

TC.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ

Melike TARHAN

Tez Yöneticisi:
Prof. Dr. MAHMUT ERGÜT

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

ELAZIĞ, 2007

TC.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ

Melike TARHAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez ,tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile başarılı/başarısız olarak değerlendirilmiştir.

DANIŞMAN: PROF.DR. MAHMUT ERGÜT

ÜYE: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT
ÜYE: Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ
ÜYE: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

Bu tezin kabulü , Fen Bilimleri Enstitü Yönetim Kurulu'nun// tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgisinden her zaman yararlandığım , çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen , değerli zamanını ayırarak imkanlar sağlayan , çalışmanın her aşamasında yanımda olup her vesilede bilgi ve birikimini aktararak sürekli yardımda bulunan kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÖT 'e ; çalışmanın her aşamasında desteklerini ve bilgilerini esirgemeyerek yardımda bulunan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Handan BALGETİR 'e ve Sayın Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ 'a teőekkÖrlerimi sunmayı bir borç bilir , saygılarımı sunarım.

Melike TARHAN

İÇİNDEKİLER

SAYFA

İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER LİSTESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
BİRİNCİ BÖLÜM.....	1
1.1. TEMEL KAVRAMLAR.....	1
İKİNCİ BÖLÜM.....	7
2.1. ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER VE FRENET FORMÜLLERİ.....	7
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM.....	11
3.1. İNVLÜT(BASIT) VE EVOLÜT(MEBSUT).....	11
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM.....	14
4.1. BERTRAND EĞRİ ÇİFTİ.....	14
4.2. BERTRAND EĞRİLERİNİN BELİRLENMELERİ.....	17
BEŞİNCİ BÖLÜM.....	20
5.1. ZAYIF BERTRAND EĞRİLERİ.....	20
5.2. LORENTZ UZAYINDA ZAYIF BERTRAND EĞRİLER ÜZERİNE BİR KARAKTERİZASYON.....	24
ALTINCI BÖLÜM.....	27
6.1. UYGULAMALAR.....	27
KAYNAKLAR.....	32

SİMGELER LİSTESİ

A^T	: A matrisinin transpozu
A	: Afin uzay
T	: Teğet vektör alanı
N	: Normal vektör alanı
B	: Binormal vektör alanı
T_{E^n}	: E^n öklid uzayının tanjant vektörü
C^∞	: Reel değerli, ∞ -boyutlu fonksiyonların cümlesi
E^n	: n-boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
V	: Vektör uzayı
$C(a, \mathbb{R})$	: Reel değerli fonksiyonların cümlesi
∇	: Gradyent fonksiyon
$\wedge$	: Dış çarpım
S^n	: n-boyutlu küre (n-küre)
k_1	: Birinci eğrilik (eğrilik)
k_2	: İkinci eğrilik (burulma)
$E\check{g}(E^n)$	: E^n deki eğrilerin cümlesi
$O(3)$	: 3-boyutlu ortanormal vektörlerin cümlesi
$\mathbb{R}_1^3$	: 3 satırlı, 1 sütunlu matrislerin cümlesi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLER

Melike TARHAN

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa:32

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, temel tanım ve teoremlere ayrıldı.

İkinci bölümde, Öklid uzayında eğriler ve frenet formülleri ile ilgili tanımlar ve teoremler incelendi.

Üçüncü bölümde, involüt(basıt) ve evolüt(mebsut) eğriler tanımlandı ve bunlarla ilgili özellikler verildi.

Dördüncü bölümde, Bertrand eğriler ile ilgili tanımlar ve teoremler incelendi.

Beşinci bölümde, Zayıf Bertrand eğriler ile bunlarla ilgili bir karakterizasyon verildi.

Altıncı bölümde ise konuyla ilgili uygulamalar yapıldı.

Anahtar Kelimeler: 3-Boyutlu Öklid Uzayı, Frenet Formülleri, Eğrilerin 1. ve 2. Eğrilikleri, İnvolut-Evolüt, Frenet Bertrand Eğriler, Zayıf Bertrand Eğriler.

ABSTRACT

M. S. Thesis

BERTRAND CURVES IN 3-DIMENSIONAL EUCLIDIAN SPACE

TARHAN Melike

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2007, Page:32

This thesis consists of six chapters.

In the first section, some definitions and theorems in the thesis were given.

In the second section, some definitions and theorems about curves and Frenet formulas in the Euclidian space were written.

In the third section, involute and evolute curves were defined and related properties were given.

In the fourth section, some definitions about Bertrand curves were given and related theorems were studied.

In the fifth section, Weakened Bertrand curves were studied.

In the sixth section, some applications were done about the subject.

Key Words: 3-Dimensional Euclidian Space, Frenet Formula, First and Second Curvature of Curves, Involute-Evolute, Frenet Bertrand-Weakened Bertrand Curves.

1.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş Afin Uzay denir.

$$(A1) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2) \quad \forall P \in A \text{ ve } \alpha \in V \text{ için}$$

$$f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [1].

Tanım 1.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen bir vektör uzayı da V olsun. V de;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \begin{cases} x_1, \dots, x_n = \vec{x} \\ y_1, \dots, y_n = \vec{y} \end{cases}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid Uzayı denir ve E^n ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.3. E^n , n-boyutlu Öklid uzayında; (n-1)-boyutlu bir yüzey genellikle hiper yüzey olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.4. E^n , n-boyutlu Öklid uzayında M bir hiperyüzey olsun. M de diferansiyellenebilir birim normal vektör alanına M üzerinde bir yönlendirme denir.

E^3 deki her irtibatlı M yüzeyi için tam iki farklı yönlendirme vardır. Bir yüzey üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise; bu yüzeye yönlendirilmiş yüzey denir [1].

Tanım 1.1.5. V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $p \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(p, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının p noktasındaki bir tanjant vektörü denir.

$T_A(p)$ de toplama ve skaler ile çarpma işlemlerini sırasıyla;

$$\oplus : T_A(p) \times T_A(p) \rightarrow T_A(p)$$

$$((p, \vec{v}) \times (p, \vec{u})) \rightarrow (p, \vec{v}) \oplus (p, \vec{u}) = (p, \vec{v} + \vec{u})$$

ve

$$\odot : \mathbb{R} \times T_A(p) \rightarrow T_A(p)$$

$$(\lambda, (p, \vec{v})) \rightarrow \lambda \odot (p, \vec{v}) = (p, \lambda \vec{v})$$

veya

$$(\lambda, \vec{v}_p) \rightarrow \lambda \odot \vec{v}_p = (\lambda \vec{v})_p$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $\mathbb{R}$ ile A nın birleştiği V vektör uzayının cismi gösterilmiştir. $\{T_A(p), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısının bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir.

Bu biçimde elde edilen vektör uzayına, A afin uzayının $p \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(p)$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.6. Bir $\mathfrak{S}$ cismi üzerinde n-boyutlu iki vektör uzayı V ve W olsun. Bir $A: V \rightarrow W$ dönüşümünde

$$(i) A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta), \forall \alpha, \beta \in V$$

$$(ii) A(c\alpha) = c.A(\alpha), \forall c \in \mathfrak{S}$$

aksiyomları sağlanıyorsa bu dönüşüme lineerdir denir [2].

Tanım 1.1.7. Bir $\mathfrak{S}$ cismi üzerinde n-boyutlu iki vektör uzayı V ve W olsun. Bir $f: V \rightarrow W$ fonksiyonu için

$$(i) f \text{ sürekli,}$$

$$(ii) f^{-1} \text{ mevcut,}$$

$$(iii) f^{-1} \text{ sürekli}$$

ise bu fonksiyona V den W ye homeomorfizm denir ve bu durumda V ile W uzaylarına da homeomorf uzaylar adı verilir [2].

Tanım 1.1.8. $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regüler parametrelili eğri olsun.

$$r(a) = r(b), \quad r'(a) = r'(b), \quad r''(a) = r''(b)$$

ise r ye kapalı fonksiyon denir [3].

Tanım 1.1.9. $f : E^3 \rightarrow IR$

$$a \rightarrow f(a)$$

$$a+h \rightarrow f(a+h)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer bir $a \in E^3$ noktası için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad h \in E^3$$

olacak şekilde bir $\lambda : IR^3 \rightarrow IR$ fonksiyonu bulunabiliyorsa f ye, $a \in E^3$ te türevlenebilir denir ve yukarıdaki bağıntıyı sağlayan λ ya da f nin $a \in E^3$ teki türevi denir ve f_* ile gösterilir. Ayrıca bir $a \in E^n$ noktasında türevlenebilen reel değerli fonksiyonların cümlesi de $C(a, IR)$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.10. $\text{Grad} = \nabla : C(E^3, IR) \rightarrow \chi(E^3)$

$$f \rightarrow \nabla f$$

dönüşümü E^3 te $\{x_1, x_2, x_3\}$ koordinat sistemi olmak üzere

$$\text{grad}(f) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanıyorsa bu fonksiyona E^n de Gradyent Fonksiyon denir [1].

