

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHITHAM-BROER-KAUP-TİPİ BAZI DENKLEMLERİN

$\left(\frac{g'}{g}\right)$ - AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan GÜNDÜZ

Anabilim Dalı: Matematik

Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa İNÇ

ELAĞIĞ-2016

T. C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHITHAM-BROER-KAUP-TİPİ BAZI DENKLEMLERİN

$\left(\frac{G'}{G}\right)$ - AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan GÜNDÜZ

(121121102)

Anabilim Dalı :Matematik

Programı :Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa İNÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17 Mayıs 2016

ELAZIĞ-2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHITHAM-BROER-KAUP-TİPİ BAZI DENKLEMLERİN

$\left(\frac{g'}{g}\right)$ - AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan GÜNDÜZ

Tezinin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Mayıs 2016

Tezinin Savunulduğu Tarih : 1 Haziran 2016

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa İNÇ

Diğer Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Yusuf UÇAR (İnönü Üniversitesi)

: Yrd. Doç. Dr. Yavuz UĞURLU

ELAZIĞ - 2016

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması süresince, bilgi ve deneyimleriyle her zaman yardımcı olan hocam sayın Prof. Dr. Mustafa İNÇ'e ve katkılarından dolayı Doç. Dr. Bülent KILIÇ'a teşekkürler.

Hasan GÜNDÜZ

ELAZIĞ, 2016



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
SEMBOLLER LİSTESİ.....	IX
1.BÖLÜM.....	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	1
2. BÖLÜM.....	5
2.1. Genelleştirilmiş KdV Denklemi.....	5
2.2. Soliton Kavramı ve Tarihsel Gelişimi.....	6
2.3. Miura Dönüşümü.....	10
2.4. Whitham-Broer-Kaup-Tipi Denklemler.....	10
2.5. Wu-Zhang Denklemi.....	11
2.6. Modifiye Boussinesq Denklemi.....	12
3.BÖLÜM.....	14
3.1. $\left(\frac{g'}{g}\right)$ -Açılım Metodu	14
3.2. Whitham-Broer-Kaup-Tipi Denklemlerin $\left(\frac{g'}{g}\right)$ -Açılım Metodu ile Çözümü.....	20
3.3. Wu-Zhang Denkleminin $\left(\frac{g'}{g}\right)$ -Açılım Metodu ile Çözümü	35

3.4. Modifiye Boussinesq Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu ile Çözümü.....	61
3.5. Sonuç.....	72
KAYNAKÇA.....	73
ÖZGEÇMİŞ.....	79



ÖZET

Bu tez üç bölüm olarak düzenlenmiştir.

İlk bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; Genelleştirilmiş KdV denklemi, soliton kavramı ve tarihsel gelişimi, Whitham-Broer-Kaup-Tipi denklemler, Wu-Zhang denklemi ve Modifiye Boussinesq denklemi anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu anlatılmış ve bu metotla WBKL, Wu-Zhang ve MBE denklemlerinin soliton çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: KdV denklemi, WBKL denklemleri, Wu-Zhang denklemi, MBE denklemi, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu.

SUMMARY

SOLUTIONS OF SOME OF WHITHAM-BROER-KAUP-LIKE EQUATIONS BY $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -EXPANSION METHOD

This work is set as three chapters.

In the first chapter; some fundamental definitios and theorems, which will be used in the later chapters, are given.

In the second chapter; Generalized KdV equation, phenomena of soliton and its historical development, Whitham-Broer-Kaup-Like equations, Wu-Zhang equation and Modified Boussinesq equations are told.

In the third chapter; $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method are explained and soliton solutions of WBKL, Wu-Zhang, MBE equations are obtained.

Key Words: KdV equation, WBKL equations, Wu-Zhang equation, MBE, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 Tek dalga (Solitary wave	7
Şekil 2.2 Ara yüzey dalgaları	13
Şekil 3.1 (3.3.2) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 1, B = -2$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri.....	36
Şekil 3.2 (3.3.2) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 1, B = -2$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümün $(x, t) \in [-3, 1] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi	36
Şekil 3.3 (3.3.2) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 1, B = -2$ alınmasıyla elde edilen q soliton çözümün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri.....	37
Şekil 3.4 (3.3.2) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 1, B = -2$ alınmasıyla elde edilen q soliton çözümün $(x, t) \in [-3, 1] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi	37
Şekil 3.5 (3.3.4) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 1, B = 0$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri.....	39
Şekil 3.6 (3.3.4) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 1, B = 0$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümün $(x, t) \in [-2, 1] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi	39
Şekil 3.7 (3.3.5) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 2, B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri	41
Şekil 3.8 (3.3.5) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 2, B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-2, 2.8] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi	41
Şekil 3.9 (3.3.5) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 2, B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri	42
Şekil 3.10 (3.3.5) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 2, B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-2, 2.8] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi.....	42
Şekil 3.11 (3.3.6) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 0, B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri	44
Şekil 3.12 (3.3.6) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 0, B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-2.4, 2.4] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi	44

- Şekil 3.13** (3.3.7) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 2, B = 0$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri 46
- Şekil 3.14** (3.3.7) çözümünde $k = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}, A = 2, B = 0$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-2.4, 2.4] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi .46
- Şekil 3.15** (3.3.9) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 0, B = -1$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri 48
- Şekil 3.16** (3.3.9) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = -\frac{3}{4}, A = 0, B = -1$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümün $(x, t) \in [-1, 3] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi.....48
- Şekil 3.17** (3.3.11) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{3}, A = -1, B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.5$ ve $t = 1$ anındaki iki boyutlu resimleri 50
- Şekil 3.18** (3.3.11) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{3}, A = -1, B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-5, 6.1] \times [0.5, 1]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi 50
- Şekil 3.19** (3.3.13) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{3}, A = -1, B = 0$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.5$ ve $t = 1$ anındaki iki boyutlu resimleri 52
- Şekil 3.20** (3.3.13) çözümünde $k = 3, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{3}, A = -1, B = 0$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-5, 5] \times [0.5, 1]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi.....52
- Şekil 3.21** (3.3.23) çözümünde $k = 2, \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}, A = -3, B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri 56
- Şekil 3.22** (3.3.23) çözümünde $k = 2, \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}, A = -3, B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-5, 5] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi 56
- Şekil 3.23** (3.3.23) çözümünde $k = 2, \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}, A = -3, B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.3$ ve $t = 0.6$ anındaki iki boyutlu resimleri 57
- Şekil 3.24** (3.3.23) çözümünde $k = 2, \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}, A = -3, B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-5.5, 6] \times [0.3, 0.6]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi 57
- Şekil 3.25** (3.4.35) çözümünde $k = 1, \lambda = -i, \mu = 0, A = 3, B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 1$ ve $t = 1.5$ anındaki iki boyutlu resimleri.....71
- Şekil 3.26** (3.4.35) çözümünde $k = 1, \lambda = -i, \mu = 0, A = 3, B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-10, 6] \times [1, 1.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi.....71

SEMBOLLER LİSTESİ

Δ	:Delta
∇	:Nabla
λ	:Lambda
α	:Alpha
μ	:Mu
Ω	:Omega
σ	:Sigma
φ	:Phi
η	:Eta
β	:Beta
ε	:Epsilon
ξ	:Xi

KISALTMALAR

KdV	:Kortweg de Vries Denklemi
GKdV	:Genelleştirilmiş Kortweg de Vries Denklemi
FPU	:Fermi, Pasta, Ulam Sistemi
NLS	:Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
SG	:Sine-Gordon Denklemi
cKdV	:Birleştirilmiş Kortweg de Vries Denklemi
WBKL	:Whitham-Broer-Kaup-Tipi Denklemler
BBM	:Benjamin-Bona-Mahony Denklemi
MBE	:Modifiye Boussinesq Denklemi
RLW	:Uzun Dalga Denklemi
ALW	:Yaklaşık Uzun Dalga Denklemi

1. BÖLÜM

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1.1 Tanım

Bir veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini bulunduran denklemlere diferansiyel denklem denir. Genel olarak diferansiyel denklemler

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir. Burada, x bağımsız, y bağımlı değişkendir [1].

1.1.2 Tanım

Bir veya birden fazla bağımlı değişken ile iki veya ikiden fazla bağımsız değişken bulunduran, bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem denir. Genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklindedir [1].

1.1.3 Tanım

Bir diferansiyel denklemde; en yüksek türevin mertebesine, denklemin mertebesi denir [2].

1.1.4 Tanım

Bir diferansiyel denklemde; en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir [2].

1.1.5 Tanım

f fonksiyonu A kümesinde tanımlı ve f' 'in k . mertebeye kadar olan türevleri sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonu C^k -sınıfındandır denir.

1.1.6 Tanım

Bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkenlere ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenler cinsinden bir fonksiyon ise bu tip denklemlere lineer denklem denir [2]. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkenden oluşan birinci ve ikinci mertebeden lineer bir denklemin genel formu sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y)$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y).$$

1.1.7 Tanım

Bir diferansiyel denklem lineer değil ise nonlinear denklem denir [1].

1.1.8 Tanım

Bir kısmi türevli denklem en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineerse bu denkleme yarı (quasi) lineer denklem denir [2].

1.1.9 Tanım

Yarı lineer bir denklemde en yüksek mertebeden kısmi türevlerin katsayıları bağımsız değişkenlerin fonksiyonları cinsinden ise bu denkleme hemen hemen lineerdir denir [2]. İki bağımsız, bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen hemen lineer bir denklemin genel hali aşağıdaki gibidir.

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan ;

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

olmak üzere;

- i) $\Delta(x, y) > 0$ ise denklem hiperbolik,
- ii) $\Delta(x, y) = 0$ ise denklem parabolik,
- iii) $\Delta(x, y) < 0$ ise denklem eliptik tiptendir denir.

1.1.10 Tanım

X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyon, vektör vs...) cümlesi olmak üzere; X uzayının elemanlarını Y uzayının elemanlarına karşılık getiren dönüşüme operatör denir.

1.1.11 Tanım

Matematiksel fizikte en çok kullanılan operatörlerinden birisi olan Laplace operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1-boyutlu Laplace operatörü: $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

2-boyutlu Laplace operatörü: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,

3-boyutlu Laplace operatörü: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 U = 0$$

şeklindeki denkleme ∇^2 'nin 1, 2, 3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1, 2, 3-boyutlu dalga denklemi denir. Burada c pozitif bir reel sabit ve t de zamanı göstermektedir. Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik ve quantum teorisi gibi alanlarda çok kullanılmaktadır.

Matematiksel fizikte kullanılan diğer denklemlerden bazıları aşağıda verilmiştir [3].

-Helmholtz denklemi: $\nabla^2 u + \lambda u = 0$,

-İki boyutlu Poisson denklemi: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$,

-Biharmonik denklem: $\nabla^4 u = 0$,

-Biharmonik dalga denklemi: $\nabla^4 u = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$,

-Telegraf denklemi: $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0$,

-Schrödinger denklemi: $\nabla^2 u + \alpha[E - V(x, y, z)]u = 0$,

-Klein-Gordon denklemi: $\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu^2 u$.

Teorem 1.1.1 (1. mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi)

$(x_0, y_0, z_0) \in D \subset R^3$ olmak üzere $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ fonksiyonları D bölgesinde C^1 sınıfında olsunlar ve $P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0$ olsun.

Bu takdirde (x_0, y_0) noktasının bir U komşuluğunda, U 'nun içinde yatan bir $\check{C}$ eğrisinin her noktasında $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$ başlangıç şartını ve $Pz_x + Qz_y = R$ denklemini sağlayan bir tek $z = z(x, y)$ çözümü vardır.

Teorem 1.1.2 (Cauchy-Kowalevsky Teoremi)

$$Lz = A(x, y)z_{xx} + 2B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z + G(x, y)$$

denklemindeki katsayılar ve G fonksiyonu, xy -düzleminde orijini kapsayan bir $\Omega \subset R^2$ bölgesinde analitik olsunlar ve Ω da $C(x, y) \neq 0$ olsun. x -ekseninin Ω tarafından kapsanan parçasında tanımlanmış keyfi, analitik $h(x)$ ve $\sigma(x)$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda $(0,0)$ noktasının bir N komşuluğu vardır ve N de $Lz = G$ denkleminin analitik $z = \varphi(x, y)$ çözümü vardır ve bu çözüm tektir. Öyle ki bir N komşuluğu tarafından kapsanan x -ekseni üzerinde $\varphi(x, 0) = h(x)$, $\varphi_y(x, 0) = \sigma(x)$ sağlanır.

2. BÖLÜM

2.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİ

KdV denklemi 1885 yılında Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries [4] tarafından sığ sulardaki dalga yayılımının gözlemlenmesiyle oluşturulmuştur. Bu denklem geçen yüzyıldan beri bilinmesine rağmen fiziksel özellikleri tam olarak elde edilememiştir. KdV denklemi tek dalgalar için en basit ve faydalı modellerden biridir. Martin Kruskal ve Norman Zabusky [5] dalga hareketine benzer tekrarlamaları KdV denklemi ile oluşturulan bir sistemle gözlemlenmişlerdir ve ayrıca periyodik sınır şartları kullanarak bu denklemin sayısal çözümünü de elde etmişlerdir. Dalganın doğal yapısından dolayı Zabusky ve Kruskal [5], bu tek dalgayı soliton olarak adlandırmışlardır. Tek dalgaların en önemli özelliği, birbirleriyle çarpışmaları ve bu çarpışmalar sonucunda şekillerini korumalarıdır. Buradan; tek dalgalar için KdV denkleminin elastik olduğu sonucu çıkar.

Lineer olmayan dalga yapısı hakkındaki bilgiler, soliton tanımının kullanıldığı fizik ve matematik arasındaki ortak çalışmalardan elde edilir. Klasik KdV denklemi lineer olmayan bazı fiziksel bölgelerde gözlemlenebilir. İlk olarak Karpman [6] ve Bisognano [7], lineer olmayan nötr yüzeylerdeki dalga hareketi ve dairesel bölgedeki ışınlar için KdV denkleminin yararlanarak teorik modeller geliştirmişlerdir. Bu denklem; katı, sıvı, gaz ve plazma; soğuk bir yüzeydeki magnetik hidrodinamikler; lineer olmayan yaylarla birleştirilmiş eşit kütleli bir boyutlu kafeslerdeki boylamsal dalga yayılımları gibi birçok alanda fiziksel uygulamaya sahiptir.

Genelleştirilmiş KdV denklemi (GKdV);

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.1.1)$$

şeklindedir. Buradaki $u^n u_x$ ve u_{xxx} terimleri sırasıyla iletim ve dağılma terimlerini gösterir. GKdV denkleminin solitonları lineer olmayan iletim ve dağılma terimleri arasındaki ilişkiyle oluşur. Dağılma etkisi dalga formunun hızını oluştururken, lineer olmayan iletim etkisi de dalga formunun şeklini oluşturur. Sabit bir dalga formu (solitary wave) bu iki terimin etkileşiminden doğar. Her iki soliton etkileşimlerine rağmen değişmez. GKdV denkleminin en önemli durumlarından biri modifiye edilmiş KdV denklemidir. Bu denklem GKdV denkleminin $n = 2$ için özel bir halidir ve elektrodinamikler, ince tabakalardaki elektromagnetik dalgalar, elastik araçlar ve trafik akışları gibi birçok fiziksel uygulama alanına sahiptir.

2.2. SOLİTON KAVRAMI VE TARİHSEL GELİŞİMİ

Tek dalga (solitary wave) kavramı ilk olarak 1834'te John Scott Russell tarafından ortaya atılmıştır. Russell, bu dalgayı, Union Channel'da (Edinburg-Glasgow kanalı) şeklini değiştirmeden uzun süre hareket edebilen bir su dalgası olarak gözlemlemiştir [8]. Bu olayı "Wave of Translation" (büyük dalga kayması) olarak adlandıran Russell, laboratuvar şartlarında benzer dalgalar üreterek bu çalışmalarını yoğunlaştırmıştır. Elde ettiği sonuçları "Reports on Wave" (Dalgalar Üzerine Rapor) adlı çalışmasında açıklamıştır. Bu çalışmada vardığı genel sonuçları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz [9].

- i) Tek dalgalar kararlıdır ve çok uzun mesafeler boyunca hareket edebilirler.
- ii) Tek dalganın hızı, büyüklüğüne; genliği ise suyun derinliğine bağlıdır.
- iii) Normal dalgaların aksine tek dalgalar etkileşime girdiklerinde tekrar eski hallerine dönerler, yani birleşmezler.
- iv) Eğer tek dalga suyun derinliğine göre çok büyükse, biri büyük biri küçük olmak üzere iki dalgaya ayrılır.

Russell, elde ettiği bulguları formülize ederek;

u : tek dalganın hızı

h : sonlu derinlik

a : maksimum genlik

g : yerçekimi ivmesi olmak üzere;

$$u^2 = g(h + a) \quad (2.2.1)$$

bağıntısını elde etmiştir.

