

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GEOMETRİK BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN KABUK
YAPILARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞI**

Cengiz POLAT

Tez Yöneticisi:
Prof. Dr. Yusuf CALAYIR

DOKTORA TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2006

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GEOMETRİK BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN KABUK
YAPILARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞI**

Cengiz POLAT

Doktora Tezi
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu tez, 22/09/2006 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Yusuf CALAYIR

Üye: Prof. Ali Sayıl ERDOĞAN

Üye: Prof. Dr. Ümit UZMAN

Üye: Prof. Dr. Mehmet ÜLKER

Üye: Prof. Dr. Aydın TURGUT

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin önerilmesi, yönlendirilmesi ve tamamlanmasında yardım ve alakalarını esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Yusuf CALAYIR'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam sırasında zaman zaman görüşlerinden faydalandığım sayın Prof. Ali Sayıl ERDOĞAN'a ve Yrd. Doç. Dr. Muhammet KARATON'a da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	III
TABLOLAR LİSTESİ.....	V
SİMGELER LİSTESİ.....	VI
ÖZET.....	IX
ABSTRACT.....	X
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Konunun Önemi.....	1
1.2. Konu ile İlgili Çalışmalar.....	1
1.3. Mevcut Çalışmanın Kapsamı.....	9
2. HAREKETİN ARTIMSAL SÜREKLİ ORTAM MEKANİĞİ FORMÜLASYONU.....	11
2.1. Giriş.....	11
2.2. Artımsal Hareket Denklemleri.....	12
3. GEOMETRİK BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN KABUKLARIN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU.....	18
3.1. Eksenel Simetrik Kabuklar.....	18
3.1.1. Elemanın Geometrisi ve Kinematığı.....	18
3.1.2. Gerilme ve Şekil Değiştirmeler.....	20
3.1.3. Statik Denge ve Rijitlik Matrisi	27
3.1.4. Kütle Matrisi ve Yayılı Yük ile İlgili Dış Yük Vektörü.....	32
3.2. Genel Kabuklar.....	33
3.2.1. Elemanın Geometrisi ve Kinematığı.....	33
3.2.2. Gerilme ve Şekil Değiştirmeler, Rijitlik Matrisi.....	37
3.2.3. Kütle Matrisi ve Yayılı Yük ile İlgili Dış Yük Vektörü.....	44
4. YAPI SİSTEMLERİNİN LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİ İÇİN ÇÖZÜM METOTLARI.....	46
4.1. Giriş.....	46
4.2. Newton-Raphson Metodu.....	46
4.3. Yay-boyu (Arc-length) Metodu.....	48
4.3.1. Prediktör Çözüm.....	52
4.3.2. Yakınsama Kriterleri.....	54
4.4. Newmark Metodu.....	55

5. SAYISAL UYGULAMALAR.....	59
5.1. Statik Analiz.....	59
5.1.1. Düzgün Yayılı Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Kare Plak.....	59
5.1.2. Düzgün Yayılı Yüke Maruz Kenarları Mafsallı Kare Plak.....	62
5.1.3. Düzgün Yayılı Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Dairesel Plak.....	63
5.1.4. Tekil Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Dairesel Plak.....	65
5.1.5. Çizgisel Halka Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Eksenel Simetrik Kabuk.....	66
5.1.6. Basınç Altında Ankastre Mesnetli Eksenel Simetrik Kabuk.....	70
5.1.7. Tekil Yüke Maruz Silindirik Kabuk	73
5.1.8. Dış Basınç Etkisindeki Ankastre Mesnetli Silindirik Kabuk.	76
5.1.9. Tekil Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Kemer.....	78
5.1.10. Tekil Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Kırık Kiriş.....	81
5.2. Dinamik Analiz.....	84
5.2.1. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Basit Mesnetli Kare Plak.....	84
5.2.2. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Ankastre Mesnetli Kare Plak.....	85
5.2.3. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Ankastre Mesnetli Dairesel Plak.....	86
5.2.4. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Ankastre Mesnetli Eksenel Simetrik Kabuk.....	87
5.2.5. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Sabit Mafsallı Eksenel Simetrik Kabuk.....	88
5.2.6. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Konsol Kiriş.....	88
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	90
KAYNAKLAR.....	92
ÖZGEÇMİŞ.....	101

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 2.1 : Bir yapının sabit kartezyen koordinat sistemindeki hareketi.
- Şekil 3.1 : Sekiz düğümlü eksenel simetrik katı elemandan dört düğümlü eksenel simetrik kabuk elemanın elde edilmesi
- Şekil 3.2 : (a) Eksenel simetrik kabuk elemanın k düğümündeki dönme açısı ve yer değiştirmeler, (b) eğrisel ve lokal koordinatlar
- Şekil 3.3 : 20 düğümlü katı elemandan 8 düğümlü kabuk elemanın elde edilmesi.
- Şekil 3.4 : Dokuz düğümlü kabuk eleman.
- Şekil 3.5 : Deformasyon sırasında k düğümüne ait $\mathbf{V}_n^k$ doğrultman vektörünün dönmesi sonucu, bu vektörün uç noktasının yer değiştirmeleri.
- Şekil 4.1 : Yapıların lineer olmayan temel davranış türleri: (a) Gevrek göçme durumuna kadar lineer davranış, (b) Pekleşme, (c) Yumuşama, (d) Vurgu burkulması, (e) Ters vurgu burkulması.
- Şekil 4.2 : Newton-Raphson metodunun uygulanışı.
- Şekil 4.3 : Yay-boyu metodunun gösterilmesi.
- Şekil 5.1 : Simetrik kare plağın sonlu eleman ağ sistemi: (a) dokuz Q9 eleman, (b) dört Q16 eleman.
- Şekil 5.2 : Ankastre mesnetli kare plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.3 : Kenarları mafsallı kare plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.4 : Dairesel plağın ağ sistemleri, a) sekiz lineer eleman, b) dört ikinci dereceden eleman, c) üç kübik eleman.
- Şekil 5.5 : Ankastre mesnetli dairesele plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.6 : Ankastre mesnetli dairesele plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.7 : Çizgisel halka yüke maruz ankastre mesnetli eksenel simetrik kabuk.
- Şekil 5.8 : $e=0.0$ için yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.9 : $e=0.25$ için yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.10 : $e=0.42$ için yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.11 : $e=0.50$ için yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.12 : $e=0.60$ için yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.13 : Basınç yüküne maruz ankastre mesnetli eksenel simetrik kabuk.
- Şekil 5.14 : p/p_0 boyutsuz eksenel simetrik vurgu-burkulması basıncının λ kabuk parametresi ile değişimi.
- Şekil 5.15 : $\lambda = 5.5$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.16 : $\lambda = 6.0$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

- Şekil 5.17 : $\lambda = 8.0$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.18 : Tekil yüke maruz silindirik kabuk.
- Şekil 5.19 : $t=25.4$ mm ($R/t=100$) için tepe noktasının düşey yer değiştirmesi.
- Şekil 5.20 : $t=12.7$ mm ($R/t=200$) için tepe noktasının düşey yer değiştirmesi.
- Şekil 5.21 : $t=6.35$ mm ($R/t=400$) için tepe noktasının düşey yer değiştirmesi.
- Şekil 5.22 : $t=12.7$ mm ($R/t=200$) için Q9R ve Q16R çözümlerinin karşılaştırılması.
- Şekil 5.23 : $t=6.35$ mm ($R/t=400$) için tepe noktasının düşey yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.24 : $t=3.175$ mm ($R/t=800$) için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.25 : $t=1.5875$ mm ($R/t=1600$) için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.26 : Tekil yüke maruz kemer.
- Şekil 5.27 : $t=19.05$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.28 : $t=9.525$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.29 : $t=4.7625$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.30 : Tepe noktasından tekil yüke maruz kırık giriş.
- Şekil 5.31 : $H=0$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.32 : $H=4.90$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.33 : $H=9.80$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.34 : $H=19.60$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.35 : $H=29.40$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.
- Şekil 5.36 : Basit mesnetli kare plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.
- Şekil 5.37 : Ankastre mesnetli kare plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.
- Şekil 5.38 : Düzgün yayılı adım basınına maruz ortası boş dairesel plak.
- Şekil 5.39 : Dairesel plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.
- Şekil 5.40 : Ankastre mesnetli kabuğun tepe noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.
- Şekil 5.41 : Sabit mafsallı kabuğun tepe noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.
- Şekil 5.42 : Konsol girişin uç noktasının düşey yer

TABLÖLAR LİSTESİ

- Tablo 5.1 : Ankastre mesnetli kare plağın orta noktasının n/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.
- Tablo 5.2 : Kenarları mafsallı kare plağın orta noktasının n/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.
- Tablo 5.3 : Ankastre mesnetli dairesel plağın orta noktasının v/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.
- Tablo 5.4 : Ankastre mesnetli dairesel plağın orta noktasının v/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.
- Tablo 5.5 : Eksenel simetrik kabuğun p/p_0 boyutsuz vurgu burkulması basınçları.

SİMGELER LİSTESİ

- $[B]$: Şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi.
- $[B_0]$: Lineer şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi.
- $[B_L]$: Lineer olmayan şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi.
- $[C]$: Eleman sönüm matrisi.
- $[D]$: Global sistemdeki malzeme matrisi.
- $[D']$: Lokal koordinat sistemindeki malzeme matrisi.
- ${}_0 D_{ijrs}$: Malzeme özellikleri tansörünün elemanları.
- $\{du\}$: Artımsal yer değiştirme vektörü.
- E : Elastisite modülü.
- $\{e_y\}$: y ekseni doğrultusundaki birim vektör.
- $\{e_\xi\}$: ξ ekseni doğrultusundaki birim vektör.
- $\{e_\eta\}$: η ekseni doğrultusundaki birim vektör.
- $\{e_\zeta\}$: ζ ekseni doğrultusundaki birim vektör.
- ${}_0 e_{ij}$: Lineer artımsal şekil değiştirmeler.
- ${}_{t+\Delta t} e_{ij}$: $t + \Delta t$ anındaki çok küçük şekil değiştirme tansörünün bileşenleri.
- $\{F\}$: İç kuvvet vektörü.
- ${}^{t+\Delta t} f_i^B$: Cisim vektörünün i. bileşeni.
- ${}^{t+\Delta t} f_i^S$: Yüzey kuvvet vektörünün i. bileşeni.
- $[J]$: Jakobiyan matrisi.
- $[K]$: Rijitlik matrisi.
- $[K_0]$: Küçük değiştirme rijitlik matrisi.
- $[K_L]$: Büyük yer değiştirme rijitlik matrisi.
- $[K_T]$: Teğet rijitlik matrisi.
- $[K_\sigma]$: Geometrik rijitlik matrisi.
- $[M]$: Eleman kütle matrisi.
- n : Bir elemandaki toplam düğüm noktası sayısı.

- $[N]$: Yer değiştirme interpolasyon fonksiyonları matrisi.
- N_k : k düğümünün şekil fonksiyonu.
- $\{P\}$: Dış yük vektörü.
- $\{R\}$: Dengelenmemiş kuvvet vektörü.
- ${}_0S_{ij}$: Artımsal gerilmeler.
- ${}_0^tS_{ij}$: t anındaki ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri.
- ${}_0^{t+\Delta t}S_{ij}$: $t + \Delta t$ anındaki ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri.
- t_k : k düğümündeki eleman kalınlığı.
- $[T]$: Dönüşüm matrisi.
- $\{u\}$: Yer değiştirme vektörü.
- $\{\dot{u}\}$: Hız vektörü.
- $\{\ddot{u}\}$: İvme vektörü.
- u : x eksenı doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni.
- v : y eksenı doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni.
- w : z eksenı doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni.
- tu_i : t anındaki yer değiştirmeler.
- ${}_0^{t+\Delta t}u_i$: $t + \Delta t$ anındaki yer değiştirmeler.
- $\{V_n^k\}$: Doğrultman vektörü.
- x, y, z : global kartezyen koordinatları.
- x_k, y_k, z_k : k düğüm noktasının kartezyen koordinatları.
- $\{\epsilon\}$: Global sistemdeki Green-Lagrange şekil değiştirme vektörü.
- $\{\epsilon_0\}$: Lineer şekil değiştirmeler.
- $\{\epsilon_L\}$: Lineer olmayan şekil değiştirmeler.
- $\{\epsilon\}^l$: Lokal sistemdeki Green-Lagrange şekil değiştirme vektörü.
- ${}_0\epsilon_{ij}$: Artımsal şekil değiştirmeler.
- ${}_0^t\epsilon_{ij}$: t anındaki ikinci Green-Lagrange şekil değiştirmeleri
- ${}_0^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$: $t + \Delta t$ anındaki ikinci Green-Lagrange şekil değiştirmeleri.
- ν : Poisson oranı.
- Δl : Artımsal yay boyu.

- $\Delta\lambda$: Artımsal yük faktörü.
- Δt : Zaman adımı.
- λ : Yük seviyesi parametresi.
- $\{\delta \mathbf{u}\}$: İteratif yer değiştirme vektörü.
- $\{\boldsymbol{\sigma}\}$: Lokal sistemdeki ikinci Piola-Kirchhoff gerilme vektörü.
- $\{\boldsymbol{\sigma}\}$: Global sistemdeki ikinci Piola-Kirchhoff gerilme vektörü.
- δu_i : Virtüel yer değiştirme vektörünün i. bileşeni.
- ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$: $t + \Delta t$ anındaki Cauchy gerilme tansörünün bileşenleri.
- ${}^0\rho$: 0 zamanındaki kütle yoğunluğu.
- ${}^t\rho$: t zamanındaki kütle yoğunluğu.
- ${}_0\eta_{ij}$: Lineer olmayan artımsal şekil değiştirmeler.
- α_k : k düğümünün x eksenine etrafındaki dönme.
- β_k : k düğümünün y eksenine etrafındaki dönme.
- ξ, η, ζ : Eğrisel koordinatlar.
- φ_k : k düğümündeki orta yüzey normalinin yatayla ile yaptığı açı.
- Ψ : Yük ölçeklendirme parametresi.

ÖZET

Doktora Tezi

GEOMETRİK BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN KABUK YAPILARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞI

Cengiz POLAT

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

2006, Sayfa: 101

Bu tezde geometrik bakımdan lineer olmayan kabuk yapıların statik ve dinamik davranışı incelenmiştir. İlk olarak toplam Lagrange yaklaşımına dayalı artımsal sürekli ortam mekaniği formülasyonu verilmiştir. Bu yaklaşım esas alınarak kabukların sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. Çalışmada eksenel simetrik kabuklar için iki, üç ve dört düğümlü eksenel simetrik kabuk elemanlar, genel kabuklar için ise dokuz ve on altı düğümden oluşan dörtgen kabuk elemanlar kullanılmıştır. Formülasyonlarda Mindlin-Reissner yaklaşımı esas alınarak enine kayma etkileri dikkate alınmıştır. Kayma kilitlenmesi etkilerini hafifletmek için indirgenmiş ve seçici indirgenmiş integrasyon mertebeleri kullanılmıştır. Kabuk sistemlerin statik analizinde burkulma ötesi denge eğrileri Yay-boyu yöntemi ile elde edilmiştir. Dinamik analizde Newmark'ın ortalama ivme yöntemi kullanılmıştır. Kabuk kalınlığının rölatif azalmasına bağlı olarak genellikle vurgu burkulması davranışına meylin arttığı ve kalınlığın daha da azaltılması halinde ters vurgu burkulması davranışının oluştuğu görülmüştür. Dinamik düzgün adım basıncına maruz kabukların lineer olmayan davranışında lineer hale göre genlik değişimleri ile birlikte genellikle periyot azalması oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Eksenel simetrik kabuk, Genel kabuk, Yay-boyu metodu, Lineer olmayan statik ve dinamik analiz.

ABSTRACT

PhD Thesis

STATIC AND DYNAMIC BEHAVIOUR OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR SHELL STRUCTURES

Cengiz POLAT

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Civil Engineering

2006, Page: 101

In this thesis, static and dynamic behaviour of geometrically non-linear shell structures was investigated. Firstly, formulation of incremental continuum mechanics based on Total Lagrangian approach and the finite element formulation for shells was given. In the study two-, three- and four-node axisymmetric shell elements were used for axisymmetric shells, and nine- and sixteen-node quadrilateral shell elements were used for general shells. Mindlin-Reissner approach was used for including transverse shear effects in the formulations. Reduced and selective integration schemes were employed to alleviate transverse shear locking. Arc-length method was used to obtain the post-buckling equilibrium path of the structural system. Newmark's average acceleration method was used for dynamic analysis. As the thickness of shell decrease relatively, it tends to snap-through behaviour. Furthermore, much more decreasing of the thickness leads to snap-back behaviour. Period shortening and amplitude variation has occurred in the non-linear behaviour of shells subjected to dynamic uniform step load with respect to linear case.

Keywords: Axisymmetric shell, General shell, Arc-length method, Non-linear static and dynamic analysis.

1. GİRİŞ

1.1. Konunun Önemi

Plak ve kabuklar, yapı sistemlerinde büyük alanları ekonomik ve ara mesnetsiz olarak örtmek amacı ile kullanılan önemli yapı elemanlarıdır. Bu elemanların en önemli özelliklerinden birisi kalınlıklarının diğer boyutlarına göre çok küçük olmasıdır. Uygun olarak mesnetlendirildikleri takdirde, membran etkilerinden dolayı çok küçük kalınlıklarda bile büyük yükler taşıyabilirler.

Plak ve kabuk yapıların geometrik bakımdan lineer olmayan statik ve dinamik analizi bunların tasarlanmasında dikkate alınan önemli etkenlerden birisidir. Bu analizleri gerçekleştirmek için çok sayıda plak ve kabuk eleman [1-73] ve çözüm yöntemleri önerilmektedir [74-82].

1.2. Konu ile İlgili Çalışmalar

Bu bölümde konu benzerliği ve kronoloji dikkate alınarak plak ve kabuk sonlu elemanlar ve çözüm yöntemleri hakkında bir literatür çalışması verilmektedir.

Hughes ve Liu [1], kabukların üç boyutlu zahiri-statik (quasi-static) analizi için lineer olmayan bir sonlu eleman formülasyonu geliştirdiler. Bu formülasyonda büyük şekil değiştirme ve dönme etkileri dikkate alınmaktadır. Aynı yazarlar bu üç boyutlu formülasyondan iki boyutlu formülasyonu elde ederek [2], değişik kabuk analizlerini indirgenmiş integrasyon kullanarak gerçekleştirdiler.

Hughes ve Carnoy [3], büyük membran şekil değiştirmelerini içeren bir sonlu eleman formülasyonu geliştirerek, bir dairesel plağın eğilmesini ve şişmesini Mooney-Rivlin malzeme modelini kullanarak irdediler.

Liu ve diğ. [4], bir gerilme-bileşkeli türetilmiş kabuk eleman (resultant-stress degenerated-shell element) tanımlayarak bunu burkulma sonrası analizi içeren değişik problemlerde kullandılar. Gerilme-bileşkeli türetilmiş kabuk eleman Hughes ve Liu'nun lineer olmayan türetilmiş genel kabuk eleman prensiplerine dayanmaktadır.

Chaudhuri [5], varsayılan yer değiştirme potansiyel enerji (assumed displacement potential energy) yaklaşımını esas alan, türetilmiş eğrisel genel üçgen kabuk elemanı (degenerated curved general triangular element) formülasyonunu kullanarak, orta kalınlıklı kabukların analizini yaptı. Eleman eğrisel koordinat düzleminde olup, C^0 tipinde ikinci dereceden üçgen ve Reissner-Mindlin kabuk teorisine uymaktadır.

Briassoulis [6], kayma kilitlenmesi durumunu bir analitik test kullanarak inceledi. Dört, sekiz ve dokuz düğümlü türetilmiş kabuk elemanlar için integrasyon mertebesi, eleman derecesi ve eleman distorsiyonunun çözümlere olan etkisini inceledi. Yazar dokuz düğümlü türetilmiş Lagrange kabuk elemanın indirgenmiş integrasyon kullanılarak çok iyi performans gösterdiğini belirtmektedir [7].

Rhiu ve Lee [8], türetilmiş katı kabuk eleman ve Hellinger-Reissner prensiplerini kullanarak, büyük deplasmanlar yapan kabuklar için dokuz düğümlü bir sonlu eleman önerdiler. Varsayılan bağımsız şekil değiştirmelerin üç versiyonunu yalancı kinematik modları bastırmak için kullandılar. Bunlardan birisi eleman düzeyinde kinematik olarak kararlı olmakla birlikte diğer ikisi global olarak kararlı modları vermektedir.

Vu-Quoc ve Mora [9], doğrultman dönmelerini eleman sınırları içinde sürekliliği koruyacak şekilde tanımlayarak, her düğümünde beş serbestlik bulunan türetilmiş kabuk elemanın eğrisel koordinatlarda formülasyonunu verdiler. Kayma ve membran kilitlenmesini önlemek için indirgenmiş integrasyon kullandılar. Yalancı sıfır enerji modlarının (spurious zero-energy modes) eleman geometrisine bağlı olmadığını analitik olarak gösterdiler.

Hsiao ve Chen [10], sonlu dönme ve karma dönme yöntemleri ile kabuk normalinin dönmesini tanımlayarak, bunların performanslarını değişik örneklerle test ettiler.

Fafard ve diğ. [11], küçük elasto-plastik şekil değiştirmeler ile güncelleştirilmiş Lagrange yaklaşımını esas alarak, geometrik ve malzeme bakımından lineer olmayan altı düğümlü plak/kabuk elemanı elde ettiler. Kabuk elemanı, eğilme için ayrık Kirchhoff modelinin ve membran için ise lineer şekil değiştirme üçgen elemanının süperpozesini alarak elde etmişlerdir.

Aditya ve Bandyopadhyay [12], çift eğrilikli kabuk yapılar için genelleştirilmiş bir sonlu eleman formülasyonu vererek, bir izotrop kabuk için öz değer analizi gerçekleştirdiler ve bir dönel paraboloidi değişik ağ yapıları ve değişik Poisson oranları kullanarak incelediler. Ghosh ve Bandyopadhyay [13], izoparametrik çift eğrilikli ince kabuk eleman kullanarak koni şekilli bir kabuğu incelediler. Chakravorty ve diğ. [14], sekiz düğümlü izoparametrik kabuk eleman kullanarak koni biçimli bir kabuğun serbest titreşim analizini gerçekleştirdiler.

Liu [15], dört düğümlü, dörtgen plak/kabuk elemanı geliştirerek, değişik kompozit örneklere uyguladı. Elemanda izoparametrik prensipleri temel alarak ve kayma terimleri için seçime bağlı indirgenmiş integrasyon kullandı.

Yuan ve Liang [16], geometrik bakımdan lineer olmayan elasto-plastik kabuklar için ikinci dereceden türetilmiş izoparametrik kabuk eleman formülasyonunu elde ederek, elasto-plastik davranış için katmanlı eleman modeli ve artımsal lineer olmayan denklemlerin çözümü için de Newton-Raphson yöntemini kullandılar.

Surana [17], büyük yer değiştirmeler ve büyük dönmelere müsaade eden bir toplam Lagrange yaklaşımını kullanarak, eksenel simetrik kabukların geometrik bakımdan lineer olmayan formülasyonunu elde etti. Surana ve Orth [18], eleman kalınlığı doğrultusunda istenilen dereceden sıcaklık dağılımına izin vererek, ısı transferi için bir eksenel simetrik sonlu eleman modelini incelediler.

Lakshminarayana ve Kailash [19], sekiz düğümlü ve her düğümlerde altı serbestlik bulunan, kayma deformasyonlarına izin veren eğrisel dörtgen kabuk elemanın formülasyonunu vererek, elemanda kilitlenme problemleri ile yalancı sıfır enerji modlarının oluşmadığını göstermişlerdir.

White ve Abel [20], büyük yer değiştirmeler, sınırlı dönmeler ve küçük şekil değiştirmeler yapan kabuk yapılar için dokuz düğümlü Lagrange kabuk elemanın formülasyonunu verdiler. Eleman matrisleri için 2×2 integrasyon mertebesi kullanarak, orta kalınlıktaki kabuklarda plastik tepkiyi doğru değerlendirebilmek için kalınlık boyunca nümerik integrasyon uyguladılar. Lineer ve lineer olmayan testler sonucunda kabuk elemanda kayma kilitlenmesi ve yalancı sıfır enerji modlarının genellikle oluşmadığını belirtmektedirler.

Saetta ve Vitaliani [21], iki eğrilik yarıçapı tanımlayarak, Reissner-Mindlin yaklaşımını temel alan ve C^0 sürekliliğine sahip genel eğrisel kabuk elemanın formülasyonunu verdiler.

To ve Wang [22], çok amaçlı titreşim analizi için iki düğümlü eksenel simetrik ince kabuk elemanı elde ederek, değişik problemlere uyguladılar.

Kebari ve Cassell [23], bir uygun olmayan mod stabilizasyon (non-conforming mode stabilization) tekniğini kullanarak, her düğümlerde altı serbestliği bulunan dokuz düğümlü bir kabuk eleman elde ettiler. Uygun olmayan modlar orijinal elemandan bir veya daha fazla düğümü çıkarmakla elde edilmektedir. Stabilizasyon işleminde ana ve indirgenmiş eleman rijitlik matrislerinin bileşenleri dikkatli bir şekilde birleştirilmelidir. Yazarlar, elde edilen elemanın etkinliğini birçok örnekle ortaya koymuşlardır.

Choi ve Yoo [24], üç iyileştirme tekniği kullanarak, büyük deplasmanlar yapan kabuk yapıları iyileştirilmiş türetilmiş bir kabuk eleman kullanarak analiz ettiler. Eriksson [25], büyük yer değiştirmeler ve orta şekil değiştirmeler yapan ince kabukları sonlu eleman metodu ile inceledi. Kumbasar ve Aksu [26], genel geometriye sahip orta kalınlıktaki kabuklar için bir sonlu eleman formülasyonu verdiler.

Ben-Zvi ve diğ. [27], açısal hız dağılımı ve şekil değiştirme hızındaki yaklaşımları esas alarak, dönel eksenel simetrik kabukların lineer olmayan dinamik analizleri için eğrisel C^1 kabuk elemanı geliştirdiler. Sözü edilen araştırmacılar, elemana ait sayısal uygulamaları ikinci kısımda [28] verdiler.

Ho [29], düz kabuk eleman ile türetilmiş superparametrik kabuk elemanın performanslarını farklı örnekler kullanarak karşılaştırmıştır.

Boisse ve diğ. [30], membran ve eğilme etkilerini içeren üç düğümlü izoparametrik kabuk elemanda kayma kilitlenmesini önlemek için varsayılan şekil değiştirme yaklaşımını kullandılar.

Sorem ve Surana [31], toplam Lagrange yaklaşımını kullanarak, üç boyutlu dokuz düğümlü eğrisel bir kabuk eleman formülasyonunu verdiler. Formülasyonda eleman geometrisini tanımlamak için orta yüzeye yerleştirilen düğümler ile elemanın alt ve üst yüzeylerini tanımlayan düğüm vektörleri dikkate alınmaktadır. Eleman şekil fonksiyonlarını Lagrange interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak elde ettiler. Bu fonksiyonlar ve düğüm değişkenleri hiyerarşik ve C^0 yer değiştirme yaklaşımını sağlamaktadır.

Buechter ve Ramm [32], kabuk teorisine karşı türetilmiş katı yaklaşımı ele aldılar. Aynı mekanik kabuller esas alındığında, bunların sadece ayrıklaşmanın türü (kind of discretization) bakımından farklı olduklarını göstererek, özellikle türetilmiş kabuk elemanlar için kalınlık boyunca açık (explicit) integrasyonun farklı versiyonlarını incelediler.

Phaal ve Calladine [33], sadece ötelenme serbestliğine sahip bir plak ve kabuk eleman geliştirerek, bunu ince kabuk problemleri ile test ettiler.

Gebhardt ve Schweizerhof [34], Reissner-Mindlin kabuk elemanlarında düşük dereceli şekil fonksiyonları kullanıldığı zaman ortaya çıkan hatalar ve bunların önlenmesini incelediler.

Liu ve Surana [35], Lagrange interpolasyonuna dayalı şekil fonksiyonları kullanarak, toplam Lagrange yaklaşımını temel alan üç düğümlü eksenel simetrik kabuk elemanın geometrik bakımdan lineer olmayan formülasyonunu verdiler. Elemanda tam eksenel simetrik gerilme ve şekil değiştirme durumu dikkate alındığından, eleman çok ince ve oldukça kalın kabukların çözümünde kullanabilmektedir.