Tanım 1.1.11. Bir vektör uzayının r sayıda vektörlerinden ibaret bir vektör sisteminin bütün vektörlerinin normlandırılmış ve ikişer ikişer ortogonal olmaları halinde, sisteme ortogonal ve normlandırılmış veya kısaca ortonormal denir [2].

Tanım 1.1.12. $m, n \in \mathbb{N}$; $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) çiftlerinin cümlesi $A = IN \times IN$ olsun. Bir K cisminde değer alan A daki bir $f : A \rightarrow K$ fonksiyonunu ,

$$(i, j) \rightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlayalım. $a_{ij} \in K$ değerlerini

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \text{ veya } A = [a_{ij}]$$

biçiminde düzenleyelim. K da seçilen bu cins $m.n$ tane elemanın A tablosuna, K üzerinde $m \times n$ matris denir. $\forall (i, j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ çiftlerine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i,j) bileşeni adı verilir [2].

Tanım 1.1.13. Bir $A = [a_{ij}]$ matrisinde

$$A = A^T$$

ise yani $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ oluyorsa A matrisine simetrik denir [2].

Tanım 1.1.14. $A: V \rightarrow W$ dönüşümünde W nın $A(\alpha)$ elemanına, $\alpha \in V$ nin A ile elde edilen resmi denir. W nin

$$A(S) = \{A(\alpha) : \alpha \in S\}$$

alt cümlesine, V nin S alt cümlesinin resmi denir. V nin

$$A^{-1}(0) = \{\alpha \in V : A(\alpha) = 0\}$$

alt cümlesine A nın sıfır uzayı veya çekirdeği (sıfırlığı) adı verilir [2].

Tanım 1.1.15. E^3 de bir C çemberinin kendi düzleminde bir doğru etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeye, tor yüzeyi denir [1].

Tanım 1.1.16. $S^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\} \subset E^{n+1}$

cümlesine, n -boyutlu küre (n -küre) adı verilir [1].

Tanım 1.1.17. X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bit koleksiyonu $\mathfrak{S}$ olsun. $\mathfrak{S}$ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır

(T1). $X, \emptyset \in \mathfrak{S}$,

(T2). $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{S}$

(T3). $A_i \in \mathfrak{S}, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{S}$ (I bir indeks cümlesidir.) [4].

Tanım 1.1.18. Bir X cümlesi ve üzerindeki bir $\mathfrak{S}$ topolojisinden oluşan $(X, \mathfrak{S})$ ikilisine bir topolojik uzay denir [4].

Tanım 1.1.19. n boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ ve $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$ için Lorentz iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_1 &= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\rightarrow \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

ya da

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_2 &= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\rightarrow \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_2 = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\beta_i = \begin{cases} +1, & 1 \leq i \leq n-1 \\ -1, & i = n \end{cases} \quad (1.1.3)$$

ve

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & i = 1 \\ +1, & 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (1.1.4)$$

olarak tanımlanır ve sırasıyla (1.1.1) ve (1.1.2) eşitliklerinde göz önüne alınırsa,

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_1 = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i y_i \quad (1.1.5)$$

ve

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i y_i \quad (1.1.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ve $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ de bir Lorentz iç çarpımı olup, bu fonksiyonlarla birleşen $\mathbb{R}^n$ vektör uzayına da n boyutlu Standart Lorentz Uzayı ya da kısaca Lorentz Uzayı denir ve sırasıyla

$$L^n(n-1, 1) = \{\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1\}$$

ve

$$L^n(1, n-1) = \{\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2\}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi kısalığın hatırı için her iki Lorentz iç çarpım tanımını birleştirip aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz:

Eğer

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_1 \\ \varepsilon_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \end{cases}$$

alınırsa Lorentz iç çarpımı

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i y_i \quad (1.1.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $L^n(n-1,1)$ ya da $L^n(1,n-1)$ yerine $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımı alınarak $L^n = \{\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ gösterimi kullanılacaktır. Buna ilaveten eğer bir M , Lorentz Manifoldu üzerinde $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ve $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ Lorentz iç çarpımları tanımlı ise o zaman M_1 ve M_2 sırasıyla $M_1 = (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ ve $M_2 = (M, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ ile dolayısıyla $M = (M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ şeklinde gösterilecektir [4].

Tanım 1.1.20. $\forall \vec{V} \in L^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle > 0 \text{ ise } \vec{V} \text{ ye space-like vektör,} \\ \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle < 0 \text{ ise } \vec{V} \text{ ye time-like vektör,} \\ \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle = 0, \vec{V} \neq 0 \text{ ise } \vec{V} \text{ ye light-like veya null vektör} \end{aligned}$$

denir [5].

2.1. ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER VE FRENET FORMÜLLERİ

Tanım 2.1.1. Reel eksenin $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığı ile homeomorf olan E^3 Öklid uzayının alt kümesine, E^3 uzayında eğri yayı denir [6].

$$\alpha: I \rightarrow E^n, \quad I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

ifadesinde $\alpha(I) \subset E^n$ e E^n de bir eğri denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir [1].

Tanım 2.1.2. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir [1].

Tanım 2.1.3. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in \text{Sp}\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir.

Her bir V_i , $1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir [1].

Tanım 2.1.4. $\alpha: I \rightarrow E^3$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \text{ eğrisi için}$$

$$\alpha'(t) = E^1 \Rightarrow T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$\text{olur. Çünkü } T = \frac{E_1}{\|E_1\|} \text{ olduğundan } T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \text{ vardır ki bu ifadeye } \alpha(I)$$

eğrisinin teğet vektör alanı denir. T , birim vektördür ve genel anlamda $T = V_1$ dir.

$$\text{Eğer eğri yay parametresi ile verilmişse } \alpha'(s) = E_1 \Rightarrow T = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \alpha'(s) \text{ olur.}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
T'(s) &= (\alpha'(s))' = \alpha''(s) \Rightarrow N(s) = \frac{E_2}{\|E_2\|} \\
\Rightarrow E_2 &= \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} \cdot E_1 \\
\Rightarrow E_2 &= \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', \alpha' \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} \alpha' = \alpha'' \\
\Rightarrow N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}
\end{aligned}$$

olur. Genel anlamda $N(s) = V_2(s)$ dir. Bu son ifadeye asli normal vektör alanı veya birim asli normal vektör alanı denir.

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

olarak tanımlandığından

$$B(s) = \alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

olan $B(s)$ birim vektörüne $\alpha(s)$ eğrisinin s -noktasındaki binormal vektör alanı denir. Genel anlamda $B(s) = V_3(s)$ dir [1].

Tanım 2.1.5. $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$, $B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ vektörlerinden oluşan $\{T, N, B\}$ sistemine Frenet 3-ayaklısı denir [1].

Tanım 2.1.6. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktalarındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
k_i : I &\rightarrow IR \quad , \quad 1 \leq i \leq r \\
s &\rightarrow k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \right\rangle
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir [1].

Teorem 2.1.1. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} 1) V_1'(s) &= k_1(s) \cdot V_2(s) \\ 2) V_i'(s) &= -k_{i-1}(s) \cdot V_{i-1}(s) + k_i(s) \cdot V_{i+1}(s), 1 \leq i \leq r \\ 3) V_r'(s) &= -k_{r-1}(s) \cdot V_{r-1}(s) \end{aligned}$$

olur [1].

Tanım 2.1.7. $\alpha: I \rightarrow E^3$
 $s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$

s yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_1(s) \cdot N(s) \\ N'(s) &= -k_1(s) \cdot T(s) + k_2(s) \cdot B(s) \\ B'(s) &= -k_2(s) \cdot N(s) \end{aligned}$$

formüllerine Frenet Formülleri denir. Burada $k_1 = \kappa, k_2 = \tau$ olursa

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

eşitliği mevcuttur [1].

Tanım 2.1.8. $\alpha: I \rightarrow IR^3$ eğrisi için $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$ değerine $\alpha(s)$ eğrisinin s -noktasındaki eğriliği denir [3].

Tanım 2.1.9. $\alpha: I \rightarrow IR^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere $b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$ eşitliği ile tanımlı $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin s -noktasındaki burulması denir. $k_2(s) = \tau(s)$ burulması, eğrinin düzlemden ne kadar saptığını ölçer [1].