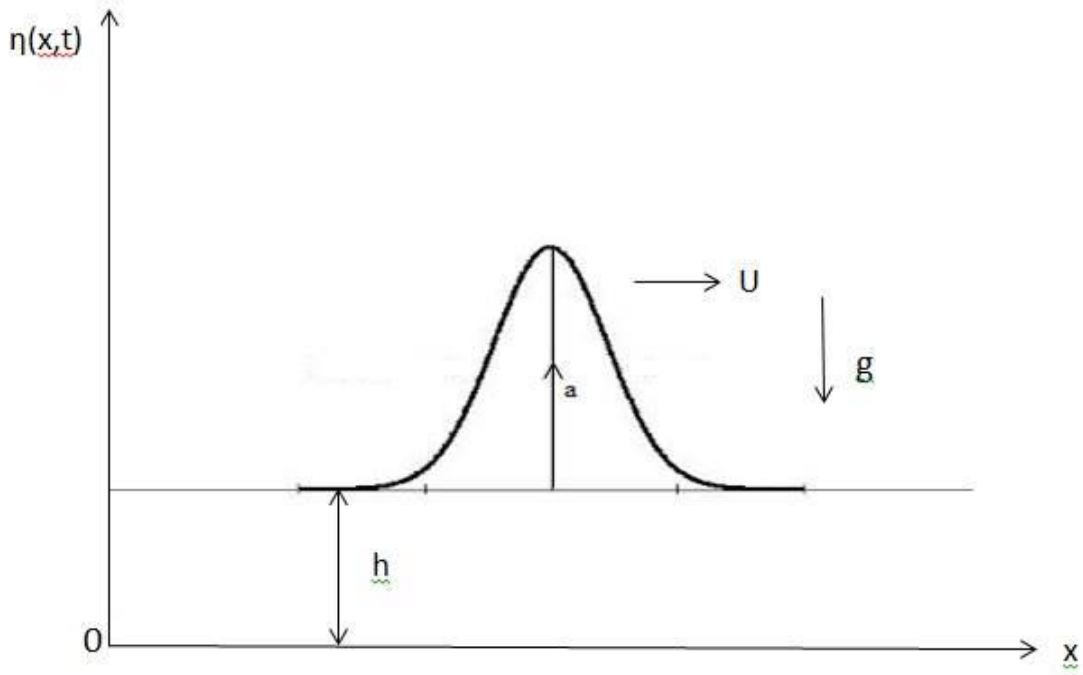
Tek dalgaların hızı yerçekimine de bağlı olduğundan "yerçekimi dalgaları" olarak da adlandırılır [10]. Russell'ın bu çalışması sonucunda elde ettiği bulgular, Newton ve Bernoulli'nin [9] hidrodinamik teorileriyle ve Stokes ile Airy'nin [11] dalga üzerindeki teorileriyle çelişmesine rağmen 1871'de Boussinesq [12] ve 1876'da Rayleigh [13] tarafından benimsenmiştir. Bu bilim adamları, sıkıştırılamayan sıvıların hareket denklemini (2.2.1) formunda belirtmişlerdir ve tek dalga profilini Şekil.1.1'deki gibi gösterip, herhangi bir $a > 0$ için;

$$z = \eta(x, t), \quad \beta^2 = \frac{3a}{4h^2(h+a)}$$

olmak üzere

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2\{\beta(x - ut)\} \quad (2.2.2)$$

çözümünü bulmuşlardır.



Şekil 1.1 Tek dalga (Solitary wave)

Bu bilim adamları $a \ll h$ için sech^2 çözümünü bulmalarına rağmen (2.2.2)'yi çözüm kabul eden herhangi bir denklem bulamamışlardır. Ancak, Boussinesq sığ su dalgalarının hızı $c = \sqrt{gh}$ olmak üzere uzun dalgalar için Boussinesq [12] denklemi olarak bildiğimiz

$$\eta_{tt} = c^2 \left[\eta_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxxx} \right] \quad (2.2.3)$$

lineer olmayan yayılma denklemini bulmuştur. Bu denklemin çözümü

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{3a}{h^3} \right)^{\frac{1}{2}} (x \pm ut) \right] \quad (2.2.4)$$

şeklindedir ve hem (+) hem (−) yönde hareket eden dalgayı gösterir.

Bu çalışmalardan sonra 1885'te Hollandalı bilim adamları D. J. Kortweg ve G. de Vries [4], Russel'in gözlemlerini açıklayan matematiksel bir yapı ortaya koyan bir denklem elde etmişlerdir. Bu denklem, ρ yoğunluklu bir su yüzeyinde hareket eden tek yöndeki dalgaların yayılımı için;

$$\eta_t = \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\frac{3}{2} \eta \eta_x + \eta_x + \frac{1}{2} \sigma \eta_{xxx} \right) \quad (2.2.5)$$

şeklinde olup, günümüzde KdV denklemi olarak bilinen denklemin boyutlandırılmamış halidir. Burada;

h :Kanalın yüksekliği,

T : Yüzey gerilimi,

g :Yerçekimi ivmesi,

ρ : Sıvının yoğunluğunu belirtir ve

$$\sigma = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{g\rho}$$

değerine sahiptir.

1955'te Fermi, Pasta ve Ulam'ın [14], lineer olmayan kütle-yay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine çalışmalarıyla, KdV denkleminin tek dalgası ile ilgili gelişmeler devam etmiştir. 1914'te Debye tarafından ortaya atılan [15]; "Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki lineer olmayan kuvvetler yüzündendir." teorisine dayanarak; Fermi, Pasta ve Ulam; düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığını düşünmüşlerdir. Ancak onların çalışmaları bunun doğru olmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyesine geri döner. Bu durum Fermi, Pasta ve Ulam'ın (FPU) tekrarlanan olayı olarak bilinir.

Bu çalışmalara dayanarak, bu tekrarlamaların nasıl olduğunu anlamak için Kruskal ve Zabusky, lineer olmayan kütle-yay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmişlerdir. Kruskal ve Zabusky [5], bu tek dalgaları soliton olarak adlandırmışlardır.

1967’de, Gardner, Greene, Kruskal ve Miura, KdV denkleminin analitik çözümünü elde etmek için Ters Dağılım Metodunu bulmuşlardır [16]. Daha sonra Peter Lax, KdV ve benzeri denklemlerin soliton çözümlerinde kullanılan Lax çiftleri ve Lax denklemini bilim dünyasına kazandırmıştır [9]. Bu gelişmeler Hirota’nın; herhangi bir n pozitif tamsayısı için n -soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümleri üzerine çalışmaları ile devam etmiştir [17]. Solitonların deneysel olarak doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [18], Hammack ve Segur [19], Weidman ve Maxworthy [20], tarafından gösterilmiştir. Bu buluşların etkisiyle son 30 yıl boyunca yaygın teorik ve deneysel çalışmalar yapılmıştır. Günümüzde benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemler bulunmuş ve bu denklemler matematik ve fizikte pek çok branşlara ayrılmıştır. Bu tip denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için bir çok metot geliştirilmiştir.

Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay olmamakla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin analitik çözümleriyle ilişkilendirmek mümkündür. Sonuç olarak; Drazin ve Johnson’un [9] çalışmalarına dayanarak, solitonların özelliklerini genel olarak aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- i) Solitonlar kalıcı formdadır.
- ii) Solitonlar bir bölgede lokalize olmuştur.
- iii) Solitonlar diğer solitonlarla etkileşime girebilir ve bu etkileşimden değişmeden çıkar.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonlara sahip olmayabildiği halde, KdV denklemi solitonlar olan tek dalgalara sahiptir.

Soliton kavramı son zamanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin; lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) [21] plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgaları temsil eder ve sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Başka bir model denklemi de Sine-Gordon (SG) [22] denklemidir. Bu denklem, elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. SG denklemi, soliton, antisoliton (veya kinks, antikinks) ve aynı eksene göre simetrik (breather) solitonlara sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalganın genliğine bağlı değildir.

2.3. MIURA DÖNÜŞÜMÜ

Lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunmasında kullanılan bu dönüşüm, ilk olarak modifiye KdV (mKdV) denkleminin analitik çözümlerinin, ters dağılım metodu ile araştırılması sırasında, Miura tarafından bulunmuştur [23]. Bu dönüşümün bulunması, soliton teorisinin ortaya atılmasında önemli rol oynamıştır. Miura dönüşümünün temel prensibi, ana hatlarıyla aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

u , verilen denklemdeki bağımlı değişkenlerden biri olmak üzere;

$$u = \frac{\partial^\alpha \omega}{\partial x^\alpha} + \omega_0 \quad (2.3.1)$$

dönüşümü yapılır. Bulunan u değeri diğer denklemlerde yerine yazılarak, diğer bağımlı değişkenler de ω cinsinden bulunur. Böylelikle denklem sistemi tek denkleme indirgenmiş olur. Burada α , denklemin homojen denge bağıntısını ve ω_0 da sabit terimi ifade eder. Bu dönüşüm birçok çalışmada kullanılmıştır [24 – 26].

2.4. WHITHAM-BROER-KAUP-TİPİ DENKLEMLER

Whitham [27], Broer [28] ve Kaup [29] tarafından geliştirilen denklem, farklı dağılım ilişkilerine bağlı olarak, sığ sulardaki dalgaların yayılmalarını tanımlar.

Genel olarak Whitham-Broer-Kaup tipi denklemler;

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \gamma v_x + \beta u_{xx} &= 0 \\ v_t + (uv)_x + \alpha u_{xxx} - \beta v_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

şeklindedir.

Burada; $u = u(x, t)$: dalganın yatay hızı, $v = v(x, t)$: sıvının denge durumundaki sapma yüksekliği, α, β, γ sabitleri ise farklı difüzyon kuvvetlerini belirtir.

Whitham-Broer-Kaup denklemini; Rafei ve Daniali [30], varyasyonel iterasyon metodu ile, Rashidi ve arkadaşları [31] homotopi analiz metodu ile, Mohyud-Din ve arkadaşları [32] homotopi pertürbasyon metodu ile, Wang ve Li [33] homojen denge metodu ile, Guo ve Zhou [34] genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu ile, Aasaraai ve arkadaşları [35] modifiye F- açılım metodu ile çözmüşlerdir.

(2.4.1) denklemi; α, β, γ sabitlerinin aldıkları değerlere göre farklı denklemlere karşılık gelir. Örnek olarak; $\alpha = \frac{1}{3}$, $\gamma = 1$, $\beta = 0$ için, Wu-Zhang denklemine

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x &= 0, \\ v_t + (uv)_x + \frac{1}{3}u_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

$\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$ için, modifiye Boussinesq denklemine (MBE)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x &= 0, \\ v_t + (uv)_x + u_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$\alpha = 0$, $\gamma = 1$ için, uzun dalga denklemine (RLW)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x + \beta u_{xx} &= 0, \\ v_t + (uv)_x - \beta v_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$\alpha = 0$, $\gamma = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ için, yaklaşık uzun dalga denklemine (ALW)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x + \frac{1}{2}u_{xx} &= 0, \\ v_t + (uv)_x + \frac{1}{2}v_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

dönüştür.

2.5. WU-ZHANG DENKLEMİ

Wu ve Zhang [36], düzgün derinlikteki sığ sularda eğik etkileşim, dik bir duvardan eğik yansıma ve kıvrımlı bir kanalda hareket eden dalgalar ve benzer tarzda hareket eden 3-boyutlu su dalgalarını tanımlamak için, denklem modelleri geliştirmişlerdir. Bu modeller üzerine yaptıkları karşılaştırmalı çalışmalar, modellerin sahip oldukları fiziksel ve matematiksel özellikleri keşfetmelerini sağlamıştır. Yüksek dereceli terimlerin ihmal edilmesiyle elde edilen denklemlerden biri (2+1)-boyutlu Wu-Zhang denklemdir. Bu denklem;

$$u_t + uu_x + vu_y + w_x = 0,$$

$$v_t + uv_x + vv_y + w_y = 0,$$

$$w_t + (uv)_x + (vw)_y + \frac{1}{3}(u_{xxx} + u_{xyy} + v_{xxy} + v_{yyy}) = 0. \quad (2.5.1)$$

şeklindedir. Burada; w : dalganın yüksekliği, u : dalganın x-eksenindeki hızı, v : dalganın y-eksenindeki hızını belirtir.

(2.5.1) denkleminde, ölçekleme dönüşümleri ve simetrik indirgenmeler (scaling transformation and symmetry reduction) yapılırsa,

$$v_t + vv_x + w_x = 0,$$

$$w_t + (vw)_x + \frac{1}{3}(v_{xxx}) = 0. \quad (2.5.2)$$

şeklindeki (1+1)-boyutlu dalga denklemine dönüşür.

Wu-Zhang denkleminde, dalganın hareketi sadece bir doğrultuda olursa, denklem klasik Boussinesq denklemine indirgenir. Wu-Zhang denklemi Painleve özelliğine sahip değildir.

Wu-Zhang denklemini, Ma [37] homotopi pertürbasyon metodu ile, Zheng ve arkadaşları [38] genişletilmiş tanh-fonksiyon metoduyla, Helal ve arkadaşları [39] karakteristik fonksiyon metodu ile çözmüşlerdir.

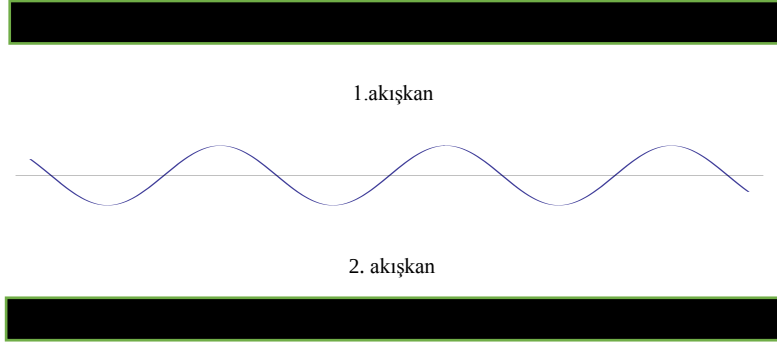
2.6. MODİFİYE BOUSSINESQ DENKLEMİ

Modifiye Boussinesq denklemi

$$u_t + uu_x + v_x = 0,$$

$$v_t + (uv)_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.6.1)$$

şeklinde olup I. Tip Boussinesq denklemi olarak da adlandırılır. 1988'de Sachs [40] tarafından türetilen, 2008'de Liu ve arkadaşları [41] tarafından geliştirilen denklem; sürtünmesiz ve birbirine karışmayan iki akışkan arasındaki ara yüzey dalgalarını tanımlar.



Şekil 2.1 Ara yüzey dalgaları

Modifiye Boussinesq denklemini; Wang [42] homojen denge metoduyla, Yan ve Zhang [43] geliştirilmiş sine-cosine metodu ve Wu eliminasyon metodu ile, Lü [44] Jacobi eliptik metoduyla çözmüşlerdir. Naz ve arkadaşları [45] korunum kanunu incelemesini yapmışlardır.

3. BÖLÜM

3.1. $(\frac{G'}{G})$ -AÇILIM METODU

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerin analitik çözümlerinin bulunması son yıllarda birçok çalışmaya konu olmuştur. Bu çalışmalar sırasında birçok metot ortaya çıkmıştır. Bu metotlar analitik ve numerik olarak iki gruba ayrılır. Analitik metotlara örnek olarak; tanh-metodu [46], Bäcklund dönüşümü [47 – 48], Hirota bilineer metot [49], homojen denge metodu (HBM) [50], Riccati açılım metodu [51], Lie yaklaşım metodu [52], Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodu [53 – 54], üstel fonksiyon metodu [55], ters dağılım metodu [56], sine-cosine metodu [57], Darboux açılımı [58], Painlevé açılımı [59], F-açılım metodu [60 – 61], $(\frac{G'}{G})$ -açılım metodu [62] gibi metotlar verilebilir. Numerik metotlara ise örnek olarak; varyasyonel iterasyon metodu (VIM) [63], homotopi pertürbasyon metodu (HPM) [64], Adomian ayrışım yöntemi (ADM) [65 – 66], homotopi analiz metodu (HAM) [67], Laplace açılım metodu (LDM) [68], diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) [69] gibi metotlar verilebilir. Bütün metotlar, çözümün bazı özel yaklaşımlar cinsinden düzgün bir şekilde ifade edilebilmesi varsayımına dayanır. Bu metotların birbirinden farklı olması, yaklaşımların farklı olmasından kaynaklanır. Örneğin; tanh-metodunda çözüm tanh ve coth fonksiyonlarının kombinasyonu şeklinde yazılırken, Jacobi eliptik fonksiyon açılımında, çözüm eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilir.

