise bir reel sayıdır. $a(\cdot)$ fonksiyonu ise alttan sınırlı ve $C^1[0, l]$ sınıfındandır [11-15].

2.1. Sıfır Çözümünün Global Asimptotik Kararlılığı:

Eğer sıfır çözümü kararlı ve tüm çözümler $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra gidiyor ise, sıfır çözümü global asimptotik kararlı olarak adlandırılır. (2.1) ve (2.2) probleminin tüm çözümleri klasik çözümlerdir. Esas sonucumuz aşağıdaki teoremdir [16].

Teorem 2.1.1

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

- i. m , k , b ve p verilen pozitif sayılar ve γ ise bir reel sayıdır.
- ii. $a(\cdot)$ fonksiyonu $C^1[0, l]$ sınıfındadır ve $\forall x \in [0, l]$ için $a(x) \geq -c_0$, $c_0 \geq 0$ ve

$$k - \frac{c_0 l^2}{\pi^2} = d_0 > 0 \text{ 'dır.}$$

Bu durumda (2.1) probleminin (2.2) sınır şartını sağlayan sıfır çözümü,

$$\|(u, u_t)\|_1 = \left(\int_0^l (u_t^2 + u_{xx}^2) dx \right)^{1/2}$$

normuna göre global asimptotik kararlıdır. Ayrıca, (2.1) denkleminin (2.2) sınır şartlarını sağlayan her çözümü aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\frac{m}{2} \int_0^l u_t^2(x, t) dx + \frac{d_0}{2} \int_0^l u_{xx}^2(x, t) dx \leq \begin{cases} At^{-(p+1)/(p+2)}, & p \in (0, 1), \\ At^{-2/(p+2)}, & p \geq 1, \quad t \in [1, \infty). \end{cases} \quad (2.1.1)$$

İspat:

$u(x, t)$ fonksiyonu (2.1) denkleminin (2.2) sınır şartını sağlayan klasik çözümü olsun.

(2.1) denklemini u_t ile çarparsak,

$$mu_t u_{tt} + ku_t u_{xxxx} - u_t [a(x)u_x]_x + \gamma u_t u_{tx} + b|u_t|^{p+2} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned} mu_t u_{tt} &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2), & \gamma u_t u_{tx} &= \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_t^2), \\ ku_t u_{xxxx} &= k \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx}) + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_{xx}^2 \right), \\ -u_t [a(x)u_x]_x &= -\frac{\partial}{\partial x} a(x) u_t u_x - a(x) u_t u_{xx} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [a(x) u_t u_x] + a(x) u_{tx} u_x + a(x) u_t u_{xx} - a(x) u_t u_{xx} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [a(x) u_t u_x] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [a(x) u_x^2] \end{aligned}$$

olduğundan, eşitliğini

$$\begin{aligned} &\frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) + k \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx}) + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} [a(x) u_t u_x] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [a(x) u_x^2] + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_t^2) + b|u_t|^{p+2} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

biçiminde yazabiliriz. (2.1.2) eşitliğini x değişkenine göre integre edersek,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \int_0^l u_t^2 dx + k(u_t u_{xxx}) \Big|_{x=0}^{x=l} - k(u_{tx} u_{xx}) \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{d}{dt} \frac{k}{2} \int_0^l u_{xx}^2 dx \\ & - [a(x) u_t u_x] \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l a(x) u_x^2 dx + \frac{\gamma}{2} (u_t^2) \Big|_{x=0}^{x=l} + b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx = 0 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada (2.2) sınır şartını kullanırsak,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^l a(x) u_x^2 dx \right] + b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx = 0 \quad (2.1.3)$$

eşitliğini elde ederiz. (2.1) denklemini bu kez u ile çarparak,

$$muu_{tt} + kuu_{xxxx} - u[a(x)u_x]_x + \gamma u u_{tx} + buu_t |u_t|^p = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned} muu_{tt} &= m \left[\frac{\partial}{\partial t} (uu_t) - u_t^2 \right], & \gamma u u_{tx} &= \gamma \left[\frac{\partial}{\partial x} (uu_t) - u_x u_t \right], \\ kuu_{xxxx} &= k \frac{\partial}{\partial x} (uu_{xxx} - u_x u_{xx}) + ku_{xx}^2, \\ -u[a(x)u_x]_x &= -uu_x \frac{\partial}{\partial x} a(x) - a(x)uu_{xx} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [a(x)uu_x] + a(x)u_x^2 \end{aligned}$$

olup bunları yukarıdaki yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} & m \left[\frac{\partial}{\partial t} (uu_t) - u_t^2 \right] + k \frac{\partial}{\partial x} (uu_{xxx} - u_x u_{xx}) + ku_{xx}^2 - \frac{\partial}{\partial x} [a(x)uu_x] \\ & + a(x)u_x^2 + \gamma \left[\frac{\partial}{\partial x} (uu_t) - u_x u_t \right] - buu_t |u_t|^p = 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği x değişkenine göre integre edersek,

$$\begin{aligned}
& m \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l uu_t dx + -m \int_0^l u_t^2 dx + ku(u_{xxx}) \Big|_{x=0}^{x=l} - k(u_x u_{xx}) \Big|_{x=0}^{x=l} + k \int_0^l u_{xx}^2 dx \\
& - [a(x)uu_x] \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l a(x)u_x^2 dx + \gamma(uu_t) \Big|_{x=0}^{x=l} - \gamma \int_0^l u_x u_t dx + b \int_0^l uu_t |u_t|^p dx = 0
\end{aligned}$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikte (2.2) sınır şartı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} [m(u, u_t)] - m \|u_t\|^2 + k \|u_{xx}\|^2 + \int_0^l a(x)u_x^2 dx \\
& - \gamma(u_x, u_t) + b \int_0^l uu_t |u_t|^p dx = 0
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

eşitliği elde edilir.

Keyfi bir $\delta_1 > 0$ sayısı seçerek (2.1.5) eşitliğini δ_1 ile çarpalım ve sonra da (2.1.3) eşitliği ile toplarsak,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^l a(x)u_x^2 dx + \delta_1 m(u, u_t) \right] - \delta_1 m \|u_t\|^2 \\
& + \delta_1 k \|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x)u_x^2 dx - \delta_1 \gamma(u_x, u_t) \\
& + b \delta_1 \int_0^l uu_t |u_t|^p dx + b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx = 0
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan,

$$E_1(t) = \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^l a(x)u_x^2 dx + \delta_1 m(u, u_t) \tag{2.1.7}$$

olsun. (2.1.7) tanımını ve

$$b \delta_1 \int_0^l uu_t |u_t|^p dx \geq -b \delta_1 \int_0^l |u| |u_t|^{p+1} dx$$

eşitsizliği kullanılırsa, (2.1.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) - \delta_1 m \|u_t\|^2 + \delta_1 k \|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx - \delta_1 \gamma(u_x, u_t) \\ - b \delta_1 \int_0^l |u u_t|^{p+1} dx + b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx \leq 0 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.1.8) eşitsizliğinde $\delta_1 \gamma(u_x, u_t)$ terimi için bir kestirim elde etmeye çalışalım. Bunun için önce aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını gösterelim:

$$\|u_x\|^2 \leq \frac{l^2}{\pi^2} \|u_{xx}\|^2. \quad (2.1.9)$$

$(uu_x)_x = u_x^2 + uu_{xx}$ eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliği x değişkenine göre 0 'dan l 'ye integre eder ve (2.2) sınır şartını göz önüne alırsak,

$$\int_0^l u_x^2 dx = - \int_0^l uu_{xx} dx$$

eşitliğini buluruz. Yukarıdaki ifadeye Cauchy eşitsizliğini uygularsak,

$$\int_0^l u_x^2 dx \leq \int_0^l |u| |u_{xx}| dx \leq \left(\int_0^l u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l u_{xx}^2 dx \right)^{1/2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terime Wirtinger eşitsizliğini uygulayarak,

$$\int_0^l u_x^2 dx \leq \frac{l}{\pi} \left(\int_0^l u_x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l u_{xx}^2 dx \right)^{1/2}$$

eşitsizliğini buluruz. Son eşitsizlikte her iki tarafı $\left(\int_0^l u_x^2 dx \right)^{1/2}$ terimine bölersek,

$$\left(\int_0^l u_x^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{l}{\pi} \left(\int_0^l u_{xx}^2 dx \right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte her iki tarafın karesi alınarak (2.1.9) eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi $\delta_1 \gamma(u_x, u_t)$ terimi için bir kestirim elde etmeye çalışalım. γ 'nın bir reel sayı olduğu ve Cauchy eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$|\delta_1 \gamma(u_x, u_t)| \leq \delta_1 |\gamma| \int_0^l |u_x| |u_t| dx \leq \delta_1 |\gamma| \|u_x\| \|u_t\|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada Young eşitsizliğini kullanarak ve sonra da (2.1.9) eşitsizliğini uygulayarak,

$$\begin{aligned} |\delta_1 \gamma(u_x, u_t)| &\leq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\delta_1^2 \gamma^2}{2} \|u_x\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{2\pi^2} \|u_{xx}\|^2 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

eşitsizliğini buluruz. Elde ettiğimiz bu kestirimi (2.1.8) eşitsizliğinde kullanarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) + (\delta_1 k - \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}) \|u_{xx}\|^2 + (-\delta_1 m - \frac{1}{2}) \|u_t\|^2 \\ + \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx - b \delta_1 \int_0^l |u| |u_t|^{p+1} dx + b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx \leq 0 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Şimdi δ_1 sayısı için,

$$0 < \delta_1 < \frac{2\pi^2 d_0}{\gamma^2 l^2} \quad (2.1.12)$$

şartını ekleyelim. Teoremin *ii.* şartındaki $k - \frac{c_0 l^2}{\pi^2} = d_0 > 0$ eşitsizliğini göz önüne alarak ve (2.1.12) şartı kullanılırsa,

$$L = \delta_1 k - \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{2\pi^2} = \delta_1 \left(k - \delta_1 \frac{\gamma^2 l^2}{2\pi^2} \right) \geq \delta_1 (k - d_0) = \delta_1 \frac{c_0 l^2}{\pi^2} > 0$$

olduğunu görürüz. (2.1.11) eşitsizliğini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) &\leq (\delta_1 m + \frac{1}{2}) \|u_t\|^2 + m \|u_t\|^2 - m \|u_t\|^2 - L \|u_{xx}\|^2 \\ &\quad - \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx + b \delta_1 \int_0^l |u| |u_t|^{p+1} dx - b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