Kabir [36], enine kayma gerilmelerini ihtiva etmek için Reissner-Mindlin yaklaşımını esas alan, çok ince ve orta kalın kabukların analizinde kullanılabilen üç düğümlü, her düğümde üç yer değiştirme ve iki dönme olmak üzere beş serbestlik bulunan, izoparametrik ve kayma kilitlenmesi problemi olmayan bir kabuk eleman formülasyonu vermektedir.

Bhatia ve Sekhon [37], eksenel simetrik ince plak ve kabukların rijitlik matrislerinin tam olarak elde edilebilmesi için yeni bir yöntem önerdiler.

Liu ve diğ. [38], dört, dokuz ve on altı düğümlü kabukların performanslarını karşılaştırarak, en küçük kareler yöntemi ile gerilmelerin hassasiyetinin geliştirilip geliştirilemeyeceğini incelediler.

Parisich [39], gerilmenin üç boyutlu durumunu dikkate alarak lineer olmayan bir kabuk teorisi önererek, bu teoriyi dörtgen kabuk elemanlara uyguladı.

Vlachoutsis [40], kabuk ve plaklar için kayma düzeltme katsayıları üzerine bir çalışma yaptı.

Vila ve diğ. [41], çizgisel halka yük altındaki bir dönel kabuğun, farklı yük eksantirisitelerindeki davranışını deplasman kontrollü (displacement controlled) ve yay-boyu (arc-length) metotları ile analiz ederek, bu yöntemlerin vurgu burkulması (snap-through) ve ters vurgu burkulması (snap-back) üzerine etkisini incelediler.

Meek ve Ristic [42], güncelleştirilmiş Lagrange yaklaşımı ile korotasyonel (co-rotational) formülasyonu esas alarak, ince plak ve kabukların büyük yer değiştirme analizini bir düz yüzey kabuk sonlu eleman (flat faceted shell element) kullanarak yapmışlardır.

Sze ve Zheng [43], iyileştirilmiş dokuz düğümlü türetilmiş kabuk elemanı geometrik bakımdan lineer olmayan analizde kullandılar.

Sze ve diğ. [44], dönme serbestliği olmayan sekiz düğümlü katı-kabuk elemanın formülasyonunu verdiler. Çalışmada, kayma ve eğrilik kalınlık kilitlenmelerini önlemek için varsayılan şekil değiştirme metodu kullanılmış, kalınlık kilitlenmesi ise hibrit-gerilme yaklaşımı ile baskı altına alınmıştır. Elde edilen bu eleman piezoelektrik algılayıcıların ve devindiricilerin modellenmesinde kullanılmıştır [45].

Tabiei ve Tanov [46], lineer olmayan dinamik analiz için interpolasyon fonksiyonları C^0 sürekliliğine sahip bir dört düğümlü yüksek dereceli kayma deformasyon kabuk elemanının formülasyonunu verdiler. Tanımlanan eleman, enine kaymaları kalınlık boyunca doğru olarak temsil edebildiğinden, kompozit ve sandviç kabukların analizinde kolaylıkla kullanılabilir. Bu eleman DYNA3D sonlu eleman programının eleman kütüphanesine eklenerek değişik kabuk analizleri gerçekleştirilmiştir [47].

Liu ve diğ [48], membran yer değiştirmeler için Allman tipi serbestlikleri uygulayarak, birinci dereceden kayma deformasyon teorisi ile dört düğümlü, her düğümde altı serbestlik bulunan bir dikdörtgen kabuk eleman elde ettiler. Bu eleman orta kalın ve ince kabukların analizinde iyi performans göstermektedir.

Batoz ve diğ. [49], ayırık Kirchhoff metodunu esas alan plak ve kabuk elemanları ele alarak, düz yüzeysel kabuk elemanlar ile yeni bir ayırık Kirchhoff plak/kabuk eleman türü için formülasyon vermişlerdir.

Sa ve diğ. [50], dört düğümlü türetilmiş kabuk elemanda kayma kilitlenmesi etkilerini önlemek için Simo ve Rifai'nin önerdiği geliştirilmiş varsayılan şekil değiştirme yaklaşımını esas alarak alternatif bir formülasyon verdiler.

Massin ve Mikdad [51], büyük yer değiştirme ve dönme yapan kabuk elemanlar için toplam Lagrange formülasyonunu ele alarak, elasto-plastik kabuğun ve küçük şekil değiştirme analizleri için geliştirilen yedi ve dokuz düğümlü ikinci dereceden elemanların formülasyonunu

vermişlerdir. Formülasyonda Green-Lagrange şekil değiştirmeleri ile ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri kullanılmaktadır.

Zhang ve Cheung [52], geometrik bakımdan lineer olmayan plak ve kabukların analizi için iyileştirilmiş uygun olmayan eleman metodunu (refined non-conforming element method) temel olarak bir üçgen sonlu eleman modeli verdiler. Söz konusu eleman, tepe serbestliğine sahip Allman'ın üçgen düzlem elemanı ile iyileştirilmiş üçgen plak-eğilme elemanı kullanılarak elde edilmektedir.

Kim ve Lomboy [53], geometrik rijitliği orta yüzey üzerinde tanımlayarak, kompozit kabuk ve plakların stabilite problemleri için lineer olmayan kompozit kabuk formülasyonunu elde ettiler. Varsayılan doğal şekil değiştirme yaklaşımını (assumed natural strain method) kullanarak membran ve kayma kilitlenmesi davranışını önlediler. Enine kayma rijitliğini bir denge yaklaşımı ile tanımlayarak kayma düzeltme katsayısı yerine kullandılar.

Ribeiro [54], çift eğrilikli ve orta kalınlıklı izotropik yüzeysel kabuklar için bir p-tipi hiyerarşik sonlu eleman elde ederek, dikdörtgen panellerin geometrik bakımdan lineer olmayan serbest titreşimini inceledi. Hareketin zaman alanı denklemlerinde virtüel iş ve d'Alembert prensipleri kullanılmaktadır. Harmonik denge metodu ile bu denklemlerin frekans alanındaki şekilleri elde edilerek, bir prediktör-korektör metodu ile çözülmektedir. Çalışmada eleman kalınlığı, genişlik/boy oranı gibi parametrelerin dinamik tepki üzerine olan etkisi de incelenmiştir.

Djoudi ve Bahai [55], silindirik kabukların lineer ve geometrik bakımdan lineer olmayan analizleri için bir silindirik şekil değiştirme esaslı (cylindrical strain based) yüzeysel kabuk eleman elde ettiler. Eleman dikdörtgen şeklinde olup her düğümde beş serbestlik mevcuttur. Eleman yer değiştirmeleri rijit yapı modları gereksinimlerini tam olarak sağlamaktadır. Elemanın uygunluğu silindirik kabukların doğal frekansları ile test edilmiştir.

Kim ve diğ. [56], varsayılan doğal şekil değiştirme yaklaşımını temel olarak altı düğümlü türetilmiş kabuk ve on iki düğümlü katı-kabuk üçgen elemanları geliştirmişlerdir. Elemanların ikisi de eğrisel olup, geometrik bakımdan lineer olmayan analizlerde kullanılabilir.

Argyris ve diğ. [57], doğal mod metodunu (natural mode method) esas olarak yüzeysel üçgen kabuk elemanın formülasyonunu vermişlerdir. Elemanın sürekli (consistent) ve toplu (lumped) kütle matrisleri açık bir şekilde elde edilmektedir. Sürekli kütle matrisinde doğrusal ve dönel atalet etkileri içerilmiştir. Toplu kütle matrisi birinci yöntemde geometrik özellikler esas alınarak, ikinci yöntemde ise sürekli kütle matrisinden faydalanılarak elde edilmektedir.

Wenzel ve Schoop [58], lineer olmayan malzeme davranışına izin veren, her düğümde beş serbestliğe sahip bir üçgen sonlu elemanı, varsayılan şekil değiştirme yaklaşımını esas

olarak elde ettiler. Geliştirilmiş varsayılan şekil değiştirme yaklaşımı ile üç düğümlü üçgen elemanın içindeki membran şekil değiştirmelerinin iyileştirilmesi mümkün olmadığından, membran şekil değiştirmelerinin performansı zayıf kalmaktadır. Fakat kullanılan üç doğrultman vektörü ile ince kabuklardaki eğilme davranışı çok iyi temsil edilebilmektedir.

Lee ve Bathe [59], tansörel bileşenlerin karma interpolasyon (mixed interpolation of tensorial components) yaklaşımını esas alan isotropik üçgen kabuk elemanların tasarımı için basit bir yöntem göstererek, birçok karma-interpolasyon (mixed-interpolated) üçgen eleman önermişlerdir.

Filho ve Awruch [60], kabukların geometrik bakımdan statik ve dinamik analizleri için bir sekiz düğümlü altı-yüzlü izoparametrik sonlu eleman formülasyonunu vererek, hacimsel ve kayma kilitlenmelerini önlemek için indirgenmiş integrasyon yaklaşımını kullanmışlardır.

Wanji [61], yer değiştirme fonksiyonu olarak Timoshenko kiriş yer değiştirme fonksiyonunu kullanarak, üç düğümlü türetilmiş üçgen kabuk eleman formülasyonunu vermiştir. Önerdiği eleman ince ve kalın kabukların analizinde kullanılabilir. Wanji [62], türetilmiş dört düğümlü dörtgen kabuk elemanı da benzer yaklaşımlar kullanarak elde etmektedir.

Ozkul [63], Hamilton prensipleri ve Wilson- θ integrasyon yaklaşımını kullanarak elde ettiği hareket denklemleri ile genel kabukların titreşimini sekiz düğümlü eğrisel izoparametrik sonlu eleman kullanarak inceledi.

Pimenta ve diğ [64], plak ve kabuklar için lineer olmayan çok parametrelili bir kabuk formülasyonunu, altı düğümlü bir üçgen kabuk eleman kullanarak elde ettiler. Formülasyonda Reissner-Mindlin kinematik kabulleri ile sonlu dönmeler için Euler-Rodrigues yaklaşımı kullanılmaktadır.

Wu diğ. [65], düzlem içi yer değiştirmeler için lineer ve normal dönmelerin tanımlanmasında ise ikinci dereceden interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak, çarpma analizinde üç düğümlü üçgen Kirchhoff elemanının performansını incelediler. Eleman kenarı boyunca enine yer değiştirmeler için Hermite kübik interpolasyon fonksiyonları kullanıldı. Köşe düğümlerde ve kenarlarda ise ayrık Kirchhoff yaklaşımı tercih edildi. Yüksek hızlı darbe analizinde bu elemanın Belytschko-Tsay dörtgen elemanı kadar iyi olduğu çalışmada belirtilmektedir.

Areias ve diğ [66], Kirchhoff-Love sınırlamalarını esas alarak geliştirdikleri on altı düğümlü kabuk elemanı için büyük şekil değiştirme formülasyonu verdiler. Model klasik kabuk kinematiği ile sürekli ortamın temel kuralları birleştirilerek oluşturulmaktadır. Önerdikleri kabuk elemanın büyük dönmeler ve yer değiştirmeler için geçerli olduğunu belirttiler.

Gruttmann ve Wagner [67], bir yeni beş/altı düğüm serbestliğine sahip dikdörtgen kabuk eleman geliştirdiler. Formülasyonda lineer izotropik elastisite kabulü yapılmakta ve bir Hellinger-Reissner fonksiyoneli kullanılmaktadır. Karma formülasyonda membran kuvvetleri ve eğilme momentleri için beş parametre, kesme kuvvetleri için ise dört parametre kullanılarak interpolasyon yapılmaktadır. Elde ettikleri hibrit elemanın rijitlik matrisi analitik olarak hesaplandığından dolayısıyla eleman doğru ranke olmuş ve kilitleme problemleri ortadan kalkmıştır.

Petchsasithon ve Gosling [68], on sekiz düğümlü izoparametrik altı yüzlü bir eleman elde ederek, kayma, kalınlık ve membran kilitlemelerini azaltan yöntemleri incelediler.

Sousa ve diğ. [69], geliştirilmiş varsayılan şekil değiştirme metodunu bir indirgenmiş düzlem içi integrasyon yöntemi ile birleştirerek yeni bir sekiz düğümlü katı-kabuk eleman elde ettiler. Bu elemanın en önemli özelliği az sayıda iyileştirme parametresi kullanılarak Poisson ve hacimsel kilitleme probleminin önlenmesidir. Eleman rank yetersizliği bir fiziksel iyileştirme yöntemi ile düzeltilerek, büyük deformasyonlar yapan elastoplastik ince kabukların analizinde kullanılmıştır [70].

Wagner ve Gruttmann [71], ince yapıların analizi için bir lineer olmayan dörtgen kabuk eleman formülasyonu verdiler. Formülasyonda Hu-Washizu varyasyonel prensipleri esas alınarak, bir karma hibrit kabuk eleman geliştirilmektedir. Analizlerde sonlu dönme ve küçük şekil değiştirmelerdeki izotropik plastisite ile burkulma ötesi davranışlar incelenmiştir.

Levy ve Gal [72], kalın kabuk üçgen sonlu eleman rijitlik matrislerini geometrik bakımdan lineer olmayan analizler için geliştirilmesini incelemiştir. Söz konusu çalışmada, sabit gerilme üçgen membran elemanı (constant stress triangular membrane element) ile üçgen ayrık Kirchhoff-Mindlin plak elemanından (triangular discrete Kirchhoff-Mindlin plate element) oluşturulan lineer kabuk elemanı iyileştirilerek, geometrik bakımdan lineer olmayan bir kalın kabuk üçgen sonlu elemanı elde edilmektedir.

Klinkel ve diğ. [73], Hu-Washizu prensiplerini kullanarak elde ettikleri kabuk elemanın şekil değiştirme bölgesini iki kısma ayırmışlardır. Şekil değiştirmelerin birinci kısmı için geliştirilmiş varsayılan şekil değiştirme (enhanced assumed strain) yaklaşımı, ikinci kısmı için ise gerilme değişkenlerinin interpolasyon fonksiyonları kullanılmaktadır. Kayma ve eğrilik kalınlık kilitlemesi, varsayılan doğal şekil değiştirme (assumed natural strain) yaklaşımı ile ele alınmaktadır.

Bergan ve diğ. [74], lineer olmayan sonlu eleman problemlerinin çözüm metodlarında kullanılan yük artımı için geçerli bir rijitlik parametresi önererek, değişik problemlerin analizinde kullandılar.

Crisfield [75], değiştirilmiş Riks metodunu, değiştirilmiş Newton-Raphson metodunun orijinal ve hızlandırılmış formu ile birleştirerek, limit noktalarını geçmeyi sağlamış ve yakınsama özelliklerini iyileştirmiştir.

Crisfield [76], yay-boyu metodu içerisinde optimum adım boyunu (step-length) elde etmekte kullanılan çizgi araştırma (line-search) yaklaşımını yerleştirerek, malzeme ve geometrik bakımdan lineer olmayan yüzeysel kabukları incelemiştir.

Bellini ve Chulya [77], lineer olmayan sonlu eleman denklemlerinin otomatik artımsal çözümü için geliştirilmiş yay-boy algoritmalarını karşılaştırarak, keskin ters vurgu burkulması için bir algoritma önermektedirler.

Fafard ve Massicotte [78], Crisfield ve Ramm'ın yay-boy tekniklerini bir geometrik yorum kullanarak karşılaştırmış ve bunların avantajlarını birleştirerek “değiştirilmiş Crisfield-Ramm” yaklaşımı olarak adlandırılan yeni bir metod önermişlerdir.

Carrera [79], değiştirilmiş Riks-Wempner metodu ile lineer olmayan sınırlayıcılara sahip denklemin kökünün seçimi için yeni bir algoritma önererek, tutarlı doğrusallaştırma metodunun geometrik bir yorumunu vermiştir.

Feng ve diğ. [80], yay-boyu metodlarında tahmin evresindeki yük artırma faktörünün işareti için yeni bir kriter önererek, bu kriteri değişik problemlerin analizinde kullanmışlardır.

Hellweg ve Crisfield [81], kırılma veya hasar mekaniğinde göçme veya çatlak yayılması durumunda, keskin ters vurgu burkulmaları için yeni bir yay-boyu yöntemi vererek, silindirik yay-boyu yaklaşımındaki doğru kökü seçmek amacıyla yeni bir algoritma önermektedirler.

Souza ve Feng [82], yay-boyu metodlarının tahmin evresinde yapılan yük artırma faktörü işaretinin seçimi hakkındaki yaklaşımları ele alarak, bunların avantajlarını ve dezavantajlarını tartışmışlardır.

1.3. Mevcut Çalışmanın Kapsamı

Bu tezde geometrik bakımdan lineer olmayan kabuk yapıların statik ve dinamik davranışı incelenmektedir. Bunun için MATLAB programlama dilinde bir kod yazılımı gerçekleştirilmiştir.

Tez, Giriş ile birlikte altı ana bölümden meydana gelmektedir. Bölüm 2’de artımsal sürekli ortam mekaniği formülasyonu ve sonlu eleman formülasyonunda kullanılan denklemler verilmektedir. Bölüm 3’de eksenel simetrik ve genel kabuklar için izoparametrik sonlu eleman formülasyonları verilmektedir. Eksenel simetrik kabuklar için iki, üç ve dört düğümden, genel kabuklar için ise dokuz ve on altı düğümden oluşan kabuk elemanlar kullanılmıştır.

Formülasyonlarda Mindlin-Reissner yaklaşımı esas alınarak enine kayma etkileri dikkate alınmaktadır. Kayma kilitlenme problemini engellemek için indirgenmiş ve seçici indirgenmiş integrasyon yaklaşımları kullanılmaktadır. Bölüm 4’de burkulma noktasına kadar olan analiz çözümleri için Newton-Raphson, burkulma ötesi analizleri elde etmek için Yay-boyu (Arc-Length) ve dinamik analizler için ise Newmark yöntemleri verilmektedir. Bölüm 5’de değişik plak ve kabuk çözümleri verilerek referans çözümlerle karşılaştırmalar yapılmaktadır. Bölüm 6’da bu tezden elde edilen sonuçlar özetlenmektedir.

2. HAREKETİN ARTIMSAL SÜREKLİ ORTAM MEKANİĞİ FORMÜLASYONU

2.1. Giriş

Yapı sistemlerinin geometrik bakımdan lineer olmayan analizinde hareket denklemleri mevcut konfigürasyon dikkate alınarak oluşturulur. Sistemin hareketi ve yükleme durumu bir zaman değişkeni kullanılarak uygun bir şekilde tanımlanabilir. Şekil (2.1)'de görülen sabit kartezyen koordinat sisteminde büyük yer değiştirme, şekil değiştirme ve dönmeler yapan bir cismin hareketi incelenmektedir. Δt artımsal zamanı göstermek üzere, bu cismin 0, Δt , $2\Delta t$, ..., t ayrık zaman noktalarındaki denge konumu araştırılmaktadır. Cismin 0 anından t anına kadar olan tüm zaman adımlarındaki statik ve kinematik değişkenleri elde edilmiş ise bunlara bağlı olarak $t + \Delta t$ anına karşılık gelen bir sonraki denge konumu bulunabilir. Analizde cismin orijinal konfigürasyonundan son konfigürasyonuna kadar olan hareketinde tüm partiküllerinin izlendiği bu yöntem, *Lagrange yaklaşımı* olarak isimlendirilir ve genellikle katı cisimlerin analizinde kullanılır. Eğer bütün büyüklüklerin ölçülmesinde orijinal konfigürasyon referans alınırsa bu yaklaşım *toplam Lagrange yaklaşımı* olarak, son konfigürasyon referans seçilirse bu yaklaşım ise *güncelleştirilmiş Lagrange yaklaşımı* olarak isimlendirilir [83].

Bu çalışmada toplam Lagrange yaklaşımı kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. Konumlar, yer değiştirmeler, şekil değiştirmeler, gerilmeler vs. için Kaynak [83] teki notasyonlar kullanılmıştır. Büyüklüğün sol üst indisi mevcut konfigürasyonu ve sol alt indisi ise referans konfigürasyonu göstermektedir. Büyüklüğün mevcut konfigürasyonu referans olarak alınırsa sol alt indis kullanılmamaktadır. Şekil 2.1' de cisim içindeki herhangi bir p noktasının koordinatları 0 anında ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$ ile, t anında ${}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3$ ile ve $t + \Delta t$ anında ise ${}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde t ve $t + \Delta t$ anındaki yer değiştirmeler sırasıyla tu_i ve ${}^{t+\Delta t}u_i$ ile gösterilirse

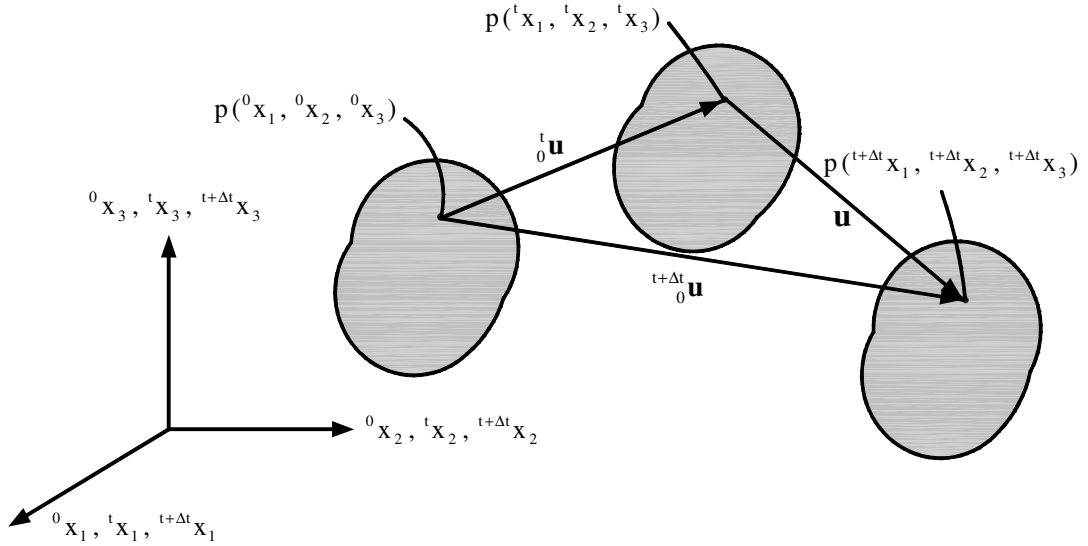
$${}^tx_i = {}^0x_i + {}^tu_i \quad (2.1)$$

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^0x_i + {}^{t+\Delta t}u_i \quad (2.2)$$

bağıntıları yazılabilir. Artımsal yer değiştirmeler ise

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^tu_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

eşitliği ile bulunabilir.



Şekil 2.1. Bir yapının sabit kartezyen koordinat sistemindeki hareketi.

2.2. Artımsal Hareket Denklemleri

Lagrange artımsal analiz yaklaşımında, sistemin $t + \Delta t$ anındaki hareketi için virtüel yer değiştirmeler kullanılarak

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} {}^{t+\Delta t}dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{K} \quad (2.4)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$ $t + \Delta t$ anındaki Cauchy gerilme tansörünün bileşenlerini, ${}^{t+\Delta t}e_{ij}$ $t + \Delta t$ anındaki çok küçük (infinitesimal) şekil değiştirme tansörünün bileşenlerini ve δ ise ilgili büyüklüğün varyasyonunu göstermektedir. Cauchy gerilmeleri ile çok küçük şekil değiştirmelerin $t + \Delta t$ anındaki konfigürasyona göre tanımlandığı hatırlanmalıdır. Çok küçük şekil değiştirme tansörünün bileşenleri

$${}^{t+\Delta t}e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) \quad (2.5)$$

eşitliği ile verilebilir. Bu tansör bileşenlerinin varyasyonu alınırsa

$$\delta {}^{t+\Delta t}e_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) \quad (2.6)$$

bağıntısı elde edilebilir. Denklem (2.4)'de sol taraf, cismin iç kuvvetlerinin $t + \Delta t$ anındaki virtüel işini göstermektedir. Söz konusu denklemin sağ tarafı ise dış kuvvetlere ait virtüel işi belirtmekte olup, açık hali

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}S} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i {}^{t+\Delta t}dS \quad (2.7)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada ${}^{t+\Delta t}f_i^B$ ve ${}^{t+\Delta t}f_i^S$ sırasıyla cisim ve yüzey kuvvet vektörlerinin i . bileşenlerini, δu_i ise virtüel yer değiştirme vektörünün i . bileşenini göstermektedir.

Denklem (2.4) doğrudan çözülemez. Çünkü $t + \Delta t$ anındaki konfigürasyon bilinmemektedir. Geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan analizler arasındaki temel fark, lineer analizde yer değiştirmelerin çok küçük olduğu ve dolayısıyla sistemin konfigürasyonunun değişmediği kabul edilmektedir. Lineer olmayan analizde ise, yer değiştirmeler ihmal edilemeyecek büyüklükte olduğundan cismin konfigürasyonu sürekli değişmektedir. Konfigürasyondaki bu değişim uygun gerilme ve şekil değiştirme tanımlamaları yapılarak belirlenebilir. Bundan dolayı toplam Lagrange yaklaşımında ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü $\mathbf{S}$ ile Green-Lagrange şekil değiştirme tansörü $\boldsymbol{\epsilon}$ kullanılmaktadır.

Toplam Lagrange yaklaşımında bütün büyüklükler ilk konfigürasyona göre ölçüldüğünden, (2.4) denkleminde virtüel iş ifadesindeki terimler bu referans konfigürasyona göre ifade edilmelidir. Orijinal konfigürasyon dikkate alınarak t anındaki ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri

$${}^t_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0x_{i,m} {}^t\tau_{mn} {}^0x_{j,n} \quad (2.8)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada ${}^0_t x_{i,m} = \partial^0 x_i / \partial^t x_m$ dir. ${}^0\rho$ ve ${}^t\rho$ ise, sırasıyla 0 ve t zamanlarındaki kütle yoğunluklarını göstermektedir. Benzer şekilde Cauchy gerilmeleri için

$${}^t\tau_{ij} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} {}^t x_{m,i} {}^t S_{ij} {}^t x_{n,j} \quad (2.9)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada ${}^t x_{m,i}$ deformasyon gradyan matrisinin (m,i) elemanını göstermektedir. Deformasyon gradyan matrisi ${}^t \mathbf{X}$ ile belirtilirse

$${}^0 \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix} ; \quad {}^t \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} {}^t x_1 & {}^t x_2 & {}^t x_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

olmak üzere

$${}^t \mathbf{X} = ({}^0 \nabla {}^t \mathbf{x}^T)^T \quad (2.11)$$

biçiminde verilebilir. Deformasyon gradyan matrisinden faydalanılarak kütle yoğunluğundaki değişim

$${}^0\rho = {}^t\rho \det({}^t \mathbf{X}) \quad (2.12)$$

bağıntısı ile bulunabilir. Böylece Cauchy gerilmeleri ve bunlara karşılık gelen ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri gerekli kinematik dönüşümler uygulanarak bulunabilir. Cauchy gerilme tansörü simetrik olduğundan ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü de simetrik olmaktadır.

