

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI
İSTATİSTİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali BAŞHAN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK

HAZİRAN-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI
İSTATİSTİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali BAŞHAN

(07121101)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 8 Haziran 2010

HAZİRAN-2010

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI
İSTATİSTİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ali BAŞHAN
(07121101)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 08 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih: 25 Haziran 2010

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

HAZİRAN-2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım değerli hocam sayın Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK' e en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, tezin hazırlanmasında yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR'e de teşekkür ederim.

Ali BAŞHAN
ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Temel Tanımlar	2
2. KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI.....	4
2.1 Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Kesikli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları	4
2.2 Bağımsız Fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Kesikli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları.....	5
3. SONUÇLAR.....	10
KAYNAKLAR.....	14
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bazı temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları elde edilmiştir.

Son bölümde, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık ve dağılım fonksiyonu ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı İstatistikler, Bağımsız Tesadüfi Değişkenler, Kesikli Tesadüfi Değişkenler, Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Tesadüfi Değişkenler, Bağımsız fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Tesadüfi Değişkenler, Olasılık Fonksiyonu, Dağılım Fonksiyonu, Permanent.

SUMMARY

Order Statistics of Discrete Random Variables

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the fundamental definitions are given.

The second chapter consists of two sections. In the first section, the distributions of order statistics of independent and identically distributed discrete random variables are examined. In the last section of this chapter, the distributions of order statistics of independent but not necessarily identically distributed discrete random variables are obtained.

In the last chapter, the some results related to the probability and distribution function of order statistics of independent but not necessarily identically distributed discrete random variables are given.

Key Words: Order Statistics, Independent Random Variables, Discrete Random Variables, Independent and Identically Distributed Random Variables, Independent but not Necessarily Identically Distributed Random Variables, Probability Function, Distribution Function, Permanent.

SEMBOLLER LİSTESİ

F : Dağılım fonksiyonu

f : Olasılık fonksiyonu

$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots \\ i_1 & i_2 & \end{bmatrix}$: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ kolon vektörleri olmak üzere $\mathbf{a}_1$ 'in i_1 defa, $\mathbf{a}_2$ 'nin i_2 defa ... alınması ile oluşturulan matris

$[A][s/\cdot)$: $s \subset N$ olmak üzere, indisleri s 'de olan satırların alınması ile A 'dan oluşturulan matris

1.GİRİŞ

Sıralı istatistikler, istatistik teorisinde oldukça önemlidir. Çünkü; sıralı istatistiklerin dağılımları, örneklemin alındığı dağılımdan bağımsızdır.

Bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları, Khatri [1] tarafından incelenmiştir. Vaughan ve Venables [2], permanent yardımıyla bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını incelemişlerdir. Corley [3], sürekli çok değişkenli tesadüfi değişkenlerin farklı anlamlarda sıralı istatistiklerini tanımlamıştır. Balakrishnan [4], bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli bir anakütleden gelen sıralı istatistikler için sağlanan bazı bağıntılar elde etmiştir. Bu bağıntılar, aynı zamanda bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistikleri için de sağlanmaktadır. Reiss [5], bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılım ve yoğunluk fonksiyonları için birçok bağıntı elde etmiştir. Nagaraja [6,7], bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli bir anakütleden gelen sıralı istatistiklerin temel yapılarını incelemiştir. David [8], Arnold vd. [9] ve Gan ve Bain [10], bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin olasılık ve dağılım fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerinin dağılımları, farklı şekillerde ifade edilmiştir.

1.1 Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1 (Kesikli Tesadüfi Değişken)

Tanım aralığı, sonlu ya da sayılabilir sonsuz elemanlı olan tesadüfi değişkenlere kesikli tesadüfi değişken denir [11].

Tanım 1.1.2 (Olasılık Fonksiyonu)

X kesikli tesadüfi değişkeni, $x_1, x_2, \dots$ değerlerini

$$P(X = x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

olasılıkları ile alsın.