(2.1.13) eşitsizliğini kullanarak (2.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlı olduğunu şöyle gösterebiliriz. Teoremin *ii.* şartını, yani; $a(x) \geq -c_0$ şartını kullanarak

$$k \int_0^l u_{xx}^2 dx + \int_0^l a(x) u_x^2 dx \geq k \int_0^l u_{xx}^2 dx - c_0 \int_0^l u_x^2 dx$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada (2.1.9) eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} k \int_0^l u_{xx}^2 dx + \int_0^l a(x) u_x^2 dx &\geq k \|u_{xx}\|^2 - c_0 \|u_x\|^2 \\ &\geq k \|u_{xx}\|^2 - \frac{c_0 l^2}{\pi^2} \|u_{xx}\|^2 \\ &\geq \left(k - \frac{c_0 l^2}{\pi^2} \right) \|u_{xx}\|^2 \\ &= d_0 \int_0^l u_{xx}^2 dx \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

olduğunu görürüz. $E(t)$ fonksiyonunu

$$E(t) = \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^l a(x) u_x^2 dx$$

şeklinde tanımlayalım. (2.1.14) eşitsizliği ve $E(t)$ fonksiyonu birlikte göz önüne alınırsa,

$$E(t) \geq \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{d_0}{2} \|u_{xx}\|^2$$

eşitsizliğini buluruz. $E_0(t) = \int_0^l (u_t^2 + u_{xx}^2) dx$ olduğu göz önüne alınırsa

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \min\{m, d_0\} E_0(t) \quad (2.1.15)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Diğer taraftan $a(.) \in C^1[0, l]$ sınıfından olduğu için $|a|$ fonksiyonu $[0, l]$ aralığında bir A_1 maksimum değeri vardır. Bu özelliği, $E(t)$ fonksiyonu tanımında kullanarak,

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^l a(x) u_x^2 dx \\
&\leq \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 + \frac{A_1}{2} \int_0^l u_x^2 dx
\end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. Sağ tarafta (2.1.9) eşitsizliğini kullanarak ta

$$E(t) \leq \frac{1}{2} \max \left\{ m, \frac{l^2 A_1}{\pi^2} + k \right\} E_0(t)$$

eşitsizliğini buluruz. Ayrıca (2.1.3) eşitsizliğinden ve $E(t)$ fonksiyonun tanımından,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx \leq 0 \quad (2.1.16)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (2.1) denkleminin (2.2) şartını sağlayan sıfır çözümünün kararlı olduğu neticesini çıkarırız.

Şimdi de (2.1) denkleminin (2.2) sınır şartını sağlayan sıfır çözümünün global asimptotik kararlı olduğunu gösterelim.

(2.1.16) eşitsizliğini 0'dan t 'ye integre edersek,

$$E(t) - E(0) + b \int_0^t \int_0^l |u_t|^{p+2} dx ds = 0$$

eşitliğini buluruz. $E(t) \geq 0$ olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki eşitlikten,

$$\int_0^t \int_0^l |u_t|^{p+2} dx ds \leq \frac{E(0)}{b} \quad (2.1.17)$$

eşitsizliği yazılır.

Şimdi (2.1.13) eşitsizliğine tekrar dönelim ve

$$-m \|u_t\|^2 - L \|u_{xx}\|^2 - \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx$$

için bir kestirim elde etmeye çalışalım. Eğer $E_0(t) = \int_0^l a(x) u_x^2 dx$ terimi negatif değilse,

$D_1 = \min\{1, L/k, \delta_1\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x)u_x^2 dx &\geq \min\left\{1, \frac{L}{k}, \delta_1\right\} \left(m\|u_t\|^2 + k\|u_{xx}\|^2 + \int_0^l a(x)u_x^2 dx\right) \\
&\geq 2D_1 E(t)
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$D_2 = \min\left\{1, \frac{\delta_1}{k} \left(d_0 - \frac{\delta_1 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}\right)\right\} \text{ olsun. Eğer } \int_0^l a(x)u_x^2 dx \text{ negatif ise, her } x \text{ için}$$

$a(x) \geq -c_0$ olduğundan,

$$m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x)u_x^2 dx \geq m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 - \delta_1 c_0 \int_0^l u_x^2 dx$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Son eşitsizliğin sağ tarafında (2.1.9) eşitsizliğini kullanarak,

$$m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x)u_x^2 dx \geq m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 - \frac{\delta_1 c_0 l^2}{\pi^2} \|u_{xx}\|^2$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada L sayısının tanımı ve $c_0 l^2 / \pi^2 = k - d_0$ olduğu göz önüne alınırsa $\|u_{xx}\|^2$ teriminin katsayısı,

$$\begin{aligned}
L - \frac{\delta_1 c_0 l^2}{\pi^2} &= \delta_1 k - \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{2\pi^2} - \delta_1 (k - d_0) \\
&= \delta_1 \left(d_0 - \frac{\delta_1 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliği ve D_2 sayısının tanımı göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x)u_x^2 dx &\geq m\|u_t\|^2 + \delta_1 \left(d_0 - \frac{\delta_1 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}\right) \|u_{xx}\|^2 \\
&\geq \min\left\{1, \frac{\delta_1}{k} \left(d_0 - \frac{\delta_1 \gamma^2 l^2}{2\pi^2}\right)\right\} (m\|u_t\|^2 + k\|u_{xx}\|^2) \\
&\geq D_2 \left(m\|u_t\|^2 + k\|u_{xx}\|^2 + \int_0^l a(x)u_x^2 dx\right)
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. $E(t)$ 'nin tanımını göz önüne alarak bu eşitsizliği şöyle ifade edebiliriz:

$$m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x)u_x^2 dx \geq 2D_2 E(t). \quad (2.1.19)$$

Şimdi $D_3 = \min\{D_1, D_2\}$ dersek, (2.1.18) ve (2.1.19) eşitsizliklerinden,

$$m\|u_t\|^2 + L\|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x)u_x^2 dx \geq 2D_3 E(t) \quad (2.1.20)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer (2.1.20) eşitsizliğini (2.1.13) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$B = \delta_1 m + \frac{1}{2} + m$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} E_1(t) \leq B\|u_t\|^2 - 2D_3 E(t) + b\delta_1 \int_0^l |u\|u_t|^{p+1} dx - b \int_0^l |u_t|^{p+2} dx \quad (2.1.21)$$

eşitsizliğini buluruz. (2.1.21) eşitsizliğini 0'dan t 'ye integre edersek,

$$\begin{aligned} 2D_3 \int_0^t E(s) ds &\leq [E_1(0) - E_1(t)] + B \int_0^t \int_0^l u_t^2 dx ds + b\delta_1 \int_0^t \int_0^l |u\|u_t|^{p+1} dx ds \\ &\quad - b \int_0^t \int_0^l |u_t|^{p+2} dx ds \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.1.16) eşitsizliğine göre $E(t)$ artmayan bir fonksiyon olduğundan

$2D_3 t E(t) \leq 2D_3 \int_0^t E(s) ds$ yazılabilir. Bunu yukarıdaki son eşitsizlikte kullanırsak,

$$\begin{aligned} 2D_3 t E(t) &\leq [E_1(0) - E_1(t)] + B \int_0^t \int_0^l u_t^2 dx ds + b\delta_1 \int_0^t \int_0^l |u\|u_t|^{p+1} dx ds \\ &\quad + b\delta_1 \int_0^t \int_0^l |u\|u_t|^{p+1} dx ds - b \int_0^t \int_0^l |u_t|^{p+2} dx ds \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

eşitsizliğini buluruz. Bu eşitsizlikte, sağ taraftaki son terim atılarak ifade daha da büyür:

$$2D_3 t E(t) \leq [E_1(0) - E_1(t)] + B \int_0^t \int_0^l u_t^2 dx ds + b\delta_1 \int_0^t \int_0^l |u\|u_t|^{p+1} dx ds. \quad (2.1.23)$$

Şimdi (2.1.23) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimler için birer kestirim elde etmeye çalışacağız. Bunu önce $E_1(t)$ fonksiyonunu alttan sınırlandırabileceğimizi göstermekle başlayalım. Poincare-Friedrichs eşitsizliğini ve (2.1.9) eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$$\|u\|^2 \leq \frac{l^2}{\pi^2} \|u_x\|^2 \leq \frac{l^4}{\pi^4} \|u_{xx}\|^2 \quad (2.1.24)$$

olduğunu görürüz. $E_1(t)$ 'nin tanımından, $a(x) \geq -c_0$ şartını kullanılarak,

$$E_1(t) \geq \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 - \frac{c_0}{2} \int_0^l u_x^2 dx - \delta_1 m | (u, u_t) |$$

olduğunu elde ederiz. Bu eşitsizlikte, (2.1.9) eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} E_1(t) &\geq \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k}{2} \|u_{xx}\|^2 - \frac{c_0 l^2}{2\pi^2} \|u_{xx}\|^2 - \delta_1 m | (u, u_t) | \\ &= \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{d_0}{2} \|u_{xx}\|^2 - \delta_1 m | (u, u_t) | \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki son terime $p=q=2$ eşlenik sayıları için Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$E_1(t) \geq \frac{m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{d_0}{2} \|u_{xx}\|^2 - \frac{\delta_1 m}{2} \|u\|^2 - \frac{\delta_1 m}{2} \|u_t\|^2$$

ifadesini buluruz. Şimdi bu eşitsizlikte (2.1.24) eşitsizliğini kullanarak,

$$E_1(t) \geq \frac{m}{2} (1 - \delta_1) \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \left(d_0 - \frac{\delta_1 m l^4}{\pi^4} \right) \|u_{xx}\|^2 \quad (2.1.25)$$

eşitsizliğini elde ederiz. δ_1 sayısı üzerine,

$$\delta_1 < \min \left\{ \frac{2\pi^2 d_0}{\gamma^2 l^2}, \frac{d_0 \pi^4}{m l^4} \right\}$$

şartını eklersek son eşitsizliğin sağ tarafındaki katsayılar negatif değeri alamaz. Buna göre

$$d_1 = \min \left\{ m(1 - \delta_1), \frac{\delta_1 m l^4}{\pi^4} \right\}$$

olmak üzere

$$E_1(t) \geq d_1 (\|u_t\|^2 + \|u_{xx}\|^2) \geq 0 \quad (2.1.26)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ifade $E_1(t)$ fonksiyonun alttan pozitif bir fonksiyonla sınırlı olduğunu gösterir. Buna göre,

$$E_1(0) - E_1(t) \leq E_1(0) \quad (2.1.27)$$

ifadesini yazabiliriz.