Toplam Lagrange yaklaşımında ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri ile birlikte kullanılan Green-Lagrange şekil değiştirmeleri

$${}^t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^t u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (2.13)$$

bağıntısı ile ifade edilebilir. Yukarıda verilen dönüşüm denklemleri kullanılarak

$$\int_{t+\Delta t}^{} \tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij}^{t+\Delta t} dV = \int_0^{t+\Delta t} S_{ij} \delta_0^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^0 dV \quad (2.14)$$

$$\int_{t+\Delta t}^{} f_i^B \delta u_i^{t+\Delta t} dV = \int_0^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i^0 dV \quad (2.15)$$

$$\int_{t+\Delta t}^{} f_i^S \delta u_i^{t+\Delta t} dS = \int_0^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^0 dS \quad (2.16)$$

eşitlikleri yazılabilir [84]. Burada f_i^B ve f_i^S sırasıyla orijinal konfigürasyona göre belirlenen cisim ve yüzey kuvvet vektörlerinin $t + \Delta t$ anındaki i . bileşenleridir. (2.14) eşitliği (2.4) bağıntısında yazılırsa cismin hareket denklemi

$$\int_0^{t+\Delta t} S_{ij} \delta_0^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^0 dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (2.17)$$

şekline dönüşür. $t + \Delta t$ anındaki ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri ve Green-Lagrange şekil değiştirmeleri artımsal gerilmeler ve şekil değiştirmelere bağlı olarak

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}_0 S_{ij} \quad (2.18)$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^t \epsilon_{ij} + {}_0 \epsilon_{ij} \quad (2.19)$$

şeklinde verilebilir. Burada ${}_0 S_{ij}$ ve ${}_0 \epsilon_{ij}$ artımsal gerilmeleri ve şekil değiştirmeleri belirtmektedir. ${}_0 \epsilon_{ij}$ artımsal şekil değiştirmeleri, lineer ve lineer olmayan artımsal şekil değiştirmeler kullanılarak

$${}_0 \epsilon_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij} \quad (2.20)$$

formunda yazılabilir. Burada ${}_0\mathbf{e}_{ij}$ ve ${}_0\boldsymbol{\eta}_{ij}$ sırasıyla lineer ve lineer olmayan artımsal şekil değiştirmeleri göstermekte olup,

$${}_0\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (2.21)$$

$${}_0\boldsymbol{\eta}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (2.22)$$

eşitlikleri ile verilebilir. Denklem (2.19)'den Green-Lagrange şekil değiştirmelerinin varyasyonu

$$\delta^{t+\Delta t} {}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \delta_0^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (2.23)$$

biçiminde elde edilebilir. Bu denklemin sağ tarafındaki birinci terim artımsal yer değiştirmelere bağlı olmadığından varyasyonu sıfır olur. Dolayısıyla $t + \Delta t$ anındaki şekil değiştirmelerin varyasyonu

$$\delta^{t+\Delta t} {}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (2.24)$$

olur. Denklem (2.17), yukarıda tanımlanan artımsal bağıntılar kullanılarak

$$\int_{{}_0V} {}_0S_{ij} \delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} {}^0dV + \int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \boldsymbol{\eta}_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \mathbf{e}_{ij} {}^0dV \quad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem,

$${}_0S_{ij} = {}_0D_{ijrs} {}_0\mathbf{e}_{rs} \quad (2.26)$$

ve

$$\delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \delta_0 \mathbf{e}_{ij} \quad (2.27)$$

doğrusallaştırma yaklaşımları kullanılarak

$$\int_{^0V} {}^0D_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta_0 e_{ij} {}^0dV + \int_{^0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} - \int_{^0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0dV \quad (2.28)$$

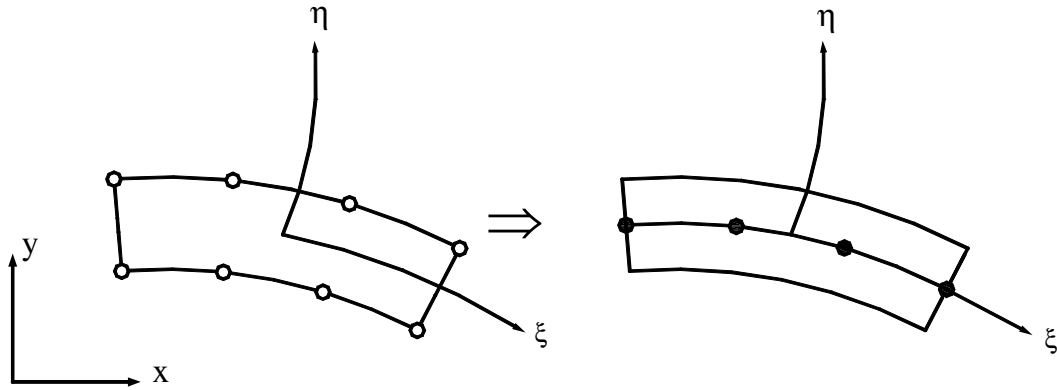
şeklinde lineerleştirilebilir [85]. Burada ${}^0D_{ijrs}$ malzeme özellikleri tansörünün elemanlarını göstermektedir. Bu denklem çözülerek, Dengelenmemiş virtüel enerjiyi azaltmak için uygun bir iteratif yöntem kullanılabilir.

3. GEOMETRİK BAKIMDAN LİNEER OLMAYAN KABUKLARIN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

3.1. Eksenel Simetrik Kabuklar

3.1.1. Elemanın Geometrisi ve Kinematığı

Bu bölümde eksenel simetrik kabukların toplam Lagrange formülasyonu verilmektedir. Kabuk elemanın izoparametrik formülasyonunda eleman içindeki yer değiştirmeler, düğüm yer değiştirmelerinin lineer ve düğüm dönmelerinin ise lineer olmayan fonksiyonları olarak göz önüne alınmaktadır. Böylece deformasyon sırasında büyük yer değiştirme ve dönmelere müsaade edilmektedir. Kullanılan kabuk eleman eksenel simetrik katı elemanlardan türetilmiştir. Bu tür elemanların geometrisini tanımlamak için orta yüzey koordinatları ve orta yüzey düğüm noktalarındaki normaller kullanılabilir. Şekil 3.1.'de sekiz düğümlü eksenel simetrik katı eleman ve bu elemandan türetilen eksenel simetrik kabuk eleman görülmektedir.



Şekil 3.1. Sekiz düğümlü eksenel simetrik katı elemandan dört düğümlü eksenel simetrik kabuk elemanın elde edilmesi

Eksenel simetrik kabukların formülasyonunda eleman geometrisi, ξ ve η eğrisel koordinatları kullanılarak

$$x = \sum_{k=1}^n N_k x_k + \frac{\eta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k \cos \varphi_k \quad (3.1a)$$

$$y = \sum_{k=1}^n N_k y_k + \frac{\eta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k \sin \varphi_k \quad (3.1b)$$

bağıntıları ile belirlenebilir. Burada;

x, y : eleman içindeki herhangi bir noktanın global kartezyen koordinatlarını,

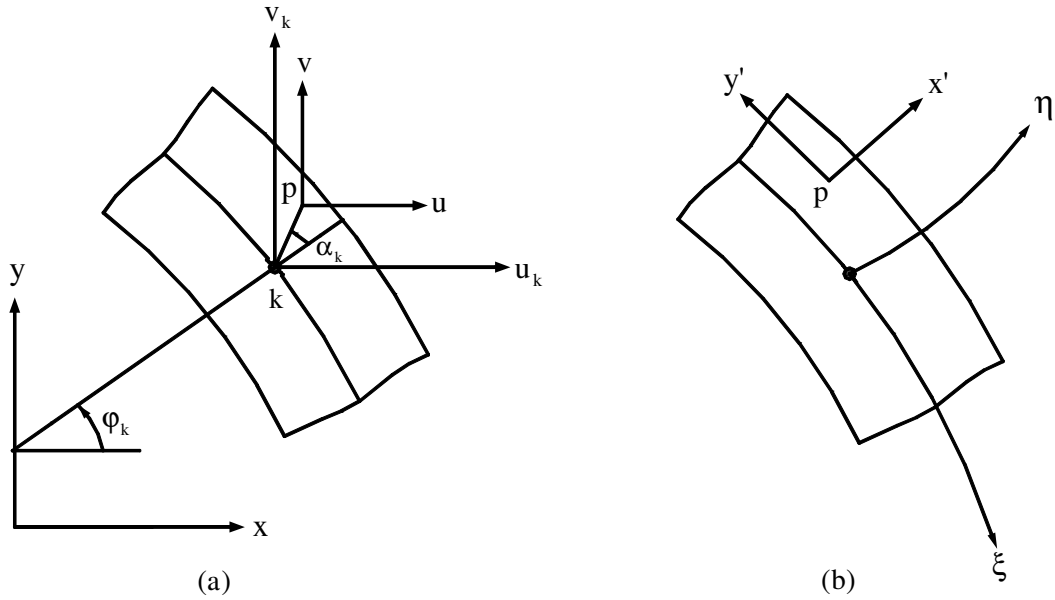
x_k, y_k : k düğüm noktasının kartezyen koordinatlarını,

N_k : k düğümünün şekil fonksiyonunu,

t_k : k düğümündeki eleman kalınlığı,

φ_k : k düğümündeki orta yüzey normalinin yatayla (x ekseni) ile yaptığı açısı,

n : bir elemandaki toplam düğüm noktası sayısını göstermektedir.



Şekil 3.2. (a) Eksenel simetrik kabuk elemanın k düğümündeki dönme açısı ve yer değiştirmeler, (b) eğrisel ve lokal koordinatlar

Şekil 3.2’de eksenel simetrik bir kabuk elemanın k düğümündeki dönme açısı ve yer değiştirmeler ile eğrisel ve lokal koordinatlar verilmiştir. Eleman içindeki herhangi bir p noktasının u ve v yer değiştirme bileşenleri sırasıyla

$$u = \sum_{k=1}^n N_k u_k + \frac{\eta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k f_{kx} \quad (3.2a)$$

$$v = \sum_{k=1}^n N_k v_k + \frac{\eta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k f_{ky} \quad (3.2b)$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. Burada f_{kx} ve f_{ky} ,

$$\mathbf{f}_k = \begin{Bmatrix} f_{kx} \\ f_{ky} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_k (\cos \alpha_k - 1) - \sin \varphi_k \sin \alpha_k \\ \sin \varphi_k (\cos \alpha_k - 1) + \cos \varphi_k \sin \alpha_k \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

bağıntısı ile verilen $\mathbf{f}_k$ vektörünün bileşenleridir. α_k , k düğümündeki dönmeyi göstermektedir. Küçük dönme durumu için $\sin \alpha_k \cong \alpha_k$ ve $\cos \alpha_k \cong 1$ kabulleri yapılarak yukarıdaki denklem yeniden yazılabilir [17].

3.1.2. Gerilme ve Şekil Değiştirmeler

Eksenel simetrik kabuk elemanın gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri lokal koordinat sisteminde $x'y'z'$ ($z' \equiv z$) tanımlanır. Lokal koordinat sistemi olarak kabuk yüzeyine normal olan eksen x' ile ve bu yüzeye teğet olan eksen ise y' ile gösterilmiştir (Şekil 3.2.b). Eksenel simetrik kabuklarda genellikle lokal σ'_x gerilmesi ve ϵ'_x şekil değiştirmesi ihmal edilir. Dolayısıyla kabuk elemanda ϵ'_y, ϵ'_z ve γ'_{xy} şekil değiştirmeleri ile bunlara karşılık gelen σ'_y, σ'_z ve τ'_{xy} gerilmeleri mevcuttur. Bununla beraber global koordinat (xyz) sisteminde $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ve γ_{xy} şekil değiştirmeleri ile $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ve τ_{xy} gerilmeleri dikkate alınmalıdır [86].

Eksenel simetrik kabuk elemanın lokal koordinat sistemindeki ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri $\boldsymbol{\sigma}'$ ve Green-Lagrange şekil değiştirmeleri $\boldsymbol{\epsilon}'$ arasındaki ilişki

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}' \boldsymbol{\epsilon}' \quad (3.4)$$

bağıntısı ile verilebilir. Burada $\mathbf{D}'$ matrisi lokal koordinat sistemindeki malzeme matrisini göstermekte olup, $\sigma'_x = 0$ ve $\epsilon'_x = 0$ durumu dikkate alınarak belirlenmektedir. $\boldsymbol{\sigma}'$ ve $\boldsymbol{\epsilon}'$ vektörleri sırasıyla,

$$\boldsymbol{\sigma}' = [\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad \tau'_{xy} \quad \sigma'_z]^T \quad (3.5)$$

ve

$$\boldsymbol{\epsilon}' = [\epsilon'_x \quad \epsilon'_y \quad \gamma'_{xy} \quad \epsilon'_z]^T \quad (3.6)$$

denklemleriyle tanımlanmaktadır. Benzer şekilde global koordinat sistemindeki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.7)$$

eşitliği ile belirlenebilir. Burada $\boldsymbol{\sigma}$ ve $\boldsymbol{\epsilon}$ sırasıyla global sistemdeki gerilme ve şekil değiştirme vektörleri olup, bunların açık halleri

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \sigma_z]^T \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad \epsilon_z]^T \quad (3.9)$$

eşitlikleri ile verilebilir. (3.7) denklemindeki $\mathbf{D}$ büyüklüğü global sistemdeki malzeme matrisidir. Bu matris

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}\mathbf{D}'\mathbf{T}^T \quad (3.10)$$

denklemleri ile belirlenebilir. Burada $\mathbf{T}$ dönüşüm matrisi olup, lokal (x', y') ve global (x, y) eksen takımları arasındaki açı θ ile belirtilecek olursa, $c = \cos(\theta)$ ve $s = \sin(\theta)$ olmak üzere bu matris

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc & 0 \\ s^2 & c^2 & 2sc & 0 \\ sc & -sc & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Global sistemdeki Green-Lagrange şekil değiştirmeleri $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_L \quad (3.12)$$

şeklinde iki büyüklüğün toplamı olarak yazılabilir. Burada $\boldsymbol{\epsilon}_0$ ve $\boldsymbol{\epsilon}_L$ sırasıyla, lineer ve lineer olmayan şekil değiştirmeleri göstermektedir. Denklem (3.12)'deki şekil değiştirmeler açık olarak

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{u}{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u}{x} \right)^2 \right] \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

bağıntısı ile verilebilir. Eğer

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{u}{x} \end{bmatrix}^T \quad (3.14)$$

ve

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanırsa, lineer ve lineer olmayan şekil değiştirmeler sırasıyla,

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} \quad (3.16)$$

ve

$$\boldsymbol{\epsilon}_L = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} \quad (3.17)$$

bağıntıları ile verilebilir. Burada $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{u}{x} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

formunda tanımlanmıştır.

Eksenel simetrik kabuk elemanın düğüm noktası deplasman vektörü $\mathbf{u}$ ve artımsal deplasman vektörü $d\mathbf{u}$ sırasıyla,

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad u_n \quad v_n \quad \alpha_n]^T \quad (3.19a)$$

ve

$$d\mathbf{u} = [du_1 \quad dv_1 \quad d\alpha_1 \quad \dots \quad du_n \quad dv_n \quad d\alpha_n]^T \quad (3.19b)$$

şeklinde verilebilir. Lineer şekil değiştirmelerin varyasyonu (3.16) denklemi kullanılarak

$$d\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathbf{H} d\boldsymbol{\theta} \quad (3.20)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer

$$d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} d\mathbf{u} \quad (3.21)$$

formunda ifade edilirse

$$d\epsilon_0 = \mathbf{H} \mathbf{G} du = \mathbf{B}_0 du \quad (3.22)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{B}_0$ lineer şekil değiştirme-yer değiştirme matrisi olup

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{H} \mathbf{G} \quad (3.23)$$

şeklinde olmaktadır.

Lineer olmayan şekil değiştirmelerin varyasyonu ise (3.17) denklemi kullanılarak

$$d\epsilon_L = \frac{1}{2} d\mathbf{A} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \mathbf{A} d\boldsymbol{\theta} \quad (3.24)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada

$$d\mathbf{A} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} d\boldsymbol{\theta} \quad (3.25)$$

olduğundan,

$$d\epsilon_L = \mathbf{A} d\boldsymbol{\theta} \quad (3.26)$$

olarak elde edilebilir. Denklem (3.21), (3.26)'de yerine yazılırsa

$$d\epsilon_L = \mathbf{A} \mathbf{G} du = \mathbf{B}_L du \quad (3.27)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\mathbf{B}_L$ lineer olmayan şekil değiştirme-yer değiştirme matrisini temsil etmektedir. Bu matrisin

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{A} \mathbf{G} \quad (3.28)$$

şeklinde olduğu (3.27) denkleminde görülebilir. Toplam şekil değiştirmelerin varyasyonu (3.12) denkleminde

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}_0 + d\boldsymbol{\epsilon}_L \quad (3.29)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.22) ve (3.27) bağıntıları (3.29) eşitliğinde kullanılırsa, şekil değiştirme ve yer değiştirmeleri birbirine bağlayan **B** matrisi,

$$d\boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{H} + \mathbf{A}] \mathbf{G} du = [\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L] du = \mathbf{B} du \quad (3.30a)$$

eşitliğinden

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \quad (3.30b)$$

olarak elde edilir. Bu denklemde **B**₀ ve **B**_L matrisleri sırasıyla, geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan şekil değiştirme-yer değiştirme matrislerini temsil etmektedir. **B**₀ matrisinin varyasyonu küçük deformasyonlarda sıfır terimleri vermesine karşılık, büyük deformasyonlar dikkate alındığında bu matrisin varyasyonu sıfırdan farklı terimler içerebilir. **B**_L matrisi ise her zaman yer değiştirmelere bağlı olmaktadır [86].

Denklem (3.2)'deki u ve v global yer değiştirmeleri eğrisel koordinatlarda tanımlandığından, bu yer değiştirmelerin global x ve y koordinatlarına göre olan türevleri

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

bağıntısı ile verilebilir [87]. Burada **J** büyüklüğü jakobiyan matrisi göstermekte olup,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k + \frac{\eta}{2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} t_k \cos \varphi_k & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k + \frac{\eta}{2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} t_k \sin \varphi_k \\ \frac{1}{2} N_k t_k \cos \varphi_k & \frac{1}{2} N_k t_k \sin \varphi_k \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

eşitliği ile bulunabilir. Yer değiştirmelerin eğrisel koordinatlara göre türevleri ise

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} u_k + \frac{\eta}{2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} t_k f_{kx} & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_k + \frac{\eta}{2} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} t_k f_{ky} \\ \frac{1}{2} N_k t_k f_{kx} & \frac{1}{2} N_k t_k f_{ky} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

bağıntısı kullanılarak elde edilebilir. Dolayısıyla (3.31), (3.32) ve (3.33) bağıntıları kullanılarak, yer değiştirmelerin global eksenlere göre türevleri

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1}(1,1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial u}{\partial \eta} & J^{-1}(1,1) \frac{\partial v}{\partial \xi} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ J^{-1}(2,1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial u}{\partial \eta} & J^{-1}(2,1) \frac{\partial v}{\partial \xi} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

formunda verilebilir. Bu türevler (3.14) denkleminde tanımlanan θ vektöründe yazılır ve bu vektörün varyasyonu olan (3.21) bağıntısı formuna getirildiğinde, herhangi bir k düğümü için G matrisinin terimleri

$$G = \begin{bmatrix} \dots & \left| \begin{array}{cc} J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \end{array} \right| & \begin{array}{c} b_1 \frac{\partial f_{kx}}{\partial \alpha_k} \\ b_1 \frac{\partial f_{ky}}{\partial \alpha_k} \end{array} & \dots \\ J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & 0 & b_2 \frac{\partial f_{kx}}{\partial \alpha_k} & \dots \\ 0 & J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & b_2 \frac{\partial f_{ky}}{\partial \alpha_k} & \dots \\ \frac{N_k}{x} & 0 & \frac{N_k}{x} \frac{\eta}{2} t_k \frac{\partial f_{kx}}{\partial \alpha_k} & \dots \end{bmatrix}_{5 \times 3n} \quad (3.35)$$

olarak elde edilebilir. Bu denklemdeki b_1 ve b_2 değişkenleri ise

$$b_1 = J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \eta \frac{t_k}{2} + J^{-1}(1,2) N_k \frac{t_k}{2} \quad (3.36a)$$

$$b_2 = J^{-1}(2,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \eta \frac{t_k}{2} + J^{-1}(2,2) N_k \frac{t_k}{2} \quad (3.36b)$$

eşitlikleri ile verilebilir.

3.1.3. Statik Denge ve Rijitlik Matrisi

Yer değiştirmeler ve dönmeler küçük veya büyük olsun, iç ve dış kuvvetler arasındaki denge sağlanmalıdır. Sistem düğüm yer değiştirme ve dönmelerini içeren $\mathbf{u}$ deplasman vektörü kullanılarak, gerekli denge denklemleri virtüel iş metoduyla bulunabilir. Lineer olmayan bir yapı sisteminin statik haldeki dengelenmemiş artık kuvvetleri

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} - \mathbf{P} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{P} \quad (3.37)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{R}$ dengelenmemiş kuvvet vektörünü, $\mathbf{F}$ iç kuvvet vektörünü ve $\mathbf{P}$ ise dış yük vektörünü temsil etmektedir. Yukarıdaki denklemi çözmek için artımsal-iteratif yöntemler kullanılabilir.

Teğet rijitlik matrisi $\mathbf{K}_T$ 'yi elde etmek için (3.37) denkleminin varyasyonu alınarak

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{F} = \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_T d\mathbf{u} \quad (3.38)$$

eşitliği elde edilebilir. Bu denklemdeki gerilme vektörünün varyasyonu (3.7) denklemi kullanılarak

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} d\mathbf{u} \quad (3.39)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlik (3.38) denkleminde yerine yazılırsa

$$d\mathbf{R} = \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \overline{\mathbf{K}} d\mathbf{u} \quad (3.40a)$$

veya

$$d\mathbf{R} = \mathbf{K}_T d\mathbf{u} \quad (3.40b)$$

denklemi elde edilir. $\overline{\mathbf{K}}$ rijitlik matrisi

$$\overline{\mathbf{K}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.41) denkleminde $\mathbf{K}_0$ küçük değiştirme rijitlik matrisini ve $\mathbf{K}_L$ ise büyük yer değiştirme rijitlik matrisini temsil etmektedir. $\mathbf{K}_0$ ve $\mathbf{K}_L$ matrislerinin açık şekilleri sırasıyla,

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV \quad (3.42)$$

ve

$$\mathbf{K}_L = \int_V (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0) dV \quad (3.43)$$

bağıntıları ile verilebilir [88]. Denklem (3.40a)'ın sağ tarafındaki birinci terim ise

$$\int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V (d\mathbf{B}_0^T + d\mathbf{B}_L^T) \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.44)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik, (3.23) ve (3.28) denklemleri göz önünde bulundurularak yeniden düzenlenirse

$$\int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V (d\mathbf{G}^T \mathbf{H}^T + d\mathbf{G}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T) \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.45a)$$

veya

$$\int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = (\mathbf{K}_{\sigma 2} + \mathbf{K}_{\sigma 3} + \mathbf{K}_{\sigma 1}) d\mathbf{u} = \mathbf{K}_{\sigma} d\mathbf{u} \quad (3.45b)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\mathbf{K}_{\sigma}$ geometrik rijitlik matrisini belirtmektedir. (3.45a) ve (3.45b) denklemleri karşılaştırılırsa

$$\int_V \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_{\sigma 1} d\mathbf{u} \quad (3.46a)$$

$$\int_V d\mathbf{G}^T \mathbf{H}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_{\sigma 2} d\mathbf{u} \quad (3.46b)$$

$$\int_V d\mathbf{G}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_{\sigma 3} d\mathbf{u} \quad (3.46c)$$

eşitliklerinin yazılabileceği kolaylıkla görülebilir. $\mathbf{S}$ büyüklüğü dört gerilme bileşenini içeren ve

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

şeklinde tanımlanan 5x5 boyutunda bir matris olmak üzere; (3.46a) denkleminde

$$d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \mathbf{G} d\mathbf{u} \quad (3.48)$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\int_V \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \left[\int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV \right] d\mathbf{u} = \mathbf{K}_{\sigma 1} d\mathbf{u} \quad (3.49)$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan $\mathbf{K}_{\sigma 1}$ rijitlik matrisi

$$\mathbf{K}_{\sigma 1} = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV \quad (3.50)$$

olarak bulunur.

Denklem (3.46b)'deki $\mathbf{K}_{\sigma 2}$ matrisini elde etmek için

$$d\mathbf{G}^T \mathbf{H}^T \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ dh_{1k} \\ dh_{2k} \\ dh_{3k} \\ \vdots \end{Bmatrix}_{3n \times 1} \quad (3.51)$$

eşitliği kullanılabilir. (3.51) eşitliğinin sağ tarafındaki vektörde açık olarak görülen üç terim herhangi bir k düğümüne aittir. Bu terimlerden h_{1k} ve h_{2k} sabit olduğundan bunların varyasyonları sırasıyla $dh_{1k} = 0$ ve $dh_{2k} = 0$ olur. h_{3k} terimi ise

$$h_{3k} = (b_1 \sigma_x + b_2 \tau_{xy} + \frac{N_k}{x} \frac{\eta}{2} t_k \sigma_z) \frac{\partial f_{kx}}{\partial \alpha_k} + (b_1 \tau_{xy} + b_2 \sigma_y) \frac{\partial f_{ky}}{\partial \alpha_k} \quad (3.52a)$$

şeklinde değişken olup, varyasyonu

$$dh_{3k} = (b_1 \sigma_x + b_2 \tau_{xy} + \frac{N_k}{x} \frac{\eta}{2} t_k \sigma_z) \frac{\partial^2 f_{kx}}{\partial \alpha_k^2} d\alpha_k + (b_1 \tau_{xy} + b_2 \sigma_y) \frac{\partial^2 f_{ky}}{\partial \alpha_k^2} d\alpha_k \quad (3.52b)$$

eşitliğiyle verilebilir. (3.51) ve (3.52b) eşitlikleri (3.46b) denkleminde yerine yazılarak sol tarafın hacim üzerinden integrali alınırsa, $\mathbf{K}_{\sigma_2}$ büyüklüğü $3n \times 1$ boyutunda bir vektör olarak elde edilir. $\mathbf{K}_{\sigma_2}$ büyüklüğü dönme etkileriyle ilgili rijitlikleri içermektedir. Diğer rijitlikler ile birleştirmek amacıyla bu büyüklük matris formuna dönüştürülmelidir. Herhangi bir k düğümü için $\mathbf{K}_{\sigma_2}$ rijitlik matrisinin terimleri

$$\mathbf{K}_{\sigma_2}^{kk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{\sigma_2}^{kk})_{3,3} \end{bmatrix} \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.53a)$$

biçiminde olmaktadır. Burada

$$(\mathbf{K}_{\sigma_2}^{kk})_{3,3} = \int_V \left[(b_1 \sigma_x + b_2 \tau_{xy} + \frac{N_k}{x} \frac{\eta}{2} t_k \sigma_z) \frac{\partial^2 f_{kx}}{\partial \alpha_k^2} + (b_1 \tau_{xy} + b_2 \sigma_y) \frac{\partial^2 f_{ky}}{\partial \alpha_k^2} \right] dV \quad (3.53b)$$

eşitliği ile verilebilir.

Denklem (3.46c)'deki $\mathbf{K}_{\sigma 3}$ rijitlik matrisini elde etmek için

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}_{\sigma} \quad ; \quad \mathbf{A}_{\sigma} = [\mathbf{A}_{\sigma 1}, \dots, \mathbf{A}_{\sigma 5}]^T \quad (3.54)$$

formunda tanımlanarak

$$d\mathbf{G}^T \mathbf{A}_{\sigma} = d(\mathbf{G}^T \mathbf{A}_{\sigma}) = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \tilde{dh}_{1k} \\ \tilde{dh}_{2k} \\ \tilde{dh}_{3k} \\ \vdots \end{Bmatrix}_{3n \times 1} \quad (3.55)$$

eşitliği kullanılabilir. (3.55) eşitliğinin sağ tarafındaki vektörde açık olarak görülen üç terim herhangi bir k düğümüne aittir. Bu terimlerden $\tilde{h}_{1k}$ ve $\tilde{h}_{2k}$ sabit olduğundan bunların varyasyonları sırasıyla $d\tilde{h}_{1k} = 0$ ve $d\tilde{h}_{2k} = 0$ olur. $\tilde{h}_{3k}$ terimi ise

$$\tilde{h}_{3k} = (b_1 A_{\sigma 1} + b_2 A_{\sigma 3} + \frac{N_k}{X} \frac{\eta}{2} t_k A_{\sigma 5}) \frac{\partial f_{kx}}{\partial \alpha_k} + (b_1 A_{\sigma 2} + b_2 A_{\sigma 4}) \frac{\partial f_{ky}}{\partial \alpha_k} \quad (3.56a)$$

şeklinde değişken olup, varyasyonu

$$d\tilde{h}_{3k} = (b_1 A_{\sigma 1} + b_2 A_{\sigma 3} + \frac{N_k}{X} \frac{\eta}{2} t_k A_{\sigma 5}) \frac{\partial^2 f_{kx}}{\partial \alpha_k^2} d\alpha_k + (b_1 A_{\sigma 2} + b_2 A_{\sigma 4}) \frac{\partial^2 f_{ky}}{\partial \alpha_k^2} d\alpha_k \quad (3.56b)$$

biçiminde elde edilebilir. (3.55) ve (3.56b) eşitlikleri (3.46c) denkleminde yerine yazılarak sol tarafın hacim üzerinden integrali alınırsa, $\mathbf{K}_{\sigma 3}$ büyüklüğü $3n \times 1$ boyutunda bir vektör olarak elde edilir. $\mathbf{K}_{\sigma 3}$ büyüklüğü dönme etkileriyle ilgili rijitlikleri içermektedir. Diğer rijitlikler ile birleştirmek amacıyla bu büyüklük matris formuna dönüştürülmelidir. Herhangi bir k düğümü için $\mathbf{K}_{\sigma 3}$ rijitlik matrisinin terimleri

$$\mathbf{K}_{\sigma 3}^{kk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{\sigma 3}^{kk})_{3,3} \end{bmatrix} \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.57a)$$

biçiminde olmaktadır. Burada

$$(\mathbf{K}_{\sigma 2}^{kk})_{3,3} = \int_V \left[(b_1 A_{\sigma 1} + b_2 A_{\sigma 3} + \frac{N_k}{x} \frac{\eta}{2} t_k A_{\sigma 5}) \frac{\partial^2 f_{kx}}{\partial \alpha_k^2} + (b_1 A_{\sigma 2} + b_2 A_{\sigma 4}) \frac{\partial^2 f_{ky}}{\partial \alpha_k^2} \right] dV \quad (3.57b)$$

şeklinde hesaplanabilir [17]. Böylece (3.38) artımsal denge denklemindeki teğet rijitlik matrisi $\mathbf{K}_T$

$$\mathbf{K}_T = \bar{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_\sigma \quad (3.58)$$

veya daha açık olarak

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{\sigma 1} + \mathbf{K}_{\sigma 2} + \mathbf{K}_{\sigma 3} \quad (3.59)$$

biçiminde verilebilir.