Tanım 2.1.10. $n = 3$ özel halinde $T(s), N(s), B(s)$ Frenet 3-ayaklısını ele alalım

$Sp\{T(s), N(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ noktasındaki afin altuzaya oskülatör düzlem,

$Sp\{N(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ noktasındaki afin altuzaya normal düzlem,

$Sp\{T(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ noktasındaki afin altuzaya rektifiyen düzlem adı verilir [1].

Tanım 2.1.11. $M \subset E^n$ eğrisinin $m \in M$ noktasında M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri olan

$$\alpha = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_1(s_0)} V_2(s_0) + \lambda V_3(s_0)$$

doğrusuna M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki eğrilik eksenini denir.

Eğrilik eksenini üzerindeki

$$c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k_1(s_0)} V_2(s_0)$$

noktasına da M nin $m = \alpha(s_0)$ daki eğrilik merkezi denir [1].

Tanım 2.1.12. $M \subset E^n$ eğrisiyle $m \in M$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye M nin $m \in M$ noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi denir [1].

Tanım 2.1.13. IR^3 uzayında bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olsun. T vektör alanı belirli bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine bir helis denir [1].

Tanım 2.1.14. Sabit eğimli (c) eğrisinin, üzerine çizilmiş bulunduğu silindirin bir dönel silindir olması halinde, (c) eğrisine dairesel helis adı verilir [1].

3.1 İNVLÜT(BASIT) VE EVOLÜT(MEBSUT)

Tanım 3.1.1. $M, N \subset E^n$ iki eğri olsun. M, N sırasıyla (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M, N nin Frenet r-ayaklıları sırasıyla, $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ olmak üzere $\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$ ise; N ye M nin involütü, M ye de N nin evolütü denir [1].

Teorem 3.1.1. $M, N \subset E^n$ eğrileri (I, α) , (I, β) komşulukları ile verilsin. Eğer N, M nin involütü ise $d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|$, $\forall s \in I$ ve $c = sbt$ olur.

İspat. Şekil 3.1.1 yardımıyla $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_1(s)$ yazılabilir. Böylece $s \in I$ nin α için yay parametresi olduğu kabul edilirse

$$\left. \frac{d\beta}{ds} \right|_s = Sp\{V_1^*(s)\}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\langle V_1^*(s), V_1(s) \rangle = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$1 + \lambda'(s) = 0 \Rightarrow \lambda'(s) = -1 \Rightarrow \lambda = -s + c$$

veya

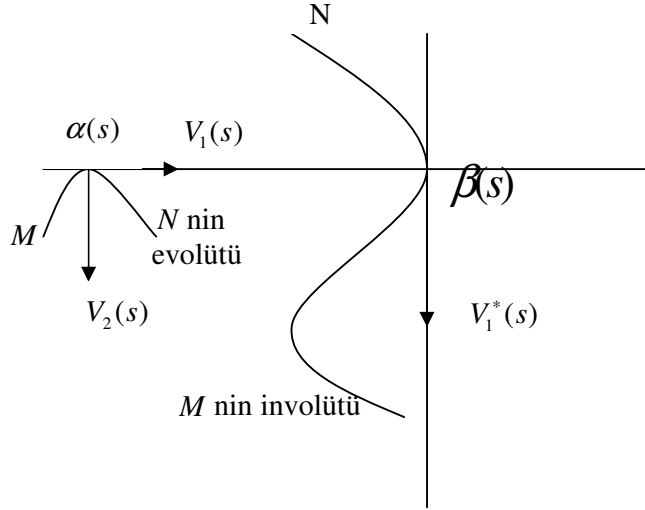
$$\lambda = |c - s|, \forall c = sabit$$

bulunur. Diğer taraftan

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\beta(s) - \alpha(s)\| = \|\lambda V_1(s)\|$$

$$\Rightarrow d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|$$

bulunur. ■



(Şekil 3.1.1)

Teorem 3.1.2. $M, N \subset E^3$ involüt-evolüt eğrileri, $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin Frenet r-ayaklıları sırasıyla; $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$, $\{V_1^*(s), V_2^*(s), V_3^*(s)\}$ ve M nin eğrilik fonksiyonları k_i , $1 \leq i \leq 2$ ayrıca N nin eğrilik fonksiyonları k_i^* , $1 \leq i \leq 2$ ise;

$$k_1^{*2}(s) = \frac{k_1^2(s) + k_2^2(s)}{k_1^2(s) \cdot (c-s)^2}$$

olur.

İspat. Teorem 3.1.1 yardımıyla $\beta(s) = \alpha(s) + (c-s) \cdot V_1(s)$ yazılabilir. M nin yay parametresi $s \in I$ ve N nin yay parametresi s^* ise;

$$V_1^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d\beta}{ds^*} \Big|_{s^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} \Big|_s = (c-s) \cdot k_1(s) \cdot V_2(s)$$

elde edilir. Böylece $\{V_1^*(s), V_2(s)\}$ lineer bağımlıdır. O halde

$$V_1^*(s) = V_2(s)$$

yazılır. Ayrıca

$$\frac{ds^*}{ds} = (c-s) \cdot k_1(s)$$

bulunur.

$$V_1^*(s) = V_2(s) \Rightarrow k_1^*(s) \cdot V_2^*(s) = \frac{1}{(c-s) \cdot k_1(s)} \cdot (-k_1(s) \cdot V_1(s) + k_2(s) \cdot V_3(s))$$

vardır ki eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa

$$k_1^{*2}(s) = \frac{k_1^2(s) + k_2^2(s)}{k_1^2(s) \cdot (c-s)^2}$$

sonucu elde edilir■

4.BERTRAND EĞRİLER

4.1 BERTRAND EĞRİ ÇİFTİ

Tanım 4.1.1. $M, N \in E^n$ eğrileri sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M, \beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin Frenet r-ayaklıları sırasıyla $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}, \{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ olarak verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise; (M, N) eğri 2-lisine bir Bertrand eğri çifti denir [7].

Teorem 4.1.1. (M, N) Bertrand çifti verilsin. M ve N sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ komşulukları ile verildiğinde

$\forall s \in I$ için $d(\alpha(s), \beta(s)) = \text{sabit}$ olur.

İspat. (Şekil 4.1.1) yardımıyla $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$ yazılabilir. Burada M ve N nin sırasıyla $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında Frenet r-ayaklıları $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$, $\{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ ile gösterilmiştir.

$$\frac{ds^*}{ds} \cdot V_1^*(s) = [1 - \lambda(s)k_1(s)] \cdot V_1(s) + \lambda'(s)V_2(s) + \lambda(s)k_2(s)V_3(s)$$

yazılabilir. $\{V_2^*(s), V_2(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan

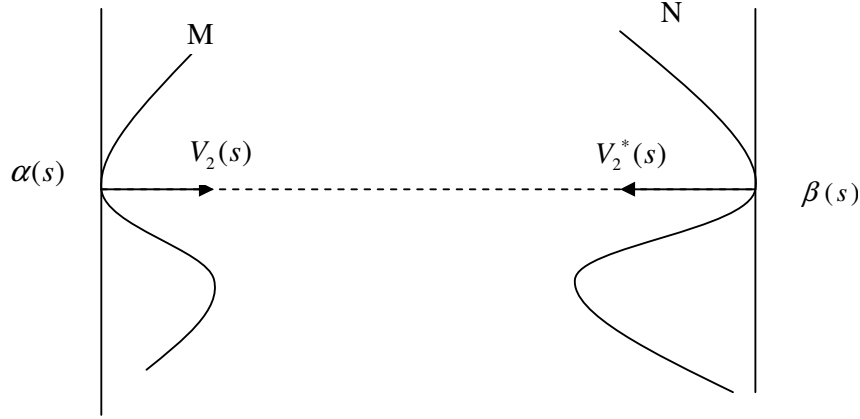
$$\langle V_1^*(s), V_2(s) \rangle = 0 \Rightarrow \lambda'(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = \text{sabit}, \forall s \in I$$

bulunur. Halbuki

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\beta(s) - \alpha(s)\| = \|\lambda V_2(s)\| = |\lambda|, \forall s \in I$$

$$\Rightarrow d(\alpha(s), \beta(s)) = \text{sabit}, \forall s \in I$$

elde edilir.



(Şekil 4.1.1)

Teorem 4.1.2. $M, N \subset E^3$ eğrileri $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşuluklarıyla verilsin. M nin eğrilikleri k_1, k_2 ise;

(M, N) Bertrand çiftidir $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$ dir.