Aşağıdaki şartları sağlayan f 'ye, X 'in olasılık fonksiyonu denir [11].

i) $f(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1.$

Tanım 1.1.3 (Dağılım Fonksiyonu)

X , kesikli bir tesadüfi değişken olsun. Herhangi bir gerçel değer x için, X 'in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

eşitliği ile ifade edilir [11].

Tanım 1.1.4 (Sıralı İstatistikler)

$X_1, X_2, \dots, X_n$, n tane tesadüfi değişken olsun. Eğer $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'lerin meydana gelme sırası değil, büyüklüklerinin sırası gözönüne alınırsa n birimli bir örneğin sıralı istatistikleri,

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$ 'ye, r . sıralı istatistik ($r=1,2,\dots,n$) ve $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ tesadüfi vektörüne de sıralı istatistikler denilir. $X_{1:n}$, örneğin minimumu ve $X_{n:n}$, örneğin maksimumudur. Bundan dolayı,

$$X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

yazılabilir [5].

Tanım 1.1.5 (Permanent)

Permanent; açılımındaki bütün terimlerin işaretlerinin pozitif olması hariç, determinantla aynıdır.

Mesela, mertebesi 2 olan bir A karesel matrisinin permanenti,

$$perA = per \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a.d+b.c$$

şeklinde ifade edilir [2].

2. KESİKLİ TESADÜFİ DEĞİŞKENLERİN SIRALI İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIMLARI

Bu bölümde önce, bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık ve dağılım fonksiyonu verilecektir. Daha sonra, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık ve dağılım fonksiyonu ile ilgili teoremler verilecektir.

2.1. Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Kesikli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$, olasılık fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F 'ye sahip bağımsız ve aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenler olsun. Bu tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin olasılık fonksiyonu,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{n!}{(r-1-k)!(k+1+m)!(n-r-m)!} F^{r-1-k}(x-) f^{k+1+m}(x) [1-F(x)]^{n-r-m} \quad (2.1.1)$$

olarak ifade edilir. Burada, $F(x-) = P(X < x)$ 'dir. Ayrıca (2.1.1),

$$f_{r:n}(x) = r \binom{n}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \binom{r-1}{k} \binom{n-r}{m} \cdot [F(x-)]^{r-1-k} [1-F(x)]^{n-r-m} f(x) \int_0^1 [y f(x)]^k [(1-y) f(x)]^m dy \quad (2.1.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$y f(x) + F(x-) = v$ değişken değiştirmesi ile (2.1.2),

$$f_{r:n}(x) = r \binom{n}{r} \int_{F(x-)}^{F(x)} v^{r-1} (1-v)^{n-r} dv \quad (2.1.3)$$

olarak ifade edilebilir. (2.1.3)'den $X_{r:n}$ 'nin dağılım fonsiyonu,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{x=0}^x f_{r:n}(x) = r \binom{n}{r} \int_0^{F(x)} v^{r-1} (1-v)^{n-r} dv$$

olarak elde edilir [1].

2.2. Bağımsız Fakat Aynı Dağılımlı Olmayan Kesikli Tesadüfi Değişkenlerin Sıralı İstatistiklerinin Dağılımları

$X_1, X_2, \dots, X_n$, aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenler olsun. X_i ($i=1, 2, \dots, n$) tesadüfi değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu f_i ve dağılım fonksiyonu F_i olsun.

$$\{X_{r:n} = x\},$$

olayını ele alalım. Burada, $k = 0, 1, \dots, r-1$ ve $m = 0, 1, \dots, n-r$ olmak üzere x 'den küçük $F_i(x-)$ olasılıklı $r-1-k$ gözlem, x 'e eşit $f_i(x)$ olasılıklı $k+1+m$ gözlem ve x 'den büyük $1-F_i(x)$ olasılıklı $n-r-m$ gözlem vardır. Böylece; $X_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonu, aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.2.1

$$f_{r:n}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+1+m)!(n-r-m)!} \text{per} \begin{bmatrix} F(x-) & f(x) & 1-F(x) \\ r-1-k & k+1+m & n-r-m \end{bmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Burada, $F(x-) = (F_1(x-), F_2(x-), \dots, F_n(x-))'$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))'$ ve $1-F(x) = (1-F_1(x), 1-F_2(x), \dots, 1-F_n(x))'$ kolon vektörleridir.