3.1.4. Kütle Matrisi ve Yaylı Yük ile İlgili Dış Yük Vektörü

Eksenel simetrik kabuk eleman için, $\mathbf{N}$ yer değiştirme interpolasyon fonksiyonları matrisi

$$\mathbf{N} = \left[\cdots \begin{vmatrix} N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 \end{vmatrix} \cdots \right]_{2 \times 3n} \quad (3.60)$$

olarak tanımlanabilir. Eksenel simetrik kabuk elemanın kütle matrisi $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}_{3n \times 3n} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (3.61)$$

eşitliği ile belirlenebilir. Burada ρ kütle yoğunluğunu göstermektedir. Eksenel simetrik kabuk elemanın ağırlık veya basınç gibi yayılı yüklerden meydana gelen eleman dış yük vektörü $\mathbf{P}_d$ ise

$$\mathbf{P}_d = \int_A \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} dA \quad (3.62)$$

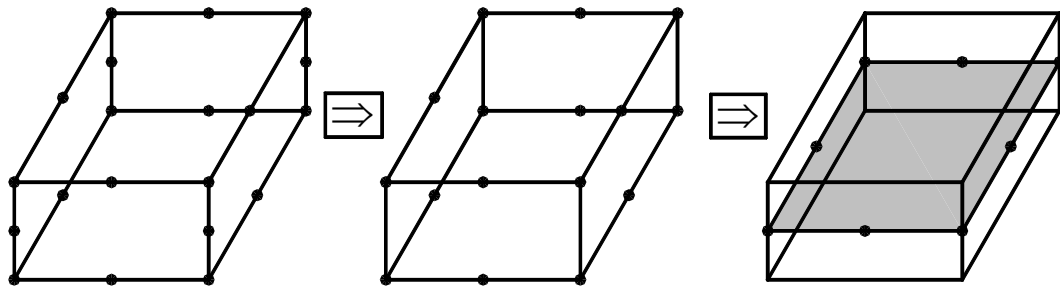
bağıntısı ile bulunabilir. Burada P_x ve P_y sırasıyla, yayılı yükün x ve y eksenine doğrultusundaki bileşenlerini temsil etmektedir.

3.2. Genel Kabuklar

3.2.1. Elemanın Geometrisi ve Kinematığı

Bu kısımda Mindlin-Reissner yaklaşımını temel alan izoparametrik genel kabuk elemanın toplam Lagrange formülasyonu verilmektedir. Kayma deformasyon etkileri “kabuğun orta yüzey normali, deformasyon sırasında orta yüzeye dik kalmayabilir” varsayımı ile dikkate alınmaktadır. Bu teori ile bir noktadaki yer değiştirmeler ile orta yüzey normallerinin dönmeleri bağımsız olmaktadır [83].

Şekil 3.3’de 20 düğümlü bir katı elemandan 8 düğümlü bir kabuk elemanın elde edilişi gösterilmiştir. Bu işlemin birinci aşamasında kalınlık doğrultusundaki şekil değiştirmeler sabit kabul edilerek orta düzlemdaki düğümler kaldırılır; ikinci aşamasında ise, karşılıklı iki düğüm iki dönme serbestliği ilave bir düğümle bağlanarak düğüm sayısı yarıya indirilir. Katı elemandaki toplam serbestlik 60 olmasına karşılık, elde edilen kabuk elemandaki serbestlik ise 40 olmaktadır [89].



Şekil 3.3 20 düğümlü katı elemandan 8 düğümlü kabuk elemanın elde edilmesi.

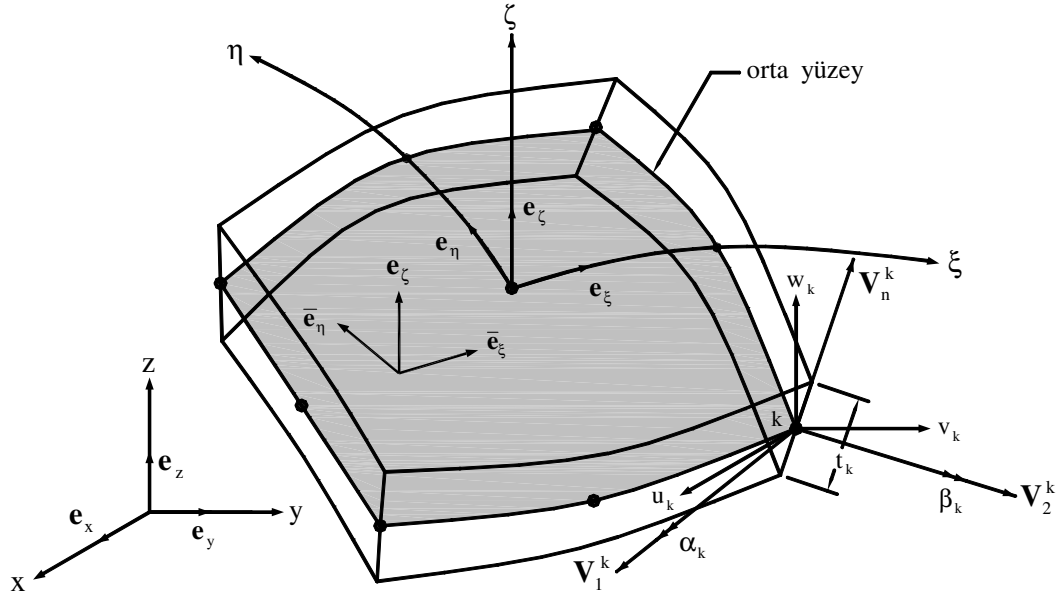
Şekil 3.4’de 9 düğüme sahip bir kabuk eleman görülmektedir. Bu elemanın orta yüzeyindeki eğrisel koordinatlar (ξ, η) ve kalınlık doğrultusundaki koordinat ζ olsun. Bu koordinatlar -1 ve +1 arasında değişmektedir. Herhangi bir k düğüm noktasına ait üst ve alt yüzey koordinatları olan $(x_{üst}^k, y_{üst}^k, z_{üst}^k)$ ve $(x_{alt}^k, y_{alt}^k, z_{alt}^k)$ kullanılarak, eleman içindeki tipik bir noktanın koordinatları,

$$x = \sum_{k=1}^n N_k \left(\frac{1+\zeta}{2} x_{üst}^k + \frac{1-\zeta}{2} x_{alt}^k \right) \quad (3.63a)$$

$$y = \sum_{k=1}^n N_k \left(\frac{1+\zeta}{2} y_{üst}^k + \frac{1-\zeta}{2} y_{alt}^k \right) \quad (3.63b)$$

$$z = \sum_{k=1}^n N_k \left(\frac{1+\zeta}{2} z_{üst}^k + \frac{1-\zeta}{2} z_{alt}^k \right) \quad (3.63c)$$

bağıntıları ile ifade edilebilir. Burada n eleman düğüm sayısını, N_k ise k düğümü ile ilgili şekil fonksiyonunu göstermektedir. Eleman orta yüzeyi üzerindeki düğüm sayısı artırılarak eleman hassasiyeti iyileştirilebilir.



Şekil 3.4 Dokuz düğümlü kabuk eleman.

Kabuk elemanın k düğümüne ait üst ve alt yüzey noktalarını birleştiren doğrultman vektörü $\mathbf{V}_n^k$

$$\mathbf{V}_n^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{nx}^k \\ \mathbf{V}_{ny}^k \\ \mathbf{V}_{nz}^k \end{Bmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z}_k \end{Bmatrix}_{\text{üst}} - \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \mathbf{z}_k \end{Bmatrix}_{\text{alt}} \right) / t_k \quad (3.64)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $\mathbf{V}_{nx}^k$, $\mathbf{V}_{ny}^k$ ve $\mathbf{V}_{nz}^k$ sırasıyla, k düğümüne ait $\mathbf{V}_n^k$ doğrultman vektörünün x, y ve z bileşenlerini; t_k ise k düğümündeki eleman kalınlığını göstermektedir. (3.63a-c) denklemleri, elemanın orta yüzey koordinatları (x_k, y_k, z_k) ve $\mathbf{V}_n^k$ doğrultman vektörünün bileşenleri kullanılarak

$$x = \sum_{k=1}^n N_k x_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k \mathbf{V}_{nx}^k \quad (3.65a)$$

$$y = \sum_{k=1}^n N_k y_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k \mathbf{V}_{ny}^k \quad (3.65b)$$

$$z = \sum_{k=1}^n N_k z_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k \mathbf{V}_{nz}^k \quad (3.65c)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu denklemler yardımıyla kabuk eleman içindeki herhangi bir noktanın konumu kolaylıkla bulunabilir [83,85-87,90].

Kabuk eleman içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi, orta yüzey üzerindeki her k düğümüne ait yer değiştirmeler ile bu düğümdeki $\mathbf{V}_n^k$ doğrultman vektörüne dik olan iki vektör etrafındaki dönmeler dikkate alınarak ifade edilebilir. Şekil 3.5’de deformasyon sırasında düğüm doğrultman vektörü $\mathbf{V}_n^k$ ’nin dönmesi sonucu, bu vektörün uç noktasında meydana gelen yer değiştirmeler gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi $\mathbf{V}_n^k$ vektörü $\mathbf{V}_1^k$ etrafında α_k açısı kadar döndüğünde vektörün uç noktası, $\mathbf{V}_2^k$ vektörü doğrultusunda $-\|\mathbf{V}_n^k\| \sin \alpha_k$ kadar ötelenme yapar. Eğer α_k açısı çok küçük kabul edilirse $\sin \alpha_k \cong \alpha_k$ olarak alınabilir; dolayısıyla, bu dönme sırasında $\mathbf{V}_n^k$ vektörünün uç noktası ($\|\mathbf{V}_n^k\| = 1$ olduğundan) $\mathbf{V}_2^k$ vektörü

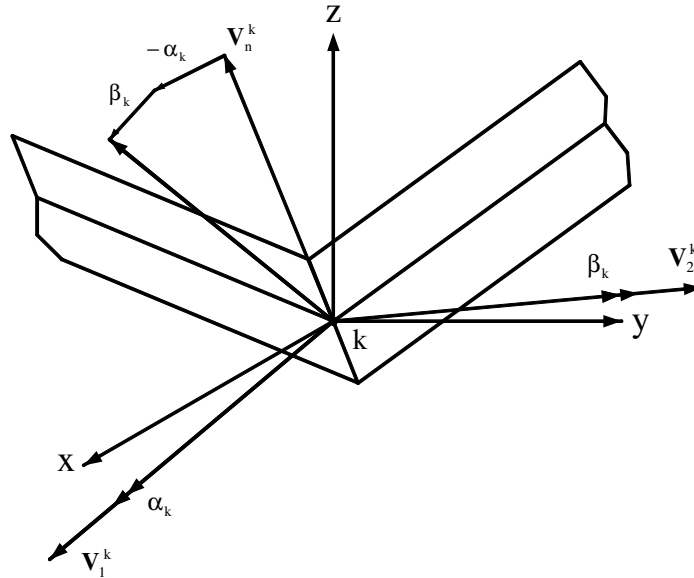
doğrultusunda $-\alpha_k$ kadar doğrusal ötelenme yapar. Benzer şekilde, $\mathbf{V}_n^k$ vektörü $\mathbf{V}_2^k$ etrafında β_k açısı kadar döndüğünde vektörün uç noktası, $\mathbf{V}_1^k$ vektörü doğrultusunda β_k kadar pozitif ötelenme yapar. Doğrultman vektörü $\mathbf{V}_n^k$ 'nın kendi etrafındaki dönmesi kendisinde yer değiştirme meydana getirmemektedir. Yukarıdaki kabullerden $\mathbf{V}_n^k$ doğrultman vektörünün deformasyondan sonra da doğru kaldığı ve referans yüzeye göre rölatif dönme yaptığı görülebilir [91]. Dolayısıyla kabuk eleman içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n N_k \mathbf{u}_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k (-V_{2x}^k \alpha_k + V_{1x}^k \beta_k) \quad (3.66a)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n N_k \mathbf{v}_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k (-V_{2y}^k \alpha_k + V_{1y}^k \beta_k) \quad (3.66b)$$

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^n N_k \mathbf{w}_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k (-V_{2z}^k \alpha_k + V_{1z}^k \beta_k) \quad (3.66c)$$

bağıntıları ile verilebilir [92].



Şekil 3.5. Deformasyon sırasında k düğümüne ait $\mathbf{V}_n^k$ doğrultman vektörünün dönmesi sonucu, bu vektörün uç noktasının yer değiştirmeleri.

Şekil 3.4'de verilen $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ ve $\mathbf{e}_\zeta$ birim vektörleri genellikle birbirlerine dik değildir.

Bununla beraber $\bar{\mathbf{e}}_\xi$, $\bar{\mathbf{e}}_\eta$ ve $\mathbf{e}_\zeta$ birbirlerine dik vektörlerdir. Bu vektörler

$$\bar{\mathbf{e}}_\xi = \frac{\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta}{\|\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta\|} \quad (3.67a)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_\eta = \mathbf{e}_\zeta \times \bar{\mathbf{e}}_\xi \quad (3.67b)$$

eşitlikleri ile bulunabilir. Kabuk elemanın $\mathbf{V}_n^k$, $\mathbf{V}_1^k$ ve $\mathbf{V}_2^k$ orta yüzey normal vektörleri arasındaki bağıntılar ise

$$\mathbf{V}_1^k = \frac{\mathbf{e}_y \times \mathbf{V}_n^k}{\|\mathbf{e}_y \times \mathbf{V}_n^k\|} \quad (3.68a)$$

ve

$$\mathbf{V}_2^k = \mathbf{V}_n^k \times \mathbf{V}_1^k \quad (3.68b)$$

denklemleri ile verilebilir. Burada $\mathbf{e}_y$ global y eksenini doğrultusundaki birim vektördür.

3.2.2. Gerilme ve Şekil Değiştirmeler, Rijitlik Matrisi

Kabuk yüzeyine normal doğrultudaki gerilme ve şekil değiştirme sıfır kabul edilerek gerekli gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları elde edilebilir. Kabuk elemanın kartezyen koordinat sistemindeki ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri $\boldsymbol{\sigma}$ ve Green-Lagrange şekil değiştirmeleri $\boldsymbol{\epsilon}$ sırasıyla,

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T \quad (3.69)$$

ve

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}]^T \quad (3.70)$$

bağıntıları ile ifade edilebilir. Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları, aksenal simetrik kabuklar için verilen (3.7) denklemi ile benzerdir. Global koordinatlardaki $\mathbf{D}$ elastisite matrisi

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}' \mathbf{T} \quad (3.71)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\mathbf{D}'$ elemanın lokal koordinat sistemindeki elastisite matrisini ve $\mathbf{T}$ ise dönüşüm matrisini temsil etmektedir. $\mathbf{D}'$ matrisi, genel kabuk eleman için Reissner teorisi durumunda düzlem gerilme davranışı dikkate alınarak

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

şeklinde verilebilir. Burada E elastisite modülünü, ν Poisson oranını ve k ise kayma düzeltme katsayısını göstermektedir. Bu katsayı genellikle $5/6$ olarak alınmaktadır [43,52]. $\mathbf{T}$ dönüşüm matrisi ise

$$\begin{aligned} l_1 &= \mathbf{e}_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_\xi & m_1 &= \mathbf{e}_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_\xi & n_1 &= \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_\xi \\ l_2 &= \mathbf{e}_x \cdot \bar{\mathbf{e}}_\eta & m_2 &= \mathbf{e}_y \cdot \bar{\mathbf{e}}_\eta & n_2 &= \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_\eta \\ l_3 &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta & m_3 &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta & n_3 &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\zeta \end{aligned} \quad (3.73a)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (3.73b)$$

bağıntısıyla elde edilebilir.

Denklem (3.70)'deki şekil değiştirme vektörü

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_L = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (3.74)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ sırasıyla, lineer ve lineer olmayan şekil değiştirme vektörlerini göstermektedir. Eğer

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

şeklinde tanımlanır,

$$\boldsymbol{\theta}_x = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right]^T ; \boldsymbol{\theta}_y = \left[\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T ; \boldsymbol{\theta}_z = \left[\frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right]^T \quad (3.76a)$$

ve

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_x \quad \boldsymbol{\theta}_y \quad \boldsymbol{\theta}_z]^T \quad (3.76b)$$

olduğu göz önünde bulundurulursa, lineer şekil değiştirmeler

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} \quad (3.77)$$

bağıntısı ile verilebilir. Benzer şekilde, (3.74) denklemindeki lineer olmayan şekil değiştirmeler ise,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_y^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_z^T \\ \boldsymbol{\theta}_y^T & \boldsymbol{\theta}_x^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_z^T & \boldsymbol{\theta}_y^T \\ \boldsymbol{\theta}_z^T & \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}_x^T \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{0} = [0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.78)$$

olarak ifade edilerek

$$\boldsymbol{\epsilon}_L = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} \quad (3.79)$$

şeklinde yazılabilir [85-87]. Burada $\mathbf{A}$ matrisi 6x9 boyutundadır.

Herhangi bir elemanın lokal koordinatlarda düğüm noktası deplasman vektörü, her düğümde beş serbestlik derecesi olmak üzere,

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \dots \quad u_n \quad v_n \quad w_n \quad \alpha_n \quad \beta_n]^T \quad (3.80)$$

şeklinde verilebilir. Burada n elemandaki toplam düğüm sayısını göstermektedir. Bu durumda eleman artımsal deplasman vektörü

$$d\mathbf{u} = [du_1 \quad dv_1 \quad dw_1 \quad d\alpha_1 \quad d\beta_1 \quad \dots \quad du_n \quad dv_n \quad dw_n \quad d\alpha_n \quad d\beta_n]^T \quad (3.81)$$

formunda yazılabilir. Denklem (3.74)'de verilen lineer ve lineer olmayan şekil değiştirmelerin varyasyonu (3.29) denklemi kullanılarak elde edilebilir.

Denklem (3.66)'deki u , v ve w global yer değiştirmeleri eğrisel koordinatlarda tanımlandığından, bu yer değiştirmelerin global x , y ve z koordinatlarına göre türevleri

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

eşitliği ile hesaplanabilir, burada $\mathbf{J}$ jakobiyan matrisini göstermekte olup,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

bağıntısıyla belirlenebilir [69,73,93]. (3.66a) denklemiyle tanımlanan u yer değiştirmesinin eğrisel koordinatlara göre türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \xi} u_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \xi} t_k (-V_{2x}^k \alpha_k + V_{1x}^k \beta_k) \quad (3.84a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \eta} u_k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \eta} t_k (-V_{2x}^k \alpha_k + V_{1x}^k \beta_k) \quad (3.84b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n N_k t_k (-V_{2x}^k \alpha_k + V_{1x}^k \beta_k) \quad (3.84c)$$

şeklinde bulunabilir. Benzer eşitlikler v ve w için de yazılabilir. (3.82-3.84) eşitlikleri kullanılarak, u yer değiştirmesinin global eksenlere göre olan türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} = J^{-1}(1,1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial u}{\partial \eta} + J^{-1}(1,3) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (3.85a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = J^{-1}(2,1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^{-1}(2,2) \frac{\partial u}{\partial \eta} + J^{-1}(2,3) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (3.85b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = J^{-1}(3,1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^{-1}(3,2) \frac{\partial u}{\partial \eta} + J^{-1}(3,3) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (3.85c)$$

formunda yazılabilir. Benzer işlemler v ve w için de gerçekleştirilebilir. Bu türevler kullanılarak (3.76a-b) denklemleri şekillendirilir ve $d\theta$ varyasyonu veren (3.21) bağıntısı uygulanırsa, herhangi bir k düğümü için $\mathbf{G}$ matrisinin terimleri

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & \mathbf{g}_{1x}^k \mathbf{G}_x^k & \mathbf{g}_{2x}^k \mathbf{G}_x^k \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & \mathbf{g}_{1y}^k \mathbf{G}_x^k & \mathbf{g}_{2y}^k \mathbf{G}_x^k \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \mathbf{g}_{1z}^k \mathbf{G}_x^k & \mathbf{g}_{2z}^k \mathbf{G}_x^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 & \mathbf{g}_{1x}^k \mathbf{G}_y^k & \mathbf{g}_{2x}^k \mathbf{G}_y^k \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & \mathbf{g}_{1y}^k \mathbf{G}_y^k & \mathbf{g}_{2y}^k \mathbf{G}_y^k \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \mathbf{g}_{1z}^k \mathbf{G}_y^k & \mathbf{g}_{2z}^k \mathbf{G}_y^k \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & 0 & \mathbf{g}_{1x}^k \mathbf{G}_z^k & \mathbf{g}_{2x}^k \mathbf{G}_z^k \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & \mathbf{g}_{1y}^k \mathbf{G}_z^k & \mathbf{g}_{2y}^k \mathbf{G}_z^k \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \mathbf{g}_{1z}^k \mathbf{G}_z^k & \mathbf{g}_{2z}^k \mathbf{G}_z^k \end{array} \right] \quad (3.86)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu matristeki değişkenler ise

$$\frac{\partial N_k}{\partial x} = J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \quad (3.87)$$

$$G_x^k = \zeta \left[J^{-1}(1,1) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + J^{-1}(1,2) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right] + J^{-1}(1,3) N_k \quad (3.88)$$

$$\mathbf{g}_1^k = \begin{Bmatrix} g_{1x}^k \\ g_{1y}^k \\ g_{1z}^k \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \mathbf{t}_k \mathbf{V}_2^k \quad (3.89)$$

$$\mathbf{g}_2^k = \begin{Bmatrix} g_{2x}^k \\ g_{2y}^k \\ g_{2z}^k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{t}_k \mathbf{V}_1^k \quad (3.90)$$

eşitlikleri ile verilebilir. $\frac{\partial N_k}{\partial y}$, $\frac{\partial N_k}{\partial z}$, G_y^k ve G_z^k değişkenleri de benzer şekilde elde edilebilir.

Geometrik rijitlik matrisi $\mathbf{K}_\sigma$ 'nın elde edilmesinde (3.45a) denkleminde de görüldüğü gibi $\mathbf{G}$ matrisinin varyasyonu da kullanılmaktadır. Buradaki genel kabuk eleman formülasyonunda $\mathbf{G}$ matrisinin tüm terimleri sabit olduğundan, bu matrisin varyasyonu tüm terimleri sıfır olan ($d\mathbf{G} = \mathbf{0}$) bir matristir. Buradan (3.46b) ve (3.46c) denklemlerinde geçen $\mathbf{K}_{\sigma 2} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{K}_{\sigma 3} = \mathbf{0}$ olur. Dolayısıyla (3.45b) eşitliğinden $\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_{\sigma 1}$ olup, geometrik rijitlik matrisi sadece (3.50) denklemi kullanılarak hesaplanabilir. (3.48), (3.49) ve (3.50) denklemlerinde geçen $\mathbf{S}$ matrisi, genel kabuk elemanlar için altı gerilme bileşenini içermekte olup,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I}_3 & \gamma_{xy} \mathbf{I}_3 & \gamma_{xz} \mathbf{I}_3 \\ \gamma_{xy} \mathbf{I}_3 & \sigma_y \mathbf{I}_3 & \gamma_{yz} \mathbf{I}_3 \\ \gamma_{xz} \mathbf{I}_3 & \gamma_{yz} \mathbf{I}_3 & \sigma_z \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

biçiminde tanımlanan 9x9 boyutunda simetrik bir matristir [86].

$\mathbf{K}_0$ küçük yer değiştirme ve $\mathbf{K}_L$ büyük yer değiştirme rijitlik matrislerinin toplamı olan $\overline{\mathbf{K}}$ rijitlik matrisi, (3.41) denkleminde

$$\overline{\mathbf{K}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.92)$$

olarak verilmiştir. Burada $\mathbf{B}$ şekil değiştirme-yer değiştirme matrisini göstermekte olup, (3.30) denklemleri kullanılarak elde edilebilir. Genel kabuk elemanlar için teğet rijitlik matrisi $\mathbf{K}_T$, (3.50) ve (3.92) eşitlikleri kullanılarak

$$\mathbf{K}_T = \overline{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_\sigma \quad (3.93)$$

şeklinde verilebilir.

3.2.3. Kütle Matrisi ve Yayılı Yük ile İlgili Dış Yük Vektörü

Genel kabuk eleman için, $\mathbf{N}$ yer değiştirme interpolasyon fonksiyonları matrisi

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} \dots & N_k & 0 & 0 & -\frac{\zeta}{2} N_k t_k V_{2x}^k & \frac{\zeta}{2} N_k t_k V_{1x}^k & \dots \\ & 0 & N_k & 0 & -\frac{\zeta}{2} N_k t_k V_{2y}^k & \frac{\zeta}{2} N_k t_k V_{1y}^k & \\ & 0 & 0 & N_k & -\frac{\zeta}{2} N_k t_k V_{2z}^k & \frac{\zeta}{2} N_k t_k V_{1z}^k & \end{array} \right]_{3 \times 5n} \quad (3.94)$$

olarak tanımlanabilir. Bu durumda kabuk eleman kütle matrisi $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}_{5n \times 5n} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \quad (3.95)$$

eşitliği ile belirlenebilir. Burada ρ kütle yoğunluğunu göstermektedir. Genel kabuk elemanın ağırlık veya basınç gibi yayılı yüklerden meydana gelen $\mathbf{P}_d$ eleman dış yük vektörü ise

$$\mathbf{P}_d = \int_A \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} dA \quad (3.96)$$

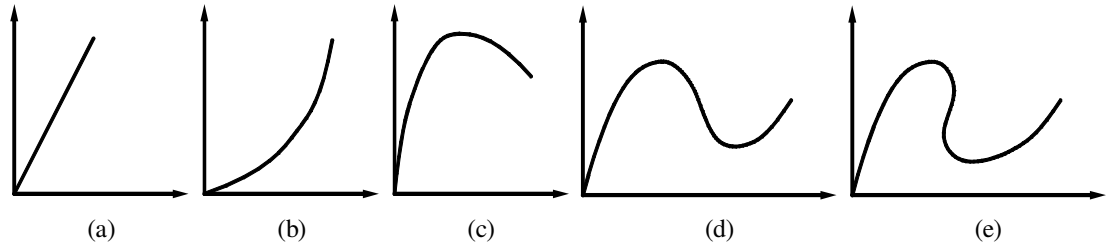
bağıntısı ile bulunabilir. Burada P_x , P_y ve P_z sırasıyla, yayılı yükün x, y ve z eksenî doğrultusundaki bileşenlerini temsil etmektedir. (3.94) denklemindeki ζ terimi, yayılı yükün etkidiği yüzeye bağlı olarak üst, alt ve orta yüzeyler için sırasıyla 1, -1 ve 0 olarak alınmalıdır [85].