İspat. $(\Rightarrow)$: $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N nin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$, $\{V_1^*(s), V_2^*(s), V_3^*(s)\}$ olsun. Buna göre $V_1^*(s)$ ile $V_1(s)$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$V_1^*(s) = \cos \theta \cdot V_1(s) + \sin \theta \cdot V_3(s)$$

yazılabilir. Türev alarak bu eşitlik

$$\frac{ds^*}{ds} \cdot k_1^*(s) \cdot V_2^*(s) = [k_1(s) \cos \theta - k_2(s) \sin \theta] V_2(s) + \frac{d(\cos \theta)}{ds} \cdot V_1(s) + \frac{d(\sin \theta)}{ds} \cdot V_3(s)$$

şeklinde yazılır. $\{V_2^*(s), V_2(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan $\theta = \text{sabit}$ olur ki

$$V_1^*(s) = \cos \theta V_1(s) + \sin \theta V_3(s)$$

ve

$$\beta'(s) = \frac{ds^*}{ds} \cdot V_1^*(s) = (1 - \lambda k_1(s)) V_1(s) + \lambda k_2(s) V_3(s)$$

eşitliklerinden

$$\frac{1 - \lambda k_1(s)}{\cos \theta} = \frac{\lambda k_2(s)}{\sin \theta}$$

elde edilir. Bu ise

$$(1 - \lambda k_1(s)) \sin \theta = \lambda k_2(s) \cos \theta$$

$$1 - \lambda k_1(s) = \lambda k_2(s) \cot \theta$$

$$\Rightarrow \lambda k_1(s) + \lambda k_2(s) \cot \theta = 1$$

ve

$$\lambda \cot \theta = \mu$$

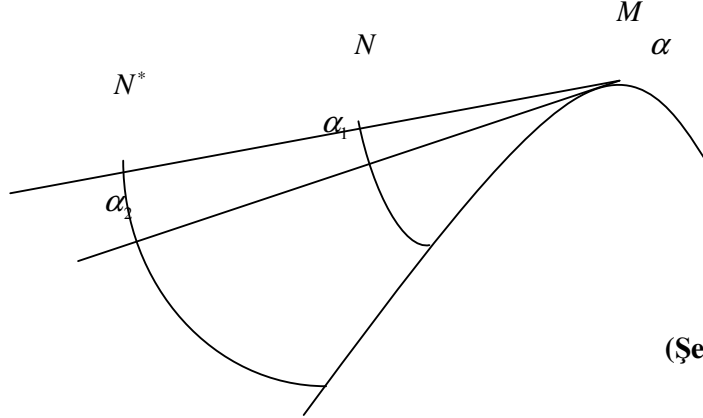
yazılıp

$$\Rightarrow \lambda k_1(s) + \mu k_2(s) = 1$$

sonucuna ulaşılır.

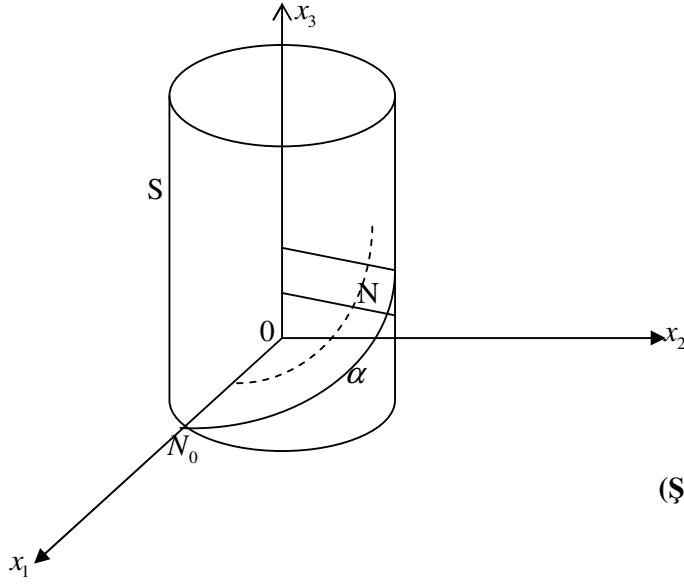
($\Leftarrow$): Tersine şartın yeterliliği, gerek şartın ispatını tersine takip ederek gösterilebilir.

Örnek 4.1.1. Bir α düzlem eğrisinin teğetlerine normal sonsuz eğriden α_1, α_2 (Şekil 4.1.2) gibi herhangi ikisinin asal normalleri bu eğriler boyunca ortaktır. Başka bir deyişle denilebilir ki düzlemde birbirine paralel herhangi iki α_1, α_2 eğrisi bir Bertrand çifti oluştururlar.



(Şekil 4.1.2)

Örnek 4.1.2. Bir dairesel helisle üzerinde bulunduğu dönel silindirin eksenini bir Bertrand eğri çifti meydana getirir. (Bakınız: Şekil 4.1.3)



(Şekil 4.1.3)

Örnek 4.1.3. Eğriliği sabit olan bir eğri ile bunun eğrilik merkezlerinin geometrik yerinin asal normalleri ortaktır. Bunlarda birer Bertrand eğri çifti oluştururlar.

4.2 BERTRAND EĞRİLERİNİN BELİRLENMELERİ

Tanım aralığında en az C^3 sınıfından bir α eğrisinin binormalleri ile tanımlanan

$$x_1(s) = \int a_3(s) \cdot d_3 \quad (4.1)$$

α_1 eğrisinin Frenet vektörleri a_p^1 , yayı s_1 , eğrilik ve burulması da ρ_1, τ_1 olsun. Bu takdirde s_1 yay uzunluğu s ye eşittir. Gerçekten (4.1) in iki yanının s ye göre türevini alırsak , $s_1' a_1^1 = a_3$ olur. α eğrisinin pozitif dolanım yönünü

$$a_1^1 = a_3 \quad (4.2)$$

olacak biçimde seçersek

$$s_1' = 1 \text{ veya } s_1 = s \text{ (integrasyon sabiti=0)} \quad (4.3)$$

bulunur. Üstelik $x = x(s)$ denklemleriyle tanımlanan α eğrisinin eğriliği sabitse

$$x_2 = x \cos \theta - x_1 \sin \theta, (\theta = \text{sabit}) \quad (4.4)$$

vektörel bağıntısı ile tanımlanan α_2 eğrisi bir Bertrand eğrisidir. Gerçekten E_2 nin çeşitli elemanları da $s_2, a_p^2, \rho_2, \tau_2$ olsun. (4.4) ün her iki yanının s ye göre türevi, (4.3) gereği

$$s_2' a_1^2 = a_1 \cos \theta - a_1^1 \sin \theta$$

sonucunu verir. a_1^2 yi (4.2) yardımıyla

$$a_1^2 = a_1 \cos \theta - a_3 \sin \theta \quad (4.5)$$

olacak biçimde seçersek

$$s_2' = 1 \quad \text{veya} \quad s_2 = s \quad (\text{integrasyon sabiti}=0) \quad (4.6)$$

olacağından, (4.5) in s ye göre türevinden (4.2) nedeniyle

$$\rho_2 a_2^2 = (\rho \cos \theta - \rho_1 \sin \theta) a_2^1 = (\rho \cos \theta + \tau \sin \theta) a_2$$

olur. Eğer

$$a_2^2 = a_1^1 = a_2 \quad (4.7)$$

olarak alırsak

$$\rho_2 = \rho \cos \theta + \tau \sin \theta \quad (4.8)$$

bulunur. (4.5) ve (4.7) eşitlikleri

$$a_1^2 \wedge a_2^2 = a_3^2 = a_3 \cos \theta + a_1 \sin \theta \quad (4.9)$$

olacağından bunun s ye göre türevinden (4.7) gereği

$$\tau_2 = \tau \cos \theta - \rho \sin \theta \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.8) ve (4.10) arasında τ yok edilince ρ_2 ile τ_2 lineer ve sabit katsayılı

$$\rho_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta = \rho \quad (4.11)$$

bağıntısı bulunur ki bu da α_2 nin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir. (4.10) ve (4.11) karşılaştırıldığında θ nın aynı anlamı taşıdığı ve λ nın

$$\lambda = R \cos \theta \quad (4.12)$$

ya eşit olduğu görülür. α eğrisinin teğetler göstergesi $y_1 = a_1(s)$ ise binormali $Ry_1 \wedge \frac{dy_1}{ds} = a_3$ olur ve

$$x = \int y_1 ds = \int y_1 \frac{ds}{ds'} ds' = R \int y_1 \left| \frac{dy_1}{dt} \right| dt \Rightarrow x_1 = \int a_3 ds = R \int y_1 \wedge \frac{dy_1}{dt} dt$$

yazılabileceğinden (4.4) ile tanımlanan E_2 eğrisinin yer vektörü

$$x_2 = R[\cos \theta \int y_1 \left| \frac{dy_1}{dt} \right| dt - \sin \theta \int y_1 \wedge \frac{dy_1}{dt} dt] \quad (4.13)$$

olarak bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1. $y_1 = y_1(s)$ eğrisi, birim küresinin kendi tanım aralığında en az 2. sınıftan herhangi bir eğrisini gösterdiğine göre R ve θ sabit olmak üzere (4.13) denklemleriyle bir Bertrand eğrisi tanımlanmış olur. Bu eğrinin eğriliği ile burulması arasında (4.11) bağıntısı vardır ve $\lambda = R \cos \theta$ dır. Bu eğri ile bir çift oluşturan eğrinin homolog noktalarındaki teğetler arasındaki açı $\frac{\pi}{2} - \theta$ olur.