Yukarıdaki teoremden; bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli bir anakütleden gelen $X_{r:n}$ 'nin olasılık fonksiyonu, permanent kullanılarak verilmiştir.

Teorem 2.2.1’de permanent açılımı kullanılırsa, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.2

$$f_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+1+m)!(n-r-m)!} \sum_P \prod_{l_1=1}^{r-1-k} F_{i_{l_1}}(x-) \prod_{l_2=r-k}^{r+m} f_{i_{l_2}}(x) \prod_{l_3=r+m+1}^n [1-F_{i_{l_3}}(x)]. \quad (2.2.2)$$

Burada, $\sum_P (1, 2, \dots, n)$ ’nin bütün $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ permütasyonları üzerinden toplamı gösterir.

İntegral formu kullanılarak Teorem 2.2.1, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.2.3

$$f_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{n_{\varsigma_1}, n_{\varsigma_2}} \int_{F_{\varsigma_2^{(1)}}(x-)}^{F_{\varsigma_2^{(1)}}(x)} \text{per}[\mathbf{v}_{r-1}][\varsigma_1/.] \text{per}[\mathbf{d}\mathbf{v}_1][\varsigma_2/.] \text{per}[\mathbf{1}-\mathbf{v}_{n-r}][\varsigma_3/.]. \quad (2.2.3)$$

Burada, $v_i = y f_i(x) + F_i(x-)$ olmak üzere $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$, $\mathbf{1}-\mathbf{v} = (1-v_1, 1-v_2, \dots, 1-v_n)'$, $d\mathbf{v} = (dv_1, dv_2, \dots, dv_n)'$ kolon vektörleri ve $\sum_{n_{\varsigma_1}, n_{\varsigma_2}}$, $v \neq v$ için $\varsigma_v \cap \varsigma_v = \emptyset$ olmak üzere

$\varsigma = \bigcup_{l=1}^3 \varsigma_l$ üzerinden toplamı ifade eder. Ayrıca, $\varsigma_1 = \{\varsigma_1^{(1)}, \varsigma_1^{(2)}, \dots, \varsigma_1^{(r-1)}\}$, $\varsigma_2 = \{\varsigma_2^{(1)}\}$,

$\varsigma_3 = \{\varsigma_3^{(1)}, \varsigma_3^{(2)}, \dots, \varsigma_3^{(n-r)}\}$, $\varsigma \subset N$, $\varsigma \neq \emptyset$ ve n_{ς} , ς ’nin eleman sayısını belirtmektedir.

İspat. (2.2.1)’de permanentin özellikleri kullanılırsa,

$$f_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+1+m)!(n-r-m)!} \sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3}, n_{\tau_4}} \text{per}[F(x-)]_{r-1-k}[\tau_1/.] \text{per}[f(x)]_k[\tau_2/.] \\ \cdot \text{per}[f(x)]_1[\tau_3/.] \text{per}[f(x)]_m[\tau_4/.] \text{per}[1-F(x)]_{n-r-m}[\tau_5/.] \quad (2.2.4)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3}, n_{\tau_4}}$, $v \neq v$ için $\tau_v \cap \tau_v = \emptyset$ olmak üzere $\varsigma = \bigcup_{l=1}^5 \tau_l$

üzerinden toplamı ifade eder. Ayrıca (2.2.4),

$$f_{r:n}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+1+m)!(n-r-m)!} \sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3}, n_{\tau_4}} \text{per}[F(x-)]_{r-1-k}[\tau_1/.] \text{per}[f(x)]_k[\tau_2/.] \\ \cdot \text{per}[f(x)]_1[\tau_3/.] \text{per}[f(x)]_m[\tau_4/.] \text{per}[1-F(x)]_{n-r-m}[\tau_5/.] \int_0^1 \frac{(k+1+m)!}{k!m!} y^k (1-y)^m dy$$

şeklinde de yazılabilir. Yukarıdaki ifade,

$$f_{r:n}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!k!m!(n-r-m)!} \sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3}, n_{\tau_4}} \int_0^1 \text{per}[F(x-)]_{r-1-k}[\tau_1/.] \text{per}[yf(x)]_k[\tau_2/.] \\ \cdot \text{per}[dyf(x)]_1[\tau_3/.] \text{per}[(1-y)f(x)]_m[\tau_4/.] \text{per}[1-F(x)]_{n-r-m}[\tau_5/.] \quad (2.2.5)$$

olarak yazılabilir.