Yukarıda formülasyonu verilen genel kabuk eleman için deformasyon sırasında doğrultman vektörlerinin doğru kaldığı ve eleman kalınlığının değişmediği kabul edilmektedir. Dolayısıyla, bu eleman büyük yer değiştirme ve dönme yapan, fakat şekil değiştirmeleri küçük (çünkü eleman kalınlığı çözüm esnasında güncellenmemektedir) olan kabukların analizinde kullanılabilir.

4. YAPI SİSTEMLERİNİN LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİ İÇİN ÇÖZÜM METOTLARI

4.1. Giriş

Yapı sistemlerinin lineer olmayan denklemlerinin çözümü için birçok metot geliştirilmiştir. Şekil 4.1.'de yapıların statik analizinde en sık karşılaşılan lineer olmayan yük-deformasyon eğrileri verilmiştir.



Şekil 4.1. Yapıların lineer olmayan temel davranış türleri: (a) Gevrek göçme durumuna kadar lineer davranış, (b) Pekleşme, (c) Yumuşama, (d) Vurgu burkulması, (e) Ters vurgu burkulması.

Bu bölümde yapı sistemlerinin lineer olmayan analizlerinde en çok kullanılan çözüm yöntemlerinden olan Newton-Raphson ve Yay-boyu (Arc-length) metotları kısaca verilmektedir.

4.2. Newton-Raphson Metodu

Newton-Raphson metodu iteratif bir yöntem olup, lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan başlıca metotlardan birisidir. Bu metot aynı zamanda Yay-boyu metotlarının temelini teşkil eder.

Herhangi bir sistemin düğüm yer değiştirme vektörünü $\mathbf{u}$ ile gösterelim. Bu sistemdeki iç kuvvet vektörü

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV \quad (4.1)$$

denklemini ile ifade edilebilir. Sadece geometrik bakımdan lineer olmayan sistemler dikkate alındığında $\boldsymbol{\sigma}$ gerilmeleri yapısal deformasyon durumuna bağlı olur. Dış yük vektörü $\mathbf{P}$ ile belirtilirse, lineer olmayan denklemler

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{R}$ artık veya dengelenmemiş yük vektörünü göstermektedir. λ parametresi ise dış yük vektörü çarpanıdır. Denge durumunda uygulanan dış yükler ile iç kuvvetler birbirlerine eşit olur.

Newton-Raphson yönteminde dış yük vektörü belirli oranlarda artırılarak buna karşılık gelen $\mathbf{u}$ yer değiştirmeleri iteratif olarak bulunur. Bundan dolayı bu metot yük-kontrollü (load-controlled) bir metottur. n . adımdaki λ_n yük çarpanı ve $\mathbf{u}_n$ yer değiştirme vektörü kullanılarak $n+1$ adımdaki $\mathbf{u}_{n+1}$ yer değiştirme vektörü aşağıdaki şekilde bulunabilir. Dış yük vektörü çarpanının $\Delta\lambda$ kadar artımına bağlı olarak $n+1$ adımıdaki dış yük vektörü çarpanı

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda \quad (4.3)$$

şeklinde elde edilebilir. Buna karşılık gelen $\mathbf{u}_{n+1}$ yer değiştirme iteratif olarak belirlenir. $i+1$ iterasyonundaki yer değiştirme

$$\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + \delta\mathbf{u}_n^i \quad (4.4)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Burada n ve i sayaçları sırası ile yük adımlarını ve iterasyon sayılarını göstermektedir. (4.2) denklemindeki $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ artık yük için parça parça lineerleştirme yaklaşımı (kısaltılmış Taylor açılımı) uygulanırsa

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i) + \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{u}} \right)_{n+1}^i \delta\mathbf{u}_n^i = 0 \quad (4.5)$$

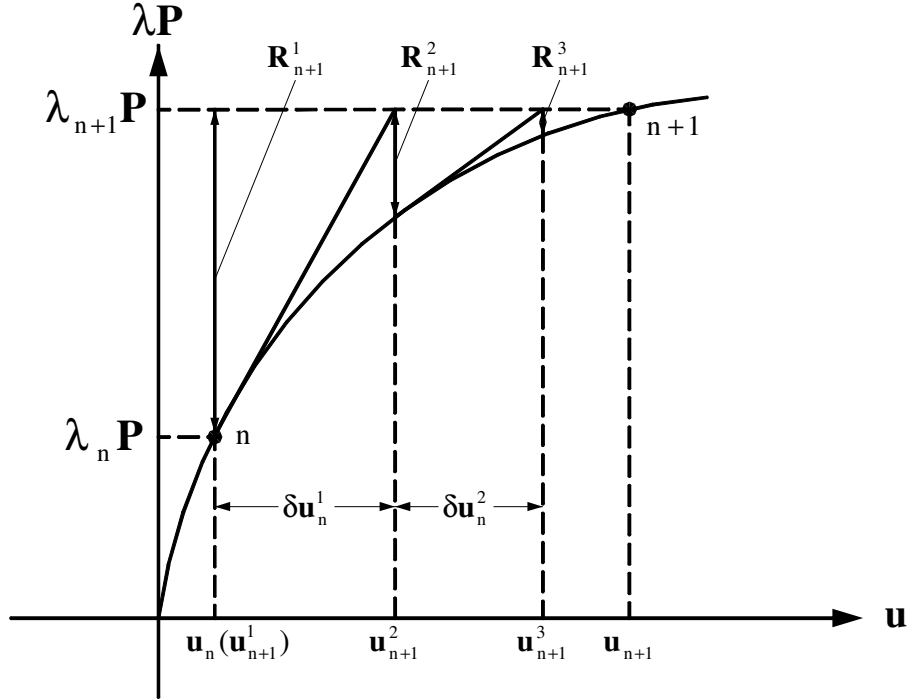
eşitliği elde edilebilir. Bu denklemde

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{u}} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}} \equiv \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \quad (4.6)$$

dir. (4.5) ve (4.6) denklemlerinden artımsal yer değiştirmeler

$$\delta\mathbf{u}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i \quad (4.7)$$

şeklinde hesaplanabilir. İterasyon işlemi belirlenen yakınsaklık değeri sağlanıncaya kadar sürdürülür [94-96]. Şekil 4.2’de Newton-Raphson metodunun uygulanışı grafiksel olarak gösterilmektedir.



Şekil 4.2. Newton-Raphson metodunun uygulanışı.

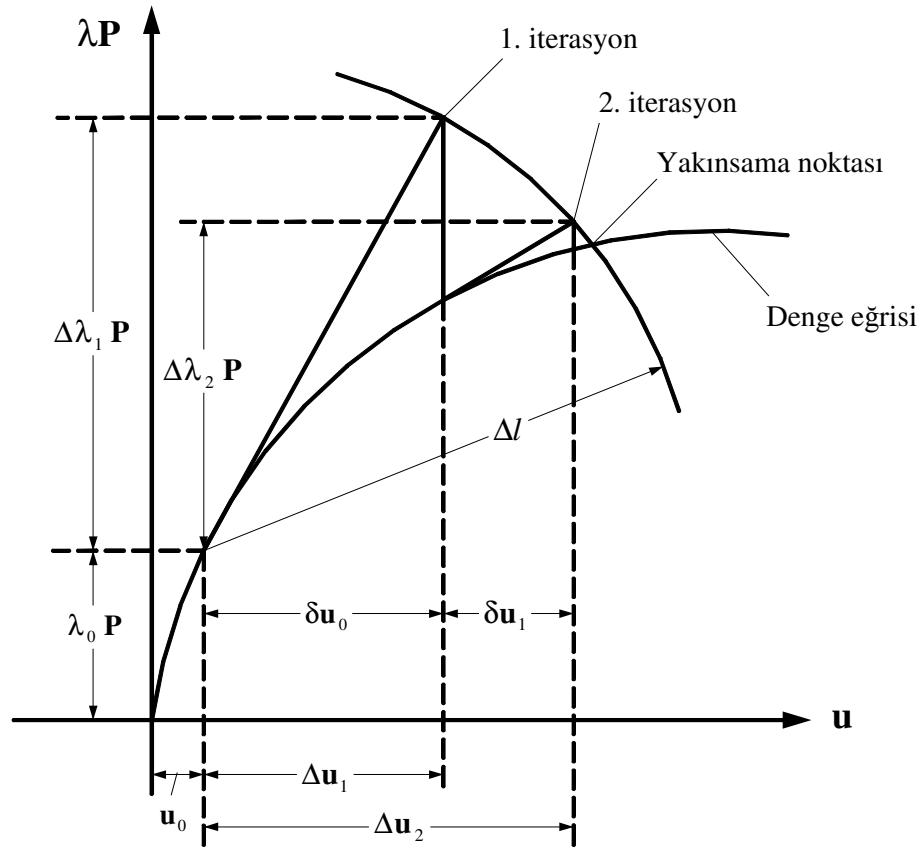
4.3. Yay-boyu (Arc-length) Metodu

Yapıların lineer olmayan davranışını inceleyebilmek için yük-deformasyon eğrisi tam olarak elde edilmelidir. Yük kontrollü bir metot olan Newton-Raphson metodu sınır noktası civarlarında çözüm vermediğinden deplasman kontrollü metotlar geliştirilmiştir. Fakat vurgu burkulması (snap-through) veya ters vurgu burkulması (Snap-back) davranışı gösteren sistemlerde bu metotlar hatalara neden olmaktadır. Bu problemleri aşmak için yük kontrollü metotlarla, deplasman kontrollü metotları birlikte kullanmak bir çözüm yöntemi olabilir [97]. Yapıların lineer olmayan davranışını elde etmek için kullanılan Yay-boyu metodu daha genel bir metot olup, ilk olarak Riks [98,99] ve Wempner [100] tarafından geliştirilmiş ve daha sonraları birçok araştırmacı [74-76,80-82] tarafından yeniden düzenlenmiştir. Yay-boyu metotları kullanılarak sınır noktalarını (maksimum ve minimum yükler) geçen çözüm algoritmaları üretilebilir.

Yük veya deplasman kontrollü metotlarda bir adımdaki yük seviyesi parametresi veya deplasman sabit tutulmaktadır. Buna karşılık Yay-boyu metodunda ise yük seviyesi parametresi her iterasyonda yeniden elde edilerek yakınsama noktasına ulaşılır. Dolayısı ile bu metotta yük seviyesi parametresi λ , denge denklemlerine ilave bir değişken olarak girer. Bu yöntemde lineer olmayan yapı sistemlerinin denge denklemleri

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir [101]. Burada $\mathbf{R}$ artık kuvvet, $\mathbf{F}$ iç kuvvet ve $\mathbf{P}$ ise dış yük vektörünü göstermektedir.



Şekil 4.3. Yay-boyu metodunun gösterilmesi.

Yay-boyu metodunun amacı (4.8) denklemi ile l sabit yay boyu arasındaki kesişimi bulmaktır. l sabit yay boyu diferansiyel olarak

$$l = \int \sqrt{d\mathbf{u}^T d\mathbf{u} + d\lambda^2 \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P}} \quad (4.9)$$

şeklinde veya artımsal olarak

$$a(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda) = \Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} + \Delta\lambda^2 \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} - \Delta l^2 = 0 \quad (4.10)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\Delta\mathbf{u}$ artımsal yer değiştirmeleri, $\Delta\lambda$ artımsal yük faktörünü, Δl belirlenen artımsal yay boyunu (Şekil 4.3) ve Ψ ise yük ölçeklendirme parametresini göstermektedir.

Yay-boyu metodunda yük seviyesi parametresi λ ilave bir değişken olarak ele alındığından, k yer değiştirme vektöründeki toplam serbestlik derecesini göstermek üzere, denge denklemlerindeki toplam bilinmeyen sayısı $k + 1$ olur. Bu denklemleri çözmek için (4.8) bağıntıları ve (4.10) sınırlayıcı denklemi kullanılabilir. Riks [99] ve Wempner [100], bu $k + 1$ değişkeni, Newton-Raphson metodunu (4.8) ve (4.10) denklemlerine doğrudan uygulayarak çözmüşlerdir. Denklem (4.8) ve (4.10)'un kısaltılmış Taylor açılımları sırasıyla,

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \lambda} \delta\lambda = \mathbf{R}_i + \mathbf{K}_T \delta\mathbf{u} - \mathbf{P} \delta\lambda = 0 \quad (4.11)$$

$$a_{i+1} = a_i + 2\Delta\mathbf{u}^T \delta\mathbf{u} + 2\Delta\lambda \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \delta\lambda = 0 \quad (4.12)$$

biçiminde yazılabilir. Denklem (4.11) ve (4.12) birleştirilebilir. Söz konusu denklemler $\delta\mathbf{u}$ yer değiştirme vektöründeki iteratif değişim ve $\delta\lambda$ yük faktöründeki iteratif değişim için çözülecek olursa,

$$\begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ 2\Delta\mathbf{u}^T & 2\Delta\lambda \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_i \\ a_i \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $\mathbf{K}_T$ teğet rijitlik matrisi tekil (singular) olsa dahi köşeli parantez içindeki genişletilmiş rijitlik matrisi tekil olmayabilir. Bununla birlikte $\mathbf{K}_T$ matrisi simetrik olmasına karşılık bu matris simetrik değildir. Bu nedenlerden dolayı yukarıdaki denklemin nümerik çözümü zorlaşır. Yukarıdaki denklemi çözmek yerine, Batoz ve Dhatt'ın [102] tekniği kullanılarak bir tek noktadaki yer değiştirme kontrolü için (4.12) bağıntısındaki sınırlama doğrudan kullanılabilir. Bunun için $\delta\mathbf{u}$ iteratif yer değiştirmesi iki kısma ayrılır. Yeni bilinmeyen yük seviyesi

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \delta\lambda \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilecek olursa, bu yük seviyesinde iteratif yer değiştirmedeki değişim (4.11) bağıntısından

$$\delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{u}_i, \lambda_{i+1}) = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{R}(\mathbf{u}_i, \lambda_i) - \delta\lambda \mathbf{P}) \quad (4.15)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu eşitlik

$$\delta\mathbf{u} = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}_i + \delta\lambda \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} = \delta\bar{\mathbf{u}} + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_t \quad (4.16)$$

formunda yeniden yazılabilir. Burada $\delta\bar{\mathbf{u}}$, λ_i yük seviyesindeki Newton-Raphson metodundan elde edilen yer değiştirmedeki iteratif değişimi ve $\delta\mathbf{u}_t$ ise sabit dış yük vektörü $\mathbf{P}$ ye karşılık gelen yer değiştirmeyi göstermektedir.

$i + 1$ iterasyonundaki artımsal yer değiştirmeler

$$\Delta\mathbf{u}_{i+1} = \Delta\mathbf{u}_i + \delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_i + \delta\bar{\mathbf{u}} + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_t \quad (4.17)$$

olarak elde edilebilir. Bu eşitlikteki tek bilinmeyen olan $\delta\lambda$ denklem (4.10)'deki sınırlama kullanılarak bulunabilir. (4.10) sınırlayıcı denklemi

$$\Delta\mathbf{u}_i^T \Delta\mathbf{u}_i + \Delta\lambda_i^2 \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \Delta\mathbf{u}_{i+1}^T \Delta\mathbf{u}_{i+1} + \Delta\lambda_{i+1}^2 \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \Delta l^2 \quad (4.18)$$

şeklinde yeniden yazılır ve (4.17) bağıntısı bu eşitlikte kullanılırsa,

$$c_1 \delta\lambda^2 + c_2 \delta\lambda + c_3 = 0 \quad (4.19)$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Burada c_1 , c_2 ve c_3 sırasıyla

$$c_1 = \delta\mathbf{u}_t^T \delta\mathbf{u}_t + \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \quad (4.20a)$$

$$c_2 = 2 \delta\mathbf{u}_t^T (\Delta\mathbf{u}_i + \delta\bar{\mathbf{u}}) + 2 \Delta\lambda_i \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \quad (4.20b)$$

$$c_3 = (\Delta\mathbf{u}_i + \delta\bar{\mathbf{u}})^T (\Delta\mathbf{u}_i + \delta\bar{\mathbf{u}}) - \Delta l^2 + \Delta\lambda_i^2 \Psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \quad (4.20c)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Crisfield [87], bu denklemlerde yük ölçeklendirme parametresini sıfır almanın ($\Psi = 0$) çözümleri fazla etkilemediğini belirtmiştir. (4.20a-c) denklemleri çözülerek $\delta\lambda$ iteratif değişimi için iki kök elde edilebilir. $\delta\lambda_1$ ve $\delta\lambda_2$ köklerinden iki tane artımsal yer değiştirme

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1,1} = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \bar{\mathbf{u}} + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{u}_t \quad (4.21a)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1,2} = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \bar{\mathbf{u}} + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{u}_t \quad (4.21b)$$

olarak bulunur. Bu yer değiştirmelerden, bir önceki $\Delta \mathbf{u}_i$ artımsal yer değiştirme doğrultusuna en yakın doğrultuyu sağlayanı seçilerek yük-deformasyon eğrisinin kendi izi üzerinde tekrar (doubling-back) etmesi önlenebilir. Bunu belirlemek için $\Delta \mathbf{u}_i$ ve $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ arasındaki en küçük açığı sağlayan $\delta\lambda$ değeri çözümlerde kullanılır. Yani

$$\cos \theta = \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_{i+1}}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T (\Delta \mathbf{u}_i + \delta \bar{\mathbf{u}})}{\Delta l^2} + \delta \lambda \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_t}{\Delta l^2} \quad (4.22)$$

bağıntısından maksimum kosinüs değerini veren θ açısı genellikle istenilen çözümü verir. Fakat bazı keskin ters vurgu burkulması durumunda bu kriter de hatalı seçime neden olabilmektedir [87]. Yukarıdaki denklemlerde verilen artımsal yük faktörü

$$\Delta \lambda_{i+1} = \Delta \lambda_i + \delta \lambda \quad (4.23)$$

bağıntısı ile güncelleştirilir. Yay-boyu metodu Şekil 4.3.'de grafiksel olarak gösterilmektedir.

4.3.1. Prediktör Çözüm

Bir önceki kısımda Yay-boyu metodunun uygulanması açıklanmıştır. İterasyonların başlangıcında ileri Euler teğetsel prediktörü göz önüne alınarak

$$\Delta \mathbf{u}_p = \mathbf{K}_T^{-1} \Delta \mathbf{P} = \Delta \lambda_p \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} = \Delta \lambda_p \delta \mathbf{u}_t \quad (4.24)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{K}_T$ iterasyonların başlangıcındaki teğet rijitlik matrisini ve p alt indisi ise ilgili büyüklüğün prediktör değerini temsil etmektedir. Bu eşitlik (4.18) denkleminde kullanılır ve $\Psi = 0$ alınır

$$\Delta\lambda_p = \pm \frac{\Delta I}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_t^T \delta\mathbf{u}_t}} = s \frac{\Delta I}{\sqrt{\delta\mathbf{u}_t^T \delta\mathbf{u}_t}} \quad (4.25)$$

olarak elde edilir. Denklem (4.25)'deki s , +1 ve -1 değerlerini alan bir parametredir. Çözüm başlangıcında $\mathbf{K}_T$ matrisi pozitif definite ise bu parametre +1 olarak alınır. Çözümün ileriki safhalarında bu değişkenin işaretinin belirlenmesi için çeşitli kriterler kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

a) Mevcut teğet rijitlik matrisinin determinantının işareti

$$\text{sign}(s) = \text{sign}(|\mathbf{K}_T|) \quad (4.26)$$

Denge eğrisinin limit ve burkulma noktalarında, teğet rijitlik matrisinde negatif pivot oluşur. Söz konusu kriter bu iki nokta arasındaki farkı ayırt edememektedir. Burkulma durumunda, prediktör denge eğrisini izlemek yerine burkulmanın meydana geldiği nokta etrafında salınım yapmaktadır. Dolayısıyla çözüm başarıyla tamamlanamayabilir.

b) Artımsal iş işareti

$$\text{sign}(s) = \text{sign}(\delta\mathbf{u}_t \mathbf{P}) \quad (4.27)$$

Bu kriter burkulma noktalarına duyarlı değildir, yani burkulma noktasını geçerek denge eğrisini izlemeye devam edebilir. Bununla birlikte ters vurgu burkulma davranışı mevcut olursa çözüm elde edilemeyebilir.

c) Önceki yakınsamış artımsal yer değiştirme ile mevcut teğetsel çözüm arasındaki iç çarpımın işareti

$$\text{sign}(s) = \text{sign}(\Delta\mathbf{u}_n^T \delta\mathbf{u}_t) \quad (4.28)$$

Burada $\Delta\mathbf{u}_n$, önceki yakınsamış artımsal yer değiştirme olup, mevcut denge eğrisinin geçmişini hakkında bilgi içermektedir. Bundan dolayı (a) ve (b) kriterlerinde oluşan problemler bu kriterde kolayca aşılabilir. Bununla birlikte $\Delta\mathbf{u}_n$ artımsal yer değiştirmelerinin yeterince küçük olması gerekir [80,82].

4.3.2. Yakınsama Kriterleri

Artımsal-iteratif metotlarda iterasyon işlemi belirli yakınsama sağlanıncaya kadar devam ettirilmelidir. Lineer olmayan denklemlerin çözümünde genellikle deplasman, yük ve enerji esaslı yakınsama kriterleri kullanılmaktadır.

Deplasman esaslı kriter, artımsal yer değiştirmeleri toplam yer değiştirmeler ile karşılaştırmak için kullanılmakta olup,

$$\|\delta \mathbf{u}_i\| < \beta \|\mathbf{u}_{i+1}\| \quad (4.29)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\delta \mathbf{u}$ iteratif yer değiştirmeleri, $\mathbf{u}$ toplam yer değiştirmeleri ve β ise önceden belirlenen tolerans değerini göstermektedir. İteratif yer değiştirme vektörünün normu çok küçük, buna karşılık artık kuvvet vektörünün normu çok büyük olabilir. Bu nedenle deplasman esaslı kriterin tek başına kullanılması uygun olmayabilir.

Yük esaslı kriter, artık yüklerin yeterince küçük olmasını sağlamak için kullanılmaktadır ve

$$\sqrt{\mathbf{R}_{i+1}^T \mathbf{C} \mathbf{R}_{i+1}} < \beta (\lambda_{i+1} \sqrt{\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}}) \quad (4.30)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada $\mathbf{C}$ matrisi yük artımı başlangıcındaki teğet rijitlik matrisinin diyagonal terimlerinden oluşan diyagonal matrisin tersi olup, genellikle ölçekleme matrisi olarak da bilinmektedir [103].

Enerji esaslı yakınsama kriteri ise

$$|\delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{R}_{i+1}| < \beta |\mathbf{u}_{i+1}^T (\lambda_{i+1} \mathbf{P})| \quad (4.31)$$

şeklinde verilebilir [87].

4.4. Newmark Metodu

Newmark Metodu dinamik hareket halindeki yapı sistemlerinin nümerik analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir yapı sisteminin hareket denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (4.32)$$

şeklinde yazılabilir [104,105]. Burada $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{K}$ sırasıyla sistemin kütle, sönüm ve rijitlik matrislerini; $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ ve $\ddot{\mathbf{u}}$ aynı sistemin yer değiştirme, hız ve ivme vektörlerini; $\mathbf{R}$ ise dış yük vektörünü göstermektedir.

N. M. Newmark tarafından 1959 yılında geliştirilen zaman-adım metodu aşağıdaki kabulleri esas alır:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]\Delta t \quad (4.33)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + [(0.5-\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n + \beta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]\Delta t^2 \quad (4.34)$$

burada γ ve β parametreleri ivmenin bir zaman adımı üzerindeki değişimini tanımlar ve metodun kararlılık ve doğruluk özelliklerini belirler. Bu parametrelerin $\gamma = 1/2$ ve $1/6 \leq \beta \leq 1/4$ olarak seçilmesi bütün problemlerde kararlılık ve doğruluk açısından yeterli hassasiyette sonuç verir. Özel olarak $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/4$ olarak alınması durumunda yöntem ortalama ivme metodu, $\gamma = 1/2$ ve $\beta = 1/6$ olarak alınması durumunda ise lineer ivme metodu olarak adlandırılır. Ortalama ivme metodu her zaman kararlıdır ve Δt yeterince küçük seçildiğinde doğru sonuçlar verir, buna karşılık lineer ivme metodu ise $\Delta t \leq 0.551T_r$ şartının sağlanması ile kararlı duruma gelir. Burada T_r , r. modun doğal periyodunu göstermektedir [96].

(4.32) bağıntısı ile verilen hareket denklemi $n+1$ zaman adımı için

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \quad (4.35)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Aşağıda Newmark metodunun algoritması adım adım verilmiştir.

1. $\mathbf{K}$ sistemin rijitlik, $\mathbf{M}$ kütle ve $\mathbf{C}$ sönüm matrisleri bulunur.
2. $\mathbf{u}$ yer değiştirme, $\dot{\mathbf{u}}$ hız ve $\ddot{\mathbf{u}}$ ivme vektörleri sıfırlanır.
3. Δt zaman adımı ile γ ve β parametreleri seçilerek aşağıdaki integrasyon sabitleri hesaplanır:

$$\gamma \geq 0.50; \quad \beta \geq 0.25(0.50 + \gamma)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \gamma); \quad a_7 = \gamma \Delta t;$$

4. $\hat{\mathbf{K}}$ efektif rijitlik matrisi oluşturulur:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \quad (4.36)$$

5. Lineer analiz için:

- 5.1. $n+1$ zaman adımındaki $\hat{\mathbf{R}}_{n+1}$ efektif yük vektörü oluşturulur:

$$\hat{\mathbf{R}}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \dot{\mathbf{u}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{u}_n + a_4 \dot{\mathbf{u}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (4.37)$$

- 5.2. $n+1$ zaman adımındaki $\mathbf{u}_{n+1}$ yer değiştirme ve $\Delta \mathbf{u}$ artımsal yer değiştirme vektörü hesaplanır:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{R}}_{n+1} \hat{\mathbf{K}}^{-1} \quad (4.38)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad (4.39)$$

- 5.3. 7. adımına gidilerek güncelleştirmeler tamamlanır.

6. Lineer olmayan analiz için:

6.1. Teğet rijitlik matrisi $\mathbf{K}_T$ oluşturularak, efektif rijitlik matrisi $\hat{\mathbf{K}}_T$ güncelleştirilir.

$$\hat{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_T + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \quad (4.40)$$

6.2. $n+1$ zaman adımındaki $\hat{\mathbf{R}}_{n+1}$ efektif yük vektörü oluşturulur:

$$\hat{\mathbf{R}}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} + \mathbf{M}(a_2 \dot{\mathbf{u}}_n + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{C}(a_4 \dot{\mathbf{u}}_n + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_n) - \mathbf{F}_n \quad (4.41)$$

6.3. Güncellenen $\hat{\mathbf{K}}_T$ matrisi kullanılarak $\Delta \mathbf{u}$ artımsal yer değiştirme vektörü hesaplanır:

$$\Delta \mathbf{u} = \hat{\mathbf{R}}_{n+1} \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \quad (4.42)$$

6.4. Eğer gerekiyorsa dinamik denge iterasyonlarına başlanır ($\Delta \mathbf{u}^1 = \Delta \mathbf{u}$, $i = 0$).

6.4.1. i . iterasyondaki ivme, hız ve yer değiştirme vektörleri hesaplanır:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i = a_0 \Delta \mathbf{u}^i - a_2 \dot{\mathbf{u}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (4.43)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i = a_1 \Delta \mathbf{u}^i - a_4 \dot{\mathbf{u}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (4.44)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^i \quad (4.45)$$

6.4.2. i . iterasyondaki dengelenmemiş yük vektörü hesaplanır:

$$\hat{\mathbf{R}}_{n+1}^i = \mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^i - \mathbf{F}_{n+1}^i \quad (4.46)$$

6.4.3. i . iterasyondaki artımsal yer değiştirmelerdeki düzelme hesaplanır:

$$\delta \mathbf{u}^{i+1} = \hat{\mathbf{R}}_{n+1}^i \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \quad (4.47)$$

6.4.4. Artımsal yer değıştirmeler güncellenir:

$$\Delta \mathbf{u}^{i+1} = \Delta \mathbf{u}^i + \delta \mathbf{u}^{i+1} \quad (4.48)$$

6.4.5. İterasyon işleminin yakınsaklığı kontrol edilir.