Analitik yöntemlerin avantajları olduğu gibi dezavantajları da vardır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem tiplerinin bütün türlerinde kullanılabilecek bir metot yoktur. Dolayısıyla her yeni metot, çözüm elde etmeyi farklı açılardan kolaylaştırdığı için bilim dünyasında ilgiyle karşılaşılır. Yukarıda saydığımız metotların hepsi lineer olmayan denklemlerin tekli-soliton çözümlerinde kullanılabilir. Ancak çoklu-soliton çözümlerini bulmak için yalnızca üç metot kullanılabilir. Bunlar; ters dağılım metodu, Bäcklund dönüşümü ve Hirota bilineer metodudur [70].

İlk defa Wang [71] ve arkadaşları tarafından 2008’de geliştirilen $(\frac{G'}{G})$ -açılım metodu Bekir [72], Zhang [73], Aslan ve Öziş vd [74] tarafından birçok çalışmada kullanılmıştır.

$(\frac{G'}{G})$ -açılım metodunun genel mantığı; verilen bir nonlinear diferansiyel denklemin çözümlerinin polinom şeklinde ifade edilmesine dayanır. Bu polinomun derecesi homojen

denge bağıntısı ile hesaplanır. Bu metodun diğer metotlardan farkı, Riccati denklemi yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemin kullanılmasıdır. $(\frac{G'}{G})$ -açılım metodunun çözüm mantığı aşağıda verilmiştir.

x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$u = u(x, t), \quad P(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (3.1.1)$$

lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemi göz önüne alalım.

1. Adım:

$\xi = x - vt$ olmak üzere ; $u(x, t) = u(\xi)$ dönüşümü yapılırsa;

$$P(u, -vu', u', v^2u'', -vu'', vu'', u'', \dots) = 0 \quad (3.1.2)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada v solitonun hızıdır.

2. Adım:

$G = G(\xi)$ olmak üzere,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad ,$$

(3.1.3)

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyon olup, (3.1.2) adi diferansiyel denkleminin çözümü polinom cinsinden

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad ,$$

(3.1.4)

şeklinde yazılır. Burada λ ve μ keyfi sabitler, m ise homojen denge bağıntısından aşağıdaki gibi bulunacak olan pozitif bir tamsayıdır.

En yüksek mertebeden türeve sahip terim $\frac{d^q \xi}{d\xi^q}$ ve lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r \xi}{d\xi^r}\right)^s$ olmak üzere;

$$D \left[\frac{d^q \xi}{d\xi^q} \right] = m + q, \quad D \left[u^p \left(\frac{d^r \xi}{d\xi^r} \right)^s \right] = mp + s(m + r)$$

terimleri birbirine eşitlenerek bulunur.

3. Adım:

(3.1.4) denklemi (3.1.2) bağıntısında yerine yazılıp $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse denklemin sol tarafı başka bir polinoma dönüşür. Bu polinomun katsayıları 0'a eşitlenirse, $a_0, a_i, b_i, c, \lambda$ ve μ için denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek $a_0, a_i, b_i, c, \lambda$ ve μ sabitleri bulunur. Bulunan sabitler (3.1.4)

denkleminde yerine yazılır ve (3.1.3) denkleminin çözümleri kullanılırsa (3.1.1) kısmi türevli denklemin soliton çözümleri elde edilir. (3.1.3) denkleminin genel çözümü ise aşağıda verilmiştir.

$G'' + \lambda G' + \mu G = 0$ denkleminin karakteristik denklemi

$$\varphi(k) = k^2 + \lambda k + \mu = 0$$

şeklindedir. Bu karakteristik denklemin kökleri ise;

$$\Delta = \lambda^2 - 4\mu, \quad k_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}, \quad k_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$$

şeklindedir.

$\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$ ise genel çözüm;

$$G(\xi) = c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}$$

olarak bulunur. Bu çözümün her iki tarafını ξ 'ye göre türevini alırsak,

$$G'(\xi) = c_1 k_1 e^{k_1 \xi} + c_2 k_2 e^{k_2 \xi}$$

elde edilir. Buradan;

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 k_1 e^{k_1 \xi} + c_2 k_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} + c_2 \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-c_1 \frac{\lambda}{2} e^{k_1 \xi} - c_1 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} - c_2 \frac{\lambda}{2} e^{k_2 \xi} + c_2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\frac{-\lambda}{2} (c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}) + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi})}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{[c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}] \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \right) - \frac{\lambda}{2} \right]}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}}{c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{(-c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{(-c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

bulunur. Bu ifadede $-c_1 + c_2 = A$, $c_1 + c_2 = B$ dersek

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$ ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[\frac{A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi - B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi}{A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2}$$

ve $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = 0$ ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A}{A\xi + B} - \frac{\lambda}{2}$$

rasyonel çözümü bulunur.

Bu sonuçlar, $\frac{A}{B}'$ nin durumuna göre;

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \xi_0\right) - \frac{\lambda}{2}, & \lambda^2 - 4\mu > 0, \quad \tanh(\xi_0) = \frac{A}{B}, \quad \left|\frac{A}{B}\right| < 1, \\ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \coth\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \xi_0\right) - \frac{\lambda}{2}, & \lambda^2 - 4\mu > 0, \quad \coth(\xi_0) = \frac{A}{B}, \quad \left|\frac{A}{B}\right| > 1, \\ \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \cot\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + \xi_0\right) - \frac{\lambda}{2}, & \lambda^2 - 4\mu < 0, \quad \coth(\xi_0) = \frac{A}{B}, \\ \frac{A}{B + A\xi} - \frac{\lambda}{2}, & \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases}$$

olarak yazılabilir [75].

$\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodunun, birçok farklı versiyonu geliştirilmiştir. Bu versiyonlardan birkaçı ve bunlar üzerine yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

a) Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu:

Verilen $u = u(x, t)$ değişkeni, $\xi = x - vt$ dönüşümü yapılarak $u = u(\xi)$ ' ye dönüştürülür ve çözüm;

$$u(\xi) = \sum_{i=-m}^m \frac{a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i}{\left(1 + \lambda \left(\frac{G'}{G}\right)\right)^i} + b_i \left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1} \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{\left(\frac{G'}{G}\right)^2}{\mu}\right)}$$

formunda aranır. Burada;

m : homojen denge bağıntısı,

λ, μ, a_i, b_i : sabitler, $\sigma = \mp 1$ ve $G = G(\xi)$,

$$G'' + \mu G = 0$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyondur [76 – 77] .

b) Modifiye $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu:

Verilen $u = u(x, t)$ değişkeni, $\xi = x - vt$ dönüşümü yapılarak $u = u(\xi)$ ' ye, verilen denklem ise; $P(u^{(r)} + u^{(r+1)} + \dots) = 0$ adi diferansiyel dönüştürülür ve çözüm;

$$u^{(r)}(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i$$

formunda aranır. Burada;

m : homojen denge bağıntısı,

r, a_i, b_i : sabitler ve $G = G(\xi)$,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyondur [78 – 79] .

c) $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -Açılım Metodu:

Verilen $u = u(x, t)$ değişkeni, $\xi = x - vt$ dönüşümü yapılarak $u = u(\xi)$ ' ye dönüştürülür ve çözüm;

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i + \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{G}\right)$$

formunda aranır. Burada;

m : homojen denge bağıntısı,

$$G'' + \lambda G = \mu$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyondur [80].

d) Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu:

Verilen $u = u(x, t)$ değişkeni, $\xi = x - vt$ dönüşümü yapılarak $u = u(\xi)$ ' ye dönüştürülür ve çözüm;

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G}\right)^{-i}$$

formunda aranır. Burada;

m : homojen denge bağıntısı,

$a_0, a_i, b_i, \lambda, \mu$: sabit ve $G = G(\xi)$,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0$$

ikinci basamaktan lineer diferansiyel denklemini sağlayan bir fonksiyondur [81].

3.2. WHITHAM-BROER-KAUP-TİPİ DENKLEMLERİN $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

$$p_t + pp_x + \gamma q_x + \beta p_{xx} = 0$$

$$q_t + (pq)_x + \alpha p_{xxx} - \beta q_{xx} = 0 \quad (3.2.1)$$

şeklindeki denklemlere Whitham-Broer-Kaup-Tipi denklemler denir.

$$p = \omega_x \text{ ve } q = -\frac{1}{\gamma} \left(\omega_t + \frac{1}{2} \omega_x^2 + \beta \omega_{xx} \right) \quad (3.2.2)$$

olmak üzere Miura dönüşümü uygulanırsa;

$$p_x = \omega_{xx}, \quad p_{xx} = \omega_{xxx}, \quad p_{xxx} = \omega_{xxxx}, \quad p_t = \omega_{xt},$$

$$q_x = -\frac{1}{\gamma} (\omega_{xt} + \omega_x \omega_{xx} + \beta \omega_{xxx})$$

$$q_{xx} = -\frac{1}{\gamma} (\omega_{xxt} + \omega_{xx}^2 + \omega_x \omega_{xxx} + \beta \omega_{xxxx}) \quad (3.2.3)$$

$$q_t = -\frac{1}{\gamma} (\omega_{tt} + \omega_x \omega_{xt} + \beta \omega_{xxt})$$

$$(pq)_x = -\frac{1}{\gamma} \left(\omega_{xx} \omega_t + \omega_x \omega_{xt} + \frac{3}{2} \omega_x^2 \omega_{xx} + \beta \omega_{xxx} \omega_x + \beta \omega_{xx}^2 \right)$$

bulunur. Bu değerler (3.2.1) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$p_t + pp_x + \gamma q_x + \beta p_{xx} = \omega_{xt} + \omega_x \omega_{xx} + \gamma \left(-\frac{1}{\gamma} \right) (\omega_{xt} + \omega_x \omega_{xx} + \beta \omega_{xxx}) + \beta \omega_{xxx} = 0$$

$$\begin{aligned} & q_t + (pq)_x + \alpha p_{xxx} - \beta q_{xx} \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\omega_{tt} + \omega_x \omega_{xt} + \beta \omega_{xxt}) \\ & - \frac{1}{\gamma} \left(\omega_{xx} \omega_t + \omega_x \omega_{xt} + \frac{3}{2} \omega_x^2 \omega_{xx} + \beta \omega_{xxx} \omega_x + \beta \omega_{xx}^2 \right) + \alpha \omega_{xxx} \\ & - \beta \left(-\frac{1}{\gamma} \right) (\omega_{xxt} + \omega_{xx}^2 + \omega_x \omega_{xxx} + \beta \omega_{xxxx}) \\ &= \omega_{tt} + 2\omega_x \omega_{xt} + \omega_{xx} \omega_t + \frac{3}{2} \omega_x^2 \omega_{xx} - (\alpha \gamma + \beta^2) \omega_{xxxx} = 0 \quad (3.2.4) \end{aligned}$$

(3.2.4) denkleminde dönüşür. Tekrar $\xi = k(x + ct)$ dönüşümü yapılırsa;

$$\omega_x = k\omega_\xi, \quad \omega_{xx} = k^2\omega_{\xi\xi}, \quad \omega_{xxx} = k^3\omega_{\xi\xi\xi}, \quad \omega_{xxxx} = k^4\omega_{\xi\xi\xi\xi},$$

$$\omega_t = kc\omega_\xi, \quad \omega_{tt} = k^2c^2\omega_{\xi\xi}, \quad \omega_{xt} = k^2c\omega_{\xi\xi}$$

bulunur. Bu değerler (3.2.4) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} k^2c^2\omega_{\xi\xi} + 2(k\omega_\xi)(k^2c\omega_{\xi\xi}) + (k^2\omega_{\xi\xi})(kc\omega_\xi) + \frac{3}{2}(k\omega_\xi)^2(k^2\omega_{\xi\xi}) - (\alpha\gamma + \beta^2)k^4\omega_{\xi\xi\xi\xi} \\ = c^2\omega_{\xi\xi} + 3kc\omega_\xi\omega_{\xi\xi} + \frac{3}{2}k^2\omega_\xi^2\omega_{\xi\xi} - (\alpha\gamma + \beta^2)k^2\omega_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

elde edilir. Yeniden $W = \omega_\xi$ dönüşümü yapılırsa;

$$c^2W_\xi + 3kcWW_\xi + \frac{3}{2}k^2W^2W_\xi - (\alpha\gamma + \beta^2)k^2W_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.2.6)$$

olur. Bu denklemin her iki tarafının ξ 'ye göre integrali alınır;

$$c^2W + \frac{3}{2}kcW^2 + \frac{1}{2}k^2W^3 - (\alpha\gamma + \beta^2)k^2W_{\xi\xi} = 0 \quad (3.2.7)$$

bulunur. (3.2.7) denkleminde, $W_{\xi\xi}$ ve W^3 terimlerinden dengeleme terimi,

$m + 2 = 3m \Rightarrow m = 1$ bulunur.

(3.2.7) denkleminde $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu uygulanırsa, çözüm;

$$W = \sum_{i=0}^1 a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) \text{ formunda aranır.}$$

(3.2.7) denkleminde; $W^2, W^3, W_{\xi\xi}$ terimleri $\left(\frac{G'}{G}\right)$ cinsinden bulunup yerlerine yazılırsa, denklemin sol tarafı başka bir polinoma dönüşür. Bu polinomun katsayıları 0'a eşitlenerek

$\{a_0, a_1, a, b, c, \lambda, \mu\}$ sabitler ailesi için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : \frac{1}{2}k^2a_1^3 - 2a_1k^2(\alpha\gamma + \beta^2) = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : \frac{3}{2}kca_1^2 + \frac{3}{2}k^2a_0a_1^2 - 3\lambda a_1k^2(\alpha\gamma + \beta^2) = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : c^2a_1 + 3kca_0a_1 + \frac{3}{2}k^2a_0^2a_1 - a_1k^2(\alpha\gamma + \beta^2)(\lambda^2 + 2\mu) = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : c^2a_0 + \frac{3}{2}kca_0^2 + \frac{1}{2}k^2a_0^3 - a_1k^2(\alpha\gamma + \beta^2)\lambda\mu = 0$$

Bu denklem sistemi Mathematica ile çözülürse aşağıdaki gibi altı farklı durum söz konusudur.

1. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0 = -\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}$$

$$a_1 = \frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}{-(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)}}$$

$$c = \frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 4\mu) - k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}$$

2. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0 = \sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}$$

$$a_1 = -\frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}{-(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)}}$$

$$c = -\frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 4\mu) - k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}$$

3. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0 = -\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}$$

$$a_1 = -\frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}{-(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)}}$$

$$c = \frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 4\mu) + k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2(\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}$$

4. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0 = \sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}$$

$$a_1 = \frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}{(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu)}}$$

$$c = -\frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 4\mu) + k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu)} + 2(\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 - 2\mu)}}$$

5. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0 = \mu = 0, \quad a_1 = -2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}, \quad c = -k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}$$

6. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ olmak üzere;

$$a_0 = \mu = 0, \quad a_1 = 2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}, \quad c = k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}$$

$W = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right)$ çözümleri Δ 'ya bağlı olarak düzenlenirse aşağıda verilen üç farklı alt durum elde edilir.

i) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$ için;

$$W = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) = a_0 + a_1 \left[\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \left(\frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2}} \right] \quad (3.2.8)$$

$$\omega_\xi = W = a_0 + a_1 \left[\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \left(\frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2}} \right] \quad (3.2.9)$$

$$\omega(\xi) = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2}\right) \xi + a_1 \log \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \xi \right) \quad (3.2.10)$$

olarak bulunur. $\xi = k(x + ct)$ dönüşümü kullanılırsa;

$$\omega(x, t) = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2}\right) k(x + ct) + a_1 \log \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \quad (3.2.11)$$

bulunur. Buradan; ω_x , ω_t , ω_{xx} terimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\omega_x = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2}\right) k + a_1 \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k \left(\frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \quad (3.2.12)$$

$$\omega_t = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2}\right) kc + a_1 \frac{\sqrt{\Delta}}{2} kc \left(\frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \quad (3.2.13)$$

$$\omega_{xx} = \frac{a_1(B^2 - A^2)k^2\Delta}{4 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \quad (3.2.14)$$

Bu ifadeler; $p = \omega_x$ ve $q = -\frac{1}{\gamma} \left(\omega_t + \frac{1}{2} \omega_x^2 + \beta \omega_{xx} \right)$ denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$p = k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right], \quad (3.2.15)$$

$$q = -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (B^2 - A^2)}{4 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\}$$

soliton çözümleri elde edilir.