5.ZAYIF BERTRAND EĞRİLER

5.1 ZAYIF BERTRAND EĞRİLERİ

Tanım 5.1.1. ϕ, ψ, χ ; C^r sınıfından ($r=1,2,\dots$, veya ∞ veya w) ise eğriye C^r sınıfındandır denir [8].

Tanım 5.1.2. ϕ, ψ, χ ; C^r sınıfından ve $\phi^2 + \psi^2 + \chi^2 \neq 0$ ise eğriye C^r regüler eğri denir [8].

Önerme 5.1.1. Bir C^r sınıfından regüler eğri σ için aşağıdaki şartlardan biri gerek ve yeterdir:

(i) σ nın her bir noktası f ve g , C^r sınıfından fonksiyonlar olmak üzere $y = f(x)$, $z = g(x)$ şeklinde parametrelendirilebilen bir komşuluğa sahiptir.

(ii) σ , s yay parametresi cinsinden (ϕ, ψ, χ) parametrizasyonuna sahiptir ve $\phi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 1$ dir.

Tanım 5.1.3. C^∞ sınıfından olan Frenet eğrisi ; $\sigma : x(s), s \in L$ regüler eğrisi için $t(s) = x'(s)$ olmak üzere

$$t' = k_1 n$$

$$n' = -k_1 t + k_2 b$$

$$b' = -k_2 n$$

Frenet denklemlerini sağlayan $k_1(s), k_2(s)$ skaler fonksiyonları σ nın , sırasıyla , eğriliği ve pseudo-torsiyonu olacak şekilde $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ortonormal çatılı bir eğri olarak tanımlanır [8].

Tanım 5.1.4. Bir C^∞ Frenet eğrisi $\sigma : x(s)$ ve diğer bir C^∞ Frenet eğrisi de $\tilde{\sigma} : \tilde{x}(s)$ olsun. Burada $\tilde{x}(s)$, C^∞ sınıfından ve $\tilde{x} \neq 0$ dır.

Eğer σ ve $\tilde{\sigma}$ nın karşılık gelen noktalarında $n, \tilde{n}$ asli normalleri lineer bağımlı ise σ ve $\tilde{\sigma}$ ya Frenet Bertrand eğrisi denir. $\tilde{\sigma}$ ye , σ nın bir FB (Frenet Bertrand) eşlenik eğrisi denir [8].

Tanım 5.1.5. $\sigma : x(s)$, $s \in L$ bir C^∞ regüler eğri olsun. Diğer bir C^∞ regüler eğri $\tilde{\sigma} : \tilde{x}(\tilde{s})$, $\tilde{s} \in \tilde{L}$ için

(i) L nin iki kapalı ayrık Z, N alt cümleleri

L/N üzerinde $\sigma \in C^\infty$,

Z üzerinde $(d\tilde{s}/ds)=0$,

$\sigma(L/Z)$ üzerinde $\sigma^{-1} \in C^\infty$,

$\sigma(N)$ üzerinde $(ds/d\tilde{s})=0$

olacak şekilde mevcut

(ii) σ ve $\tilde{\sigma}$ nin s , $\tilde{s}$ noktalarına karşılık gelen doğruları, sırasıyla, σ ve $\tilde{\sigma}$ ya ortogonal ve σ veya $\tilde{\sigma}$ ya aslinormal olacak şekilde $\sigma: L \rightarrow \tilde{L}$ homeomorfizmi mevcut ise σ ya Zayıf Bertrand eğri denir. $\tilde{\sigma}$ ya da σ nin WB (Weakened-Zayıf Bertrand) Eşleniği denir [8].

Tanım 5.1.6. D bir X topolojik uzayında alt cümle olsun. $X \rightarrow Y$ bir fonksiyon için eğer D nin her bir bileşeni üzerinde sabit ise bu fonksiyona D-parçalı sabittir denir [8].

Yardımcı Teorem 5.1.1. X bir reel doğru üzerinde uygun bir aralık ve X in bir açık alt cümlesi D olsun. X üzerinde D-parçalı sabit reel fonksiyonun sabit ve sürekli olması için gerek ve yeter şart $X \setminus D$ nin kendi çekirdeği üzerinde boş yoğunluğa sahip olmasıdır.

Eğer D , X de yoğun ise D kendi çekirdeği içinde boştan farklı yoğunluğa sahip olsa bile X üzerinde herhangi bir C^1 ve D -parçalı sabit reel fonksiyon sabit olmalıdır [8].

Teorem 5.1.1. Kendi çekirdeklerinde boş yoğunluğa sahip N ve Z için bir WB(zayıf Bertrand) eğri bir FB(Frenet Bertrand) eğrisidir.

İspat. $\sigma: x(s)$, $s \in L$ bir WB eğri ve σ nin WB eşleniği $\tilde{\sigma}: \tilde{x}(\tilde{s})$, $\tilde{s} \in \tilde{L}$ olsun. Bu takdirde σ ve $\tilde{\sigma}$, $t(s)$, $\tilde{t}(\tilde{s})$ teğet vektörlerinin bir C^∞ ailesine sahiptir.

$$\tilde{x}(\tilde{s}) = \tilde{x}(\sigma(s)) = x(s) + \lambda(s).n(s) \quad (5.1.1)$$

olsun. Burada $n(s)$ birim vektör ve $\lambda(s) \geq 0$ bir skaler fonksiyondur. $D = L \setminus N$, $\tilde{D} = \tilde{L} \setminus \sigma(z)$ için D üzerinde $\tilde{s}(s) \in C^\infty$ ve $\tilde{D}$ üzerinde $s(\tilde{s}) \in C^\infty$ olur.

1.Adım $\lambda = sbt$ olduğunu ispatlayalım.

$\lambda = |\tilde{x} - x|$ olduğundan L üzerinde sürekli ve D nin her aralığı üzerinde C^∞ sınıfındandır ve her yerde sıfırdan farklıdır. $P = \{s \in L : \lambda(s) \neq 0\}$ ve P nin herhangi bir bileşeni X olsun. Bu takdirde P ve dolayısıyla X , L de bir açıktır. $X \cap D$ nin herhangi bir bileşen aralığı I iken $\lambda(s)$ ve $n(s)$, I üzerinde C^∞ sınıfındandır ve (5.1.1) den

$$\tilde{x}'(s) = x'(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)n'(s)$$

olur. WB eğrisinin tanımından $\langle x'(s), n(s) \rangle = 0 = \langle \tilde{x}'(s), n(s) \rangle$ elde ederiz.

2.Adım σ ve $\tilde{\sigma}$ için sırasıyla D ve $\tilde{D}$ üzerinde $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $\{\tilde{t}(\tilde{s}), \tilde{n}(\tilde{s}), \tilde{b}(\tilde{s})\}$ çatılarının mevcut olduğunu ispatlayalım.

λ , sıfırdan farklı bir sabit olduğundan (5.1.1) den görülür ki $n(s)$, D üzerinde C^∞ sınıfındandır ve L üzerinde sürekli ayrıca $t(s)$ e WB eğri tanımı gereği ortogonaldır.

Şimdi $b(s) = t(s) \times n(s)$ tanımlayalım. Bu takdirde $\{t(s), n(s), b(s)\}$, σ için bir sağ yönlendirilmiş ortonormal çatıdır. Bu çatı L üzerinde sürekli, D üzerinde C^∞ sınıfındandır. WB eğri tanımından L üzerinde $t'(s) = k_1(s) \cdot n(s)$ olacak şekilde bir $k_1(s)$ skaler fonksiyonu mevcuttur. Dolayısıyla $k_1(s) = t'(s) \cdot n(s)$ L üzerinde sürekli ve D üzerinde C^∞ sınıfındandır. Böylece D üzerinde 1.Frenet Formülü sağlanır. Benzer şekilde D üzerinde Frenet formülü sağlanacak şekilde bir $k_2(s)$, C^∞ fonksiyonunun mevcut olduğu gösterilebilir. Bu durumda $\{t(s), n(s), b(s)\}$ D üzerinde σ için bir Frenet çatısıdır.

Benzer şekilde $\tilde{L}$ üzerinde sürekli ve $\tilde{D}$ üzerinde $\tilde{\sigma}$ için bir Frenet çatısı olacak şekilde bir sağ yönlendirilmiş, $\{\tilde{t}(\tilde{s}), \tilde{n}(\tilde{s}), \tilde{b}(\tilde{s})\}$ ortonormal çatısı mevcuttur. Üstelik $\tilde{n}(\sigma(s)) = n(s)$ seçebiliriz.