6.4.6. Eğer iterasyon işleminde yakınsaklık sağlanırsa $\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{i+1}$ olarak alınarak 7. adımına gidilerek güncelleştirmeler yapılır, aksi halde $i = i + 1$ alınarak 6.4.1. adımına gidilir.

7. $n+1$ zaman adımındaki $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ ivme, $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ hız ve $\mathbf{u}_{n+1}$ yer değıştirme vektörü hesaplanır:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = a_0 \Delta \mathbf{u} - a_2 \dot{\mathbf{u}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (4.49)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + a_6 \ddot{\mathbf{u}}_n + a_7 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u} \quad (4.51)$$

8. $n = n + 1$ alınarak lineer analiz için 5. adıma, lineer olmayan analiz için ise 6. adıma gidilerek istenilen zaman süresi için işlemler tekrarlanır [104-106].

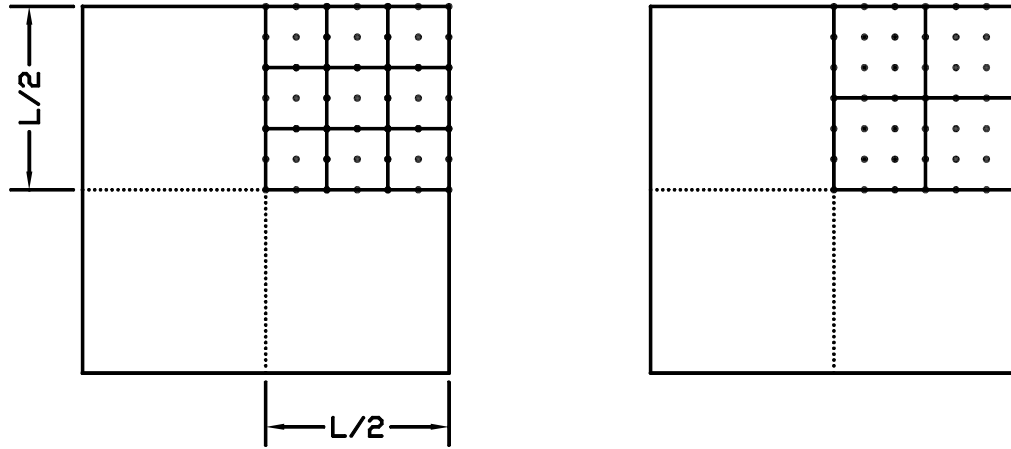
5. SAYISAL UYGULAMALAR

5.1. Statik Analiz

Bu kısımda; düzgün yayılı yüke maruz kenarları mafsallı ve ankastre olan kare plak, düzgün yayılı ve tekil yüke maruz ankastre mesnetli dairesel plak, çizgisel halka yüke ve basınç yüküne maruz ankastre mesnetli eksenel simetrik kabuk, tekil yüke maruz silindirik kabuk, dış basınç etkisindeki ankastre mesnetli silindirik kabuk ve tekil yüke maruz ankastre mesnetli kemer ve kırık kirişin geometrik bakımdan lineer olmayan statik davranışı incelenmiştir.

5.1.1. Düzgün Yayılı Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Kare Plak

Şekil 5.1’de verilen ankastre mesnetli kare plağın düzgün yayılı yük altında geometrik bakımdan lineer olmayan davranışı incelenmiştir. Kare plağın kenar uzunluğu $L = 400$ mm, kalınlığı $t = 2$ mm, elastisite modülü $E = 3 \times 10^8$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak seçilmiştir. Çözüm için simetriden dolayı plağın sadece çeyrek kısmı göz önüne alınmıştır.



Şekil 5.1. Simetrik kare plağın sonlu eleman ağ sistemi: (a) dokuz Q9 eleman, (b) dört Q16 eleman.

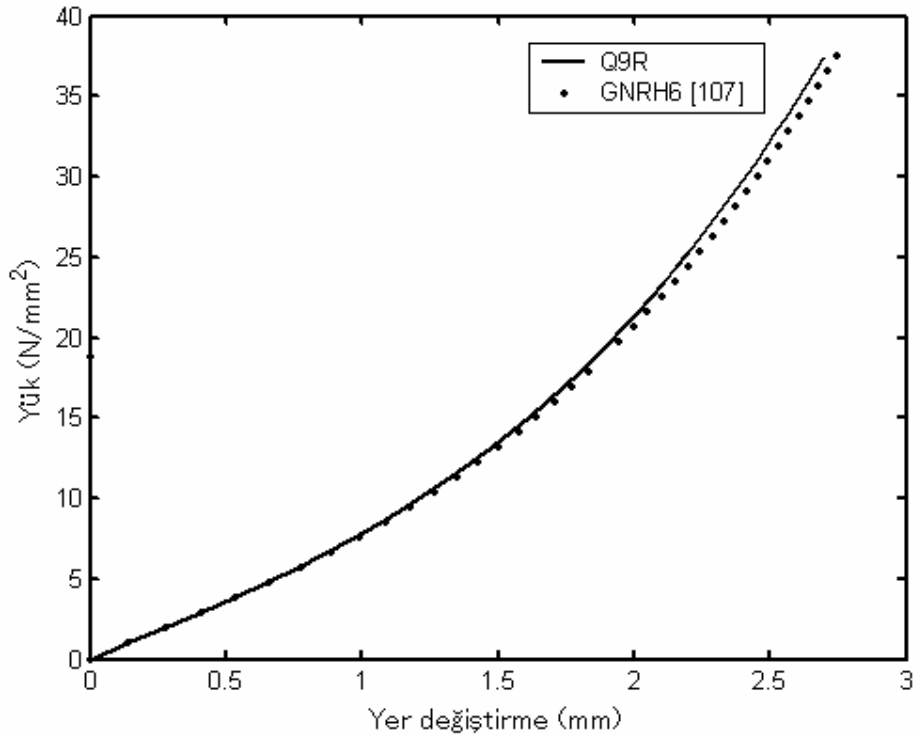
Çözümde dokuz ve on altı düğüme sahip izoparametrik dörtgen kabuk sonlu eleman ağları kullanılmıştır. Dokuz ve on altı düğümlü ağ sistemlerinde sırasıyla, 9 tane (3x3) ve 4 tane (2x2) sonlu eleman mevcuttur. Her iki sonlu eleman ağı için tam ve indirgenmiş Gauss integrasyon mertebesi çözümleri ayrı ayrı verilmiştir. Dokuz düğümlü eleman için tam ve indirgenmiş integrasyon mertebeleri sırasıyla, 3x3x2 ve 2x2x2 dir. On altı düğümlü eleman için ise tam ve indirgenmiş integrasyon mertebeleri sırasıyla, 4x4x2 ve 3x3x2 olmaktadır. Yakınsama kriteri olarak deplasman kontrolü seçilmiş ve tolerans değeri 10^{-4} olarak alınmıştır.

Tablo 5.1’de Q9F ve Q9R sırasıyla, dokuz düğümlü eleman için tam ve indirgenmiş integrasyon mertebelerinin uygulandığı çözümleri göstermektedir. Q16R ve Q16F ise on altı düğümlü eleman için aynı tanımlamaları belirtmektedir.

Kare plak için boyutsuz yük faktörü qL^4/Et^4 olarak tanımlanabilir [107]. Burada q düzgün yayılı yükü göstermektedir. Toplam 40 yük adımı kullanılarak problem analiz edilmiştir. Dokuz ve on altı düğümlü elemanlar kullanılarak elde edilen çözümler Tablo 5.1.’de sunulmuştur. Bu tabloda Wanji ve Shijie [107]’nin, 5x5 ağ sistemine sahip ve GNRH6 olarak adlandırdıkları kabuk eleman çözümleri de verilmiştir.

Sze ve Zheng [43] ise, kare plak için boyutsuz yük faktörü $qL^4/Et^4 = 200$ iken, plağın orta noktasının maksimum boyutsuz düşey yer değiştirmesini $v/t = 1.33676$ olarak vermektedirler.

İndirgenmiş integrasyon kayma kilitlenmesini azaltmaktadır [6,15,60]. Bundan dolayı indirgenmiş integrasyonun uygulandığı Q9R ve Q16R çözümleri kaynak [43,107] çözümleriyle daha uyumlu olmaktadır. Şekil 5.2.’de ise sadece Q9R ve GNRH6 [107] çözümleri grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Eğrilerin birbirine benzer oldukları görülmektedir.



Şekil 5.2. Ankastre mesnetli kare plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

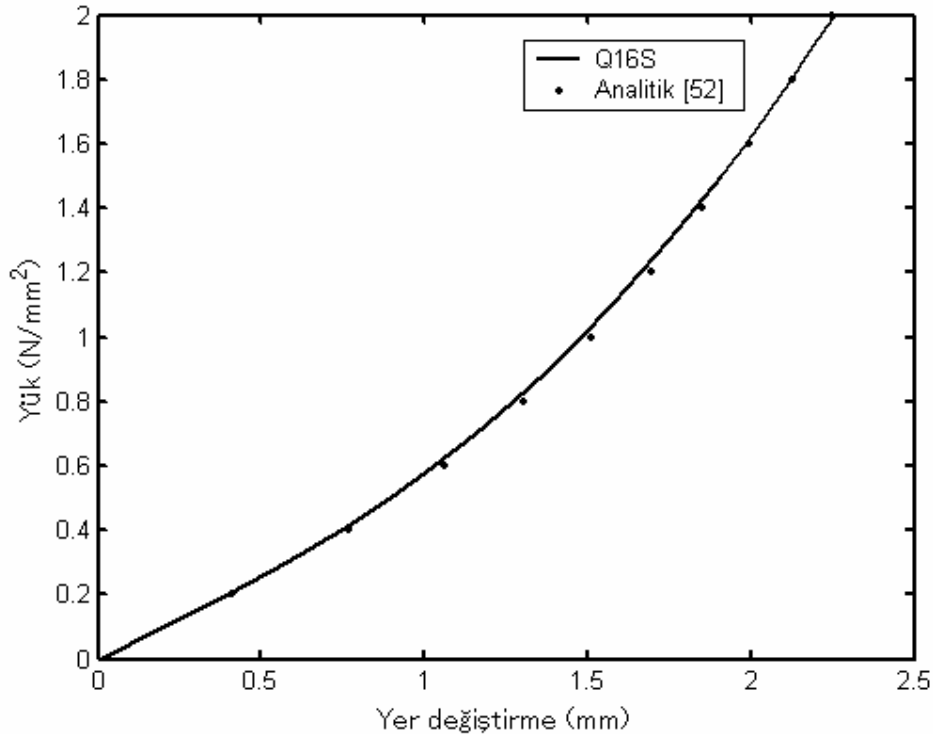
Tablo 5.1. Ankastre mesnetli kare plağın orta noktasının/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.

qL^4 / Et^4	Q9F	Q9R	Q16F	Q16R	GNRH6
5	0.0622	0.0689	0.0687	0.0688	0.0685
10	0.1234	0.1365	0.1361	0.1362	0.1361
15	0.1830	0.2020	0.2014	0.2015	0.2020
20	0.2406	0.2647	0.2639	0.2642	0.2655
25	0.2959	0.3245	0.3234	0.3238	0.3264
30	0.3486	0.3812	0.3798	0.3804	0.3843
35	0.3989	0.4348	0.4330	0.4339	0.4393
40	0.4467	0.4854	0.4833	0.4844	0.4913
45	0.4921	0.5333	0.5308	0.5322	0.5406
50	0.5353	0.5786	0.5757	0.5774	0.5873
55	0.5764	0.6215	0.6182	0.6203	0.6317
60	0.6156	0.6622	0.6585	0.6610	0.6736
65	0.6529	0.7010	0.6968	0.6996	0.7136
70	0.6885	0.7379	0.7333	0.7365	0.7517
75	0.7226	0.7731	0.7680	0.7717	0.7881
80	0.7553	0.8068	0.8013	0.8053	0.8228
85	0.7866	0.8391	0.8331	0.8376	0.8562
90	0.8168	0.8701	0.8637	0.8685	0.8881
95	0.8451	0.8992	0.8923	0.8976	0.9188
100	0.8725	0.9273	0.9200	0.9257	-
105	0.8989	0.9545	0.9467	0.9529	0.9769
110	0.9245	0.9807	0.9725	0.9791	1.0044
115	0.9493	1.0061	0.9974	1.0045	1.0310
120	0.9733	1.0307	1.0216	1.0291	1.0568
125	0.9966	1.0546	1.0450	1.0530	1.0817
130	1.0192	1.0778	1.0678	1.0761	1.1059
135	1.0412	1.1004	1.0899	1.0987	1.1294
140	1.0626	1.1223	1.1113	1.1206	1.1522
145	1.0834	1.1437	1.1323	1.1420	1.1744
150	1.1037	1.1645	1.1526	1.1628	1.1960
155	1.1235	1.1848	1.1725	1.1831	1.2171
160	1.1428	1.2046	1.1919	1.2029	1.2376
165	1.1617	1.2240	1.2108	1.2222	1.2577
170	1.1801	1.2429	1.2293	1.2411	1.2772
175	1.1981	1.2614	1.2474	1.2596	1.2964
180	1.2158	1.2795	1.2650	1.2778	1.3151
185	1.2330	1.2972	1.2823	1.2955	1.3334
190	1.2499	1.3146	1.2993	1.3128	1.3513
195	1.2665	1.3316	1.3159	1.3299	1.3688
200	1.2827	1.3483	1.3321	1.3466	1.3860

5.1.2. Düzgün Yayılı Yüke Maruz Kenarları Mafsallı Kare Plak

Kenarlarından mafsallı bir kare plağın düzgün yayılı yük altında geometrik bakımdan lineer olmayan davranışı incelenmiştir. Kare plağın kenar uzunluğu $L = 100$ mm, kalınlığı $t = 1$ mm, elastisite modülü $E = 2.1 \times 10^6$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 1/3$ olarak seçilmiştir.

Çözümde dokuz ve on altı düğüme sahip izoparametrik dörtgen kabuk sonlu eleman ağları kullanılmıştır. Dokuz ve on altı düğümlü ağ sistemlerinde sırasıyla, 9 tane (3x3) ve 4 tane (2x2) sonlu eleman mevcuttur. Her iki sonlu eleman ağı için tam ve seçici indirgenmiş Gauss integrasyon mertebesi çözümleri ayrı ayrı yapılmıştır. Yakınsama kriteri olarak deplasman kontrolü seçilmiş ve tolerans değeri 10^{-4} olarak alınmıştır. Seçici indirgenmiş integrasyon kuralında rijitlik matrisinin kayma deformasyonları ile ilgili terimleri indirgenmiş integrasyonla, diğer terimleri ise tam integrasyonla belirlenmektedir. Elde edilen çözümler analitik çözümler [52] ile birlikte Tablo 5.2’de verilmiştir. Bu tablodaki Q9S ve Q9F sırasıyla, dokuz düğümlü eleman için tam ve seçici (selective) integrasyon mertebelerinin uygulandığı çözümleri göstermektedir. Q16S ve Q16F ise on altı düğümlü eleman için aynı tanımlamaları belirtmektedir.



Şekil 5.3. Kenarları mafsallı kare plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

Seçici integrasyon kayma kilitlenmesini hafiflettiğinden bu integrasyonun kullanıldığı sonuçların analitik çözüme daha yakın olduğu Tablo 5.2 ve Şekil 5.3’de verilen çözümlerde de görülmektedir.

Şekil 5.3’de ise Q16S ve analitik çözüm grafiksel olarak verilmiştir. Sonlu eleman çözümleri ile analitik çözümlerin birbirlerine çok yakın olduğu bu grafikte açıkça görülebilir.

Tablo 5.2. Kenarları mafsallı kare plağın orta noktasının w/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.

q	Q9F	Q9S	Q16F	Q16S	Analitik
0.1	0.2029	0.2059	0.2038	0.2065	-
0.2	0.3949	0.4004	0.3964	0.4014	0.4107
0.3	0.5721	0.5794	0.5741	0.5808	-
0.4	0.7340	0.7425	0.7361	0.7442	0.7671
0.5	0.8817	0.8911	0.8838	0.8930	-
0.6	1.0164	1.0270	1.0184	1.0290	1.0611
0.7	1.1405	1.1519	1.1424	1.1541	-
0.8	1.2555	1.2676	1.2572	1.2698	1.3055
0.9	1.3626	1.3753	1.3641	1.3776	-
1.0	1.4629	1.4761	1.4642	1.4785	1.5133
1.1	1.5574	1.5710	1.5584	1.5734	-
1.2	1.6468	1.6607	1.6475	1.6632	1.6942
1.3	1.7316	1.7459	1.7320	1.7484	-
1.4	1.8123	1.8271	1.8126	1.8296	1.8545
1.5	1.8896	1.9048	1.8895	1.9073	-
1.6	1.9636	1.9792	1.9633	1.9818	1.9988
1.7	2.0332	2.0508	2.0327	2.0534	-
1.8	2.1012	2.1197	2.1004	2.1223	2.1303
1.9	2.1668	2.1863	2.1658	2.1889	-
2.0	2.2303	2.2507	2.2291	2.2533	2.2513

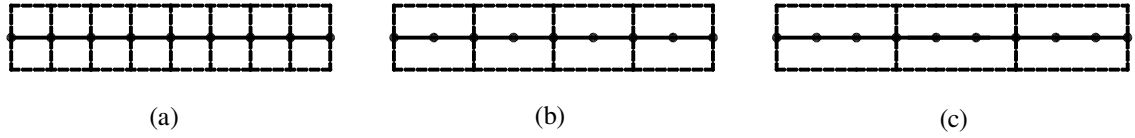
5.1.3. Düzgün Yayılı Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Dairesel Plak

Şekil 5.4’de ağ sistemleri verilen ankastre mesnetli dairesel plak, düzgün yayılı yüke maruz bırakılmıştır. Dairesel plağın yarıçapı $R = 100$ mm, kalınlığı $t = 2$ mm, elastisite modülü $E = 1 \times 10^7$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak seçilmiştir.

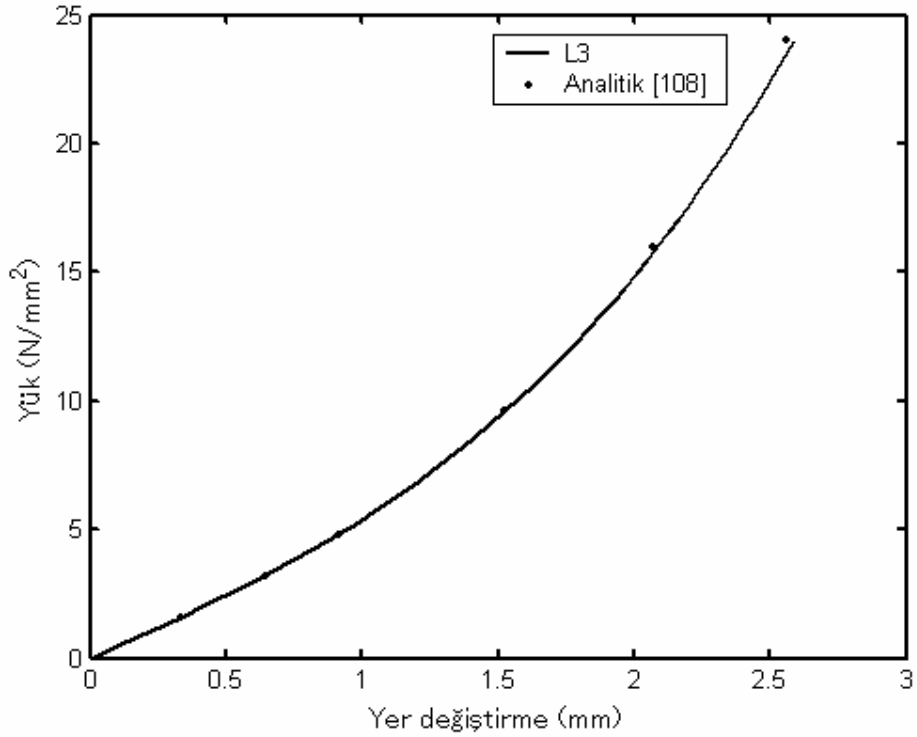
Problemin geometrik bakımdan lineer olmayan analizi; iki düğümlü lineer eleman, üç düğümlü ikinci dereceden eleman ve dört düğümlü kübik eleman olmak üzere üç farklı eksenel simetrik kabuk eleman kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İki, üç ve dört düğümlü ağ sistemlerinde

düğüm sayıları ve yerleri aynı olup; bu ağlarda sırasıyla, 60, 30 ve 20 tane sonlu eleman mevcuttur. Bu elemanlar için integrasyon mertebeleri sırasıyla 2x2, 3x2 ve 4x2 olarak kullanılmıştır. Yakınsama kriteri olarak deplasman kontrolü seçilmiş ve tolerans değeri 10^{-4} olarak alınmıştır. Elde edilen çözümler analitik çözümler [108] ile birlikte Tablo 5.3’de verilmiştir. Bu tablodaki L2, L3 ve L4 sırasıyla iki, üç ve dört düğümlü eleman çözümlerini göstermektedir. Üç ve dört düğümlü eleman sonuçlarının analitik çözüme ile daha uyumlu olduğu görülmektedir. Yüksek mertebeli elemanlar genellikle daha iyi çözüm vermektedir.

Şekil 5.5’de ise L3 ve analitik çözüm grafiksel olarak verilmiştir. Sonlu eleman çözümleri ile analitik çözümlerin birbirlerine çok yakın olduğu bu grafikte açıkça görülebilir.



Şekil 5.4. Dairesel plağın ağ sistemleri, a) sekiz lineer eleman, b) dört ikinci dereceden eleman, c) üç kübik eleman.



Şekil 5.5. Ankastre mesnetli daireSEL plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

Tablo 5.3. Ankastre mesnetli dairesel plağın orta noktasının w/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.

qR^4 / Et^4	L2	L3	L4	Analitik [108]
1	0.1500	0.1675	0.1675	0.1690
2	0.2906	0.3206	0.3206	0.3230
3	0.4176	0.4549	0.4550	0.4570
6	0.7210	0.7632	0.7632	0.7610
10	1.0055	1.0438	1.0438	1.0350
15	1.2615	1.2937	1.2937	1.2790

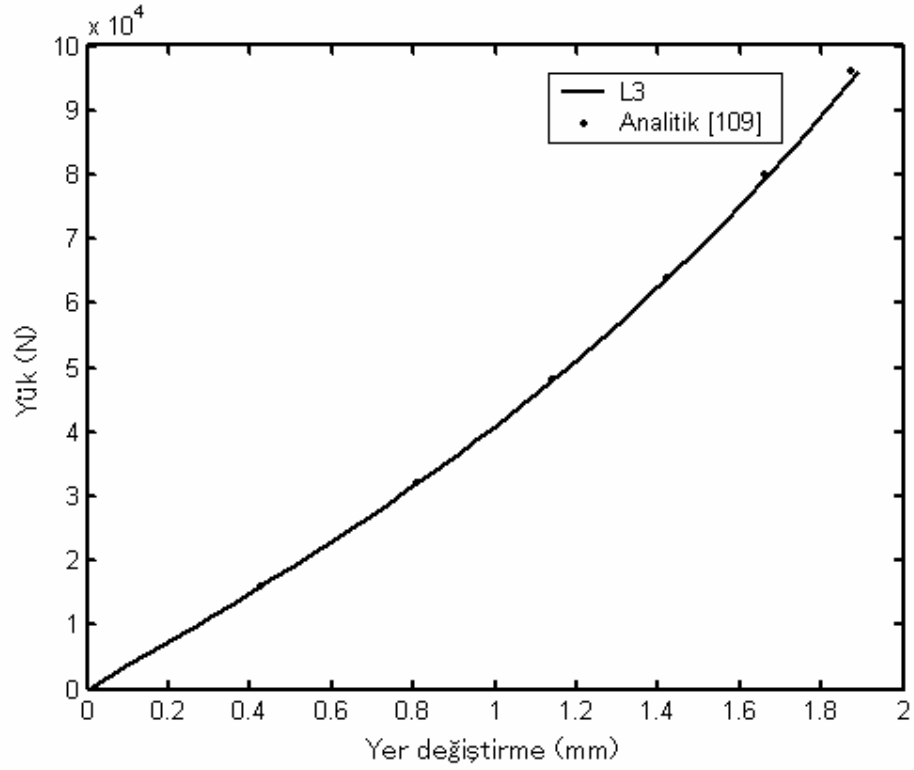
5.1.4. Tekil Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Dairesel Plak

Kısım 5.1.3’de verilen problem ortasından tekil yüke maruz bırakılarak geometrik bakımdan lineer olmayan davranışı elde edilmiştir. Burada da benzer eleman ve ağ sistemleri kullanılmıştır. Tablo 5.4 ‘de farklı elemanlar kullanılarak dairesel plağın orta noktasının w/t boyutsuz düşey yer değiştirmesi için elde edilen değerler, analitik çözümler [108] ile birlikte verilmiştir. Bu tabloda da görüleceği gibi üç ve dört düğümlü eksenel simetrik kabuk elemanlar, iki düğümlü elemana nazaran daha iyi sonuçlar vermektedir.

Şekil 5.6’de ise üç düğümlü kabuk eleman çözümü ile analitik çözüm grafiksel olarak verilmiştir. Her iki çözümün birbirine çok yakın olduğu bu grafikte açıkça görülebilir.

Tablo 5.4. Ankastre mesnetli dairesel plağın orta noktasının w/t boyutsuz düşey yer değiştirme değerleri.

Yük ($10^4 \times N$)	L2	L3	L4	Analitik [108]
1.6	0.1955	0.2129	0.2129	0.2129
3.2	0.3749	0.4035	0.4036	0.4049
4.8	0.5331	0.5674	0.5675	0.5695
6.4	0.6717	0.7084	0.7086	0.7098
8.0	0.7939	0.8314	0.8316	0.8309
9.6	0.9030	0.9405	0.9406	0.9372



Şekil 5.6. Ankastre mesnetli dairesel plağın orta noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

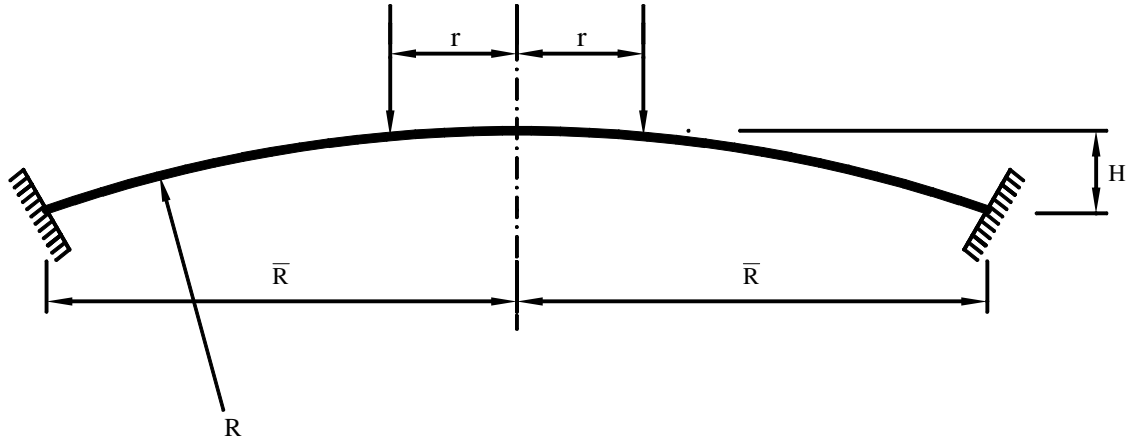
5.1.5. Çizgisel Halka Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Eksenel Simetrik Kabuk

Şekil 5.7'de elastik malzemeden yapılmış ve kenarlarından ankastre mesnetli eksenel simetrik bir kabuk görülmektedir. Kabuğun yarıçapı $R = 120.85$ mm, kalınlığı $t = 0.40$ mm, yüksekliği $H = 2.18$ mm, taban yarıçapı $\bar{R} = 22.86$ mm, elastisite modülü $E = 68950$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır.