Bu çözümlerde; $A = 0, B \neq 0$ alınır;

$$p = k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right) \right], \quad (3.2.16)$$

$$q = -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right) \right]^2 \right. \\ \left. - \beta \frac{a_1 \Delta}{4} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2 \right\}$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$p = k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \right],$$

$$q = -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \begin{aligned} & \frac{c}{k} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \right]^2 \\ & - \beta \frac{a_1 \Delta}{4} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.17)$$

soliton çözümleri elde edilir.

ii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$ için;

$$W = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) = a_0 + a_1 \left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \left(\frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2} \right] \quad (3.2.18)$$

$$\omega_\xi = W = a_0 + a_1 \left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \left(\frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2} \right] \quad (3.2.19)$$

$$\omega(\xi) = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2} \right) \xi + a_1 \log \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi \right) \quad (3.2.20)$$

olarak bulunur. $\xi = k(x + ct)$ dönüşümü kullanılırsa;

$$\omega(x, t) = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2} \right) k(x + ct) + a_1 \log \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \quad (3.2.21)$$

bulunur. Buradan; ω_x , ω_t , ω_{xx} terimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\omega_x = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2} \right) k + a_1 \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k \left(\frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right) \quad (3.2.22)$$

$$\omega_t = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2} \right) kc + a_1 \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} kc \left(\frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right) \quad (3.2.23)$$

$$\omega_{xx} = \frac{a_1(B^2 - A^2)k^2\Delta}{4 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \quad (3.2.24)$$

Bu ifadeler; $p = \omega_x$ ve $q = -\frac{1}{\gamma} \left(\omega_t + \frac{1}{2} \omega_x^2 + \beta \omega_{xx} \right)$ denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} p &= k \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right], \\ q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (A^2 + B^2)}{4 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\} \quad (3.2.25) \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir.

Bu çözümlerde, $A = 0, B \neq 0$ alınır;

$$\begin{aligned} p &= k \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right) \right], \\ q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta}{4} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2 \right\} \quad (3.2.26) \end{aligned}$$

ve $A \neq 0, B = 0$ alınır;

$$\begin{aligned}
p &= k \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda - \sqrt{-\Delta} \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \right], \\
q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda - \sqrt{-\Delta} \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda - \sqrt{-\Delta} \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta}{4} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

çözümleri elde edilir.

iii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = 0$ için;

$$W = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) = a_0 + a_1 \left(\frac{A}{A\xi + B} - \frac{\lambda}{2} \right) \tag{3.2.28}$$

$$\omega_\xi = W = a_0 + a_1 \left(\frac{A}{A\xi + B} - \frac{\lambda}{2} \right) \tag{3.2.29}$$

$$\omega(\xi) = \left(a_0 - a_1 \frac{\lambda}{2} \right) \xi + a_1 \log(A\xi + B) \tag{3.2.30}$$

olarak bulunur. $\xi = k(x + ct)$ dönüşümü kullanılırsa;

$$\omega(x, t) = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2} \right) k(x + ct) + a_1 \log(Ak(x + ct) + B) \tag{3.2.31}$$

bulunur. Buradan; ω_x , ω_t , ω_{xx} terimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\omega_x = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2} \right) k + a_1 \frac{Ak}{Ak(x + ct) + B} \tag{3.2.32}$$

$$\omega_t = \left(a_0 - \frac{a_1 \lambda}{2} \right) k + a_1 \frac{Ak}{Ak(x + ct) + B} \tag{3.2.33}$$

$$\omega_{xx} = -a_1 \left(\frac{Ak}{Ak(x + ct) + B} \right)^2 \tag{3.2.34}$$

Bu ifadeler; $p = \omega_x$ ve $q = -\frac{1}{\gamma} \left(\omega_t + \frac{1}{2} \omega_x^2 + \beta \omega_{xx} \right)$ denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
p &= k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \frac{2A}{Ak(x+ct)+B} \right) \right], \\
q &= \frac{-k}{\gamma} \left\{ + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \frac{2A}{Ak(x+ct)+B} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. - \beta a_1 \left(\frac{A}{Ak(x+ct)+B} \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

cebirsel çözümleri elde edilir.

Bu çözümler, bulduğumuz altı durumda kullanılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere, $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$ yerine yazılıp katsayılar düzenlenirse;

$$\begin{cases}
a_0 = -\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)} \\
a_1 = \frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}}{-(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta}} \\
c = \frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)\Delta - k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta}}{\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}}
\end{cases}$$

bulunur. Buradan;

i) $\Delta > 0$ için;

$$\begin{aligned}
p &= k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right], \\
q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (B^2 - A^2)}{4 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

soliton çözümleri bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = k \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right],$$

$$q = -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (A^2 + B^2)}{4 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\} \quad (3.2.37)$$

çözümleri bulunur.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = -\sqrt{\lambda^2(\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad a_1 = -\frac{2}{\lambda} \sqrt{\lambda^2(\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

2. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere, $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$ yerine yazılıp katsayılar düzenlenirse;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)} \\ a_1 = -\frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}}{-(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta}} \\ c = -\frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)\Delta - k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta}}{\sqrt{-2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}} \end{array} \right.$$

bulunur. Buradan;

i) $\Delta > 0$ için;

$$\begin{aligned}
p &= k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right], \\
q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (B^2 - A^2)}{4 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\} \quad (3.2.38)
\end{aligned}$$

soliton çözümleri bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$\begin{aligned}
p &= k \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right], \\
q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (A^2 + B^2)}{4 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\} \quad (3.2.39)
\end{aligned}$$

çözümleri bulunur.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = \sqrt{\lambda^2 (\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad a_1 = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 (\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

3. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere, $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$ yerine yazılıp katsayılar düzenlenirse;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = -\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)} \\ a_1 = -\frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}}{-(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta}} \\ c = \frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)\Delta + k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta}}{\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2 \lambda^2 \Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}} \end{array} \right.$$

bulunur. Buradan;

i) $\Delta > 0$ için;

$$\begin{aligned} p &= k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right], \\ q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (B^2 - A^2)}{4 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

soliton çözümleri bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$\begin{aligned} p &= k \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right], \\ q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ + \frac{1}{2} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (A^2 + B^2)}{4 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

çözümleri bulunur.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = -\sqrt{\lambda^2(\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad a_1 = -\frac{2}{\lambda}\sqrt{\lambda^2(\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

4. Durum:

$(\beta^2 + \alpha\gamma)k \neq 0$ olmak üzere, $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$ yerine yazılıp katsayılar düzenlenirse;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2\Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)} \\ a_1 = \frac{2(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2\Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}}{-(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda^2 + \sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2\Delta}} \\ c = -\frac{k(\beta^2 + \alpha\gamma)\Delta + k\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2\Delta}}{\sqrt{2\sqrt{(\beta^2 + \alpha\gamma)^2\lambda^2\Delta} + (\beta^2 + \alpha\gamma)(\lambda^2 + \Delta)}} \end{array} \right.$$

bulunur. Buradan;

i) $\Delta > 0$ için;

$$\begin{aligned} p &= k \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right) \right], \\ q &= -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_1}{2} \left(-\lambda + \sqrt{\Delta} \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (B^2 - A^2)}{4 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

soliton çözümleri bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = k \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right],$$

$$q = -\frac{k^2}{\gamma} \left\{ \frac{c}{k} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[a_0 - \frac{a_1}{2} \left(\lambda + \sqrt{-\Delta} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \beta \frac{a_1 \Delta (A^2 + B^2)}{4 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \right\} \quad (3.2.43)$$

çözümleri bulunur.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = \sqrt{\lambda^2(\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad a_1 = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\lambda^2(\beta^2 + \alpha\gamma)^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

5. Durum:

$$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0, \quad a_0 = \mu = 0, \quad a_1 = -2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}, \quad c = -k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = k\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma} \times$$

$$\left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \frac{A \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)}{A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)} \right]$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\lambda^2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}(\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma})}{2\gamma \left(A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) \right)^2}$$

(3.2.44)

soliton çözümleri bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = k\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma} \times$$

$$\left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \frac{A \cos \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) - B \sin \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)}{A \sin \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cos \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2\lambda^2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}(\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma} - \beta)}{2\gamma \left(A \sin \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cos \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x - k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) \right)^2}$$

çözümleri bulunur. (3.2.45)

iii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = \lambda^2 = 0$ için;

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ koşulu ile çeliştiğinden çözüm yoktur.

6. Durum

$$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0, \quad a_0 = \mu = 0, \quad a_1 = 2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}, \quad c = k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = k\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma} \times$$

$$\left[-\lambda + \sqrt{\lambda^2} \frac{A \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)}{A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)} \right]$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\lambda^2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}(\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma} - \beta)}{2\gamma \left(A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) \right)^2}$$

(3.2.46)

soliton çözümleri bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = k\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma} \times$$

$$\left[-\lambda + \sqrt{-\lambda^2} \frac{A \cos \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) - B \sin \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)}{A \sin \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cos \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2\lambda^2\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}(\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma} + \beta)}{2\gamma \left(A \sin \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) + B \cos \frac{k\sqrt{-\lambda^2}}{2} (x + k\lambda\sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}t) \right)^2}$$

çözümleri
(3.2.47)

bulunur.

iii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = \lambda^2 = 0$ için;

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ koşulu ile çeliştiğinden çözüm yoktur.

3.3. WU-ZHANG DENKLEMİNİN $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

(3.2.1) denkleminde $\alpha = \frac{1}{3}$, $\gamma = 1$, $\beta = 0$ alınırsa;

$$p_t + pp_x + q_x = 0$$

$$q_t + (pq)_x + \frac{1}{3}p_{xxx} = 0 \quad (3.3.1)$$

şeklindeki Wu-Zhang denklemi bulunur. Bir önceki bölümde genel denklem için elde edilen çözümlerde α , γ ve β 'nin değerleri yerlerine yazılır ve Mathematica yardımıyla bulduğumuz katsayılar düzenlenirse, aşağıdaki analitik çözümler bulunur.

1.Durum:

$$a_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad a_1 = \frac{-2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}(\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2\Delta})}, \quad c = \frac{-k}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{\lambda^2\Delta} - \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}$$

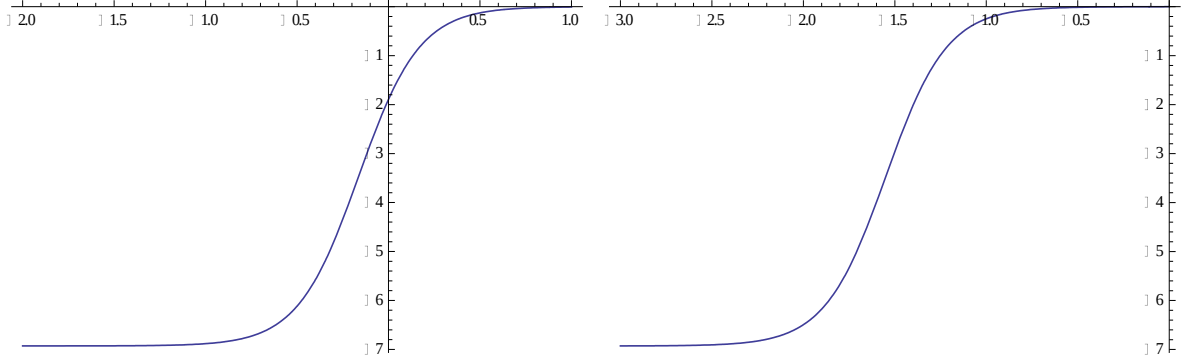
olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

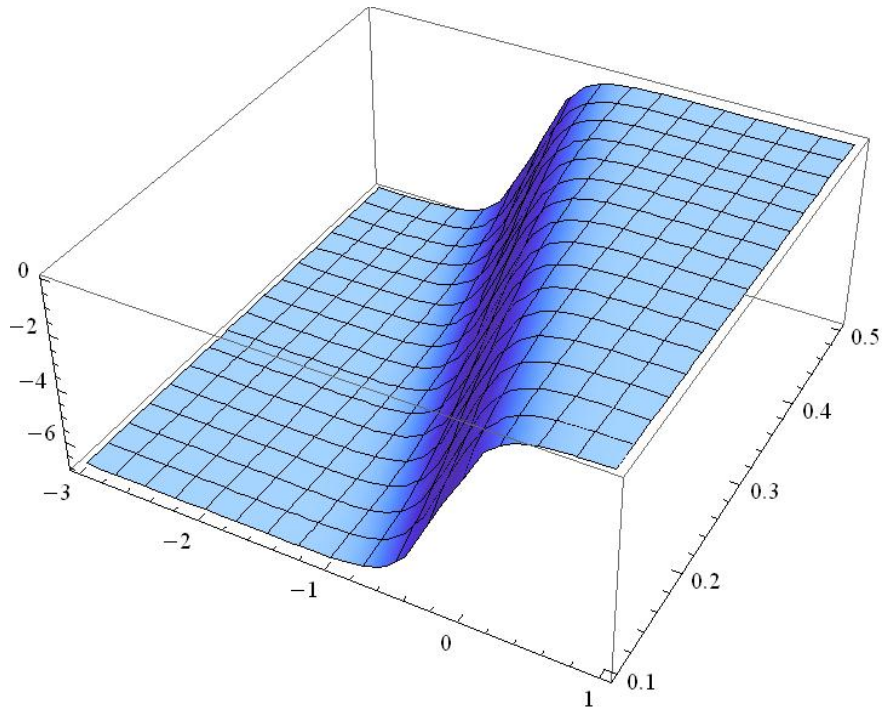
$$p = \frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}(\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2\Delta})} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\Delta}{6 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.3.2)$$

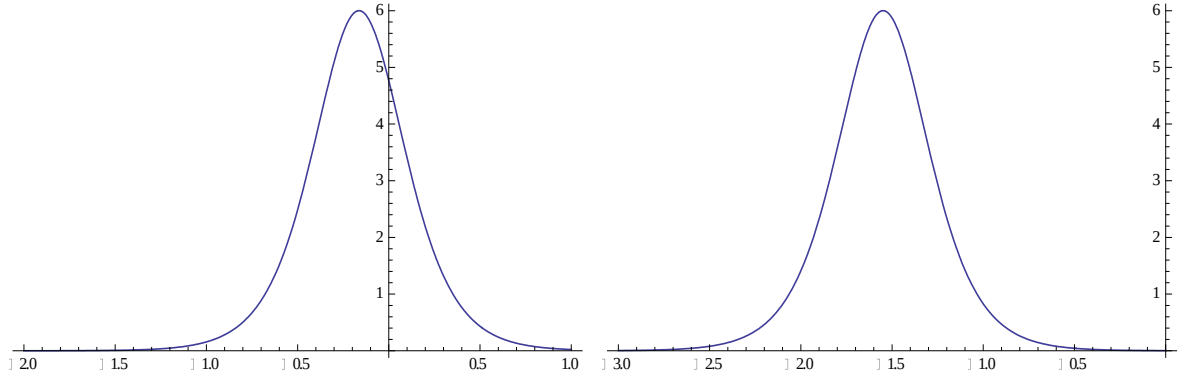
soliton çözümleri bulunur.