(2.2.5)'de, $v = yf(x) + F(x-)$ alınırsa

$$f_{r:n}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!k!m!(n-r-m)!} \sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3}, n_{\tau_4}} \int_{F_{\tau_3(1)}(x-)}^{F_{\tau_3(1)}(x)} \text{per}[F(x-)]_{r-1-k}[\tau_1/.] \\ \cdot \text{per}[v-F(x-)]_k[\tau_2/.] \text{per}[dv]_1[\tau_3/.] \text{per}[F(x)-v]_m[\tau_4/.] \text{per}[1-F(x)]_{n-r-m}[\tau_5/.] \quad (2.2.6)$$

ifadesi yazılabilir. Şimdi,

$$\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{(r-1-k)!k!} \sum_{n_{\tau_1}, n_{\tau_2}} \text{per}[A]_{r-1-k}[\tau_1/.] \text{per}[B]_k[\tau_2/.] \text{per}[C]_1[\tau_3/.] \\ = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{n_{\zeta_1}} \text{per}[A+B]_{r-1}[\zeta_1/.] \text{per}[C]_1[\zeta_2/.] \quad (2.2.7)$$

eşitliğini gözönüne alalım. (2.2.7), (2.2.6)'da kullanılırsa

$$f_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}} \int_{F_{\zeta_2}^{(1)}(x-)}^{F_{\zeta_2}^{(1)}(x)} \int_{r-1}^{F_{\zeta_2}^{(1)}(x)} \text{per}[F(x-) + v - F(x-)] [\zeta_1 / .) \text{per}[dv_1] [\zeta_2 / .) \\ \cdot \text{per}[F(x) - v + 1 - F(x)] [\zeta_3 / .) \\ n-r$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\zeta_1 = \tau_1 \cup \tau_2$, $\zeta_2 = \tau_3$, $\zeta_3 = \tau_4 \cup \tau_5$ 'dir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.3'de permanentin özellikleri kullanılırsa, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.4

$$f_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \int_{F_{i_r}(x-)}^{F_{i_r}(x)} \prod_{l=1}^{r-1} v_{i_l} \prod_{l=r+1}^n [1 - v_{i_l}] dv_{i_r}. \quad (2.2.8)$$

Bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin r . sıralı istatistiğinin dağılım fonksiyonu, aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.2.5

$$F_{r,n}(x) = \sum_{x=0}^x \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+1+m)!(n-r-m)!} \text{per}[F(x-) \quad f(x) \quad 1-F(x)] \quad \begin{matrix} r-1-k \\ k+1+m \\ n-r-m \end{matrix}. \quad (2.2.9)$$

İspat.

$$F_{r,n}(x) = \sum_{x=0}^x f_{r,n}(x) \quad (2.2.10)$$

eşitliği yazılabilir. (2.2.1), (2.2.10)'da kullanılırsa (2.2.9) elde edilmiş olur.