(2.1.23) eşitsizliğindeki diğer terimleri üstten sınırlandırmak için önce $\int_0^l u^q dx$, $q > 1$

integraline bir kestirim bulmaya çalışacağız. $u(0, t) = 0$ olduğundan, Newton-Leibniz formülüne göre,

$$u(x, t) - u(0, t) = \int_0^x u_x(s, t) ds$$

veya

$$u(x, t) = \int_0^x u_x(s, t) ds$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten,

$$|u(x, t)| \leq \int_0^x |u_x(s, t)| ds \leq \int_0^l 1 |u_x(x, t)| dx, \quad \forall x \in [0, l]$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Burada Cauchy eşitsizliğini kullanırsak,

$$|u(x, t)| \leq \sqrt{l} \left(\int_0^l u_x^2(x, t) dx \right)^{1/2}, \quad \forall x \in [0, l]$$

eşitsizliğini buluruz. Yukarıdaki eşitlik $\forall x \in [0, l]$ için doğru olduğundan,

$$\max_{x \in [0, l]} |u(x, t)| \leq \sqrt{l} \left(\int_0^l u_x^2(x, t) dx \right)^{1/2} \quad (2.1.28)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (2.1.28) eşitsizliğine göre, $q \geq 1$ olmak üzere

$$\left(\int_0^l |u(x, t)|^q dx \right)^{1/q} \leq l^{1/q} \max_{x \in [0, l]} |u(x, t)| \leq l^{(1/q)+(1/2)} \left(\int_0^l u_x^2(x, t) dx \right)^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Son eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür:

$$\int_0^l |u(x, t)|^q dx \leq l^{(q+2)/2} + \left(\int_0^l u_x^2(x, t) dx \right)^{q/2}. \quad (2.1.29)$$

Şimdi (2.1.29) eşitsizliğini ve Hölder eşitsizliğini kullanarak, (2.1.23) eşitsizliğindeki

$$B \int_0^t \int_0^l u_t^2 dx ds \quad \text{ve} \quad b \delta_1 \int_0^t \int_0^l |u|^{p+1} dx ds \quad \text{terimleri için kestirim elde edebiliriz:}$$

$p' = \frac{p+2}{p}$ ve $q' = \frac{p+2}{2}$ eşlenik sayıları için Hölder eşitsizliğini iki defa kullanarak,

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv B \int_0^t \int_0^l u_t^2 dx ds \leq B \int_0^t \left(\int_0^l 1 dx \right)^{p/(p+2)} \left(\int_0^l |u_t|^{p+2} dx \right)^{2/(p+2)} ds \\ &\leq B \left(\int_0^t \int_0^l 1 dx ds \right)^{p/(p+2)} \left(\int_0^t \int_0^l |u_t|^{p+2} dx ds \right)^{2/(p+2)} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada (2.1.17) eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$$C_1 = B l^{p/(p+2)} \left[\frac{E(0)}{b} \right]^{2/(p+2)}, \quad I_1 \leq C_1 t^{p/(p+2)} \quad (2.1.30)$$

olduğunu görürüz. (2.1.23) eşitsizliğindeki son terimi ise şöyle kestirebiliriz: $p' = \frac{p+2}{p+1}$ ve

$q' = p+2$ eşlenik sayıları için iki defa Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv b \delta_1 \int_0^t \int_0^l |u| |u_t|^{p+1} dx ds \leq b \delta_1 \int_0^t \left(\int_0^l |u_t|^{p+2} dx \right)^{(p+1)/(p+2)} \left(\int_0^l |u|^{p+2} dx \right)^{1/(p+2)} ds \\ &\leq b \delta_1 \left(\int_0^t \int_0^l |u_t|^{p+2} dx ds \right)^{(p+1)/(p+2)} \left(\int_0^t \int_0^l |u|^{p+2} dx ds \right)^{1/(p+2)} \end{aligned}$$

eşitsizliğini bulabiliriz. (2.1.29) ve (2.1.9) eşitsizliklerini kullanarak yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki son terim için

$$\begin{aligned} \int_0^l |u|^{p+2} dx &\leq l^{\frac{p+4}{2}} \left(\int_0^l u_x^2 dx \right)^{\frac{p+4}{2}} \\ &\leq l^{\frac{p+4}{2}} \left(\frac{l}{\pi} \right)^{p+2} \left(\int_0^l u_{xx}^2 dx \right)^{\frac{p+2}{2}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca (2.1.15) eşitsizliğinden,

$$\frac{2}{d_0} E(t) \geq \int_0^l u_{xx}^2 dx$$

yazabiliriz. $E(t)$ azalan fonksiyon olduğundan $E(t) \leq E(0)$, $\forall t \geq 0$ ve $\int_0^l u_{xx}^2 dx \leq \frac{2}{d_0} E_0$

yazılabilir. Son eşitsizlikte bu ifadeyi kullanarak ve (2.1.17) eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq b\delta_1 \left(\frac{E(0)}{b} \right)^{(p+1)/(p+2)} \left[l^{(p+4)/2} \left(\frac{l}{\pi} \right)^{p+2} \int_0^t \left(\int_0^l u_{xx}^2 dx \right)^{(p+2)/2} ds \right]^{1/(p+2)} \\
&\leq C_2 t^{1/(p+2)}
\end{aligned} \tag{2.1.31}$$

eşitsizliği bulunur. Burada,

$$C_2 = \delta_1 b^{1/(p+2)} [E(0)]^{(3p+4)/2(p+2)} \left(\frac{l^{(3p+8)/2(p+2)}}{\pi} \right) \left(\frac{2}{d_0} \right)^{1/2}$$

dir.

Şimdi, elde edilen (2.1.27), (2.1.30) ve (2.1.33) kestirimlerini, (2.1.23) eşitsizliğinde kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği

$$2D_3 t E(t) \leq E_1(0) + C_1 t^{p/(p+2)} + C_2 t^{1/(p+2)}$$

buluruz. Bu eşitsizliği,

$$E(t) \leq (2D_3)^{-1} [E_1(0)t^{-1} + C_1 t^{-2/(p+2)} + C_2 t^{-(p+1)/(p+2)}]$$

biçiminde yazabiliriz. $A = (2D_3)^{-1} [E_1(0) + C_1 + C_2]$ dersek aşağıdaki ifade her $t \geq 1$ için doğrudur:

$$E(t) \leq \begin{cases} At^{-(p+1)/(p+2)}, & p \in (0,1), \\ At^{-2/(p+2)}, & p \geq 1, t \in [1, \infty). \end{cases}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte, (2.1.15) eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$$\frac{1}{2} \min\{m, d_0\} E_0(t) \leq \begin{cases} At^{-(p+1)/(p+2)}, & p \in (0,1), \\ At^{-2/(p+2)}, & p \geq 1, t \in [1, \infty), \end{cases}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik bize (2.1) ve (2.2) probleminin sıfır çözümünün global asimptotik olarak kararlı olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.2

$p=0$, $k>0$, $b>0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $a(x)$ fonksiyonu, Teoremin 2.1.1 'in ii. şartını sağlıyorsa,

$$mu_{tt} + ku_{xxxx} - [a(x)u_x]_x + \gamma u_{tx} + bu_t = 0, \tag{2.1.32}$$

lineer denkleminin (2.2) sınır şartını sağlayan her çözümü için

$$\|u_t\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leq K e^{-\delta_2 t}, \quad K, \delta_2 > 0 \quad (2.1.33)$$

eşitsizliği sağlanır [15].

İspat:

$u(x, t)$, (2.1.33) denkleminin (2.2) sınır şartını sağlayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. $p = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (2.1.8) eşitsizliğinden aşağıdaki ifadeyi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) - \delta_1 m \|u_t\|^2 + \delta_1 k \|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx - \delta_1 \gamma(u_x, u_t) \\ - b \delta_1 \int_0^l |u| |u_t|^p dx + b \int_0^l |u_t|^2 dx \leq 0 \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

yazabiliriz. $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ keyfi bir sayı olsun. (2.1.7) de $E_1(t)$ 'nin tanımını göz önüne alınırsa ve (2.1.34) eşitsizliğine $\delta_2 E_1(t)$ 'yi ekleyip çıkarırsak aşağıdaki ifadeyi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) + \delta_2 E_1(t) - \frac{\delta_2 m}{2} \|u_t\|^2 - \frac{\delta_2 k}{2} \|u_{xx}\|^2 - \frac{\delta_2}{2} \int_0^l a(x) u_x^2 dx \\ - \delta_2 \delta_1 m(u, u_t) - \delta_1 m \|u_t\|^2 + \delta_1 k \|u_{xx}\|^2 + \delta_1 \int_0^l a(x) u_x^2 dx \\ - \delta_1 \gamma(u_x, u_t) - b \delta_1 \int_0^l |u| |u_t| dx + b \int_0^l |u_t|^2 dx \leq 0 \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

elde ederiz. Burada bazı kestirimlere ihtiyaç duyacağız. $\int_0^l a(x) u_x^2 dx$ terimi için Teorem 2.1.1 'in

ii. şartı ve (2.1.9) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{2} \right) \int_0^l a(x) u_x^2 dx \geq -c_0 \left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{2} \right) \int_0^l u_x^2 dx \\ \geq -\frac{c_0 l^2}{\pi^2} \left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{2} \right) \int_0^l u_{xx}^2 dx \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

yukarıdaki eşitsizlik doğrudur. $\delta_1 \gamma(u_x, u_t)$ ve $b \delta_1 \int_0^l |u| u_t| dx$ terimleri için ε -Young ve (2.1.9)

eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} |\delta_1 \gamma(u_x, u_t)| &\leq \frac{b}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\delta_1^2 \gamma^2}{b} \|u_x\|^2 \\ &\leq \frac{b}{4} \|u_t\|^2 + \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{b \pi^2} \|u_{xx}\|^2 \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

$$\begin{aligned} b \delta_1 \int_0^l |u| u_t| dx &\leq \frac{b}{4} \|u_t\|^2 + \delta_1^2 b \|u\|^2 \\ &\leq \frac{b}{4} \|u_t\|^2 + \frac{\delta_1^2 b l^4}{\pi^4} \|u_{xx}\|^2 \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve benzer şekilde $\delta_2 \delta_1 m(u, u_t)$ terimi için de ε -Young ve (2.1.24) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \delta_2 \delta_1 m(u, u_t) &\leq \frac{\delta_2 \delta_1 m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\delta_2 \delta_1 m}{2} \|u\|^2 \\ &\leq \frac{\delta_2 \delta_1 m}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\delta_2 \delta_1 m l^4}{2 \pi^4} \|u_{xx}\|^2 \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Elde ettiğimiz (2.1.36), (2.1.37), (2.1.38) ve (2.1.39) eşitsizliklerini (2.1.35) eşitsizliğinde göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} E_1(t) + \delta_2 E_1(t) + \left(\frac{b}{2} - \delta_1 m - \frac{\delta_2 m}{2} - \frac{\delta_1 \delta_2 m}{2} \right) \|u_t\|^2 \\ &+ \left(\delta_1 d_0 - \frac{\delta_2 d_0}{2} - \frac{\delta_2 \delta_1 m l^4}{2 \pi^4} - \frac{\delta_1^2 \gamma^2 l^2}{b \pi^2} - \frac{\delta_1^2 b l^4}{\pi^4} \right) \|u_{xx}\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (2.1.25) eşitsizliğini de sağlayan δ_1 sayısı ile $\delta_2 \leq \delta_1$ sayısını,

$$\frac{d}{dt} E_1(t) + \delta_2 E_1(t) \leq 0 \quad (2.1.41)$$

eşitsizliğini doğrulayacak kadar küçük seçebiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $e^{\delta_2 t}$ ile çarparak,

$$\frac{d}{dt} [e^{\delta_2 t} E_1(t)] \leq 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$E_1(t) \leq E_1(0) e^{-\delta_2 t} \quad (2.1.42)$$

elde edilir. Buna göre (2.1.26) eşitsizliği de göz önüne alınırsa istenen

$$\|u_t\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leq K e^{-\delta_2 t}, \quad K, \delta_2 > 0$$

eşitsizlik elde edilir.