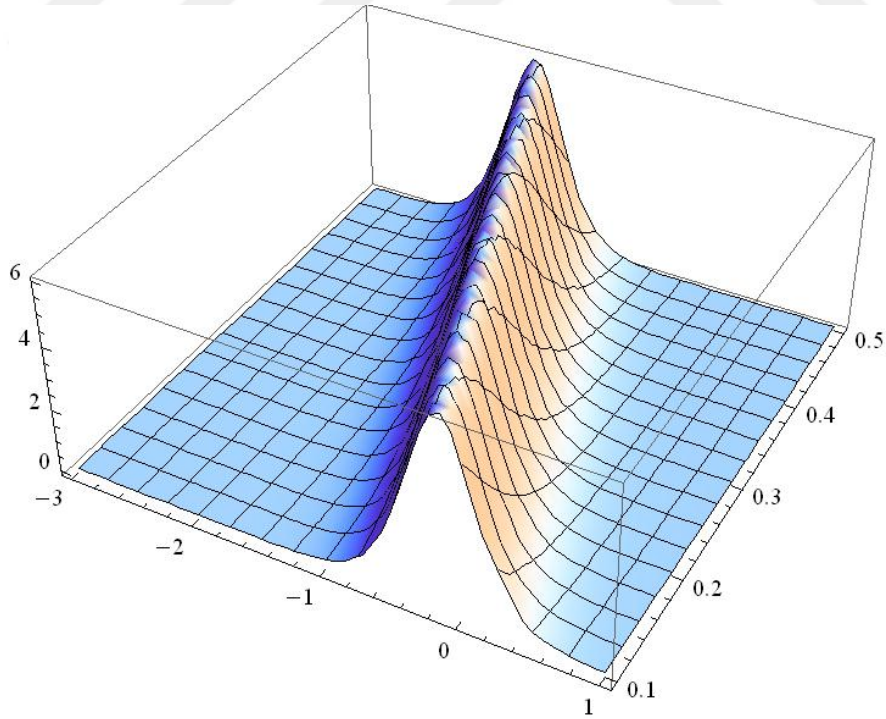
Şekil 3.1 (3.3.2) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 1$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümünün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.2 (3.3.2) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 1$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümünün $(x, t) \in [-3, 1] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi



Şekil 3.3 (3.3.2) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 1$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen q soliton çözümünün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.4 (3.3.2) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 1$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen q soliton çözümünün $(x, t) \in [-3, 1] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

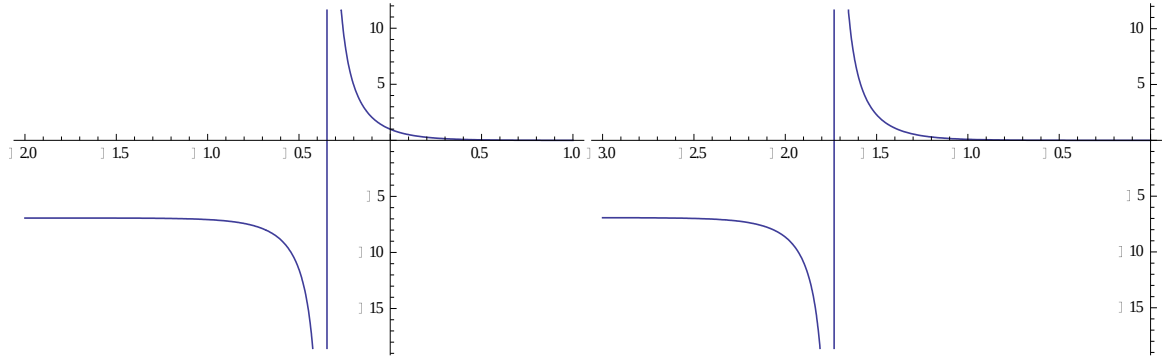
(3.3.2) çözümünde $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right] \\ q &= \frac{k^2 \Delta}{6} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

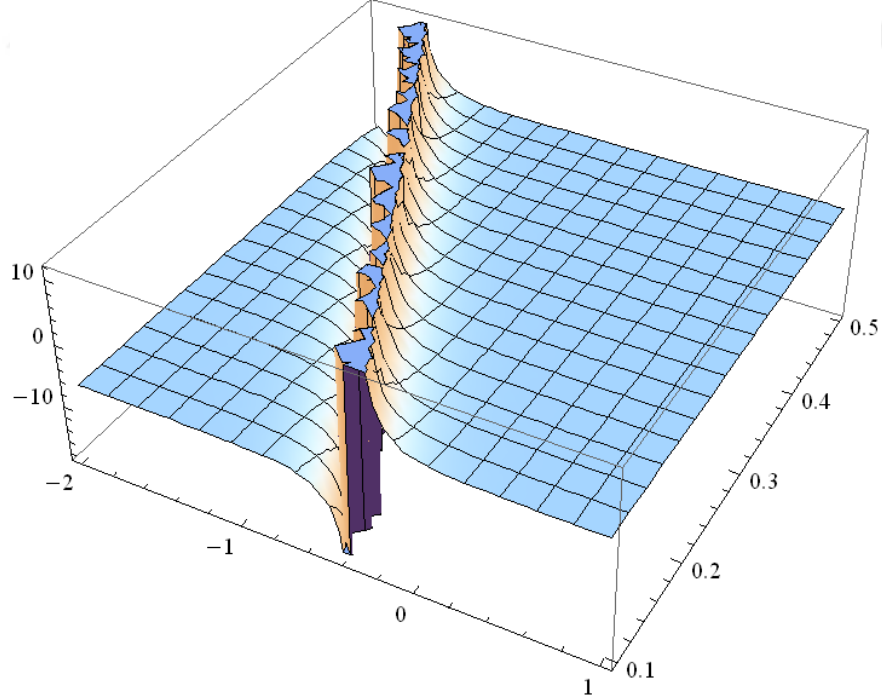
ve $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\ q &= -\frac{k^2 \Delta}{6} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

elde edilir.



Şekil 3.5 (3.3.4) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 1$, $B = 0$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümünün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri



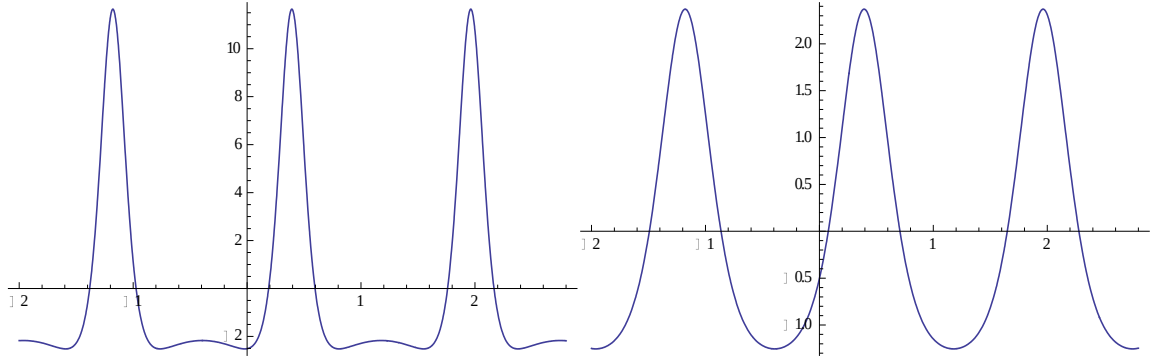
Şekil 3.6 (3.3.4) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 1$, $B = 0$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümünün $(x, t) \in [-2, 1] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

ii) $\Delta < 0$ için;

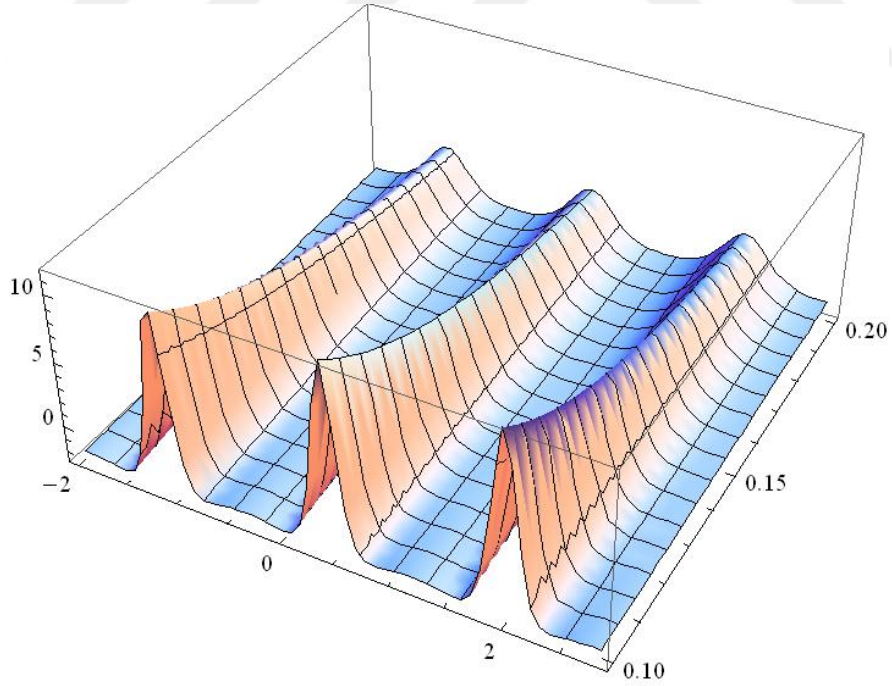
$$p = \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2\Delta}{6 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.3.5)$$

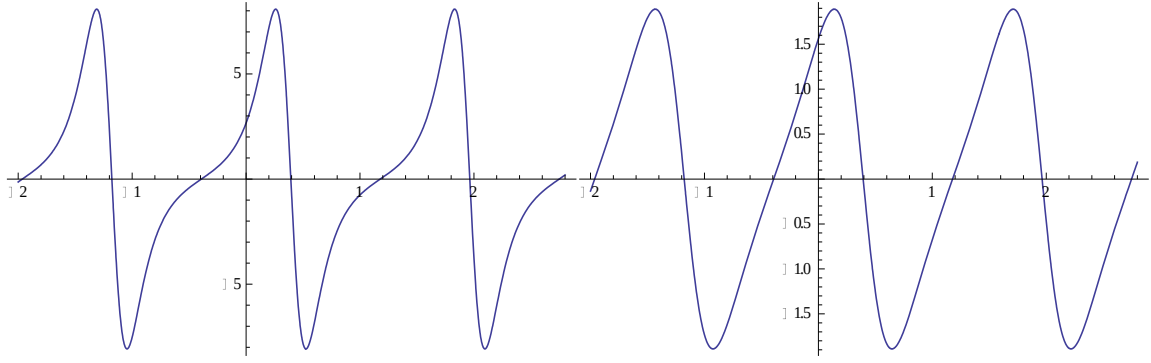
çözümleri bulunur.



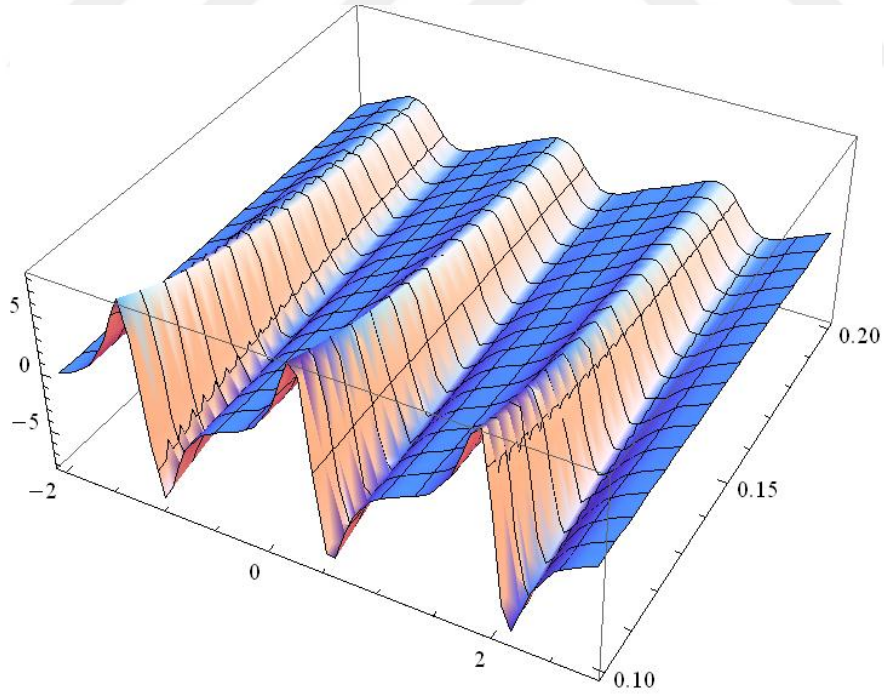
Şekil 3.7 (3.3.5) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 2$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.8 (3.3.5) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 2$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-2, 2.8] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi



Şekil 3.9 (3.3.5) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 2$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri

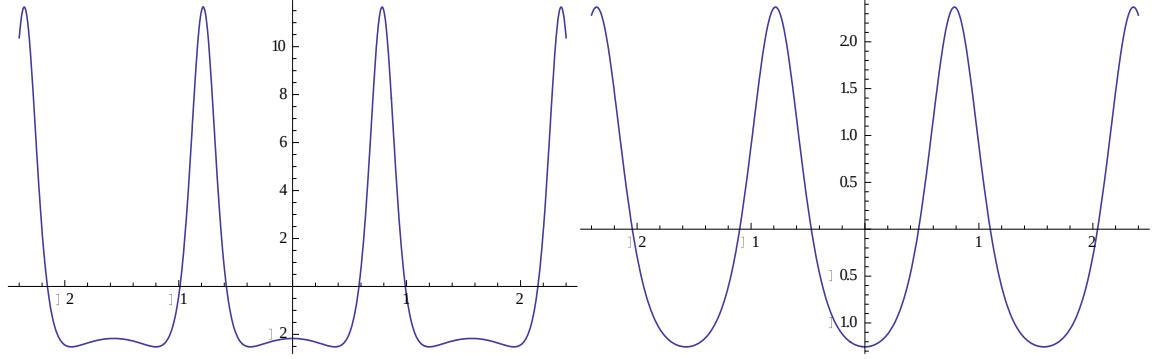


Şekil 3.10 (3.3.5) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 2$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-2, 2.8] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

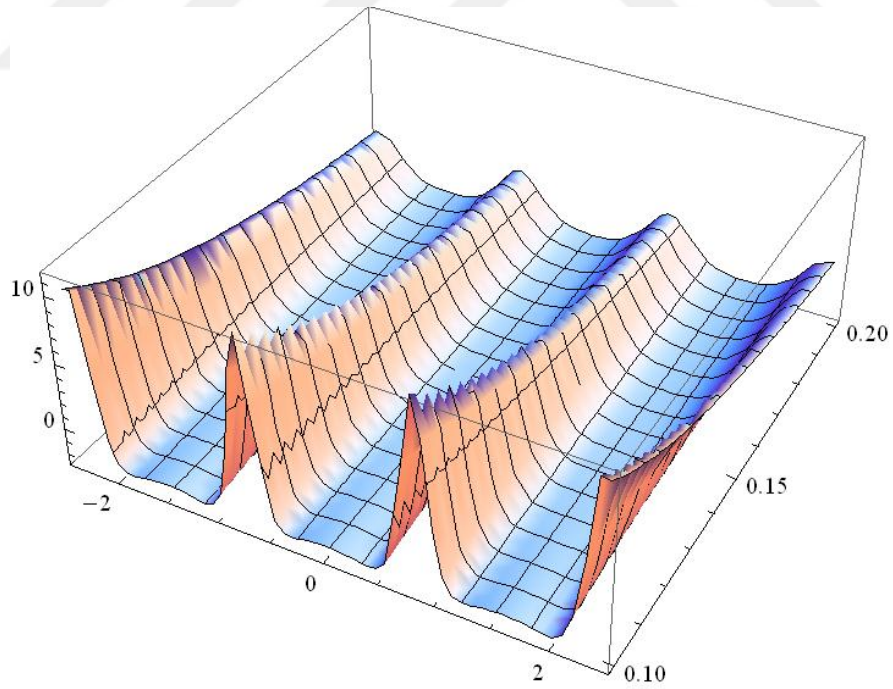
(3.3.5) çözümünde, $A = 0, B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\ q &= \frac{k^2 \Delta}{6} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

elde edilir.



Şekil 3.11 (3.3.6) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 0$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri

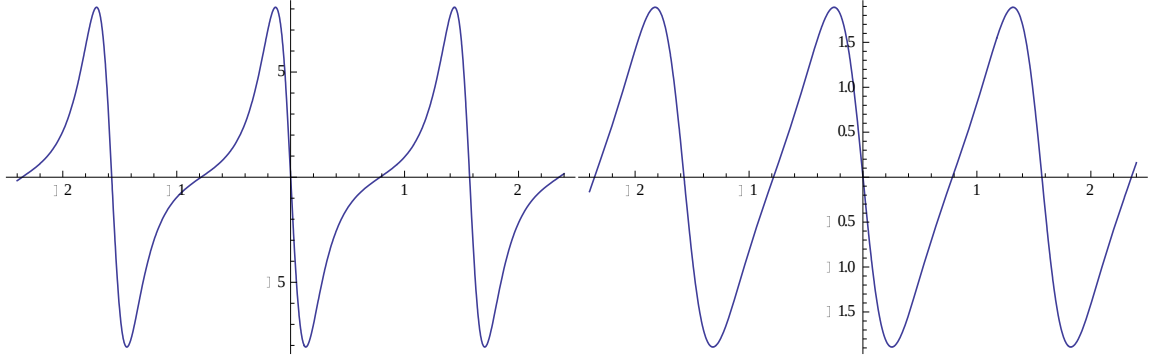


Şekil 3.12 (3.3.6) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 0$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-2.4, 2.4] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

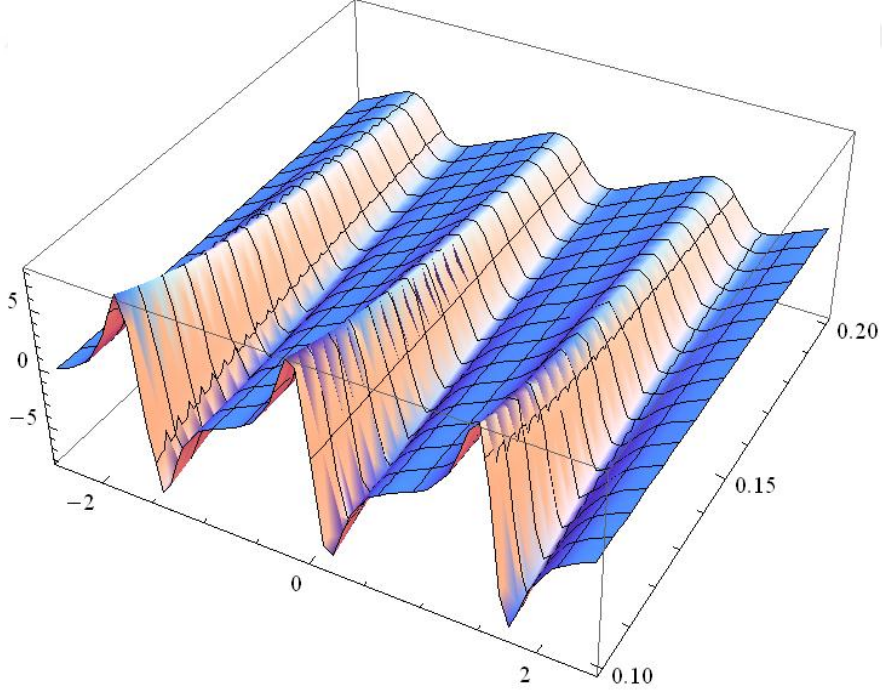
(3.3.5) çözümünde, $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\ q &= \frac{k^2 \Delta}{6} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

elde edilir.