3.Adım $N = \emptyset, Z = \emptyset$ olduğunu ispatlayalım.

D üzerinde $\left(\langle t, \tilde{t} \rangle \right)' = t \cdot \tilde{s}' \cdot \tilde{k}_1 \cdot \tilde{n} + k_1 \cdot n \cdot \tilde{t} = 0$ elde ederiz. Öyle ki $\langle t, \tilde{t} \rangle$, D nin her bir bileşeni üzerinde sabittir ve Lemma 5.1.1 den dolayı L üzerinde sabit olur. Dolayısıyla L üzerinde $\tilde{t}(s) = \cos \alpha \cdot t(s) + \sin \alpha \cdot b(s)$ olacak şekilde bir sabit α açısı mevcuttur. Ayrıca $\tilde{n}(s) = n(s)$ ve böylece $\tilde{b}(s) = -\sin \alpha \cdot t(s) + \cos \alpha \cdot b(s)$ olur. Buradan $\tilde{t}(s), \tilde{n}(s), \tilde{b}(s)$ D üzerinde C^∞ sınıfındandır. Diğer taraftan $\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b}$ $\tilde{D}$ üzerinde $\tilde{s}$ ye göre C^∞ sınıfındandır. $X = \tilde{X} - \lambda \cdot \tilde{n}$ şeklinde yazılır ve $D \cap \sigma^{-1}(\tilde{D})$ üzerinde s ye göre türevi alınırsa

$$t = \tilde{s}' \left[(1 + \lambda \tilde{k}_1) \tilde{t} - \lambda \tilde{k}_2 \tilde{b} \right]$$

elde edilir. Fakat $t = \cos \alpha \tilde{t} - \sin \alpha \tilde{b}$ olur. Buradan

$$\tilde{s}' (1 + \lambda \tilde{k}_1) = \cos \alpha \quad (5.1.2)$$

bulunur. $\tilde{k}_1(\tilde{s}) = (d\tilde{t}/d\tilde{s}).\tilde{n}$ şeklinde tanımlandığından ve $\tilde{k}_1(\tilde{s})$, $\tilde{L}$ üzerinde sürekli olduğundan ayrıca $\sigma^{-1}(\tilde{D})$ yoğun olduğundan (5.1.2) nin D boyunca sağlandığı görülür.

1.Hal: $\cos \alpha \neq 0$ olsun.

Bu takdirde (5.1.2) den D üzerinde $\tilde{s}' \neq 0$ dır. Dolayısıyla $Z = \emptyset$ ve benzer şekilde $N = \emptyset$ olur.

2.Hal: $\cos \alpha = 0$ olsun.

Bu takdirde

$$\tilde{t} = \pm b \quad (5.1.3)$$

olur. (5.1.1) in D de s ye göre türevi alınırsa;

$$\tilde{s}' \tilde{t} = (1 - \lambda k_1)t + \lambda k_2 b$$

olur. (5.1.3) kullanılarak $1 - \lambda k_1 = 0$ olur. Dolayısıyla D üzerinde ve aynı zamanda

Yardımcı Teorem 5.1.1 den L üzerinde $k_1 = 1/\lambda$ olur. Buradan görülür ki L üzerinde k_1 , her yerde sıfırdan farklıdır. $\varepsilon = \pm k_1$ işareti olsun, bu takdirde

$$n(s) = \frac{1}{k_1(s)} \cdot t'(s) = \varepsilon \cdot \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|}$$

olup, L üzerinde C^∞ sınıfındandır. Sonuç olarak $\tilde{x}(s) = x(s) + \lambda n(s)$, L üzerinde C^∞ sınıfındandır. Dolayısıyla $N = \emptyset$ ve benzer olarak $Z = \emptyset$ olur. ■

5.2 LORENTZ UZAYINDA ZAYIF BERTRAND EĞRİLER ÜZERİNE BİR KARAKTERİZASYON

Bu bölümde x , L^3 Lorentz Uzayında

$$\begin{aligned} t' &= k_1 n \\ n' &= k_1 t + k_2 b \\ b' &= -k_2 n \end{aligned}$$

(spacelike, timelike, spacelike) tipinde bir çatıya sahip regüler C^∞ sınıfından eğri olsun. $x, \tilde{x}$ da , sırasıyla , s ve $\tilde{s}$ yay parametrelerine sahip olan zayıf Bertrand eğri çifti olsun.

Teorem 5.2.1. Kendi çekirdeklerinde boş yoğunluğa sahip N ve Z için L^3 Lorentz Uzayında (spacelike, timelike, spacelike) tipinde bir çatıya sahip olan bir WB (zayıf Bertrand) eğri bir FB (Frenet Bertrand) eğrisidir.

İspat. $\sigma: x(s)$, $s \in L$ bir WB eğri ve σ nın WB eşleniği $\tilde{\sigma}: \tilde{x}(\tilde{s})$, $\tilde{s} \in \tilde{L}$ olsun. O zaman σ ve $\tilde{\sigma}$, $t(s)$ ve $\tilde{t}(\tilde{s})$ teğet vektörlerinin bir C^∞ ailesine sahiptir.

$$\tilde{x}(s) = \tilde{x}(\sigma(s)) = x(s) + \lambda(s)n(s) \quad (5.2.1)$$

olsun. Burada $n(s)$ birim vektör ve $\lambda(s) \geq 0$ bir skaler fonksiyondur. $D=LN$, $\tilde{D} = \tilde{L} \setminus \sigma(Z)$ olsun. Böylece D üzerinde $\tilde{s}(s) \in C^\infty$ ve $\tilde{D}$ üzerinde $s(\tilde{s}) \in C^\infty$ olur.

1.Adım $\lambda = sbt$ olduğunu ispatlayalım.

$\lambda = |\tilde{x} - x|$ olduğundan L üzerinde süreklidir ve D nin her aralığı üzerinde C^∞ sınıfındandır ve her yerde sıfırdan farklıdır. $P = \{s \in L : \lambda(s) \neq 0\}$ ve P nin herhangi bir bileşeni X olsun. Bu takdirde P ve dolayısıyla X , L de bir açıktır. $X \cap D$ nin herhangi bir bileşen aralığı I olsun. O zaman I üzerinde $\lambda(s)$ ve $n(s)$, C^∞ sınıfındandırlar ve (5.2.1) den

$$\tilde{x}'(s) = x'(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)n'(s)$$

olur. WB eğrisinin tanımından $x'(s).n(s) = 0 = \tilde{x}'(s).n(s)$ elde ederiz.

2.Adım σ ve $\tilde{\sigma}$ için, sırasıyla, D ve $\tilde{D}$ üzerinde $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $\{\tilde{t}(\tilde{s}), \tilde{n}(\tilde{s}), \tilde{b}(\tilde{s})\}$ çatılarının mevcut olduğunu ispatlayalım.

λ , sıfırdan farklı bir sabit olduğundan (5.2.1) den görülür ki $n(s)$, D üzerinde C^∞ sınıfındandır ve L üzerinde süreklidir ayrıca $t(s)$ e WB eğri tanımı gereği ortogonaldır.

Şimdi $b(s) = t(s) \times n(s)$ tanımlayalım. Bu takdirde $\{t(s), n(s), b(s)\}$, σ için bir sağ yönlendirilmiş ortonormal çatıdır. Bu çatı L üzerinde sürekli ve D üzerinde C^∞ sınıfındandır.

WB eğri tanımından L üzerinde $t'(s) = k_1(s).n(s)$ olacak şekilde bir $k_1(s)$ skaler fonksiyonu mevcuttur. Dolayısıyla $k_1(s) = t'(s).n(s)$ L üzerinde sürekli ve D üzerinde C^∞ sınıfındandır. Böylece D üzerinde 1.Frenet formülü sağlanır. Benzer şekilde D üzerinde Frenet formülü sağlanacak şekilde bir $k_2(s)$, C^∞ fonksiyonunun mevcut olduğu gösterilebilir. Bu durumda $\{t(s), n(s), b(s)\}$ D üzerinde σ için bir Frenet çatısıdır.

Benzer şekilde $\tilde{L}$ üzerinde sürekli ve $\tilde{D}$ üzerinde $\tilde{\sigma}$ için bir Frenet çatısı olacak şekilde bir sağ yönlendirilmiş, $\{\tilde{t}(\tilde{s}), \tilde{n}(\tilde{s}), \tilde{b}(\tilde{s})\}$ ortonormal çatısı mevcuttur. Üstelik $\tilde{n}(\sigma(s)) = n(s)$ seçebiliriz.