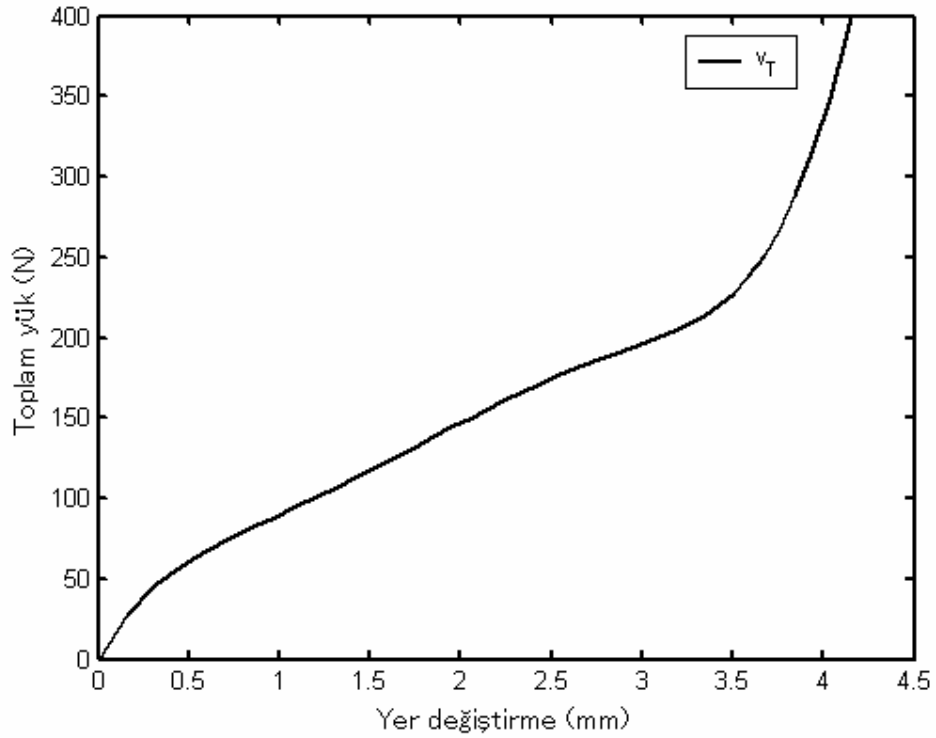
Problemin geometrik bakımdan lineer olmayan analizi, farklı ekzantirisitelerde ($e = r/\bar{R}$) uygulanan yükler için gerçekleştirilmiştir. Çözümde üç düğümlü ikinci dereceden eksenel simetrik kabuk eleman kullanılmıştır. Yakınsama için deplasman ve enerji kriterleri seçilmiş, deplasman kriterinde tolerans değeri 10^{-5} ve enerji kriterinde ise tolerans değeri 10^{-4} olarak alınmıştır. Analiz Yay-boyu metodu kullanılarak gerçekleştirilmiş, yük artım parametresinin işareti önceki yakınsamış artımsal yer değiştirme ile mevcut teğetsel çözüm arasındaki iç çarpımın işareti ((5.28) denklemi) kullanılarak belirlenmiştir.

Elde edilen sonuçlar Şekil 5.8-5.12'de verilmiştir. Bu şekillerdeki v_T ve v_Y sırasıyla, tepe ve yükleme noktasının düşey yer değiştirmelerini göstermektedir. Şekil 5.8 ve 5.9'de

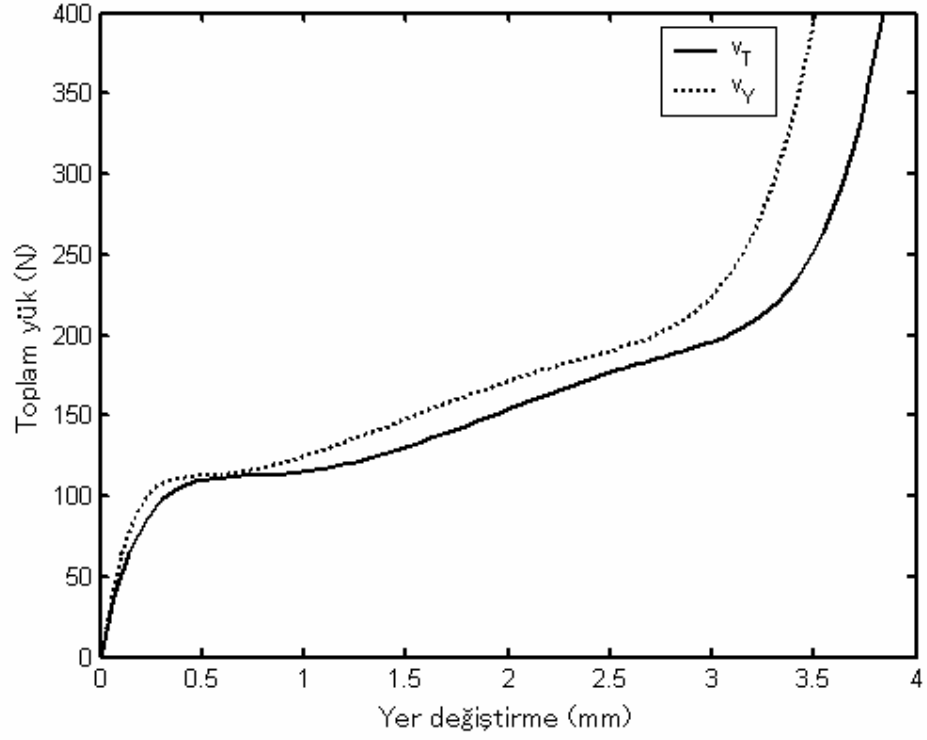
görülebileceği gibi $e = 0.0$ ve $e = 0.25$ iken herhangi bir vurgu burkulması davranışı görülmemektedir. Ancak $e = 0.42$ (Şekil 5.10) olarak alındığında, tepe noktasının denge eğrisinde vurgu burkulması ve yükleme noktasına ait denge eğrisinde ise ters vurgu burkulması davranışı görülmektedir. Ekzantrisitenin daha da artması ile ters vurgu burkulma davranışı artmakta ve denge eğrisi daha karmaşık hale gelmektedir (Şekil 5.11 ve 5.12).



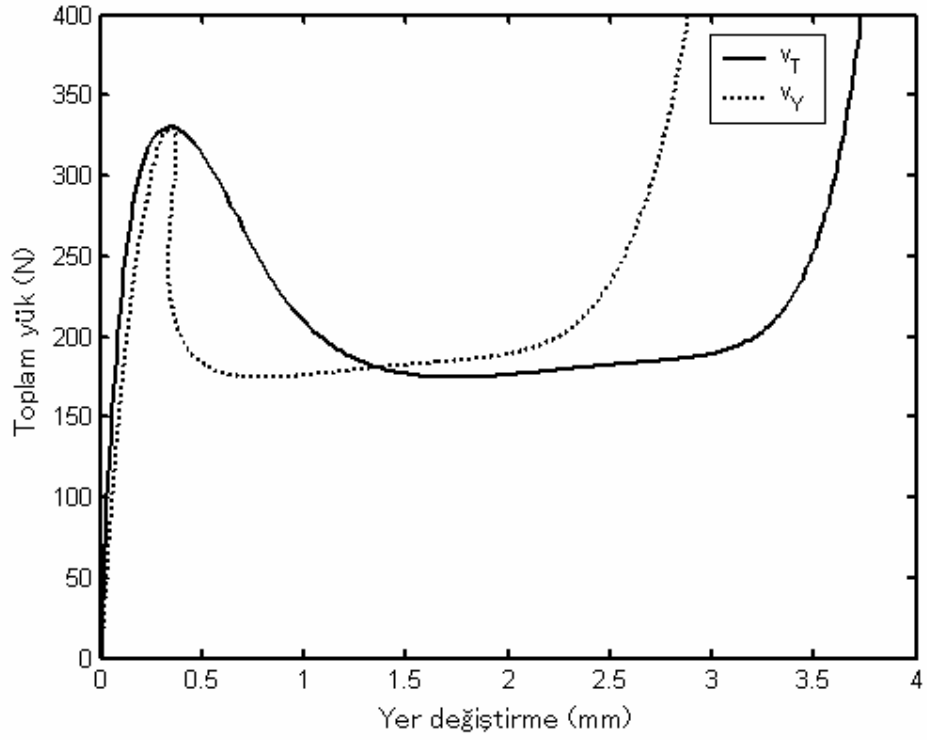
Şekil 5.7. Çizgisel halka yüke maruz ankastre mesnetli eksenel simetrik kabuk.



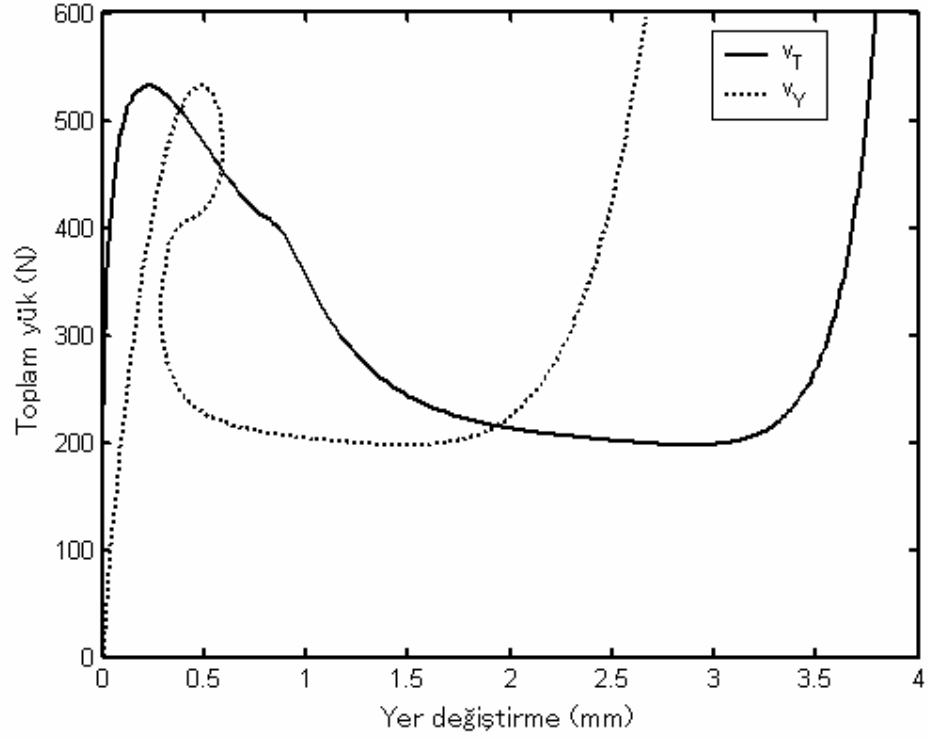
Şekil 5.8. $e=0.0$ için yük-yer değiştirme eğrisi.



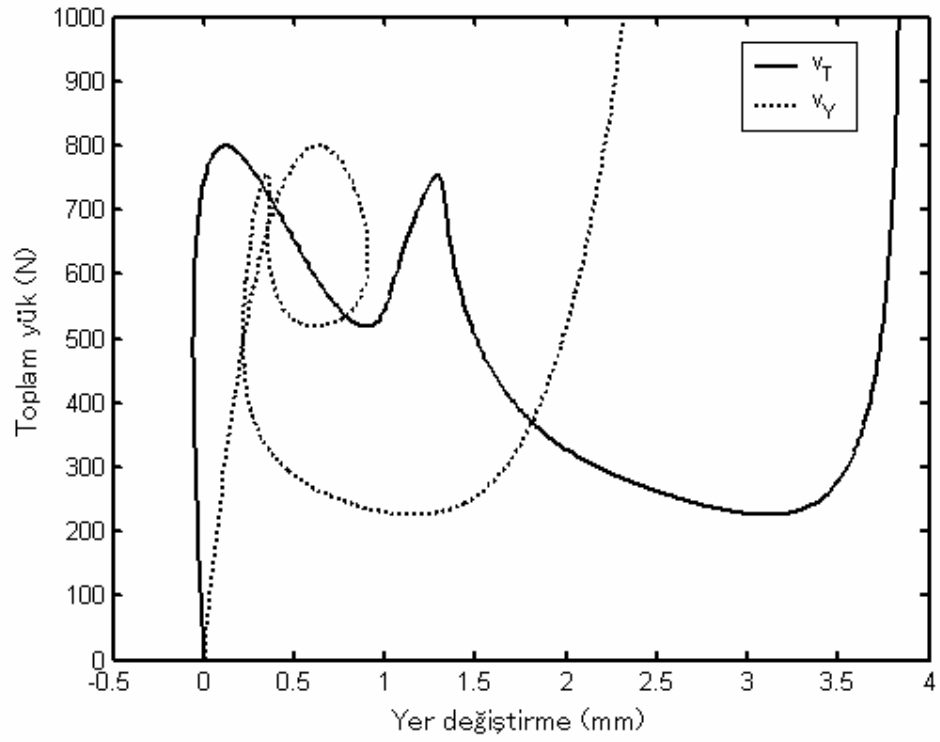
Şekil 5.9. $e=0.25$ için yük-yer değiştirme eğrisi.



Şekil 5.10. $e=0.42$ için yük-yer değiştirme eğrisi.



Şekil 5.11. $e=0.50$ için yük-yer değiştirme eğrisi.



Şekil 5.12. $e=0.60$ için yük-yer değiştirme eğrisi.

5.1.6. Basınç Altında Ankastre Mesnetli Eksenel Simetrik Kabuk

Şekil 5.13’de elastik malzemeden yapılmış ve kenarlarından ankastre mesnetli eksenel simetrik bir kabuk, p basınç yüküne maruz bırakılmaktadır. Kabuğun yarıçapı $R = 494.923$ mm, kalınlığı $t = 1.0$ mm, elastisite modülü $E = 2 \times 10^5$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 1/3$ olarak alınmıştır.

Kabuğun geometrik özelliklerini tanımlayan λ kabuk parametresi ve p_0 kabuğun klasik burkulma basıncı sırasıyla,

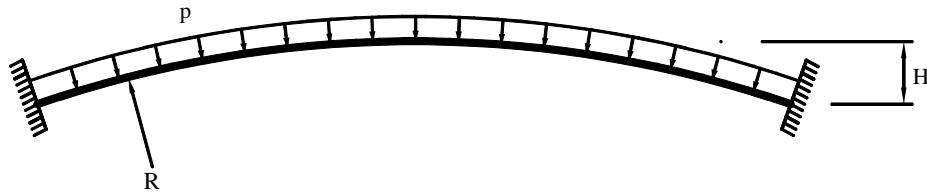
$$\lambda = 2[3(1-\nu^2)]^{1/4} (H/t)^{1/2} \quad (5.1)$$

$$p_0 = \frac{2Et^2}{R^2 [3(1-\nu^2)]^{1/2}} \quad (5.2)$$

bağıntıları ile verilebilir.

Boyutsuz eksenel simetrik vurgu burkulması basıncının değişimi, farklı λ değerleri için elde edilmiştir. Çözümde üç düğümlü ikinci dereceden eksenel simetrik kabuk eleman kullanılmıştır. Yakınsama için deplasman ve enerji kriterleri seçilmiş, deplasman kriterinde tolerans değeri 10^{-5} ve enerji kriterinde ise tolerans değeri 10^{-4} olarak alınmıştır. Analiz Yay-boyu metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, Luo and Teng [110]’in çözümleri ile birlikte Tablo 5.5’de verilmiştir. Bu sonuçların grafiksel karşılaştırması ise Şekil 5.14’de sunulmuştur. Mevcut çözümler Luo and Teng [110]’in çalışması ile uyum göstermektedir.

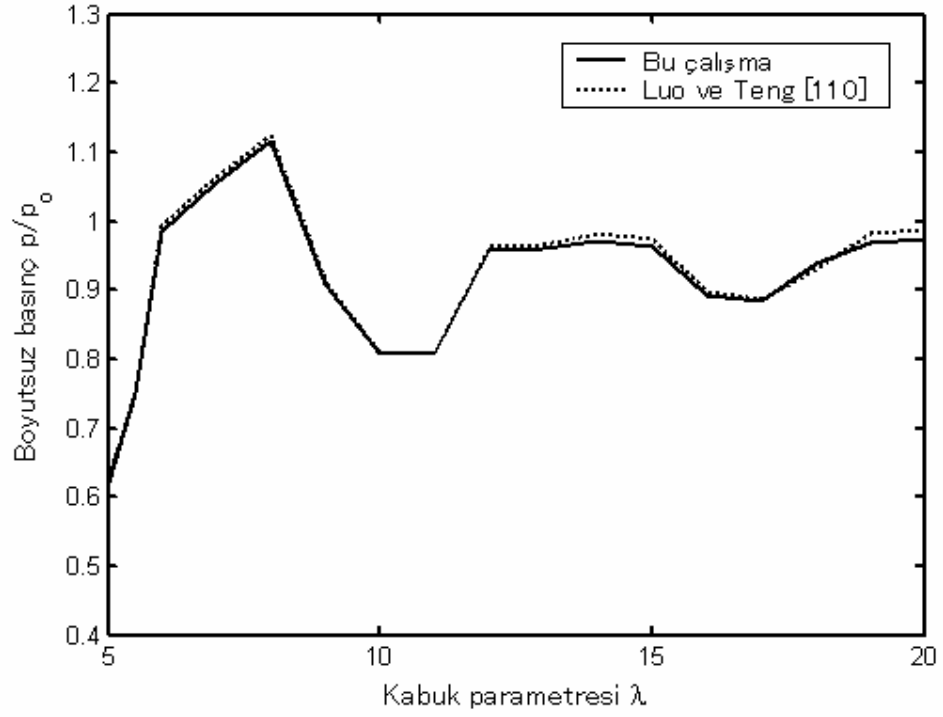
Eksenel simetrik kabuğun tepe noktasının düşey yer değiştirmesi için farklı λ değerlerinde hesaplanan burkulma ötesi denge eğrileri Şekil 5.15-5.17’de sunulmuştur. Kabuk parametresi $\lambda = 5.5$ ve $\lambda = 6.0$ olduğunda denge eğrisinde sadece vurgu burkulması gözlenirken, kabuk parametresi $\lambda = 8.0$ için denge eğrisinde ters vurgu burkulması görülmektedir.



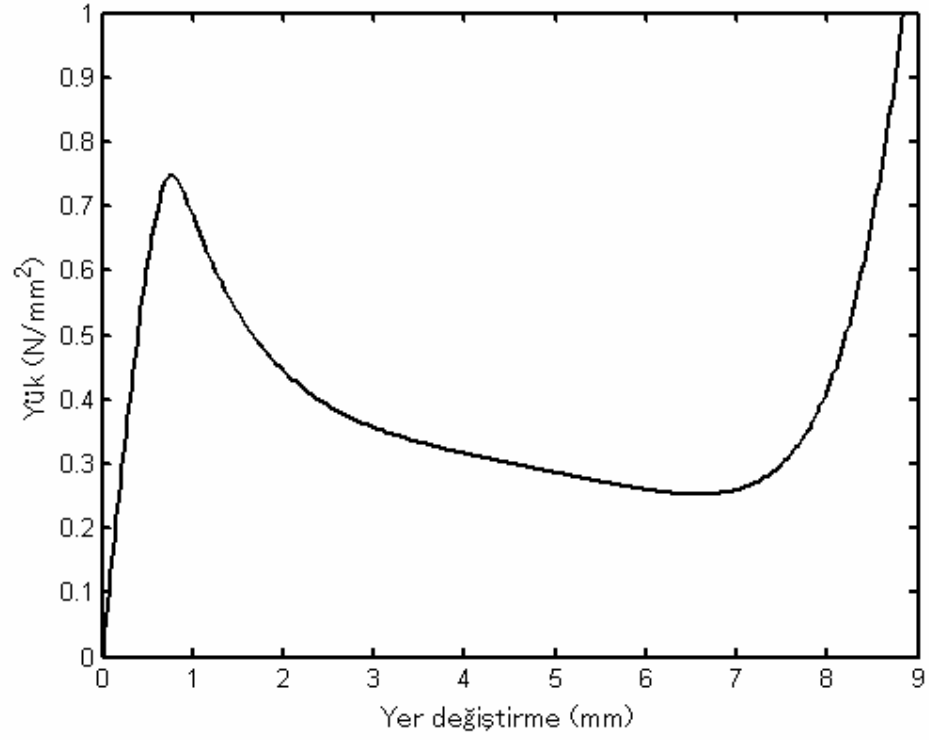
Şekil 5.13. Basınç yüküne maruz ankastre mesnetli eksenel simetrik kabuk.

Tablo 5.5. Eksenel simetrik kabuğun p/p_0 boyutsuz vurgu burkulması basınçları.

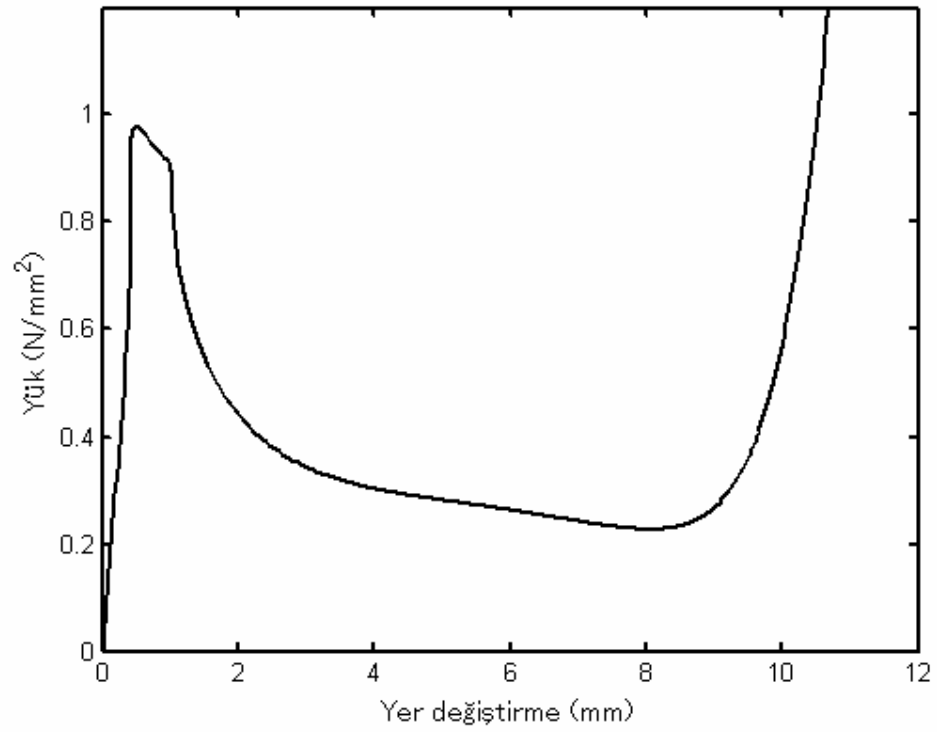
λ	Bu Çalışma	Luo and Teng [110]
5.0	0.623	0.627
5.5	0.750	0.750
6.0	0.985	0.992
7.0	1.055	1.063
8.0	1.115	1.125
9.0	0.908	0.913
10.0	0.809	0.811
11.0	0.807	0.809
12.0	0.957	0.964
13.0	0.960	0.967
14.0	0.972	0.981
15.0	0.963	0.974
16.0	0.891	0.899
17.0	0.883	0.887
18.0	0.938	0.930
19.0	0.968	0.983
20.0	0.973	0.988



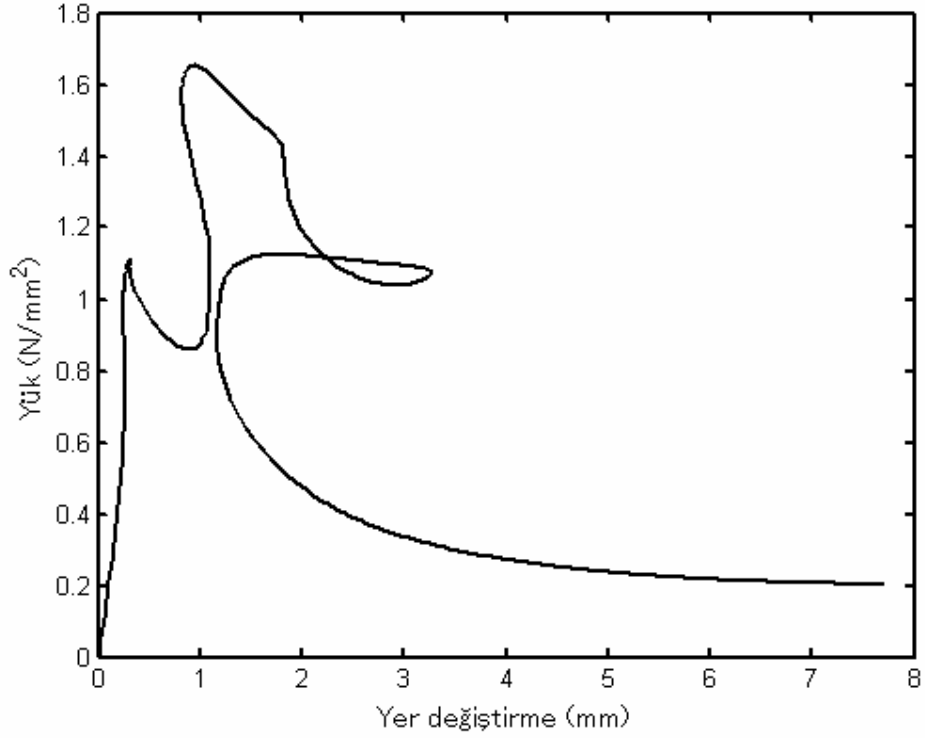
Şekil 5.14. p/p_0 boyutsuz eksenel simetrik vurgu-burkulması basıncının λ kabuk parametresi ile değişimi.



Şekil 5.15. $\lambda = 5.5$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



Şekil 5.16. $\lambda = 6.0$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



Şekil 5.17. $\lambda = 8.0$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

5.1.7. Tekil Yüke Maruz Silindirik Kabuk

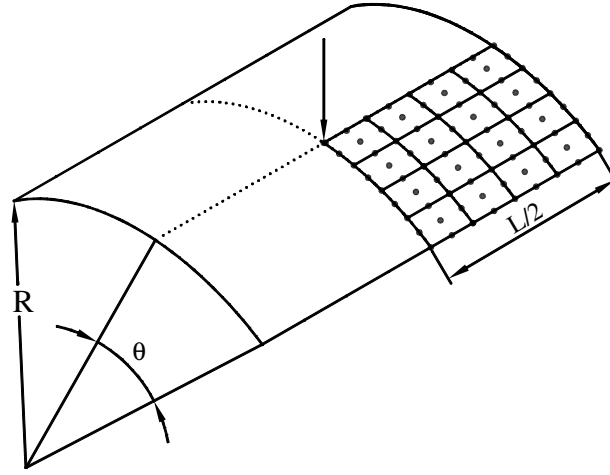
Şekil 5.18’ ve görülen silindirik kabuk, eğri kenarları serbest, düz kenarları ise sabit mafsallı olarak tasarlanmıştır. Kabuğun yarıçapı $R = 2540$ mm, kenar uzunluğu $L = 508$ mm, yarı yay açısı $\theta = 0.1$ rad, elastisite modülü $E = 3102.75$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır.