Şekil 3.13 (3.3.7) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 2$, $B = 0$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.2$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.14 (3.3.7) çözümünde $k = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $A = 2$, $B = 0$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-2.4, 2.4] \times [0.1, 0.2]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}\lambda}\sqrt{\lambda^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

2.Durum:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad c = \frac{k}{\sqrt{3}}\frac{(\sqrt{\lambda^2\Delta} - \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = -\frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\Delta}{6 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.3.8)$$

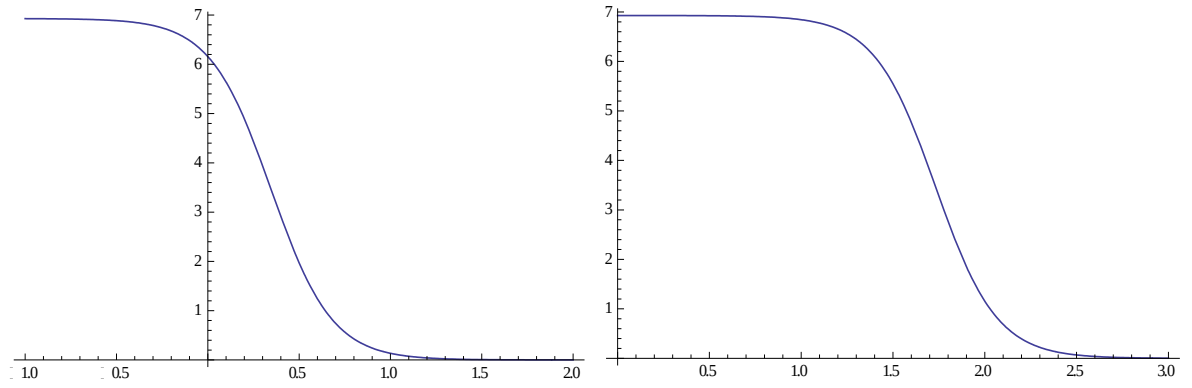
soliton çözümleri bulunur.

(3.3.8) çözümünde $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

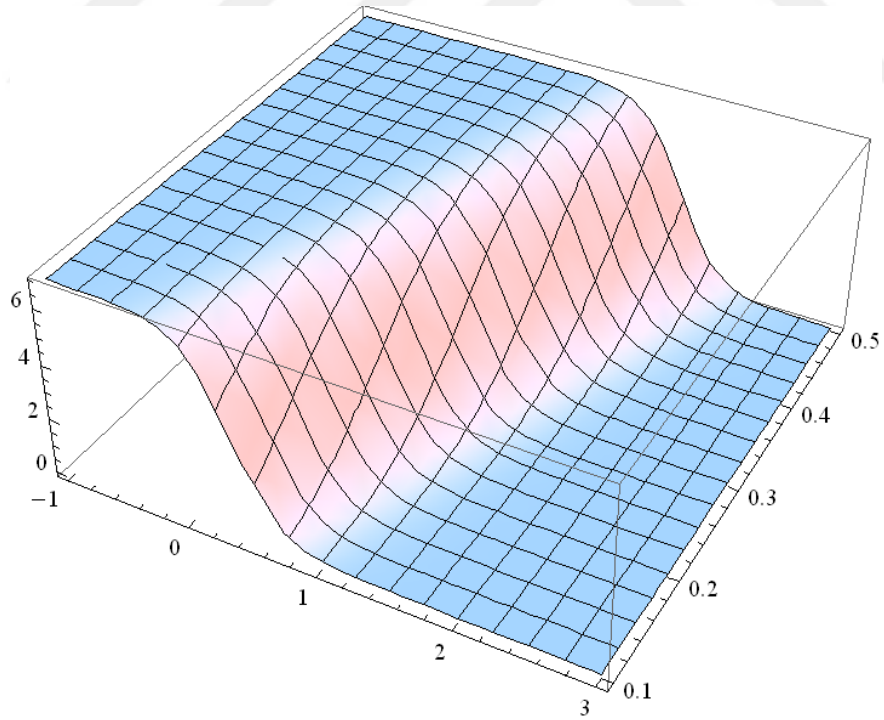
$$p = -\frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right]$$

$$q = \frac{k^2\Delta}{6} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.3.9)$$

elde edilir.



Şekil 3.15 (3.3.9) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 0$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümünün sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.16 (3.3.9) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3/4$, $A = 0$, $B = -1$ alınmasıyla elde edilen p soliton çözümünün $(x, t) \in [-1, 3] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

(3.3.8) çözümünde $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınırsa;

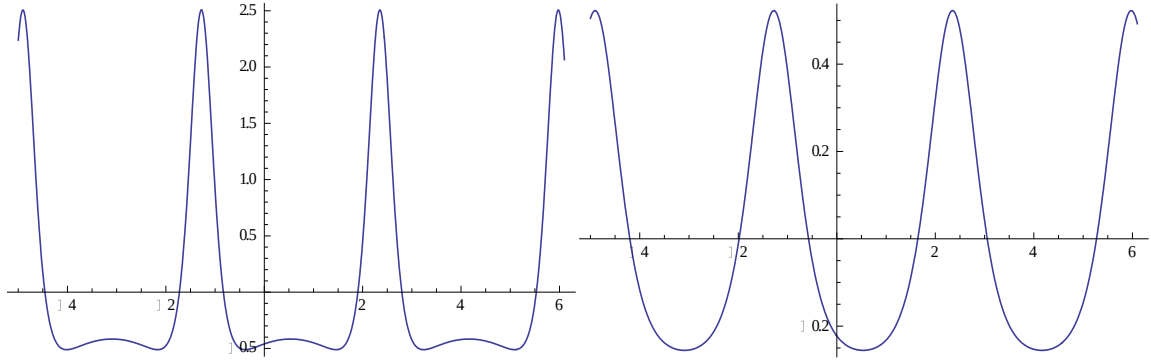
$$\begin{aligned} p &= -\frac{k\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right] \\ q &= -\frac{k^2 \Delta}{6} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

elde edilir.

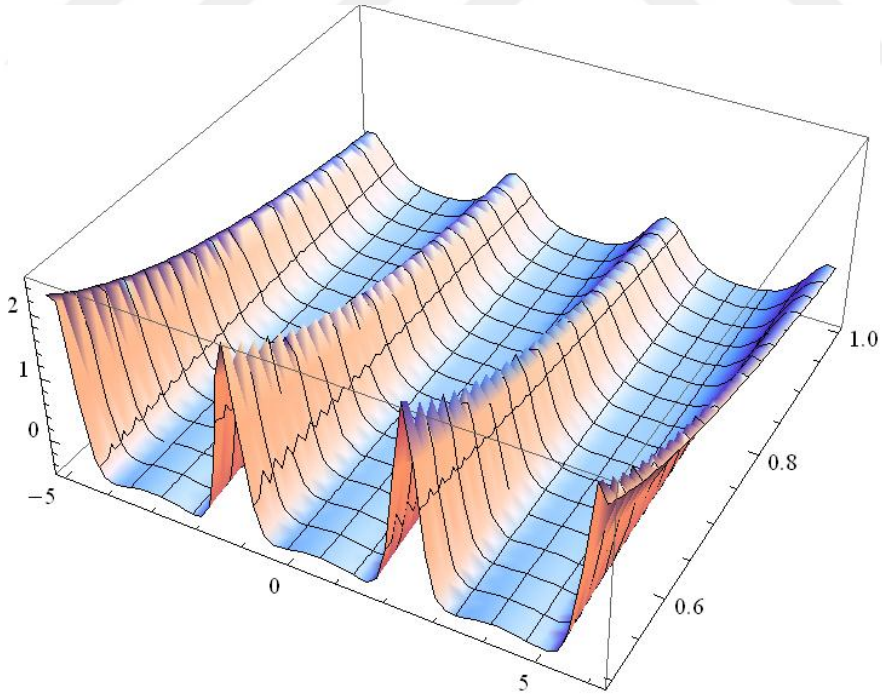
ii) $\Delta < 0$ için;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right] \\ q &= \frac{(A^2 + B^2)k^2 \Delta}{6 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

çözümleri bulunur.



Şekil 3.17 (3.3.11) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 1/3$, $A = -1$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.5$ ve $t = 1$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.18 (3.3.11) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{3}$, $A = -1$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-5, 6.1] \times [0.5, 1]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

(3.3.11) çözümünde, $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

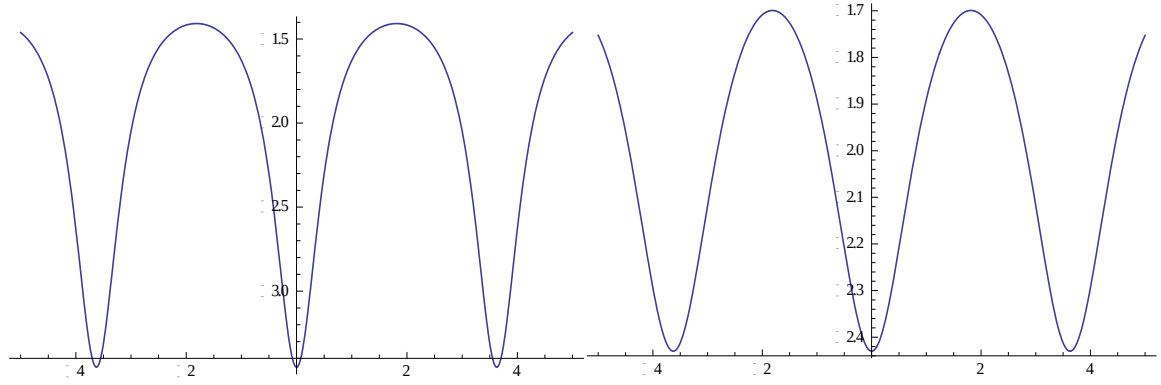
$$q = \frac{k^2\Delta}{6} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2$$
(3.3.12)

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

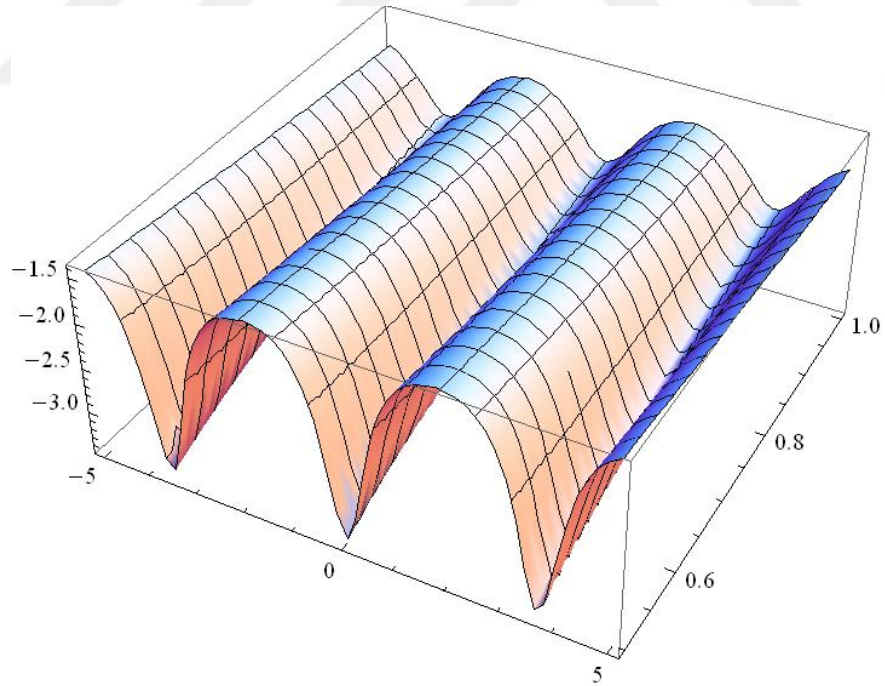
$$p = \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2\Delta}{6} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2$$
(3.3.13)

elde edilir.



Şekil 3.19 (3.3.13) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{3}$, $A = -1$, $B = 0$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.5$ ve $t = 1$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.20 (3.3.13) çözümünde $k = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{3}$, $A = -1$, $B = 0$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-5, 5] \times [0.5, 1]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}\lambda}\sqrt{\lambda^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

3.Durum:

$$a_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad a_1 = \frac{-2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta})}, \quad c = \frac{k}{\sqrt{3}}\frac{(\sqrt{\lambda^2\Delta} + \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = -\frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta})} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\Delta}{6 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.3.14)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.3.14) çözümünde $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta})} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right]$$

$$q = \frac{k^2\Delta}{6} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.3.15)$$

ve $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta})} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right]$$

$$q = -\frac{k^2\Delta}{6} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.3.16)$$

elde edilir.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = -\frac{k\sqrt{-\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2\Delta}{6 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \quad (3.3.17)$$

çözümleri bulunur.

(3.3.17) çözümünde, $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k\sqrt{-\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2\Delta}{6} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2 \quad (3.3.18)$$

ve çözümünde, $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k\sqrt{-\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2\Delta}{6} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2 \quad (3.3.19)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}\lambda}\sqrt{\lambda^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

4.Durum:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad c = \frac{-k}{\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{\lambda^2\Delta} + \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = \frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\Delta}{6 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \quad (3.3.20)$$

bulunur.

(3.3.20) çözümünde $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = \frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right]$$

$$q = \frac{k^2\Delta}{6} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2 \quad (3.3.21)$$

ve $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınırsa;

$$p = \frac{k\sqrt{\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right]$$

$$q = -\frac{k^2\Delta}{6} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2 \quad (3.3.22)$$

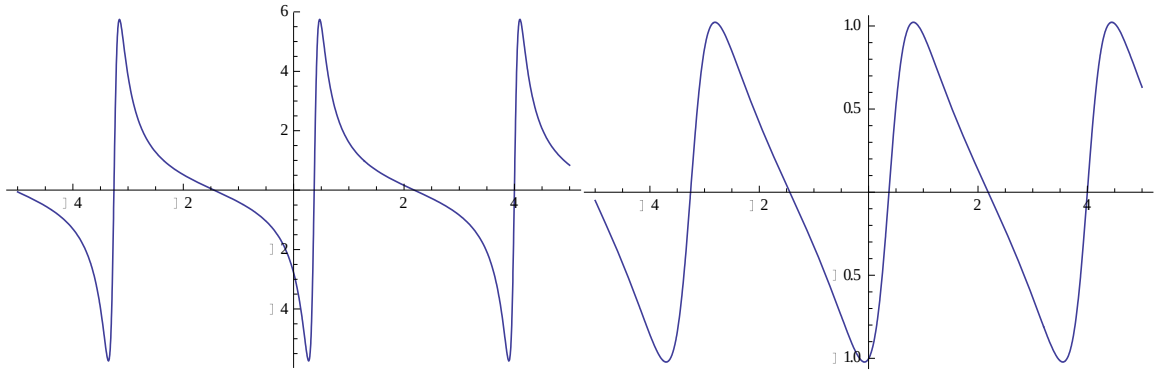
elde edilir.

ii) $\Delta < 0$ için;

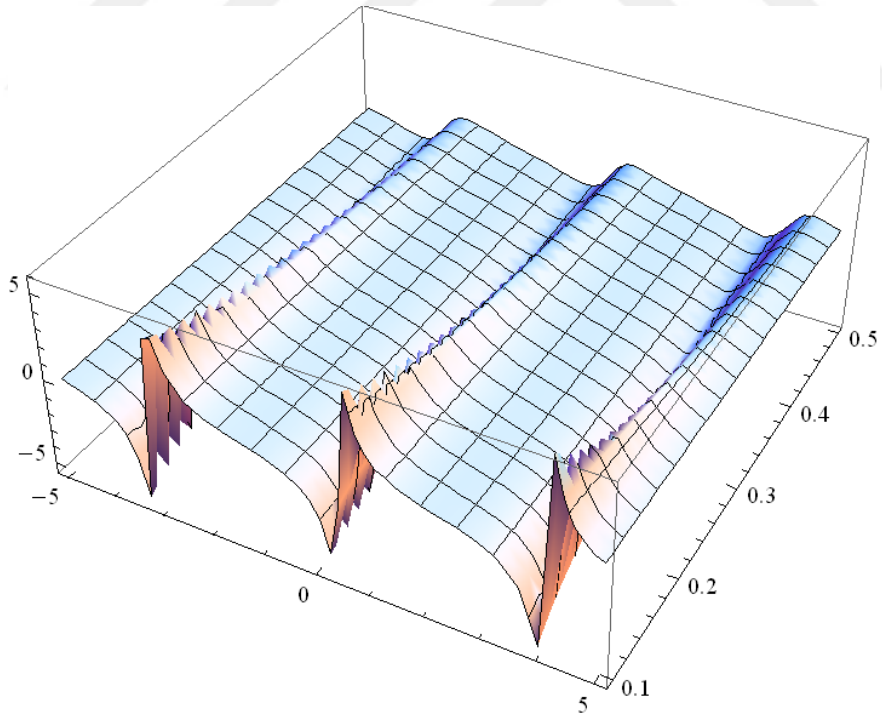
$$p = \frac{k\sqrt{-\Delta}\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\sqrt{3}\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2\Delta}{6 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x+ct) \right)^2} \quad (3.3.23)$$

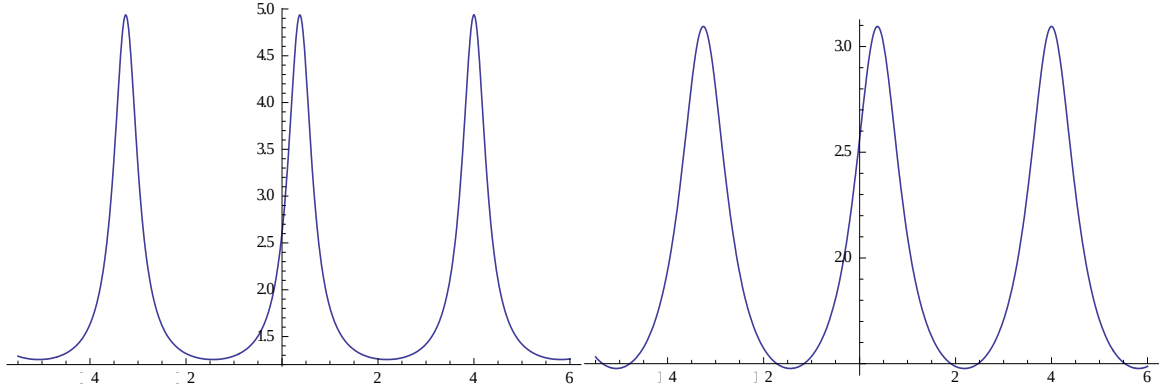
çözümleri bulunur.