Teorem 2.2.5'de permanentin özellikleri kullanılırsa, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.6

$$F_{rn}(x) = \sum_{x=0}^x \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{n-r} \frac{1}{(r-1-k)!(k+1+m)!(n-r-m)!} \sum_P \prod_{l_1=1}^{r-1-k} F_{i_{l_1}}(x) \prod_{l_2=r-k}^{r+m} f_{i_{l_2}}(x) \prod_{l_3=r+m+1}^n [1-F_{i_{l_3}}(x)]. \quad (2.2.11)$$

İntegral formu kullanılarak Teorem 2.2.5, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.2.7

$$F_{rn}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{n_{\zeta_1}, n_{\zeta_2}} \int_0^{F_{\zeta_2}^{(1)}(x)} \text{per} \left[\begin{matrix} v \\ r-1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \zeta_1 \\ \cdot \end{matrix} \right] \text{per} \left[\begin{matrix} dv \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \zeta_2 \\ \cdot \end{matrix} \right] \text{per} \left[\begin{matrix} 1-v \\ n-r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \zeta_3 \\ \cdot \end{matrix} \right]. \quad (2.2.12)$$

İspat. (2.2.3), (2.2.10)'da kullanılırsa (2.2.12) elde edilmiş olur.

Teorem 2.2.7'de permanentin özellikleri kullanılırsa, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.8

$$F_{rn}(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \sum_P \int_0^{F_{ir}(x)} \prod_{l=1}^{r-1} v_{i_l} \prod_{l=r+1}^n [1-v_{i_l}] dv_{i_r}. \quad (2.2.13)$$

3. SONUÇLAR

Bu bölümde, bağımsız fakat aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin minimum ve maksimumunun olasılık ve dağılım fonksiyonları ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun olasılık fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.1

$$\begin{aligned}
 f_{1:n}(x) &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(1+m)!(n-1-m)!} per\left[\frac{f(x)}{1+m} \frac{1-F(x)}{n-1-m}\right] \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(1+m)!(n-1-m)!} \sum_P \prod_{l_2=1}^{1+m} f_{i_{l_2}}(x) \prod_{l_3=m+2}^n [1-F_{i_{l_3}}(x)] \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n_{\zeta_2}} \int_{F_{\zeta_2}^{(1)}(x-)}^{F_{\zeta_2}^{(1)}(x)} per\left[\frac{dv_1}{1} \right] [\zeta_2 / .) per\left[\frac{1-v_{n-1}}{n-1} \right] [\zeta_3 / .) \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_P \int_{F_{i_1}(x-)}^{F_{i_1}(x)} \prod_{l=2}^n [1-v_{i_l}] dv_{i_1} . \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

İspat. (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.8)'de $r = 1$ alınırsa, (3.1) elde edilir.

Sonuç 3.1'den aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun olasılık fonksiyonu,

$$f_{1:n}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{(1+m)!(n-1-m)!} [f(x)]^{1+m} [1-F(x)]^{n-1-m}$$

$$= n \int_{F(x-)}^{F(x)} (1-v)^{n-1} dv$$

olarak elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun olasılık fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.2

$$\begin{aligned} f_{n:n}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!(k+1)!} per[F(x-) \quad f(x)] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!(k+1)!} \sum_P \prod_{l=1}^{n-1-k} F_{i_l}(x-) \prod_{l_2=n-k}^n f_{i_{l_2}}(x) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n_{\zeta_1}} \int_{F_{\zeta_2(1)}(x-)}^{F_{\zeta_2(1)}(x)} per[v_{n-1}][\zeta_1 / .) per[dv_1][\zeta_2 / .) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_P \int_{F_{i_n}(x-)}^{F_{i_n}(x)} \prod_{l=1}^{n-1} v_{i_l} dv_{i_n} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

İspat. (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.8)'de $r = n$ alınırsa, (3.2) elde edilir.

Sonuç 3.2'den aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun olasılık fonksiyonu,

$$f_{n:n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!(k+1)!} [F(x-)]^{n-1-k} [f(x)]^{k+1}$$

$$= n \int_{F(x-)}^{F(x)} v^{n-1} dv$$

olarak elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun dağılım fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.3

$$\begin{aligned}
F_{1:n}(x) &= \sum_{x=0}^x \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{(1+m)!(n-1-m)!} per[f(x)_{1+m} \quad 1-F(x)_{n-1-m}] \\
&= \sum_{x=0}^x \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(1+m)!(n-1-m)!} \sum_P \prod_{l_2=1}^{1+m} f_{i_{l_2}}(x) \prod_{l_3=m+2}^n [1-F_{i_{l_3}}(x)] \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n_{\zeta_2}} \int_0^{F_{\zeta_2(1)}(x)} per[dv_1 \quad][\zeta_2 / .) per[1-v_{n-1} \quad][\zeta_3 / .) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_P \int_0^{F_{i_1}(x)} \prod_{l=2}^n [1-v_{i_l}] dv_{i_1} .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

İspat. (2.2.9), (2.2.11), (2.2.12) ve (2.2.13)'de $r = 1$ alınır, (3.3) elde edilir.