3. Genel Boru Ve Dönen Mil Denklemlerinin Sıfır Çözümlerinin Asimptotik Davranışı

Bu bölümde amacımız, $x \in (0, L)$, $t \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki problemin sıfır çözümünün global asimptotik kararlı olduğunu göstermektir. Bunun için aşağıdaki problemi alalım.

$$w_{tt} + aw_{xxxx} + bw_{txxx} + cw_t + \alpha(t)w_{xx} + l(x)\beta(t)w_{xx} + \gamma(t)w_{xt} = 0 \quad (3.1)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0 \quad (3.2)$$

veya

$$w(0, t) = w(L, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(L, t) = 0. \quad (3.3)$$

Burada a, b, c verilen pozitif sayılar ve $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), l(x)$ pozitif sınırlı fonksiyonlar olsunlar.

$$v_{tt} + \alpha_1 v_{xxxx} - a(t)w_t - b(t)v - c(t)w + \beta_1 v_{txxx} + \gamma_t - d(t)w = 0 \quad (3.4)$$

$$w_{tt} + \alpha_2 w_{xxxx} - a(t)v_t - b(t)w + c(t)v + \beta_2 w_{txxx} + \gamma w_t + d(t)v = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} v(0, t) &= v(L, t) = w(0, t) = w(L, t) \\ &= v_x(0, t) = v_x(L, t) = w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (3.6)$$

veya

$$\begin{aligned} v(0, t) &= v(L, t) = w(0, t) = w(L, t) \\ &= v_{xx}(0, t) = v_{xx}(L, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (3.7)$$

sistemini göz önüne alalım. Burada verilen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ pozitif sayılar ve $a(t), b(t), c(t), d(t)$ pozitif sınırlı fonksiyonlar olsunlar.

(3.2) veya (3.3) sınır şartları altında,

$$0 = Elw_{xxxx} + d_l Elw_{txxx} + d_e w_t + MU^2 w_{xx} + (L - x)MUw_{xx} + 2MUw_{xt} + (M + m)w_{tt} \quad (3.8)$$

denklemini ve (3.6) veya (3.7) sınır şartları altında,

$$El_1 v_{xxxx} + mv_{tt} - 2m\Omega w_t - m\Omega^2 v - m\Omega w + d_l El_1 v_{txxx} + d_e m(v_t - \Omega w) = 0 \quad (3.9)$$

$$El_2 w_{xxxx} + mw_{tt} - 2m\Omega v_t - m\Omega^2 w - m\Omega v + d_l El_2 w_{txxx} + d_e m(w_t - \Omega v) = 0 \quad (3.10)$$

sistemlerini düşünebiliriz [17].

(3.8) denklemi, L uzunluğundaki düzgün bir borunun dinamiğini belirtir. Burada m her birim uzunluktaki kütleyi, El eğilim katsayısını, M her birim uzunluktaki bir sıvı kütlesinin taşınmasını, $U(t)$ pozitif x yönünde zaman değişim hızını, d_i ve d_e sırasıyla iç ve dış bükülme katsayılarını gösterir. (3.9) ve (3.10) eşitlikleri zaman değişim açısal hızı olan $\Omega(t)$ ile dönen bir milin dinamiğini tanımlar. L , m , d_i ve d_e (3.8) denkleminde olduğu gibi aynıdır. El_1 ve El_2 eğilim katsayılarıdır. (3.8), (3.2) veya (3.8), (3.3) probleminin sıfır çözümü,

$$\left(\int_0^L (w_{xx}^2 + w_t^2) dx \right)^{1/2}$$

normuna göre belirli sınır şartları altında kararlıdır [17]. Benzer şekilde, (3.9), (3.10), (3.6) veya (3.9), (3.10), (3.7) probleminin sıfır çözümü de

$$\left(\int_0^L (v_{xx}^2 + w_{xx}^2 + v_t^2 + w_t^2) dx \right)^{1/2}$$

normuna göre belirli sınır şartları altında kararlıdır [17].

Burada amaç; (3.1), (3.2) (veya (3.1), (3.3)) ve (3.4), (3.5), (3.6) (veya (3.4), (3.5), (3.7)) problemlerinin sıfır çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu yeterli şartlar altında garanti etmektir. Sonuçlarımızı elde etmek için Lyapunov fonksiyon tekniğini kullanacağız. Bu bölümde kullanılan bu metot, lineer olmayan sistemlere de uygundur.

İfade edilen vektörü u ile gösterelim. Bu durumda denge ifadesi de $u = 0$ olur. Sınır şartlarını sağlayan u elemanını içeren uzayı da U ile gösterelim. $t = 0$ için u nun ilk ifadesi u_0 olsun ve t anında ise $u(t, u_0)$ olur. Bir özel normda U uzayı üzerinde tanımlansın. Aşağıdaki özellikleri sağlayan U uzayında tanımlanan bir w fonksiyonunu elde ederek Lyapunov'un metodunu genişletebiliriz. w fonksiyonu için, aşağıdaki üç özellik $u = 0$ denge ifadesinin kararlılığı için yeterli bir koşulu gösterir, bu koşullar;

- i. $\forall u \in U$ için $w(u) \leq c_1 \|u\|^2$ şartını sağlayan bir $c_1 > 0$ vardır,
- ii. $\forall u \in U$ için $w(u) \geq c_2 \|u\|^2$ şartını sağlayan bir $c_2 > 0$ vardır,
- iii. $\frac{d}{dt} w(u(t, u_0)) \leq 0$,

dır [18-20].

Eğer sıfır çözümü kararlı ve tüm çözümler $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra yaklaşıyorsa, sıfır çözümü *global asimptotik kararlı* olarak adlandırılır.

Burada,

$$\|w\| = \left(\int_0^L w^2(x) dx \right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad (w, v) = \int_0^L w(x)v(x) dx$$

anlamındadır.

$\lambda = L^2/\pi^2$ olmak üzere,

$$\int_0^L w^2(x) dx \leq \lambda \int_0^L w_x^2(x) dx \quad (3.11)$$

Wirtinger eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliğin

$$\int_0^L w_x^2(x) dx \leq \lambda \int_0^L w_{xx}^2(x) dx \quad (3.12)$$

sağlandığını gösterelim. $(ww_x)_x = w_x^2 + ww_{xx}$ eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliği x değişkenine göre 0'dan L 'ye integre eder ve (3.2) sınır şartını göz önüne alarak,

$$\begin{aligned} \int_0^L (ww_x)_x dx &= \int_0^L (w_x^2 + ww_{xx}) dx \\ \Rightarrow w(L, t)w_x(L, t) - w(0, t)w_x(0, t) &= \int_0^L w_x^2 dx + \int_0^L ww_{xx} dx \\ \Rightarrow -\int_0^L w_x^2 dx &= \int_0^L ww_{xx} dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafına Cauchy eşitsizliğini uygulayıp gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\left(\int_0^L w_x^2 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^L w^2 dx \right) \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.12) Wirtinger eşitsizliği göz önüne alınarak

$$\left(\int_0^L w_x^2 dx \right)^2 \leq \lambda \left(\int_0^L w_x^2 dx \right) \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını $\int_0^L w_x^2 dx$ terimine bölersek, (3.12) eşitsizliği elde edilir.

(3.11) ve (3.12) eşitsizliklerinden,

$$\int_0^L w^2(x) dx \leq \lambda^2 \int_0^L w_{xx}^2(x) dx \quad (3.13)$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1. Global Asimptotik Kararlılık:

Teorem 3.1.1

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

- i. a, b, c verilen pozitif sayılardır.
- ii. $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$ aşağıdaki şartları sağlayan $C^1[0, \infty)$ sınıfından pozitif fonksiyonlardır;

$$\alpha(t) + \beta(t)L + \beta(t)L_1\sqrt{\lambda} + \frac{\gamma^2(t)}{2} \leq a_0, \quad (3.1.1)$$

$$|\alpha'(t)| + |\beta'(t)|L + \beta^2(t)L_1 \leq n_0 \left(\frac{a}{\lambda} - a_0 \right), \quad (3.1.2)$$

burada a_0 ,

$$a_0 < \frac{a}{\lambda} \text{ ve } n_0 = \min \left\{ 1, \frac{a - a_0\lambda}{|\lambda^2 - b|}, \frac{2\left(\frac{b}{\lambda^2} + c\right) - L_1}{3} \right\}$$

yukarıdaki şartı sağlayan keyfi bir pozitif sayı olsun.