3.Adım $N = \emptyset, Z = \emptyset$ olduğunu ispatlayalım.

D üzerinde $\left(\langle t, \tilde{t} \rangle\right)' = t \cdot \tilde{s}' \cdot \tilde{k}_1 \cdot \tilde{n} + k_1 \cdot n \cdot \tilde{t} = 0$ elde ederiz. Öyle ki $\langle t, \tilde{t} \rangle$, D nin her bir bileşeni üzerinde sabittir ve Yardımcı Teorem 5.1.1 den dolayı L üzerinde sabittir. Dolayısıyla L üzerinde $\tilde{t}(s) = \cosh \alpha \cdot t(s) + \sinh \alpha \cdot b(s)$ olacak şekilde bir sabit α açısı mevcuttur. Ayrıca $\tilde{n}(s) = n(s)$ ve böylece $\tilde{b}(s) = \sinh \alpha \cdot t(s) + \cosh \alpha \cdot b(s)$ olur. Böylece $\tilde{t}(s), n(s), \tilde{b}(s)$ D üzerinde C^∞ sınıfındandır başka bir deyişle $\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b}$ $\tilde{D}$ üzerinde $\tilde{s}$ ya göre C^∞ sınıfındandır. (5.2.1) denklemini $x = \tilde{x} - \lambda \tilde{n}$ şeklinde yazarak ve $D \cap \sigma^{-1}(\tilde{D})$ üzerinde s ye göre türev alarak $t = \tilde{s}'[(1 - \lambda \tilde{k}_1)\tilde{t} - \lambda \tilde{k}_2 \tilde{b}]$ elde ederiz. Fakat $t = \cosh \alpha \cdot \tilde{t} + \sinh \alpha \cdot \tilde{b}$ dır. Buradan $\tilde{s}'(1 - \lambda \tilde{k}_1) = \cosh \alpha$ dır. Öyleyse $\tilde{k}_1(\tilde{s}) = \left(\frac{d\tilde{t}}{d\tilde{s}}\right) \cdot \tilde{n}$, $\sigma^{-1}(\tilde{D})$ üzerinde yoğun ve L üzerinde sürekli tanımlandığı için D boyunca süreklilik ile (5.1.2) sağlanır.

1.Hal: $\cosh \alpha \neq 0$ olsun.

O zaman (5.1.2) den D üzerinde $\tilde{s}' \neq 0$ ifadesini gerektirir. Buradan $Z = \emptyset$ ve benzer şekilde $N = \emptyset$ olur.

2.Hal: $\cosh \alpha = 0$ olsun.

O zaman $\tilde{t} = \pm b$ olur. Öyleyse D de s ye göre (5.2.1) in türevi alınarak $\tilde{s}'\tilde{t} = (1 + \lambda \tilde{k}_1)t + \lambda k_2 b$ elde edilir. Buradan (5.1.3) ü kullanarak $1 + \lambda \tilde{k}_1 = 0$ bulunur.

Böylece Yardımcı Teorem 5.1.1 ile D üzerinde ve aynı zamanda L üzerinde $k_1 = \frac{-1}{\lambda}$ olur.

Bu sayede L üzerinde k_1 , hiçbir yerde sıfır değildir. $\varepsilon = \pm k_1$ in işareti olsun. Bu takdirde

$$n(s) = \frac{1}{k_1(s)} \cdot t'(s) = \varepsilon \cdot \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|} \text{ olup L üzerinde } C^\infty \text{ sınıfındandır.}$$

Sonuç olarak $\tilde{x}(s) = x(s) + \lambda \cdot n(s)$, L üzerinde C^∞ sınıfındandır.

Dolayısıyla $N = \emptyset$ ve benzer şekilde $Z = \emptyset$ olur. ■

Örnek 5.2.1. Karşılıklı noktalardaki teğetleri φ açısı yapan $(x, \tilde{x})$ zayıf Bertrand eğri çifti için $k_2 = 0$ ise her eğrinin sonsuz sayıda zayıf Bertrand eğri çifti vardır.

ÇÖZÜM: $k_2 = 0$ ise $(x, \tilde{x})$ zayıf Bertrand eğri çifti olacak şekilde sonsuz çoklukta $\tilde{x}$ nın mevcut olduğunu gösterelim. Bunun için $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ye karşılık $\tilde{x}(s) = x(s) + \lambda \cdot n(s)$ olmak üzere $(x, \tilde{x})$ nın bir zayıf Bertrand eğri çifti olduğunu göstermek yeter.

$$\tilde{x}'(s) = \frac{d\tilde{s}}{ds} = t(s) + \lambda.(k_1(s).t(s) + 0.b(s))$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{s}}{ds} \tilde{t}(s) = (1 + \lambda k_1(s)).t(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{t}(s) = \pm t(s)$$

olup $k_2 = 0$ iken x , düzlemsel olduğundan $\tilde{x}$ Bertrand eğri tanımından x in oskütör düzlemi olarak x in yattığı düzlemde kalır ve böylece $\tilde{k}_2 = 0$ dır. O halde x ve $\tilde{x}$ nın Frenet 2-ayaklıları mevcuttur halbuki $\tilde{t} = \pm t$ dir. O halde x ve $\tilde{x}$ nın 2- Frenet vektörleri lineer bağımlı olur. Buna göre $(x, \tilde{x})$ birer zayıf Bertrand çifti oluştururlar.

6.1 UYGULAMALAR

Örnek 6.1.1. Düzlemsel bir eğrinin evolütlerinin birer helis olduklarını ispatlayınız.

ÇÖZÜM: Önce α nın düzlemsel ve α nın evolütesinin de düzlemsel bir eğri olması halini ele alalım. Bu durumda $V_1^* = V_2$ dir. Böylece

$$\alpha(s) = \beta(s) + \lambda V_1^*(s) \Rightarrow \beta(s) = \alpha(s) - \lambda V_2(s)$$

$$\Rightarrow V_1^* \frac{ds^*}{ds} = \beta'(s) = V_1(s) - \lambda V_2(s) + \lambda k_1(s) V_1(s)$$

ve $V_1^* \perp V_1$ olduğundan

$$1 + \lambda k_1(s) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{k_1(s)}$$

olur. O halde

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_1(s)} V_2(s)$$

olur. α nın düzlemsel evolütesi eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir. α , düzlemsel olmasına rağmen α nın düzlemsel olmayan bir evolütesi β ise

$$\beta(s) = \alpha(s) - \lambda V_1^* \Rightarrow V_1^* = V_1 \frac{ds}{ds^*} - \lambda k_1^* V_2^* + V_1^*, \frac{d\lambda}{ds^*} = -1$$

$$\Rightarrow V_1 \frac{ds}{ds^*} - \lambda k_1^* V_2^* = 0$$

$$\Rightarrow V_1 ds = \lambda k_1^* V_2^* ds^*$$

$$\Rightarrow V_1 = \pm V_2^*$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} f = \langle V_1^*, V_1 \wedge V_2 \rangle &\Rightarrow f' = \frac{df}{ds} = \left\langle k_1^* V_1^* \frac{ds^*}{ds}, V_1 \wedge V_2 \right\rangle + \langle V_1^*, k_1 V_1 \wedge V_2 + V_1 \wedge (-k_1 V_1) \rangle \\ &= k_1^* \frac{ds^*}{ds} \langle V_2^*, V_1 \wedge V_2 \rangle \\ &= k_1^* \frac{ds^*}{ds} \det(V_2^*, V_1, V_2) \quad ; V_1 = \pm V_2^* \\ &= 0 \Rightarrow f = \text{sabit} \Rightarrow \angle(V_1^*, V_1 \wedge V_2) = \text{sabit} \end{aligned}$$

olur. O halde β nın hız vektörü α nın düzlemsel bir normali ile daima sabit açı yapacağından β bir helistir. Şu halde α düzlemsel eğrisinin düzlemsel olmayan evolütleri birer helis eğrileridir.

Örnek 6.1.2. Bir helisin involütlerinden her birinin birer düzlem eğri olduklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM: α nın involütlerinden biri β ve β nın ikinci eğriliği $k_2^*(s)$ olsun.

$$k_2^* = \frac{k_1 k_2' - k_1' k_2}{k_1 (k_1^2 + k_2^2)(c - s)}$$

olur. α , bir helis olduğundan

$$\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit} \Rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0 \quad \text{olacağından} \quad k_2^* = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Böylece β bir düzlem eğridir.

Örnek 6.1.3. E^3 te 3.sınıftan dif.bilen bir regüler eğri α ve α nın k_2 eğriliği $\neq 0$ olsun. α eğrisi bir dairesel helistir $\Leftrightarrow \alpha$ eğrisi birden fazla Bertrand eğri çiftine dahildir.