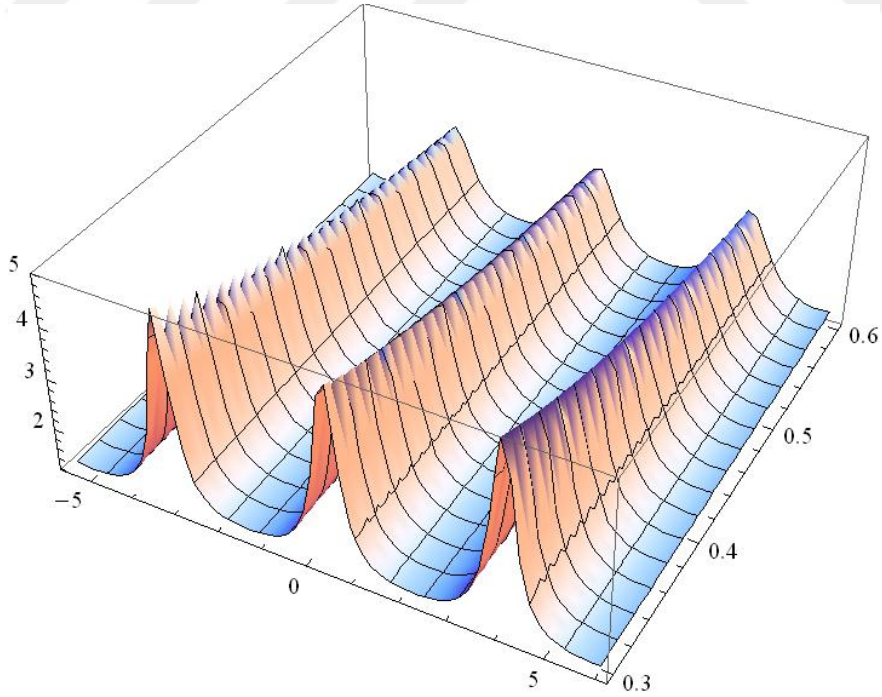
Şekil 3.21 (3.3.23) çözümünde $k = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $A = -3$, $B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün reel kısmının sırasıyla $t = 0.1$ ve $t = 0.5$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.22 (3.3.23) çözümünde $k = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $A = -3$, $B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün reel kısmının $(x, t) \in [-5, 5] \times [0.1, 0.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi



Şekil 3.23 (3.3.23) çözümünde $k = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $A = -3$, $B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 0.3$ ve $t = 0.6$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.24 (3.3.23) çözümünde $k = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $A = -3$, $B = 1$ alınmasıyla elde edilen p çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-5.5, 6] \times [0.3, 0.6]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

(3.3.23) çözümünde, $A = 0, B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\ q &= \frac{k^2 \Delta}{6} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

ve $A \neq 0, B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\ q &= \frac{k^2 \Delta}{6} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}\lambda} \sqrt{\lambda^2}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

5.Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{-2}{\sqrt{3}}, \quad c = \frac{-k\lambda}{\sqrt{3}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$\begin{aligned} p &= \frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \frac{A \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)}{A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)} \right], \\ q &= \frac{(B^2 - A^2)k^2 \lambda^2}{6 \left(A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2} \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.3.26) çözümünde $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
p &= \frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \tanh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right] , \\
q &= \frac{k^2 \lambda^2}{6} \operatorname{sech} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

ve $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
p &= \frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \coth \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right] , \\
q &= -\frac{k^2 \lambda^2}{6} \operatorname{csch} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

elde edilir.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$\begin{aligned}
p &= \frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) - B \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)}{A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)} \right] \\
q &= \frac{(A^2 + B^2) k^2 \lambda^2}{6 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

çözümleri bulunur.

(3.3.29) çözümünde, $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
p &= \frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda + \sqrt{-\lambda^2} \tan \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right] , \\
q &= \frac{k^2 \lambda^2}{6} \left(\sec \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

ve çözümünde, $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
p &= \frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \cot \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right] , \\
q &= \frac{k^2 \lambda^2}{6} \left(\csc \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x - \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.3.31}$$

elde edilir.

iii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = \lambda^2 = 0$ için;

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ koşulu ile çeliştiğinden çözüm yoktur.

6.Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad c = \frac{k\lambda}{\sqrt{3}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = -\frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \frac{A \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)}{A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\lambda^2}{6 \left(A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2} \quad (3.3.32)$$

bulunur.

(3.3.32) çözümünde $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \tanh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right],$$

$$q = \frac{k^2\lambda^2}{6} \operatorname{sech} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \quad (3.3.33)$$

ve $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \coth \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right],$$

$$q = -\frac{k^2\lambda^2}{6} \operatorname{csch} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \quad (3.3.34)$$

elde edilir.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = -\frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) - B \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)}{A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2\lambda^2}{6 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2} \quad (3.3.35)$$

çözümleri bulunur.

(3.3.35) çözümünde, $A = 0, B \neq 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda + \sqrt{-\lambda^2} \tan \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right],$$

$$q = \frac{k^2\lambda^2}{6} \left(\sec \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2 \quad (3.3.36)$$

ve $A \neq 0, B = 0$ alınırsa;

$$p = -\frac{k}{\sqrt{3}} \left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \cot \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right],$$

$$q = \frac{k^2\lambda^2}{6} \left(\csc \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k \left(x + \frac{k\lambda}{\sqrt{3}} t \right) \right)^2 \quad (3.3.37)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = \lambda^2 = 0$ için;

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ koşulu ile çeliştiğinden çözüm yoktur.

3.4. MODİFİYE BOUSSINESQ DENKLEMİNİN $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

(3.2.1) denklemde $\alpha = \gamma = 1, \beta = 0$ yazılırsa

$$p_t + pp_x + q_x = 0$$

$$q_t + (pq)_x + p_{xxx} = 0 \quad (3.4.1)$$

şeklindeki modifiye Boussinesq denklemi elde edilir. Bir önceki bölümde genel denklem için bulunan çözümlerde $\alpha = \gamma = 1$ ve $\beta = 0$ alınır ve Mathematica yardımıyla bulduğumuz katsayılar düzenlenirse, aşağıdaki analitik çözümler bulunur.

1.Durum:

$$a_0 = -\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}, \quad a_1 = \frac{-2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}}, \quad c = \frac{-k(\sqrt{\lambda^2 \Delta} - \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2 \Delta}{2 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.4.2)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.4.2) çözümünde sırasıyla $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2 \Delta}{2} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.3)$$

ve $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınırsa;

$$p = k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = -\frac{k^2 \Delta}{2} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.4)$$

elde edilir.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2 \Delta}{2 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.4.5)$$

çözümleri bulunur.

(3.4.5) çözümünde, $A = 0, B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\ q &= \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

ve $A \neq 0, B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\ q &= \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = -\sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = -\frac{2\sqrt{\lambda^2}}{\lambda}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

2.Durum:

$$a_0 = \sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}, \quad a_1 = \frac{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}}, \quad c = \frac{k(\sqrt{\lambda^2 \Delta} - \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$, için;

$$\begin{aligned} p &= -k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right], \\ q &= \frac{(B^2 - A^2)k^2 \Delta}{2 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.4.8) çözümünde $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
p &= -k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\
q &= \frac{k^2 \Delta}{2} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınır;

$$\begin{aligned}
p &= -k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} - \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\
q &= -\frac{k^2 \Delta}{2} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$\begin{aligned}
p &= k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right] \\
q &= \frac{(A^2 + B^2)k^2 \Delta}{2 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2}
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

çözümleri bulunur.

(3.4.11) çözümünde $A = 0$, $B \neq 0$ alınır;

$$\begin{aligned}
p &= k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\
q &= \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınır;

$$\begin{aligned}
p &= k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta - 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right], \\
q &= \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

elde edilir.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = \sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = \frac{-2\sqrt{\lambda^2}}{\lambda}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

3.Durum:

$$a_0 = -\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad a_1 = \frac{-2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}}, \quad c = \frac{k(\sqrt{\lambda^2\Delta} + \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = -k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\Delta}{2 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.4.14)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.4.14) çözümünde sırasıyla $A = 0$ ve $B \neq 0$ alınır;

$$p = -k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2\Delta}{2} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.15)$$

ve $A \neq 0$ ve $B = 0$ alınır;

$$p = -k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2\Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2\Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = -\frac{k^2\Delta}{2} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.16)$$

bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = -k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2 \Delta}{2 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.4.17)$$

çözümleri elde edilir.

(3.4.17) çözümünde, $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = -k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.18)$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa

$$p = -k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.19)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = -\sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = -\frac{2\sqrt{\lambda^2}}{\lambda}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

4.Durum:

$$a_0 = \sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}, \quad a_1 = \frac{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}}, \quad c = \frac{-k(\sqrt{\lambda^2 \Delta} + \Delta)}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2 \Delta}{2 \left(A \sinh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cosh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.4.20)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.4.20) çözümünde sırasıyla $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \tanh \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2 \Delta}{2} \left(\operatorname{sech} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.21)$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$p = k\sqrt{\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{\lambda^2} + \lambda \coth \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = -\frac{k^2 \Delta}{2} \left(\operatorname{csch} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.22)$$

bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$p = k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) - B \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)}{A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2 \Delta}{2 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) + B \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2} \quad (3.4.23)$$

çözümleri bulunur.

(3.4.23) çözümünde $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} - \lambda \tan \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\sec \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.24)$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınır;

$$p = k\sqrt{-\Delta} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \Delta + 2\sqrt{\lambda^2 \Delta}}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 \Delta}} \left[\sqrt{-\lambda^2} + \lambda \cot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right],$$

$$q = \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\csc \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} k(x + ct) \right)^2 \quad (3.4.25)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = 0$ için;

$$a_0 = \sqrt{\lambda^2}, \quad a_1 = \frac{2\sqrt{\lambda^2}}{\lambda}, \quad c = 0$$

bulunur. Burada; c solitonun hızı ifade ettiğinden $c = 0$ durumunda soliton çözümü yoktur.

5.Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -2, \quad c = -k\lambda$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = k \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \frac{A \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) + B \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t)}{A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2 \lambda^2}{2 \left(A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) \right)^2} \quad (3.4.26)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.4.26) çözümünde $A = 0$, $B \neq 0$ alınır;

$$p = k \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \tanh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) \right]$$

$$q = \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\operatorname{sech} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) \right)^2 \quad (3.4.27)$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= k \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \coth \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) \right] \\ q &= -\frac{k^2\lambda^2}{2} \left(\operatorname{csch} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x - k\lambda t) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

$$\begin{aligned} p &= k \left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) - B \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t)}{A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t)} \right] \\ q &= \frac{(A^2 + B^2)k^2\lambda^2}{2 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) \right)^2} \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

çözümleri bulunur.

(3.4.29) çözümünde $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= k \left[\lambda + \sqrt{-\lambda^2} \tan \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) \right], \\ q &= \frac{k^2\lambda^2}{2} \left(\sec \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= k \left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \cot \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) \right], \\ q &= \frac{k^2\lambda^2}{2} \left(\csc \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x - k\lambda t) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = \lambda^2 = 0$ için;

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ koşulu ile çeliştiğinden çözüm yoktur.

6.Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad c = k\lambda$$

olmak üzere;

i) $\Delta > 0$ için;

$$p = -k \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \frac{A \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) + B \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t)}{A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t)} \right],$$

$$q = \frac{(B^2 - A^2)k^2\lambda^2}{2 \left(A \sinh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) + B \cosh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) \right)^2} \quad (3.4.32)$$

soliton çözümleri bulunur.

(3.4.32) çözümünde $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$p = -k \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \tanh \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) \right]$$

$$q = \frac{k^2\lambda^2}{2} \left(\operatorname{sech} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) \right)^2 \quad (3.4.33)$$

ve çözümünde $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$p = k \left[\lambda - \sqrt{\lambda^2} \coth \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) \right]$$

$$q = -\frac{k^2\lambda^2}{2} \left(\operatorname{csch} \frac{k\sqrt{\lambda^2}}{2} (x + k\lambda t) \right)^2 \quad (3.4.34)$$

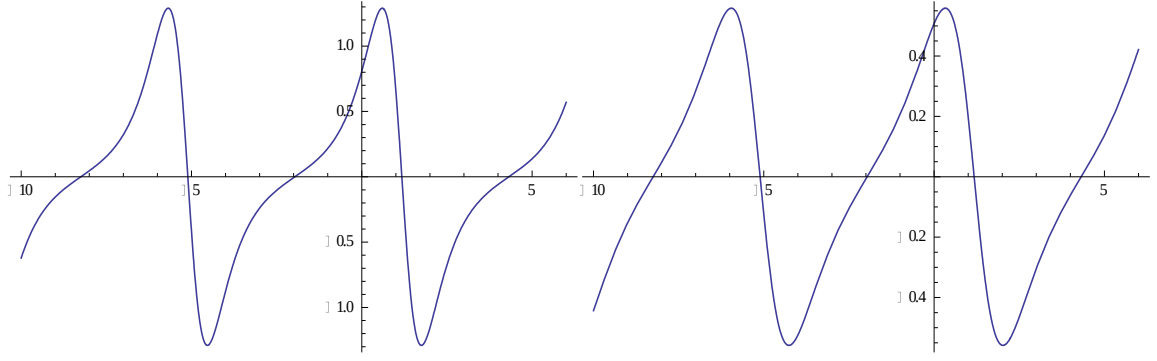
bulunur.

ii) $\Delta < 0$ için;

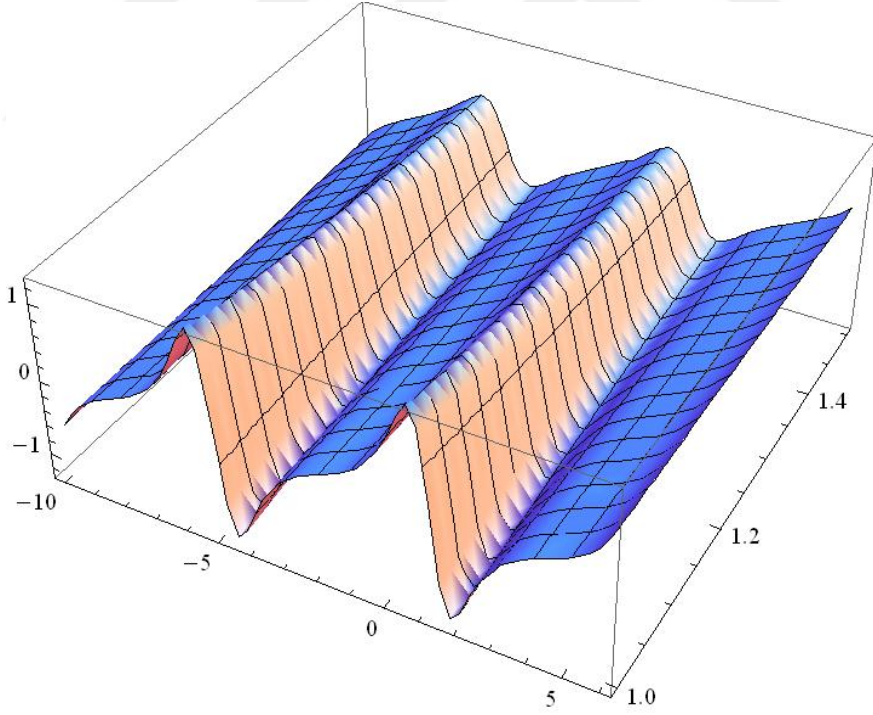
$$p = k \left[-\lambda + \sqrt{-\lambda^2} \frac{A \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) - B \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t)}{A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t)} \right]$$

$$q = \frac{(A^2 + B^2)k^2\lambda^2}{2 \left(A \sin \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) + B \cos \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) \right)^2} \quad (3.4.35)$$

çözümleri bulunur.