- iii. $\gamma(\cdot), C^1[0, \infty)$ sınıfından pozitif bir fonksiyondur.
- iv. $l(\cdot) \in C^1[0, L]$ ve

$$0 \leq l(x) \leq L, \quad (3.1.3)$$

$$|l'(x)| \leq L_1, \quad \forall x \in [0, L] \quad (3.1.4)$$

olup burada L_1 ,

$$L_1 < 2\left(\frac{b}{\lambda^2} + c\right) \quad (3.1.5)$$

eşitsizliği sağlayan pozitif bir sayıdır. (3.1), (3.2) veya (3.1), (3.3) probleminin sıfır çözümü,

$$\left(\int_0^L (w_{xx}^2 + w_t^2) dx \right)^{1/2}$$

normuna göre global asimptotik olarak kararlıdır. Bununla birlikte (3.2) veya (3.3) sınır şartlarını sağlayan, (3.1) denkleminin her çözümü için

$$\|w_{xx}\|^2 + \|w_t\|^2 \leq K_1 e^{-\delta t}; \quad K_1, \delta > 0, \quad (3.1.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 3.1.1

$w(x, t)$, (3.2) veya (3.3) sınır şartlarını sağlayan (3.1) denkleminin bir çözümü olduğunu kabul edelim ve n ise daha sonra tanımlanacak bir parametre olsun. (3.1) denklemini w_t ile çarparsak,

$$w_t w_{tt} + a w_t w_{xxxx} + b w_t w_{txxx} + c w_t^2 + \alpha(t) w_t w_{xx} + l(x) \beta(t) w_t w_{xx} + \gamma(t) w_t w_{xt} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned} w_t w_{tt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_t^2), \quad \gamma(t) w_t w_{xt} = \frac{\gamma(t)}{2} \frac{\partial}{\partial x} (w_t^2), \\ a w_t w_{xxxx} &= a \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{xxx} - w_{tx} w_{xx}) + \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2), \\ b w_t w_{txxx} &= b \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{txxx}) - b \frac{\partial}{\partial x} (w_{tx} w_{txx}) + b w_{txx}^2, \\ \alpha(t) w_t w_{xx} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(t) w_x^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(t) w_t w_x) + \frac{1}{2} \alpha'(t) w_x^2, \\ l(x) \beta(t) w_t w_{xx} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta(t) l(x) w_x^2) + \frac{1}{2} \beta'(t) l(x) w_x^2 \\ &\quad + \beta(t) \frac{\partial}{\partial x} (l(x) w_t w_x) - \beta(t) l'(x) w_t w_x \end{aligned}$$

olduğundan, yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_t^2) + a \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{xxx} - w_{tx} w_{xx}) + \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2) \\ &+ b \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{txxx}) - b \frac{\partial}{\partial x} (w_{tx} w_{txx}) + b w_{txx}^2 + c w_t^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(t) w_x^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(t) w_t w_x) \\ &+ \frac{1}{2} \alpha'(t) w_x^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta(t) l(x) w_x^2) + \frac{1}{2} \beta'(t) l(x) w_x^2 + \beta(t) \frac{\partial}{\partial x} (l(x) w_t w_x) - \beta(t) l'(x) w_t w_x = 0 \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitliği, x değişkenine göre integre edersek ve sonra da (3.2) veya (3.3) sınır şartlarını göz önüne alarak,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{a}{2} \|w_{xx}\|^2 - \frac{1}{2} \alpha(t) \|w_x\|^2 - \frac{1}{2} \beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx \right] \\ & + b \|w_{xxx}\|^2 + c \|w_t\|^2 + \frac{1}{2} \alpha'(t) \|w_x\|^2 + \frac{1}{2} \beta'(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx - \beta(t) \int_0^L l'(x) w_t w_x dx = 0 \quad (3.1.7) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(3.1) denklemini bu kez nw ile çarparak,

$$nww_{tt} + anww_{xxx} + bnww_{txxx} + cnww_t + n\alpha(t)ww_{xx} + nl(x)\beta(t)ww_{xx} + n\gamma(t)ww_{xt} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned} nww_{tt} &= n \frac{\partial}{\partial t} (ww_t) - nw_t^2, \quad cnww_t = \frac{cn}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w^2), \\ anww_{xxx} &= an \frac{\partial}{\partial x} (ww_{xxx}) - an \frac{\partial}{\partial x} (w_x w_{xx}) + anw_{xx}^2, \\ bnww_{txxx} &= \frac{bn}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2) + bn \frac{\partial}{\partial x} (w_{txxx} w - w_{xxt} w_x), \\ n\alpha(t)ww_{xx} &= n\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} (ww_x) - n\alpha(t)w_x^2, \\ nl(x)\beta(t)ww_{xx} &= n\beta(t) \frac{\partial}{\partial x} (l(x)ww_x) - nl(x)\beta(t)w_x^2 - nl'(x)\beta(t)ww_x, \\ n\gamma(t)ww_{xt} &= n\gamma(t) \frac{\partial}{\partial x} (ww_t) - n\gamma(t)w_x w_t \end{aligned}$$

olup bunları yukarıda elde ettiğimiz denklemde yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} & n \frac{\partial}{\partial t} (ww_t) - nw_t^2 + an \frac{\partial}{\partial x} (ww_{xxx}) - an \frac{\partial}{\partial x} (w_x w_{xx}) + anw_{xx}^2 \\ & + \frac{bn}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2) + bn \frac{\partial}{\partial x} (w_{txxx} w - w_{xxt} w_x) + \frac{cn}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w^2) + n\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} (ww_x) - n\alpha(t)w_x^2 \\ & + n\beta(t) \frac{\partial}{\partial x} (l(x)ww_x) - nl(x)\beta(t)w_x^2 - nl'(x)\beta(t)ww_x + n\gamma(t) \frac{\partial}{\partial x} (ww_t) - n\gamma(t)w_x w_t = 0 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği, x değişkenine göre integre edersek ve sonra da (3.2) veya (3.3) sınır şartlarını göz önüne alarak,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[n(w, w_t) + \frac{bn}{2} \|w_{xx}\|^2 + \frac{cn}{2} \|w\|^2 \right] - n\|w_t\|^2 + an\|w_{xx}\|^2 \\ & - n\alpha(t)\|w_x\|^2 - n\beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx - n\beta(t) \int_0^L l'(x) w w_x dx - n\gamma(t)(w_x, w_t) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.1.7) ve (3.1.8) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{a}{2} \|w_{xx}\|^2 - \frac{1}{2} \alpha(t) \|w_x\|^2 - \frac{1}{2} \beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx \right. \\ & \left. + n(w, w_t) + \frac{bn}{2} \|w_{xx}\|^2 + \frac{cn}{2} \|w\|^2 \right] + b\|w_{xxx}\|^2 + c\|w_t\|^2 + \frac{1}{2} \alpha'(t) \|w_x\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \beta'(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx - \beta(t) \int_0^L l'(x) w_t w_x dx - n\|w_t\|^2 + an\|w_{xx}\|^2 \\ & - n\alpha(t) \|w_x\|^2 - n\beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx - n\beta(t) \int_0^L l'(x) w w_x dx - n\gamma(t)(w_x, w_t) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned} E_n(w, w_t) &= \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{a}{2} \|w_{xx}\|^2 - \frac{1}{2} \alpha(t) \|w_x\|^2 - \frac{1}{2} \beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx \\ &+ n(w, w_t) + \frac{bn}{2} \|w_{xx}\|^2 + \frac{cn}{2} \|w\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

ve

$$\begin{aligned} H_n(w, w_t) &= b\|w_{xxx}\|^2 + c\|w_t\|^2 + \frac{1}{2} \alpha'(t) \|w_x\|^2 + \frac{1}{2} \beta'(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx \\ &- \beta(t) \int_0^L l'(x) w_t w_x dx - n\|w_t\|^2 + an\|w_{xx}\|^2 - n\alpha(t) \|w_x\|^2 \\ &- n\beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx - n\beta(t) \int_0^L l'(x) w w_x dx - n\gamma(t)(w_x, w_t) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

olsun. (3.1.9) eşitliğinde, (3.1.10) ve (3.1.11) eşitliklerini göz önüne alarak,

$$\frac{d}{dt} E_n(w, w_t) + H_n(w, w_t) = 0 \quad (3.1.12)$$

eşitliğini elde ederiz.

$n(w, w_t)$ terimi için bir kestirim elde etmek üzere Cauchy eşitsizliğini kullanarak,

$$|n(w, w_t)| \leq n|(w, w_t)|$$

$$\leq n\|w\|\|w_t\|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada Young eşitsizliğini kullanarak ve sonra da (3.13) eşitsizliğini uygulayarak,

$$\begin{aligned} |n(w, w_t)| &\leq n\left(\frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2\right) \\ &\leq \frac{n}{2}\|w_t\|^2 + \frac{n\lambda^2}{2}\|w_{xx}\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

eşitsizliğini buluruz.

(3.1.10) da (3.11), (3.12) ve (3.1.13) eşitsizliklerini kullanarak,

$$E_n(w, w_t) \geq \frac{1}{2}\left[a - n(\lambda^2 - b) - \lambda(\alpha(t) + \beta(t)L)\right]\|w_{xx}\|^2 + \frac{1}{2}(1 - n)\|w_t\|^2 \quad (3.1.14)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $\lambda^2 - b < 0$ ise, $n < 1$ olmak üzere uygun bir k_0 sabiti için (3.1.1) eşitsizliğinden,

$$E_n(w, w_t) \geq k_0\left(\|w_{xx}\|^2 + \|w_t\|^2\right) \quad (3.1.15)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $\lambda^2 - b > 0$ ise,

$$n > \min\left\{1, \frac{a - a_0\lambda}{\lambda^2 - b}\right\} \quad (3.1.16)$$

olmak üzere uygun bir k_1 sabiti için (14) eşitsizliğinden,

$$E_n(w, w_t) \geq k_1\left(\|w_{xx}\|^2 + \|w_t\|^2\right) \quad (3.1.17)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.1.8) de, (3.1.13) eşitsizliği kullanılarak,

$$E_n(w, w_t) \leq \frac{1}{2}\left(n\lambda^2 + nb + nc\lambda^2 + a + a_0\lambda\right)\|w_{xx}\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \quad (3.1.18)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$k_2 = \max\{n\lambda^2 + nb + nc\lambda^2 + a + a_0\lambda, 1 + n\}$$

olsun. Bu durumda, (3.1.18) eşitsizliğinden,

$$E_n(w, w_t) \leq k_2\left(\|w_{xx}\|^2 + \|w_t\|^2\right) \quad (3.1.19)$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan $\gamma(t)(w_x, w_t)$ terimi için bir kestirim elde etmek üzere Cauchy eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} |\gamma(t)(w_x, w_t)| &\leq \gamma(t)(w, w_t) \\ &\leq \gamma(t)\|w_x\|\|w_t\| \end{aligned}$$

yukarıdaki eşitsizliği elde ederiz. Burada Young eşitsizliğini kullanarak,

$$\gamma(t)(w_x, w_t) \leq \frac{\gamma^2(t)}{2}\|w_x\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 \quad (3.1.20)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $\beta(t)\int_0^L l'(x)ww_x dx$ terimi için bir kestirim elde edelim. Bunun için sırasıyla