Sonuç 3.3'den aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin minimumunun dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
F_{1:n}(x) &= \sum_{x=0}^x \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{(1+m)!(n-1-m)!} [f(x)]^{1+m} [1-F(x)]^{n-1-m} \\
&= n \int_0^{F(x)} (1-v)^{n-1} dv
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Aşağıdaki sonuçta, aynı dağılımlı olmayan kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun dağılım fonksiyonu verilecektir.

Sonuç 3.4

$$\begin{aligned}
 F_{n:n}(x) &= \sum_{x=0}^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!(k+1)!} per[F(x-)_{n-1-k} f(x)_{k+1}] \\
 &= \sum_{x=0}^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!(k+1)!} \sum_P \prod_{l_1=1}^{n-1-k} F_{i_{l_1}}(x-) \prod_{l_2=n-k}^n f_{i_{l_2}}(x) \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n_{\zeta_1}}^{F_{\zeta_2^{(1)}}(x)} \int_0^{F_{\zeta_2^{(1)}}(x)} per[v_{n-1}][\zeta_1 / .) per[dv_1][\zeta_2 / .) \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_P \int_0^{F_{i_n}(x)} \prod_{l=1}^{n-1} v_{i_l} dv_{i_n} . \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

İspat. (2.2.9), (2.2.11), (2.2.12) ve (2.2.13)'de $r = n$ alınırsa, (3.4) elde edilir.

Sonuç 3.4'den aynı dağılımlı kesikli tesadüfi değişkenlerin maksimumunun dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 F_{n:n}(x) &= \sum_{x=0}^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-k)!(k+1)!} [F(x-)]^{n-1-k} [f(x)]^{k+1} \\
 &= n \int_0^{F(x)} v^{n-1} dv
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Khatri, C. G.**, 1962. Distribution of order statistics for discrete case, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **14**, 167-171.
- [2] **Vaughan, R. J. and Venables, W. N.**, 1972. Permanent expressions for order statistics densities, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser.B* **34**, 308-310.
- [3] **Corley, H. W.**, 1984. Multivariate order statistics, *Commun. Statist.- Theor. Meth.*, **13**, 1299-1304.
- [4] **Balakrishnan, N.**, 1986. Order statistics from discrete distributions, *Commun. Statist.- Theor. Meth.*, **15**, 657-675.
- [5] **Reiss, R. -D.**, 1989. Approximate distributions of order statistics, Springer, Verlag, New York Inc., USA.
- [6] **Nagaraja, H. N.**, 1986. Structure of discrete order statistics, *J. Statist. Plann. Inference*, **13**, 165-177.
- [7] **Nagaraja, H. N.**, 1992. Order statistics from discrete distributions, *Statistics*, **23**, 189-216.
- [8] **David, H. A.**, 1981. Order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [9] **Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N.**, 1992. A first course in order statistics, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [10] **Gan, G. and Bain, L. J.**, 1995. Distribution of order statistics for discrete parents with applications to censored sampling, *J. Statist. Plann. Inference*, **44**, 37-46.
- [11] **Akdeniz, Fikri**, 2002. Olasılık ve istatistik, Baki Kitabevi, Adana.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Batman'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Batman'da tamamladıktan sonra 1998 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğini kazandım. 2003 yılında bu bölümden mezun oldum. 2003 yılında MEB'de Matematik Öğretmeni olarak göreve başladım. Halen aynı görevi sürdürmekteyim. 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik Programında tezli yüksek lisansa başladım. Evli ve bir çocuk babasıyım.

Ali BAŞHAN