Şekil 3.25 (3.4.35) çözümünde $k = 1$, $\lambda = -i$, $\mu = 0$, $A = 3$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının sırasıyla $t = 1$ ve $t = 1.5$ anındaki iki boyutlu resimleri



Şekil 3.26 (3.4.35) çözümünde $k = 1$, $\lambda = -i$, $\mu = 0$, $A = 3$, $B = -2$ alınmasıyla elde edilen q çözümün imajiner kısmının $(x, t) \in [-10, 6] \times [1, 1.5]$ bölgesindeki üç boyutlu resmi

(3.4.35) çözümünde $A = 0$, $B \neq 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= -k \left[\lambda + \sqrt{-\lambda^2} \tan \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) \right], \\ q &= \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\sec \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

ve $A \neq 0$, $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p &= -k \left[\lambda - \sqrt{-\lambda^2} \cot \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) \right], \\ q &= \frac{k^2 \lambda^2}{2} \left(\csc \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2} k(x + k\lambda t) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

elde edilir.

iii) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = \lambda^2 = 0$ için;

$(\beta^2 + \alpha\gamma)\lambda \neq 0$ koşulu ile çeliştiğinden çözüm yoktur.

3.5. SONUÇ

Bu tezde $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu yardımıyla Whitham-Broer-Kaup tipli bazı sistemlerin soliton çözümleri bulundu. Bu sistem (2.3.1) Miura dönüşümü yardımıyla (3.2.7) şeklindeki tek bir denkleme dönüştürüldü. Daha sonra $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu yardımıyla trigonometrik, hiperbolik, topolojik ve topolojik olmayan soliton çözümleri bulundu. (2.4.1) genel formundaki denklemde α, β ve γ katsayılarının durumuna göre çözümler elde edildi. Bu çözümlerden hareketle Wu-Zhang denklem sisteminin ve modifiye Boussinesq denkleminin soliton çözümleri bulundu. Ayrıca elde edilen çözümlerin denklemi sağladığı kontrol edildi. Bulunan soliton ve cebirsel çözümlerin pek çoğu bu denklemler için yeni çözümlerdir. Elde edilen bu çözümler Whitham-Broer-Kaup tipi denklemlerin fiziksel özelliklerinin incelenmesinde faydalı olacaktır.

KAYNAKÇA

- [1] **Ross, S.L.**, 1984. Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc, Singapore
- [2] **Koca, K.**, 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [3] **Pala Y.**, 2006. Modern Fizik Uygulamaları, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [4] **Kortweg, D. J., de Vries, G.**, 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, Phil. Mag., **39**, 442-443.
- [5] **Zabusky, N.C., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Physical Review Letters, **15**, 240-243.
- [6] **Karpman, V.I, Lynov, J.P, Michelsen, P., Pescelli, H.L, Rasmussen, J.J, Turikov, V.A.**, 1980. Modification of plasma solitons by resonant particles, Phys Fluids; **23**, 1782.
- [7] **Bisognano, J.J**, 1996. In: Proceedings of the 1996 European particle accelerator conference, Sitges. Bristol, UK: IOP; 328-30.
- [8] **Russell, J.S.**, 1845. Reports on Waves, Made to meetings in 1842 and 1843, Report of the fourteen meeting of the British Association for the advancement of science held at York in September 1844, John Murray, Almerable Street, London.
- [9] <http://en.wikipedia.org/wiki/Soliton>.
- [10] **Wazwaz, A.M.**, 2002. Partial Differential Equations Methods and Applications, Gorter, Steenwijk, The Netherlands
- [11] **Ulutaş, E.**, 2011. Lineer olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlerin genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu ile çözümü, Yüksek Lisans Tezi, F.Ü., Elazığ
- [12] **Boussinesq, J.**, 1871. Theorie de l'intumescence liquid appelee onde solitaire ou de conference, Sitges, Bristol, UK: IOP; 328-30
- [13] **Rayleigh, L.**, 1876. On waves, Phil. Mag. **1**, 257-279.
- [14] **Fermi E., Pasta J., Ulam, S.**, 1955. Studies of nonlinear problems. Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A. C. Newell) Amer. Math. Soc., **15** (1974), 143-156.
- [15] **Gençoğlu, M.T.**, 2013. Hirota Satsuma birleştirilmiş KdV denkleminin analitik ve yaklaşık çözümleri, Doktora Tezi, F.Ü., Elazığ
- [16] **Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M.**, 1974. Kortweg de Vries equation and generalizations, Methods for exact solution, Communication on Pure and Applied Mathematics, **27**, 97-133.
- [17] **Hirota, R.**, 1971. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, Physical Review Letters, **27**, 1192-1194.

- [18] **Zabusky, N.J., Galvin, C.J.**, 1971. Shallow water waves. The KdV equation and solitons, *J. Fluid Mech.* **47**, 811-824.
- [19] **Hammack, J.L., Segur, H.**, 1974. The Kortweg de Vries equation and water waves, *J. Fluid Mech.* **65**, 289-314.
- [20] **Weidman. P.D., Maxworthy, T.**, 1978. Experiments on strong interactions between solitary waves. *J. Fluid Mech.* **85**, 417-431.
- [21] **Öziş, T., Yıldırım, A.**, 2008. Reliable analysis for obtaining exact solutions of non-linear Schrödinger (NLS) equation, *Choas, Solitons and Fractals*, **38**, 209-212.
- [22] http://en.wikipedia.org/wiki/Sine-Gordon_equation.
- [23] [http://en.wikipedia.org/wiki/Robert M. Miura](http://en.wikipedia.org/wiki/Robert_M._Miura).
- [24] **Wang, D.S.**, 2010, Complete integrability and the Miura transformation of coupled KdV equation, *Applied Mathematics Letters*, **23**, 665-669.
- [25] **Scheider, G.**, 2011, Justification of the NLS approximation for the KdV equation using the Miura transformation, *Hindawi Publishing Corporation Advances in Mathematical Physics*, Article ID854719.
- [26] **Karasu (Kalkanli) A., Sakovich, S.Y.**, 2001, Bäcklund transformation and special solutions for Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota system of coupled equations, *arXiv:nlin/0102001v1*.
- [27] **Whitham, G. B.**, 1967, Variational methods and applications to water waves, *Proceedings of the Royal Society of Londor, Series A* **299**, 6-25.
- [28] **Broer, L. J. F.**, 1975, Approximate equations for kong water waves, *Applied Scientific Reseaerch*, **31**, 377-395.
- [29] **Kaup, D. J.**, 1975, A higher-order water-wave equation and the method for solving it, *Progress of Theoretical Physics*, **54**, 396-408.
- [30] **Rafei, M., Daniali, H.**, 2007, Application of the variational iteraton method to the Whitham-Broer-Kaup equations, *Computers and Mathematics with Applications*, **54**, 1079-1085.
- [31] **Rashidi, M. M., Ganji, D. D., Dinarvand, S.**, 2008, *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, ID 243459.
- [32] **Mohyud-Din, S. T., Yıldırım, A., Demirli, G.**, 2010, Traveling wave solutions of Whitham-Broer-Kaup equations by homotopy perturbation method, *Journal of Kinf Saud University (Science)*, **22**, 173-176.

- [33] **Wang, M., Li, X.**, 2014, Simplified Homogenous Balance Method and its Applications to the Whitham-Broer-Kaup Model Equations, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **2**, 823-827.
- [34] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010, The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Whitham-Broer-Kaup-Like equations and coupled Hirota-Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.
- [35] **Aasaraai, A., Mehrlatifan, M. B., Khaleghizadeh, S. K.**, 2013, Modified F-Expansion Method Applied to Coupled System of Equation, *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*, **24(4)**, 347-354.
- [36] **Wu, T. Y., Zhang, J. E.**, 1996, "On modeling nonlinear long waves", in *Mathematics for Solving Problems: A Volume in Honor of Julian Cole on his 70th birthday*, edited by L. P. Cook, V. Roytburd and M. Tulin, 233-249, SIAM, Philadelphia.
- [37] **Ma, Z. Y.**, 2007, Homotopy perturbation method for the Wu-Zhang equation in fluid dynamics, *Journal of Physics: Conference Series*, **96**.
- [38] **Zheng, X., Chen, Y., Zhang, H.**, 2003, Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Physics Letters, A* **311**, 145-157.
- [39] **Helal, M. M., Mekky, M. L., Mohamed, E. A.**, 2012, The characteristic function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Applied Mathematics*, **3**, 12-18.
- [40] **Sachs, R. L.**, 1988, On the integrable variant of the Boussinesq system: Painlevé property, rational solutions, a related many-body system, and equivalence with the AKNS hierarchy. *Physica D.*, **30**, 1-27
- [41] **Liu, C. M., Lin, M.C., Kong, C.H.**, 2008, Essential properties of Boussinesq equations for internal and surface waves in a two-fluid system, *Ocean Eng.*, **35**, 230-246.
- [42] **Wang, M. L.**, 1995, Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations. *Phys. Lett., A* **199**, 169-172.
- [43] **Yan, Z. Y., Zhang, H. Q.**, 1999, New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics., *Phys. Lett. A*, **252**, 291-296.
- [44] **Lü, D. Z.**, 2005, Jacobi elliptic function solutions for two variant Boussinesq equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, **24**, 1373-1385.

- [45] **Naz, R. M., Hayat, F. M.**, 2010, The Conservation laws for third-order variant Boussinesq system, *Appl. Math. Lett.*, **23**, 883-886.
- [46] **Abdusalam, H.A.**, 2005, On improved complex tanh-method, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **6**, 99-106.
- [47] **Miura, M.R.**, 1978, Bäcklund Transformation, Springer-Verlag, Berlin.
- [48] **Rogers, C., Shadwick, W.F.**, 1982, Bäcklund Transformations, Academia Press, New York.
- [49] **Hirota, R.**, 1971, Exact solution for a compound Kortweg de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 1192-1194.
- [50] **Wang, M.L.**, 1996, Exact solutions for a compound KdV-Burger's equations, *Phys. Letters A*, **213**, 279-287.
- [51] **Wang, Z., Zhang, H.Q.**, 2007, A new generalized Riccati equation rational expansion method to class of nonlinear evolution equation with nonlinear terms of any order, *Appl. Math. Comput.*, **186**, 693-704.
- [52] **He, J.H.**, 2000, Variational iteration method for autonomus ordinary differential systems, *Applied Mathematics and Computational Applications*, **114**, 115-123.
- [53] **He, J.H.**, 2005, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, **26**, 695-700.
- [54] **He, J.H.**, 2005, Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems., *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **6**, 163-168.
- [55] **Keskin, Y., Oturanc, G., Kiris, M.E.**, 2005, n-Dimensional differential transformation method for solving linear and nonlinear PDE's, *International Journal of Computer Mathematics*, **82**, 369-380.
- [56] **Oleiver, P.J.**, 1968, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer, New York.
- [57] **Liu, S.K., Fu, Z.T., Liu, S.D., Zhao, Q.**, 2001, Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, *Phys. Lett. A* **289**, 69-74.
- [58] **Parkes, E.J., Duffy, B.R., Abbott, P.C.**, 2002, The Jacobi elliptic function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations, *Phys. Lett. A* **295**, 280-286.
- [59] **Babolian, E., Biazar, J., Vahidi, A.R.**, 2005, Solution of a system of nonlinear equations by Adomian decomposition method., *Appl. Math. Comput.*, **150**, 847-854.

- [60] **Khatami, I., Tolou, N., Mahmoudi, J., Rezvani, M.**, 2008, Application of homotopy analysis method and variational iteration method for shock wave equation, *J. Applied Sci.*, **8**, 848-853.
- [61] **Zhang, S.**, 2008, Application of Exp-function method to higher dimensionel nonlinear evolution equation, *Chaos Solitons and Fractals*, **38**, 270-276.
- [62] **Khuri, S.A.**, 2001, A Laplace decomposition algorithm applied to class of nonlinear differential equations, *J. Math. Appl.*, 141-155.
- [63] **Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A.**, 1991, *Solitons, nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [64] **Yan, C.T.**, 1996, A simple transformation for nonlinear waves, *Phys. Lett., A* **224**, 77-84.
- [65] **Matveev, V. B., Salle, M.A.**, 1991, *A Darboux transformations and solitons.*, Springer, Berlin, Heidelberg.
- [66] **Weiss, J., Tabor, M., Carnevale, G.**, 1983, The Painlevé property for partial differential equations, *J. Math. Phys.*, **24**, 522-526.
- [67] **Liu, J.B., Yang, K.Q.**, 2004, The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDEs, *Chaos, Solitons and Fractals*, **22**, 111-121.
- [68] **Abdou, M.A.**, 2007, The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, **31**, 95-104.
- [69] **Liu, H.M.**, 2004, Variational approach to nonlinear electrochemical system., *Int J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **5**, 95-96.
- [70] **Guo, P., Wu, X., Wang, L-bi**, 2015, Multiple soliton solutions for the variant Boussinesq equations, *Advances in Difference Equations*, **37**.
- [71] **Wang, M., Li, X., Zhang, J.**, 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of non-linear evolution equations in mathematical physics, *Physc. Lett. A* **372**, 417-423.
- [72] **Bekir, A.**, 2008. Application of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method for non-linear evolution equations, *Physc. Lett. A* **372**, 3400-3406.
- [73] **Zhang, J., Wei, X., Lu, Y.**, 2008. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its appliactions, *Physc. Lett. A* **372**, 3653-3658.
- [74] **Aslan, İ., Öziş, T.**, 2009. On the validity and reliability of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method by using higher-order non-linear equations. *Appl. Math. Comput.* **211**, 531-536.

- [75] **Malik, A., Chand F., Kumar, Hitender and Mishra, S.C.**, 2012. Exact solution of some physical models using the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method, Indian Academy of Science, **78**, 513-529.
- [76] **Islam, R., Khan, K., Akbar, M. A., Islam, E.**, 2013, Enhanced $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method to Find the Exact Complexiton Soliton Solutions of (3+1)-Dimensional Zakhrov-Kuznetsov Equation, Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and desicion Sciencesi, **Volume 13**, Issue 8.
- [77] **Islam, E., Khan, K., Akbar, M. A., Islam, R.**, 2013, Enhanced (G'/G) -Expansion Method to Find the Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics, International Journal of Partial Differential Equations and Applications, **Vol. 1**, No. 1, 6-12.
- [78] **Hounkonnou, M. N., Kanfony, R. F.**, 2013, Modified (G'/G) -expansion method for solving nonlinear partial differential equations, arXiv:310.0699v1 [math – ph].
- [79] **Zayed, E. M. E., Arnous, A. H.**, 2013, The modified (G'/G) -expansion method for the (1+1) Hirota-Ramani and (2+1) breaking soliton equation, International Journal of Physical Sciences, **8(3)**, 124-130, 23.
- [80] **Li, L., Li, E., Wang, M.**, 2010, The $(G'/G, 1/G)$ -expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations, Appl. Math. J. Chinese Univ., **25(4)**, 454-462.
- [81] **Taghizadeh, N., Noori, S. R. M., Noori, S. B. M.**, 2104, Application of the Extended (G'/G) -expansion Method to the Improved Eckhaus Equation, Applications and Applied Mathematics; An International Journal (AAM), **9(1)**, Issue 1, 371-387.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Diyarbakır’da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Diyarbakır’da tamamladım. 1997-2003 yılları arasında Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2009 yılında Bingöl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne Araştırma Görevlisi olarak atandım. 2012 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen lisansüstü eğitimimi sürdürmekteyim.

Hasan GÜNDÜZ