Cauchy eşitsizliğini ve (3.1.4) eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \left| \beta(t)\int_0^L l'(x)ww_x dx \right| &\leq \beta(t)(l'(x)w_x, w) \\ &\leq \beta(t)\|l'(x)w_x\|\|w\| \\ &\leq \beta(t)\|l'(x)\|\|w_x\|\|w\| \\ &\leq \beta(t)L_1\|w_x\|\|w\| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte, (3.1.1) eşitsizliği göz önüne alınarak,

$$\left| \beta(t)\int_0^L l'(x)ww_x dx \right| \leq \beta(t)L_1\sqrt{\lambda}\|w_x\|^2 \quad (3.1.21)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.11) eşitliğindeki $\beta(t)\int_0^L l'(x)w_x w_t dx$ terimine sırasıyla Cauchy eşitsizliğini ve

(3.1.4) eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \left| \beta(t)\int_0^L l'(x)w_x w_t dx \right| &\leq \beta(t)(l'(x)w_x, w_t) \\ &\leq \beta(t)\|l'(x)w_x\|\|w_t\| \\ &\leq \beta(t)\|l'(x)\|\|w_x\|\|w_t\| \\ &\leq \beta(t)L_1\|w_x\|\|w_t\| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu son eşitsizlikte, Young eşitsizliği göz önüne alınarak,

$$\left| \beta(t) \int_0^L l'(x) w_x w_t dx \right| \leq \frac{\beta^2(t)}{2} L_1 \|w_x\|^2 + \frac{L_1}{2} \|w_t\|^2 \quad (3.1.22)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.11) de (3.12), (3.13), (3.1.3), (3.1.20), (3.1.21) ve (3.1.22) ifadeleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} H_n(w, w_t) \geq & \left[n \left(\frac{a}{\lambda} - \alpha(t) - \beta(t)L - \beta(t)L_1 \sqrt{\lambda} - \frac{\gamma^2(t)}{2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(|\alpha'(t)| + |\beta'(t)L| + \beta^2(t)L_1 \right) \right] \|v_x\|^2 \\ & + \left(\frac{b}{\lambda^2} + c - \frac{L_1}{2} - \frac{3n}{2} \right) \|w_t\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer (3.1.1) ve (3.1.3) şartlarını (3.1.23) eşitsizliğinde kullanarak,

$$n_0 = \min \left\{ 1, \frac{a - a_0 \lambda}{|\lambda^2 - b|}, \frac{2 \left(\frac{b}{\lambda^2} + c \right) - L_1}{3} \right\}$$

olmak üzere $\frac{n_0}{2} \leq n \leq n_0$ için $H_n(w, w_t) \geq 0$ ve $\frac{d}{dt} E_n(w, w_t) \leq 0$ elde edilir. Böylece,

$E_n(w, w_t)$ 'nin (3.1), (3.2) veya (3.1), (3.3) problemi için Lyapunov fonksiyonu olduğunu elde ederiz. Bu yüzden, (3.1), (3.2) veya (3.1), (3.3) probleminin sıfır çözümü

$$\left(\int_0^L (w_{xx}^2 + w_t^2) dx \right)^{1/2}$$

normuna göre kararlıdır. $\delta > 0$ olmak üzere (3.1.12) den,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_n(w, w_t) + \delta E_n(w, w_t) = & \frac{\delta}{2} \|w_t\|^2 + \frac{a\delta}{2} \|w_{xx}\|^2 - \frac{\delta}{2} \alpha(t) \|w_x\|^2 - \frac{\delta}{2} \beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx \\ & + n\delta(w, w_t) + \delta \frac{bn}{2} \|w_{xx}\|^2 + \delta \frac{cn}{2} \|w\|^2 - b \|w_{txx}\|^2 - c \|w_t\|^2 \\ & - \frac{1}{2} \alpha'(t) \|w_x\|^2 - \frac{1}{2} \beta'(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx - \beta(t) \int_0^L l'(x) w_t w_x dx \\ & + n \|w_t\|^2 - an \|w_{xx}\|^2 + n \alpha(t) \|w_x\|^2 + n \beta(t) \int_0^L l(x) w_x^2 dx \\ & + n \beta(t) \int_0^L l'(x) w w_x dx + n \gamma(t)(w_x, w_t) \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

eşitliği elde edilir. (3.1.24) de (3.11), (3.12), (3.13) ve (3.1.1) ifadelerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_n(w, w_t) + \delta E_n(w, w_t) = & \left[\frac{\delta(a + a_0\lambda)}{2} + \delta n \frac{\lambda^2}{2} + \delta n \frac{b}{2} + \delta n c \frac{\lambda^2}{2} \right. \\ & + n\lambda \left(\alpha(t) + \beta(t)L + \beta(t)L_1\sqrt{\lambda} + \frac{\gamma^2(t)}{2} \right) \\ & \left. - na + \frac{\lambda}{2} (|\alpha'(t)| + |\beta'(t)|L + \beta^2(t)L_1) \right] \|w_{xx}\|^2 \\ & + \left(\frac{\delta n}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}n + \frac{L_1}{2} - c - \frac{b}{\lambda^2} \right) \|w_t\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

eşitliğini elde ederiz.

$\frac{n_0}{2} \leq n \leq n_0$ olmak üzere (3.1.25) de (3.1.1) ve (3.1.2) eşitsizlikleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_n(w, w_t) + \delta E_n(w, w_t) \leq & \left[\frac{\delta(a + a_0\lambda)}{2} + \delta n \frac{\lambda^2}{2} + \delta n \frac{b}{2} + \delta n c \frac{\lambda^2}{2} \right. \\ & \left. - \left(n - \frac{n_0}{2} \right) (a - a_0\lambda) \right] \|w_{xx}\|^2 \\ & + \left(\frac{\delta n}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}n + \frac{L_1}{2} - c - \frac{b}{\lambda^2} \right) \|w_t\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.26) eşitsizliğinde $\delta > 0$ sayısını

$$\frac{d}{dt} E_n(w, w_t) + \delta E_n(w, w_t) \leq 0 \quad (3.1.27)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçebiliriz.

Bu eşitsizliğin her iki tarafı $e^{\delta t}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} e^{\delta t} \frac{d}{dt} E_n(w, w_t) + \delta e^{\delta t} E_n(w, w_t) & \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [e^{\delta t} E_n(w, w_t)] & \leq 0 \\ \Rightarrow e^{\delta t} E_n(w, w_t) - E_n(w(x,0), w_x(x,0)) & \leq 0 \\ \Rightarrow E_n(w, w_t) \leq E_n(w(x,0), w_x(x,0)) e^{-\delta t} \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.28) eşitsizliğinde (3.1.15) veya (3.1.17) eşitsizlikleri göz önüne alınarak,

$$\|w_{xx}\|^2 + \|w_t\|^2 \leq K_1 e^{-\delta t}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.2

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

- i. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ verilen pozitif sayılardır.
- ii. $a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)$ ve $d(\cdot)$ aşağıdaki şartları sağlayan $C^1[0, \infty)$ sınıfından pozitif sınırlı fonksiyonlardır.

$$b(t) + \frac{a^2(t)}{2} \leq a_0 \quad (3.1.29)$$

$$|b'(t)| + c(t) + d(t) \leq n_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda^2} - \alpha_0 \right) \quad (3.1.30)$$

$$a(t) + \frac{c(t)}{2} + \frac{d(t)}{2} \leq \gamma_0, \quad (3.1.31)$$

burada; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ aşağıdaki şartları sağlayan

$$\alpha_0 < \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{\min\{\alpha_1, \alpha_2\}}{\lambda^2}, \quad \beta_0 = \min\{\beta_1, \beta_2\}, \quad \gamma_0 < \gamma,$$

$$n_0 = \min \left\{ 1, \frac{\alpha_1 - \alpha_0 \lambda^2}{|\lambda^2 + \lambda^2 \gamma - \beta_1|}, \frac{\alpha_2 - \alpha_0 \lambda^2}{|\lambda^2 + \lambda^2 \gamma - \beta_2|}, \frac{2(\gamma - \gamma_0 + \beta_0 / \lambda^2)}{3} \right\}$$

pozitif sayılardır.

(3.4), (3.5), (3.6) veya (3.4), (3.5), (3.7) probleminin sıfır çözümü,

$$\left(\int_0^L (v_{xx}^2 + w_{xx}^2 + v_t^2 + w_t^2) dx \right)^{1/2}$$

normuna göre global asimptotik kararlıdır. Bununla birlikte, (3.6) veya (3.7) sınır şartlarını sağlayan, (3.4) ve (3.5) denklemlerinin her çözümü için aşağıdaki

$$\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2 \leq K_2 e^{-\delta t}, \quad K_2, \delta > 0 \quad (3.1.32)$$

eşitsizlik sağlanır.

İspat 3.1.2

$v(x, t)$ fonksiyonu (3.6) veya (3.7) sınır şartlarını sağlayan (3.4) denkleminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. (3.4) denklemini v_t ile çarparsak,

$$v_t v_{tt} + \alpha_1 v_t v_{xxxx} - a(t) v_t w_t - b(t) v w_t - c(t) v_t w + \beta_1 v_t v_{txxx} + \gamma v_t^2 - d(t) v_t w = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned} v_t v_{tt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v_t^2), \quad -b(t) v w_t = -\frac{b(t)}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2), \\ \alpha_1 v_t v_{xxxx} &= \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} (v_t v_{xxx} - v_{tx} v_{xx}) + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v_{xx}^2), \\ \beta_1 v_t v_{txxx} &= \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} (v_t v_{txx} - v_{tx} v_{txx}) + \beta_1 v_{txx}^2 \end{aligned}$$

olduğundan, bu eşitliği

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v_t^2) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} (v_t v_{xxx} - v_{tx} v_{xx}) + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v_{xx}^2) - a(t) v_t w_t \\ &- \frac{b(t)}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2) - c(t) v_t w + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} (v_t v_{txx} - v_{tx} v_{txx}) + \beta_1 v_{txx}^2 + \gamma v_t^2 - d(t) v_t w = 0 \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitliği x değişkenine göre integre edersek ve sonra da (3.6) veya (3.7) sınır şartlarını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{xx}\|^2 - a(t) (v_t, w_t) \\ &- \frac{b(t)}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 - c(t) (v_t, w) + \beta_1 \|v_{txx}\|^2 + \gamma \|v_t\|^2 - d(t) (v_t, w) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.4) denklemini bu kez nv ile çarparak,

$$nv v_{tt} + n\alpha_1 v v_{xxxx} - na(t) v w_t - nb(t) v^2 - nc(t) v w + n\beta_1 v v_{txxx} + n\gamma v v_t - nd(t) v w = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Burada,

$$\begin{aligned} nv v_{tt} &= n \frac{\partial}{\partial t} (v v_t) - n v_t^2, \quad n\gamma v v_t = n \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2), \\ n\alpha_1 v v_{xxxx} &= n\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} (v v_{xxx} - v_x v_{xx}) + n\alpha_1 v_{xx}^2, \\ n\beta_1 v v_{txxx} &= n \frac{\beta_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v_{xx}^2) + n\beta_1 \frac{\partial}{\partial x} (v_{txxx} v - v_x v_{xxt}) \end{aligned}$$

olduğundan, yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned} &n \frac{\partial}{\partial t} (v v_t) - n v_t^2 + n\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} (v v_{xxx} - v_x v_{xx}) + n\alpha_1 v_{xx}^2 - na(t) v w_t \\ &- nb(t) v^2 - nc(t) v w + n \frac{\beta_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v_{xx}^2) + n\beta_1 \frac{\partial}{\partial x} (v_{txxx} v - v_x v_{xxt}) + n \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2) - nd(t) v w = 0 \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu son eşitliği x değişkenine göre integre edersek ve sonra da (3.6) veya (3.7) sınır şartları göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
& n \frac{d}{dt} (v, v_t) - n \|v_t\|^2 + n \alpha_1 \|v_{xx}\|^2 - na(t)(v, w_t) \\
& - nb(t)\|v\|^2 - nc(t)(v, w) + n \frac{\beta_1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{xx}\|^2 + n \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 - nd(t)(v, w) = 0 \quad (3.1.34)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