ÇÖZÜM: $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, s) \Rightarrow \alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1)$

$$\Rightarrow \|\alpha'(s)\| = 1$$

olup α nın yay parametresi s dir.

$$\alpha''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0) \Rightarrow V_2(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

olup α nın Bertrand çifti olarak karşılığı $\lambda = \frac{2}{\sqrt{2}}$ için

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, s) + \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0) \\ \Rightarrow \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, s)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\gamma(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos s, \sin s, 2s)$ eğrisi için

$$\gamma'(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-\sin s, \cos s, 2)$$

dir. $\|\alpha'(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5} = \text{sabit}$ ve böylece

$$\gamma''(s) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-\cos s, -\sin s, 0) \Rightarrow V_2(s) = -(\cos s, \sin s, 0)$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos s, \sin s, 2s) + \frac{2}{2\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0) \\ \Rightarrow \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, s)\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak β eğrisi hem α hem de γ nın Bertrand çiftine dahildir.

Örnek 6.1.4. $M, N \subset E^3$ olmak üzere (M, N) bir Bertrand çifti olsun. Bu durumda M ile N nin ikinci eğrilik fonksiyonlarının çarpımının sabit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: (M, N) Bertrand eğri çifti verilsin. M ile N sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verildiğine göre $\beta(s) = \alpha(s) + LV_2$ dir. Burada L sabiti bir reel sayıdır. α üzerinde kurulan Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$ Frenet eğrilikleri k_1^*, k_2^* olsun.

$$k_2^* = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2}$$

dir.

$$\beta' = V_1 + k_1 LV_2$$

$$\beta'' = k_1 V_2 + k_1' LV_2 + k_1 L(-k_1 V_1 + k_2 V_3) = -k_1^2 LV_1 + (k_1 + k_1' L)V_2 + k_1 k_2 LV_3$$

$$\begin{aligned} \beta''' = & -2k_1 2k_1' LV_1 - k_1^2 Lk_1 V_2 + (k_1' + k_1'' L)V_2 + (k_1 + k_1' L)(-k_1 V_1 + k_2 V_3) \\ & + k_1' k_2 LV_3 + k_1 k_2' LV_3 + k_1 k_2 L(-k_2 V_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta''' = (-2k_1 k_1' L - k_1^2 - k_1 k_1' L)V_1 + (-k_1^2 Lk_1 + k_1' + k_1'' L - k_1 k_2^2 L)V_2 + (k_1' k_2 L + k_1 k_2' L)V_3$$

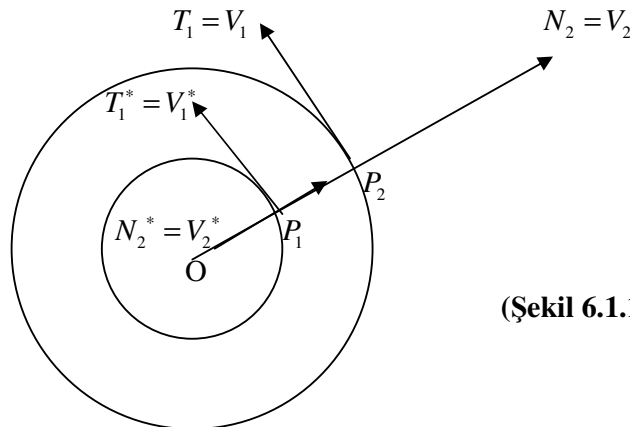
$$\Rightarrow \beta''' = (-3k_1 k_1' L - k_1^2)V_1 + (-k_1^3 L - k_1 k_2^2 L + k_1' + k_1'' L)V_2 + (k_1' k_2 L + k_1 k_2' L)V_3$$

olur. Böylece k_2 ve k_2^* çarpımı sabit bulunur.

Örnek 6.1.5. Merkezleri aynı olan eş düzlemli iki çemberin Bertrand çifti olduklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM: Karşılıklı noktalar P_1 ve P_2 olsun. Öyleyse $d(P_1, P_2) = \lambda = \text{sabit}$ olur.

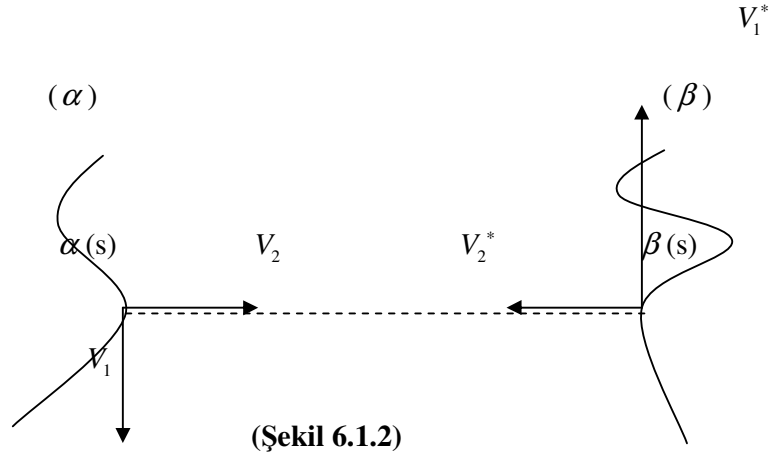
P_1 ve P_2 deki $\{V_2, V_2^*\}$ lineer bağımlıdır. O halde merkezleri aynı ve eş düzlemli iki çember bir Bertrand çifti oluşturur.



(Şekil 6.1.1)

Örnek 6.1.6. E^3 te yay parametresi ile verilmiş bir α eğrisi için öyle bir β vardır ki α ve β birer Bertrand eğri çifti oluştururlar.

ÇÖZÜM:



$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s) \Rightarrow \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{d\beta} = \frac{d\alpha}{ds} + V_2 + \lambda \frac{dV_2}{ds}$$

$$\Rightarrow V_1^* \frac{ds^*}{ds} = V_1 + \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} V_2 + \lambda(-k_1 V_1 + k_2 V_3)$$

$$\Rightarrow V_1^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1) V_1 + \frac{d\lambda}{ds} V_2 + \lambda k_2 V_3$$

$$\Rightarrow \langle V_1^*, V_2 \rangle = 0$$

olduğundan

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0 \Rightarrow \lambda = \text{sabit}$$

$$\Rightarrow \beta(s) = \alpha(s) + c V_2(s)$$

bulunur. Böylece c nin her değeri için β eğrisi mevcuttur.

KAYNAKLAR

- [1]. Hacısalihoğlu H. H. , “Diferensiyel Geometri” , Ankara Üniversitesi , 1998.
- [2]. Hacısalihoğlu H. H. , “Lineer Cebir” , Fırat Üniversitesi , 1982.
- [3]. Carmo P. , Monfedeo P. , “Differential Geometry of Curves and Surfaces” , Prentice-Hall,inc. Englewood Cliffs , New Jersey , 1976.
- [4]. Bektaş M. , Lorentz Uzayının İntegral Geometrisi, Doktora Tezi, 1998.
- [5]. Balgetir H. , Bektaş M. And Ergut M. , Bertrand Curves for nonnull curves in 3-Dimensional Lorentzian Space,Hadronic Journal 27, 229-236, 2004.
- [6]. Şemin F. , “Diferensiyel Geometri.I ” , İstanbul Üni. Fen Fak., 1983.
- [7]. Hacısalihoğlu H. H. , “Yüksek Dif. Geometriye Giriş”, Fırat Üni., 1980.
- [8]. Lai H., Weakened Bertrand Curves, Tôhoku Math. Journ, Vol.19, No:2, 1967.
- [9]. Müller H. R., “Kinematik Dersleri” , Ankara Üniversitesi Fen Fak. Yayınları – 1963.
- [10]. O’Neill B., Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity , NewYork , Academic Pres , 1983.
- [11]. Blaschke W.,Diferansiyel Geometri Dersleri, İst. Üni. Yay. , 1949.
- [12]. Gallot S., Hulin D. , Lafontaine J. , Riemannian Geometry , Springer-Verlag Berlin Heidelberg , 1987.

ÖZGEÇMİŞ

1981 Karabük'te doğdum. İlk, orta ve lise eğitimimi Karabük'te tamamladım. 1998 yılında Karabük Demir Çelik Lisesi'nden mezun oldum ve aynı yıl Ankara-Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alan Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Programı'nı kazanıp 2003 yılında lisans eğitimimi tamamladım. 2003 yılında Karabük Reel Fen Dershanesi'nde Matematik Öğretmenliği yapmaya başladım ve 2004 yılında Tunceli İli Milli Eğitim Müdürlüğü emrine atandım: bu nedenle ildeki çeşitli okullarda görev yaptım. Bu arada Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimime başladım. Halen Çanakkale-Gökçeada Atatürk Anadolu Öğretmen Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.

Melike TARHAN