$w(x, t)$ fonksiyonu (3.6) veya (3.7) sınır şartlarını sağlayan (3.5) denkleminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. (3.5) denklemini w_t ile çarparsak,

$$w_t w_{tt} + \alpha_2 w_t w_{xxxx} - a(t) w_t v_t - b(t) w w_t + c(t) w_t v + \beta_2 w_t w_{txxx} + \gamma w_t^2 + d(t) w_t v = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned}
w_t w_{tt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_t^2), \quad -b(t) w w_t = -\frac{b(t)}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w^2), \\
\alpha_2 w_t v_{xxxx} &= \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{xxx} - w_{tx} w_{xx}) + \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2), \\
\beta_2 w_t w_{txxx} &= \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{txx} - w_{tx} w_{txx}) + \beta_2 w_{txx}^2
\end{aligned}$$

olduğundan eşitliği aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_t^2) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{xxx} - w_{tx} w_{xx}) + \frac{\alpha_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2) - a(t) w_t v_t \\
& - \frac{b(t)}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w^2) + c(t) w_t v + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_t w_{txx} - w_{tx} w_{txx}) + \beta_2 w_{txx}^2 + \gamma w_t^2 + d(t) w_t v = 0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu son eşitliği x değişkenine göre integre edersek ve sonra da (3.6) veya (3.7) sınır şartlarını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_t\|^2 + \frac{\alpha_2}{2} \frac{d}{dt} \|w_{xx}\|^2 - a(t)(v_t, w_t) \\
& - \frac{b(t)}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + c(t)(w_t, v) + \beta_2 \|w_{txx}\|^2 + \gamma \|w_t\|^2 + d(t)(w_t, v) = 0 \quad (3.1.35)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.5) denklemini bu kez nw ile çarparak,

$$nww_{tt} + n\alpha_2 ww_{xxxx} - na(t)wv_t - nb(t)w^2 + nc(t)vw + n\beta_2 ww_{txxx} + n\gamma ww_t + nd(t)vw = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte,

$$\begin{aligned}
nww_{tt} &= n \frac{\partial}{\partial t} (w w_t) - n w_t^2, \quad n\gamma ww_t = n \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w^2), \\
n\alpha_2 ww_{xxxx} &= n\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} (w w_{xxx} - w_x w_{xx}) + n\alpha_2 w_{xx}^2, \\
n\beta_2 ww_{txxx} &= n \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2) + n\beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_{txx} w - w_x w_{xt})
\end{aligned}$$

olduğundan yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned} & n \frac{\partial}{\partial t} (w w_t) - n w_t^2 + n \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} (w w_{xxx} - w_x w_{xx}) + n \alpha_2 w_{xx}^2 - n a(t) w v_t \\ & - n b(t) w^2 + n c(t) v w + n \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (w_{xx}^2) + n \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (w_{xxx} w - w_x w_{xx}) + n \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2) + n d(t) v w = 0 \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu son eşitliği x değişkenine göre integre edersek ve sonra da (3.6) veya (3.7) sınır şartlarını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} & n \frac{d}{dt} (w, w_t) - n \|w_t\|^2 + n \alpha_2 \|w_{xx}\|^2 - n a(t) (w, v_t) \\ & - n b(t) \|w\|^2 + n c(t) (v, w) + n \frac{\beta_2}{2} \frac{d}{dt} \|w_{xx}\|^2 + n \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + n d(t) (v, w) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.1.33), (3.1.34), (3.1.35) ve (3.1.36) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|v_{xx}\|^2 + \frac{\alpha_2}{2} \|w_{xx}\|^2 - \frac{b(t)}{2} \|v\|^2 - \frac{b(t)}{2} \|w\|^2 + n(v_t, v) \right. \\ & + n(w_t, w) + n \frac{\beta_1}{2} \|v_{xx}\|^2 + n \frac{\beta_2}{2} \|w_{xx}\|^2 + n \frac{\gamma}{2} \|v\|^2 + n \frac{\gamma}{2} \|w\|^2 \left. \right] - 2a(t)(v_t, w_t) \\ & + \frac{b'(t)}{2} \|v\|^2 + \frac{b'(t)}{2} \|w\|^2 - c(t)(v_t, w) + c(t)(w_t, v) + \beta_1 \|v_{xxx}\|^2 + \beta_2 \|w_{xxx}\|^2 \\ & + \gamma \|v_t\|^2 + \gamma \|w_t\|^2 - d(t)(v_t, w) + d(t)(w_t, v) + n \alpha_1 \|v_{xx}\|^2 + n \alpha_2 \|w_{xx}\|^2 \\ & - n \|v_t\|^2 - n \|w_t\|^2 - n a(t)(w_t, v) - n a(t)(v_t, w) - n b(t) \|v\|^2 - n b(t) \|w\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada,

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) = & \frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|v_{xx}\|^2 + \frac{\alpha_2}{2} \|w_{xx}\|^2 - \frac{b(t)}{2} \|v\|^2 - \frac{b(t)}{2} \|w\|^2 \\ & + n(v_t, v) + n(w_t, w) + n \frac{\beta_1}{2} \|v_{xx}\|^2 + n \frac{\beta_2}{2} \|w_{xx}\|^2 + n \frac{\gamma}{2} \|v\|^2 + n \frac{\gamma}{2} \|w\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

olsun.

$n(v_t, v)$ ve $n(w_t, w)$ terimlerine, Young eşitsizliğini kullanarak ve sonra da (3.13) eşitsizliğini uygulayarak,

$$n(w_t, w) \leq \frac{n}{2} \|w_t\|^2 + \frac{n}{2} \lambda^2 \|w_{xx}\|^2 \quad (3.1.39)$$

$$n(v_t, v) \leq \frac{n}{2} \|v_t\|^2 + \frac{n}{2} \lambda^2 \|v_{xx}\|^2 \quad (3.1.40)$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

(3.1.38) eşitliğinde, (3.13), (3.1.39) ve (3.1.40) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) \geq & \frac{1}{2} [\alpha_1 - b(t)\lambda^2 - n(\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1)] \|v_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} [\alpha_2 - b(t)\lambda^2 \\ & - n(\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2)] \|w_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} (1-n) \|v_t\|^2 + \frac{1}{2} (1-n) \|w_t\|^2 \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

eşitsizliğini buluruz.

Eğer $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1 < 0$ ve $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2 < 0$ ise (3.1.29) eşitsizliğinden ve $n < 1$ olmak üzere

$$\Phi_n(t) \geq A_0 \left(\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2 \right) \quad (3.1.42)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde uygun bir A_0 sabiti vardır.

Eğer $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1 < 0$ ve $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2 > 0$ ise

$$n < \min \left\{ 1, \frac{\alpha_2 - \alpha_0 \lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2} \right\} \quad (3.1.43)$$

olmak üzere

$$\Phi_n(t) \geq A_1 \left(\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2 \right) \quad (3.1.44)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde uygun bir A_1 sabiti vardır.

Eğer $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1 > 0$ ve $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2 < 0$ ise

$$n < \min \left\{ 1, \frac{\alpha_1 - \alpha_0 \lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1} \right\} \quad (3.1.45)$$

olmak üzere

$$\Phi_n(t) \geq A_2 \left(\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2 \right) \quad (3.1.46)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde uygun bir A_2 sabiti vardır.

Eğer $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1 > 0$ ve $\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2 > 0$ ise

$$n < \min \left\{ 1, \frac{\alpha_1 - \alpha_0 \lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1}, \frac{\alpha_2 - \alpha_0 \lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2} \right\} \quad (3.1.47)$$

olmak üzere

$$\Phi_n(t) \geq A_3 \left(\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2 \right) \quad (3.1.48)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde uygun bir A_3 sabiti vardır.

(3.1.38) ifadesinden,

$$\begin{aligned}\Phi_n(t) \leq & \frac{1}{2}\|v_t\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{\alpha_1}{2}\|v_{xx}\|^2 + \frac{\alpha_2}{2}\|w_{xx}\|^2 + \frac{b(t)}{2}\|v\|^2 + \frac{b(t)}{2}\|w\|^2 \\ & + n|(v_t, v)| + n|(w_t, w)| + n\frac{\beta_1}{2}\|v_{xx}\|^2 + n\frac{\beta_2}{2}\|w_{xx}\|^2 + n\frac{\gamma}{2}\|v\|^2 + n\frac{\gamma}{2}\|w\|^2\end{aligned}\quad (3.1.49)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlikte (3.13) ve (3.1.29) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}\Phi_n(t) \leq & \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_0\lambda^2 + n\lambda^2 + n\beta_1 + n\gamma\lambda^2)\|v_{xx}\|^2 + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_0\lambda^2 \\ & + n\lambda^2 + n\beta_2 + n\gamma\lambda^2)\|w_{xx}\|^2 + \frac{1}{2}(1+n)\|v_t\|^2 + \frac{1}{2}(1+n)\|w_t\|^2\end{aligned}\quad (3.1.50)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$A_4 = \frac{1}{2} \max\{\alpha_1 + \alpha_0\lambda^2 + n\lambda^2 + n\beta_1 + n\gamma\lambda^2, \alpha_2 + \alpha_0\lambda^2 + n\lambda^2 + n\beta_2 + n\gamma\lambda^2, 1+n\}$$

için (3.1.50) eşitsizliğinden, aşağıdaki eşitsizliği

$$\Phi_n(t) \geq A_4(\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2) \quad (3.1.51)$$

yazabiliriz.

(3.1.37) eşitliğinde,

$$\begin{aligned}B_n(t) = & -2a(t)(v_t, w_t) + \frac{b'(t)}{2}\|v\|^2 + \frac{b'(t)}{2}\|w\|^2 - c(t)(v_t, w) + c(t)(w_t, v) \\ & + \beta_1\|v_{xx}\|^2 + \beta_2\|w_{xx}\|^2 + \gamma\|v_t\|^2 + \gamma\|w_t\|^2 - d(t)(v_t, w) \\ & + d(t)(w_t, v) + n\alpha_1\|v_{xx}\|^2 + n\alpha_2\|w_{xx}\|^2 - n\|v_t\|^2 - n\|w_t\|^2 \\ & - na(t)(w_t, v) - na(t)(v_t, w) - nb(t)\|v\|^2 - nb(t)\|w\|^2\end{aligned}\quad (3.1.52)$$

olsun.

Young eşitsizliğini ve (3.12) eşitsizliğini kullanarak,

$$2a(t)|(v_t, w_t)| \leq a(t)\|v_t\|^2 + a(t)\|w_t\|^2 \quad (3.1.53)$$

$$|(v_t, w)| \leq \frac{1}{2}\|v_t\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|w_x\|^2 \quad (3.1.54)$$

$$|(w_t, v)| \leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|v_x\|^2 \quad (3.1.55)$$

$$a(t)|(v_t, w)| \leq \frac{1}{2}\|v_t\|^2 + \frac{a^2(t)}{2}\lambda\|w_x\|^2 \quad (3.1.56)$$

$$a(t)|(w_t, v)| \leq \frac{1}{2}\|w_t\|^2 + \frac{a^2(t)}{2}\lambda\|v_x\|^2 \quad (3.1.57)$$

yukarıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz. (3.1.52) eşitliğinde, (3.1.53)-(3.1.57) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
B_n(t) \geq & \left(\frac{n\alpha_1}{\lambda} - nb(t)\lambda - n\frac{a^2(t)}{2}\lambda - \frac{|b'(t)|}{2}\lambda - \frac{c(t)}{2}\lambda - \frac{d(t)}{2}\lambda \right) \|v_x\|^2 \\
& + \left(\frac{n\alpha_2}{\lambda} - nb(t)\lambda - n\frac{a^2(t)}{2}\lambda - \frac{|b'(t)|}{2}\lambda - \frac{c(t)}{2}\lambda - \frac{d(t)}{2}\lambda \right) \|w_x\|^2 \\
& + \left(\gamma + \frac{\beta_1}{\lambda^2} - a(t) - \frac{c(t)}{2} - \frac{d(t)}{2} - \frac{3}{2}n \right) \|v_t\|^2 \\
& + \left(\gamma + \frac{\beta_2}{\lambda^2} - a(t) - \frac{c(t)}{2} - \frac{d(t)}{2} - \frac{3}{2}n \right) \|w_t\|^2
\end{aligned} \tag{3.1.58}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte (3.1.29)-(3.1.31) eşitsizliklerini göz önüne alarak,

$$\beta_0 = \min\{\beta_1, \beta_2\}, \text{ ve } n_0 = \min\left\{1, \frac{\alpha_1 - \alpha_0\lambda^2}{|\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_1|}, \frac{\alpha_2 - \alpha_0\lambda^2}{|\lambda^2 + \lambda^2\gamma - \beta_2|}, \frac{2(\gamma - \gamma_0 + \beta_0/\lambda^2)}{3}\right\}$$

olmak üzere

$$\frac{n_0}{2} \leq n \leq n_0 \tag{3.1.59}$$

için $B_n(t) \geq 0$ elde ederiz. Bu yüzden (3.4), (3.5), (3.6) veya (3.4), (3.5), (3.7) probleminin sıfır çözümünün kararlı olduğunu elde ederiz. $\delta > 0$ olmak üzere (3.1.37) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_n(t) + \delta\Phi_n(t) = & 2a(t)(v_t, w_t) - \frac{b'(t)}{2}\|v\|^2 - \frac{b'(t)}{2}\|w\|^2 + c(t)(v_t, w) - c(t)(w_t, v) \\
& - \beta_1\|v_{txx}\|^2 - \beta_2\|w_{txx}\|^2 - \gamma\|v_t\|^2 - \gamma\|w_t\|^2 + d(t)(v_t, w) \\
& - d(t)(w_t, v) - n\alpha_1\|v_{xx}\|^2 - n\alpha_2\|w_{xx}\|^2 + n\|v_t\|^2 + n\|w_t\|^2 \\
& + na(t)(w_t, v) + na(t)(v_t, w) + nb(t)\|v\|^2 + nb(t)\|w\|^2 + \frac{\delta}{2}\|v_t\|^2 \\
& + \frac{\delta}{2}\|w_t\|^2 + \delta\frac{\alpha_1}{2}\|v_{xx}\|^2 + \delta\frac{\alpha_2}{2}\|w_{xx}\|^2 - \delta\frac{b(t)}{2}\|v\|^2 - \delta\frac{b(t)}{2}\|w\|^2 \\
& + \delta n(v_t, v) + \delta n(w_t, w) + \delta n\frac{\beta_1}{2}\|v_{xx}\|^2 + \delta n\frac{\beta_2}{2}\|w_{xx}\|^2 \\
& + \delta n\frac{\gamma}{2}\|v\|^2 + \delta n\frac{\gamma}{2}\|w\|^2
\end{aligned} \tag{3.1.60}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, (3.1.53)-(3.1.57) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_n(t) + \delta\Phi_n(t) \leq & \left[\delta\frac{\alpha_1}{2} + \delta n\frac{\beta_1}{2} + \delta n\gamma\frac{\lambda^2}{2} + \delta n\frac{\lambda^2}{2} - \left(n - \frac{n_0}{2}\right)(\alpha - \alpha_0\lambda^2) \right] \|v_{xx}\|^2 \\
& + \left[\delta\frac{\alpha_2}{2} + \delta n\frac{\beta_2}{2} + \delta n\gamma\frac{\lambda^2}{2} + \delta n\frac{\lambda^2}{2} - \left(n - \frac{n_0}{2}\right)(\alpha - \alpha_0\lambda^2) \right] \|w_{xx}\|^2 \\
& + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta n}{2} + a(t) + \frac{c(t)}{2} + \frac{d(t)}{2} + \frac{3}{2}n - \gamma - \frac{\beta_1}{\lambda^2} \right) \|v_t\|^2 \\
& + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta n}{2} + a(t) + \frac{c(t)}{2} + \frac{d(t)}{2} + \frac{3}{2}n - \gamma - \frac{\beta_2}{\lambda^2} \right) \|w_t\|^2
\end{aligned} \tag{3.1.61}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.1.61) eşitsizliğinde, $\delta > 0$ sayısını

$$\frac{d}{dt}\Phi_n(t) + \delta\Phi_n(t) \leq 0 \tag{3.1.62}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçebiliriz. (3.1.62) eşitsizliğinden,

$$\phi_n(t) \leq \phi_n(0)e^{-\delta t} \tag{3.1.63}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\|v_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2 + \|w_t\|^2 \leq K_2 e^{-\delta t}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4. SONUÇ

Sonuç olarak, bu çalışmada diferensiyel denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışı ve kararlılığı üzerinde durduk. İlk önce doğrusal olmayan, dördüncü mertebeden bir dalga denkleminin sıfır çözümünün global asimptotik kararlı olduğunu gösterdik ve aynı zamanda çözümlerin hangi hızla azaldığını gösteren bir kestirim elde edildi. Son olarak düzgün bir borunun dinamiğini belirten bir kısmi diferensiyel denklem ve dönen bir milin dinamiğini belirten bir diferensiyel denklem sistemi ele alındı. Diferensiyel denklem ve diferensiyel denklem sistemi için sınır değer probleminin, sıfır çözümünün global asimptotik kararlılığı için yeterli şartları Lyapunov fonksiyon tekniklerini kullanarak oluşturduk.

KAYNAKLAR

1. Adams, R.A., 1975, Sobolev Spaces, Academic press, New York, 254p.
2. Evans, L.C., 1998, Partial Differential Equations, American Mathematical Society.
3. Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., 1975, Introductory Real Analysis, New York.
4. Walter, W., 1997, Ordinary Differential Equations, Springer Verlag, New York.
5. Jeffrey, A., 1990, Linear Algebra and Ordinary Differential Equations. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 624p.
6. Cerit, C., 1997, Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler (çeviri). Beta Basım Y., 527s.
7. Duchateau, P. and Zachmann, D.W., 1986, Shaum's Outline of Theory and Problems of Partial Differential Equations. McGraw-Hill Companies, 241p.
8. Sobolev S.L., 1964, Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Dover Publications, Inc., New York, 427p.
9. Gustafson, K.E., 1999, Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods. Dover Publications, Inc, Mineola, N.Y., 448p.
10. Garabedian, P.R., 1963, Partial Differential Equations. John Willey&Sons, New York, 617p.
11. Komornik, V., 1994, Exact Controllability and Stabilization, John Wiley Sons.
12. Temam, R., 1988, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and physics, Springer Verlag, New York.
13. Beckenbach Edwin F. and Bellman R., 1961, Inequalities, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete Unter Mitwirkung der Schriftleitung des., Zentralblatt für Mathematik, Berlin.
14. Köhl, M., 1993, An Extended Liapunov Approach to the stability Assessment of Marine Risers, Z. Angew. Math. Mech., 73, 85-92.
15. Kalantarov, V.K. and Kurt, A., 1997, The Long-Time Behaviour of Solutions of a Nonlinear Fourth Order Wave Equation, Describing the Dynamics of Marine Risers. Z. Angew. Math. Mech., 77, 209-215.
16. Aassila, M., 1999, Asymptotic Behaviour and Stability Assessment of Marine Risers, Math. Meth. Appl. Sci., 22, 1585-1598.
17. Plaut, H.R., 1994, Liapunov stability of columns, pipes and rotating shafts under time-dependent excitation. Dynamics and Stability of Systems, 9, 1, 89-94.
18. Dym, C.L., 1974, Stability theory and its applications to structural mechanics, Noordhoff.

19. Movchan, A.A., 1959, The direct method of Liapunov in stability problems of elastic systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 3, 686-700.
20. Zubov, V.I., 1964, *Methods of A. M. Lyapunov and their Applications*, Noordhoff.
21. Rektorys, K., 1975, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, London.
22. O' Neil, P.V., 1991, *Advanced Engineering Mathematics*. Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 512p.