Orta noktasında tekil yüke maruz kabuğun geometrik bakımdan lineer olmayan çözümü, farklı kabuk kalınlıkları için yapılmıştır. Simetriden dolayı sadece kabuğun çeyrek kısmı dikkate alınmış ve çözümde dokuz düğümlü dörtgen kabuk eleman kullanılmıştır. Yakınsama için deplasman ve enerji kriterleri seçilmiş, deplasman kriterinde tolerans değeri 10^{-5} ve enerji kriterinde ise tolerans değeri 10^{-4} olarak alınmıştır. Analiz Yay-boyu metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

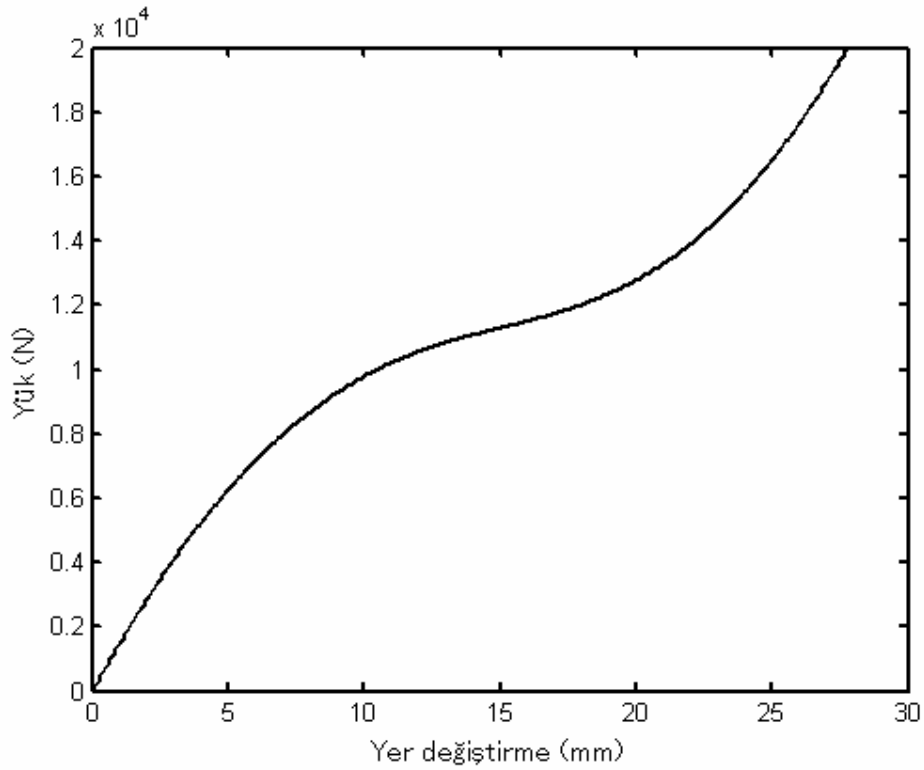
Kabuk kalınlığı $t=25.4$ mm alınarak elde edilen çözüm Şekil 5.19’de verilmiştir. Bu grafikte görüldüğü gibi kabukta herhangi bir burkulma meydana gelmemektedir.

Kabuk kalınlığı $t=12.7$ mm alındığında denge eğrisinde vurgu burkulması (Şekil 5.20), $t=6.35$ mm alındığında ise ters vurgu burkulması (Şekil 5.21) oluşmaktadır. Şekil 5.20’de Wanji

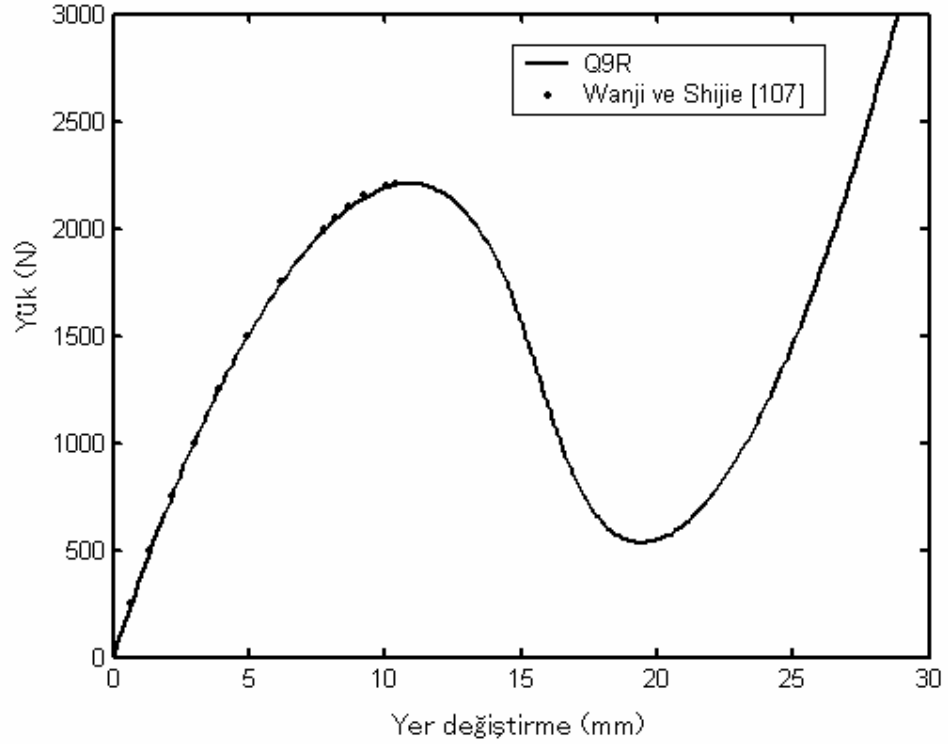
ve Shijie [107]'in, kabuğun burkulma noktasına kadar elde ettiği çözümleri de verilmiştir. Şekil 5.21'de ise Djoudi ve Bahai [55]'nin, çözümleri ayrıca sunulmuştur. Wanji ve Shijie [107] ile Djoudi ve Bahai [55]'nin sonuçlarının mevcut çözümler ile uyum içerisinde olduğu Şekil 5.20 ve Şekil 5.21'de açıkça görülmektedir. Ayrıca dokuz ve on altı düğümlü elemanlar kullanılarak elde edilen çözümler Şekil 5.22'de birlikte verilmiştir. Bu şekilde görüldüğü gibi bu iki elemanın sonuçları birbirine çok yakındır.



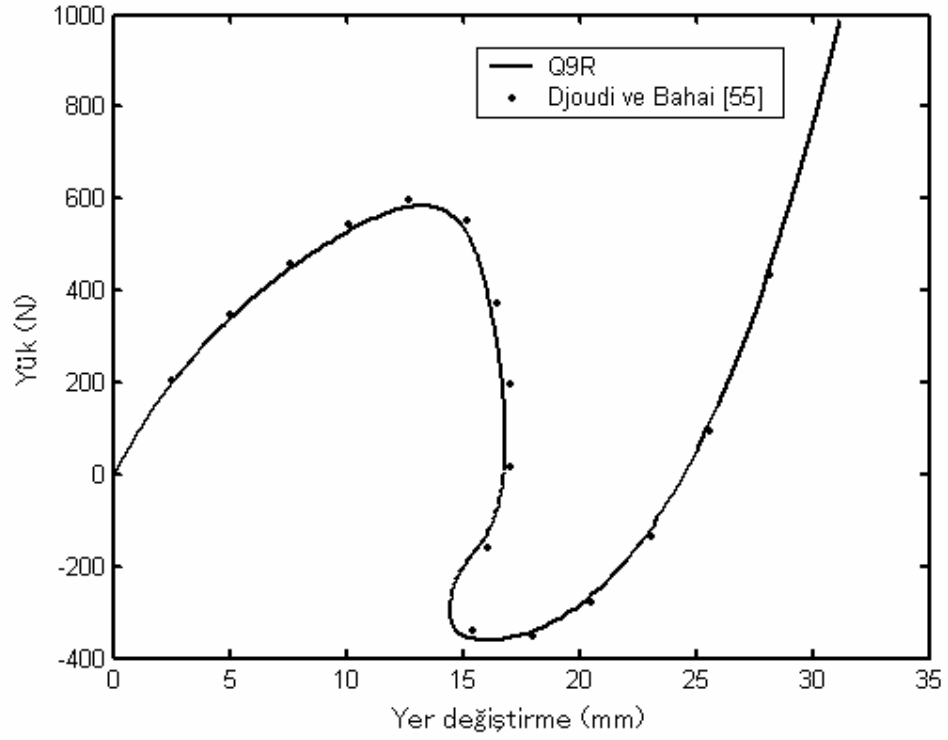
Şekil 5.18 Tekil yüke maruz silindirik kabuk.



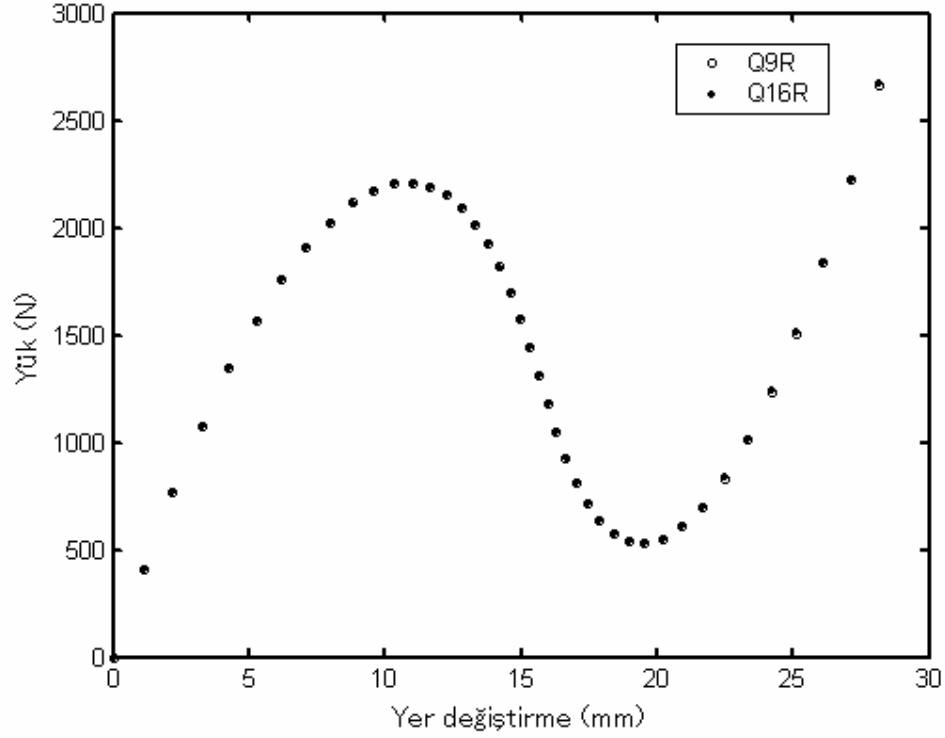
Şekil 5.19. $t=25.4$ mm ($R/t=100$) için tepe noktasının düşey yer değiştirmesi.



şekil 5.20. $t=12.7$ mm ($R/t=200$) için tepe noktasının düşey yer değiştirmesi.



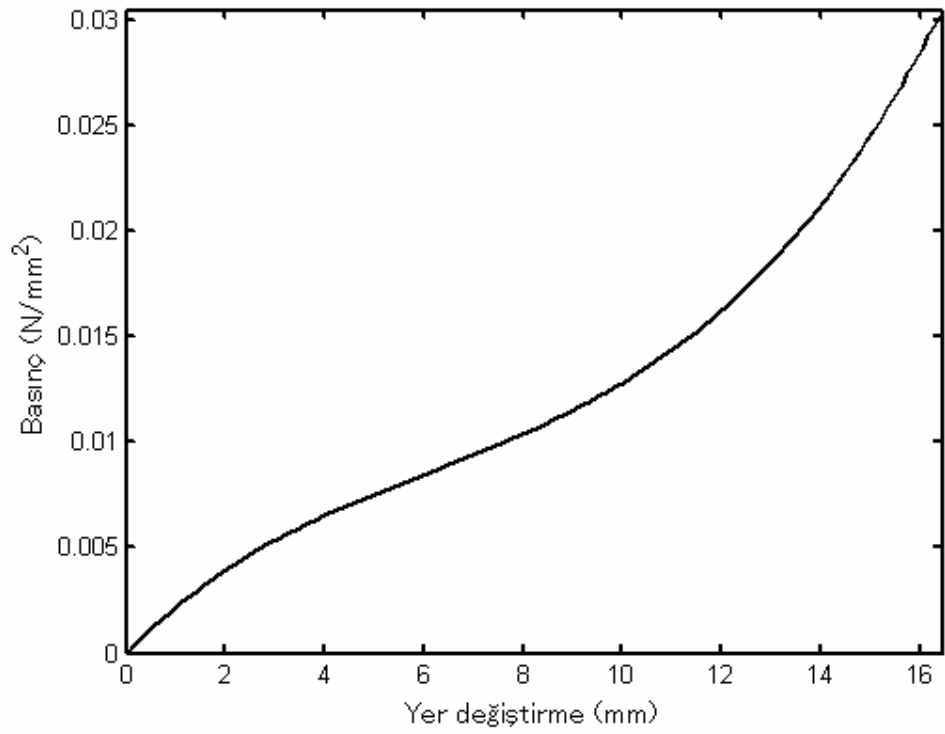
şekil 5.21. $t=6.35$ mm ($R/t=400$) için tepe noktasının düşey yer değiştirmesi.



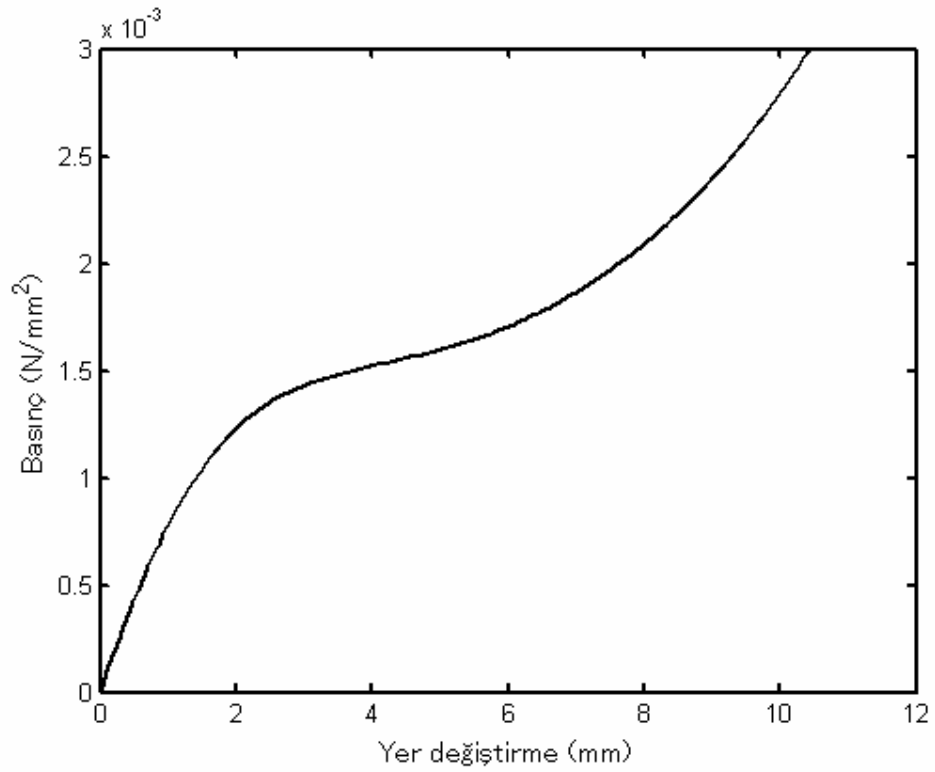
Şekil 5.22. $t=12.7$ mm ($R/t=200$) için Q9R ve Q16R çözümlerinin karşılaştırılması.

5.1.8. Dış Basınç Etkisindeki Ankastre Mesnetli Silindirik Kabuk

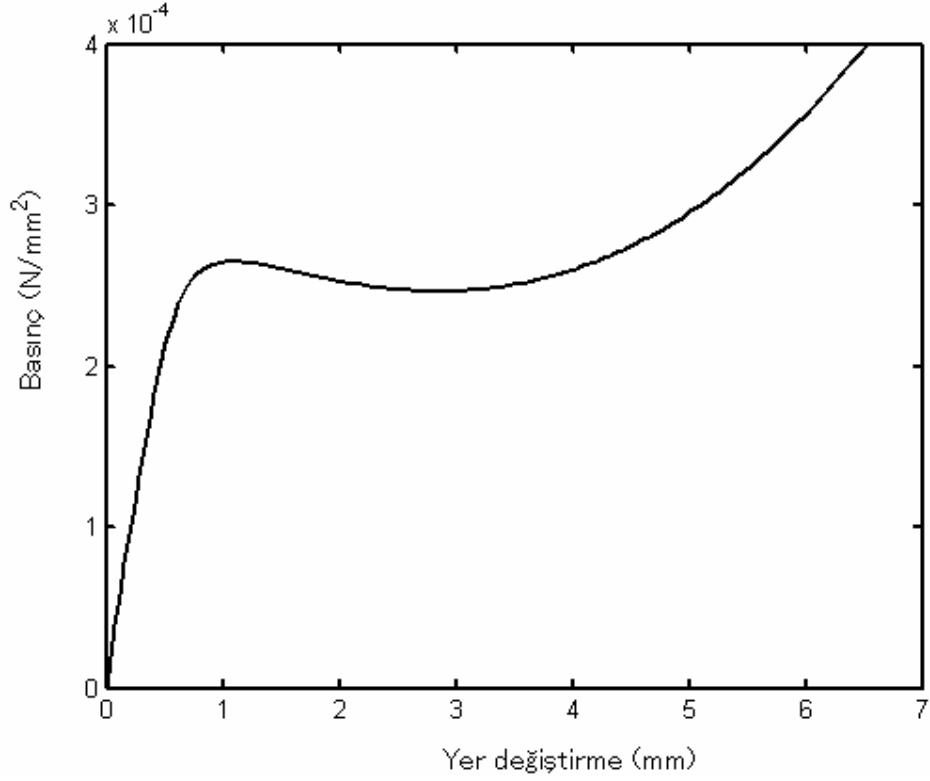
Şekil 5.18’de verilen silindirik kabuğun dış basınç etkisindeki geometrik bakımdan lineer olmayan davranışı, farklı kabuk kalınlıkları kullanılarak incelenmiştir. Kabuğun geometrisi ve malzeme özelliği Kısım 5.1.7’de verilen problem ile aynıdır. Diğerinden farklı olarak bu analizde kabuğun bütün kenarları ankastre mesnetli seçilmiştir. Dış basınç etkisi altında yapılan çözümlemede, kabuk kalınlığı $t=6.35$ mm ve $t=3.175$ mm için kabuğun tepe noktasının denge eğrisinde herhangi bir vurgu burkulması davranışı gözlemlenmemektedir (Şekil 5.23-5.24). Bununla birlikte kabuk kalınlığı $t=1.5875$ mm’ye düşürülünce denge eğrisinde vurgu burkulması davranışı oluşmaktadır (Şekil 5.25).



şekil 5.23. $t=6.35$ mm ($R/t=400$) için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



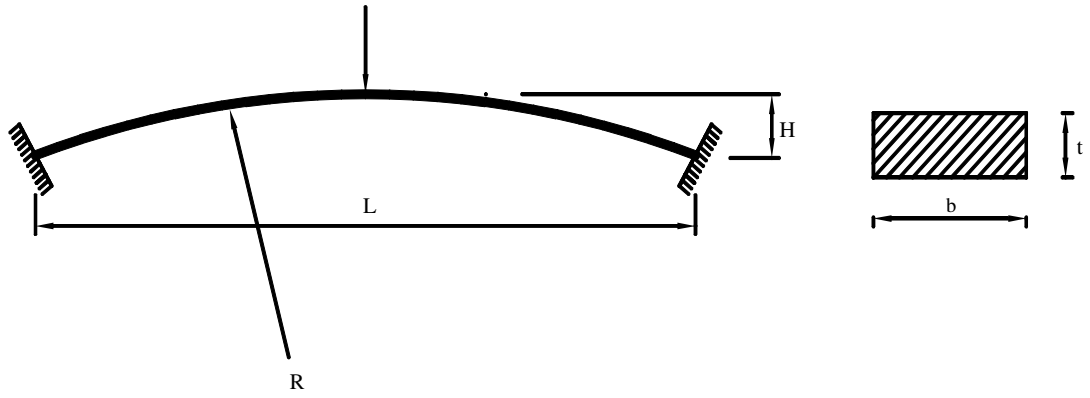
şekil 5.24. $t=3.175$ mm ($R/t=800$) için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



Şekil 5.25. $t=1.5875$ mm ($R/t=1600$) için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

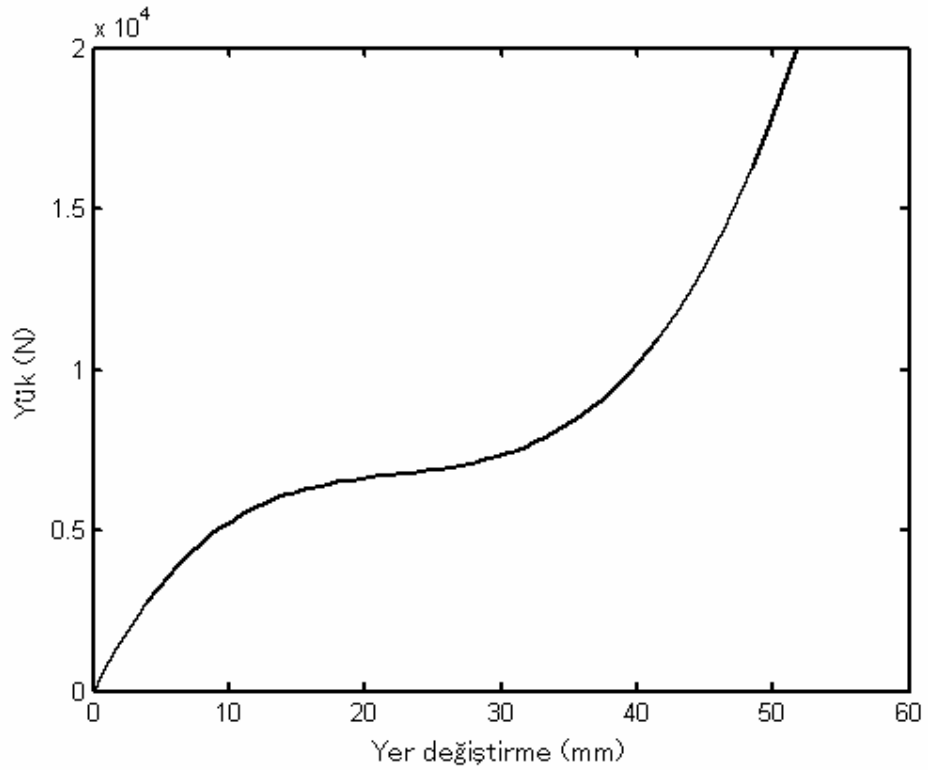
5.1.9. Tekil Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Kemer

Şekil 5.26'de tepe noktasında tekil yüke maruz kemerin geometrisi ve kesiti verilmiştir. Kemerin yarıçapı $R = 3381.8$ mm, açıklığı $L = 863.6$ mm, yüksekliği $H = 27.8$ mm, genişliği $b = 25.4$ mm, elastisite modülü $E = 68950$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 0.2$ olarak alınmıştır. Kemerin geometrik bakımdan lineer olmayan davranışı farklı kemer kalınlıkları kullanılarak incelenmiştir. Simetriden dolayı sadece kemerin yarısı dikkate alınmıştır. Kullanılan ağ sistemi 10 tane dokuz düğümlü dörtgen kabuk elemandan oluşmaktadır. Yakınsama için deplasman ve enerji kriterleri seçilmiş, deplasman kriterinde tolerans değeri 10^{-5} ve enerji kriterinde ise tolerans değeri 10^{-4} olarak alınmıştır. Analiz Yay-boyu metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

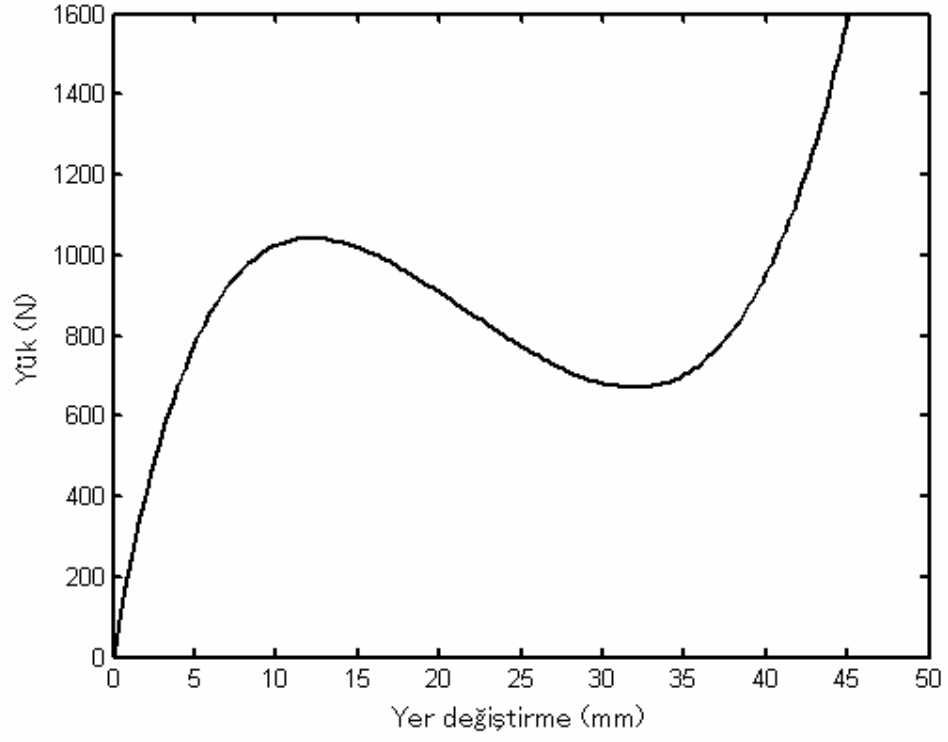


Şekil 5.26 Tepe noktasından tekil yüke maruz kemer.

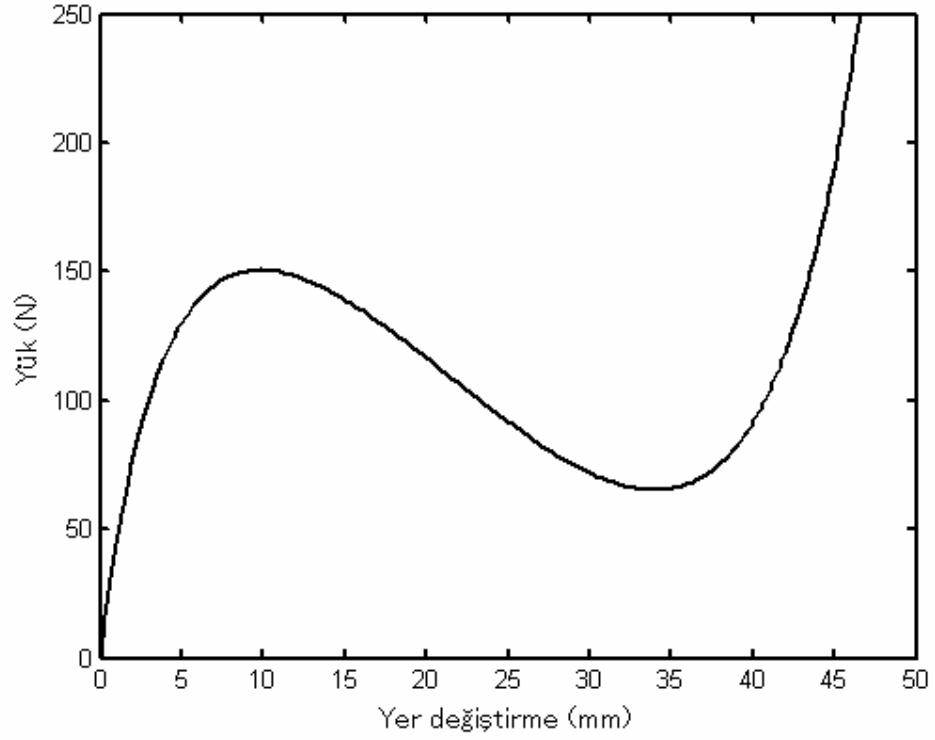
Kemer kalınlığı $t=19.05$ mm için kemerin tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisinde vurgu burkulması davranışı gözlemlenmemektedir (Şekil 5.27). Bununla birlikte kemer kalınlığı azaltılınca, kemerin vurgu burkulması davranışına olan eğilimi artmaktadır (Şekil 5.28-5.29).



Şekil 5.27. $t=19.05$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



şekil 5.28. $t=9.525$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

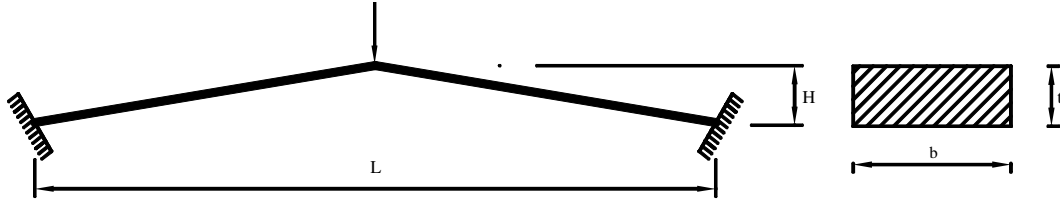


şekil 5.29. $t=4.7625$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

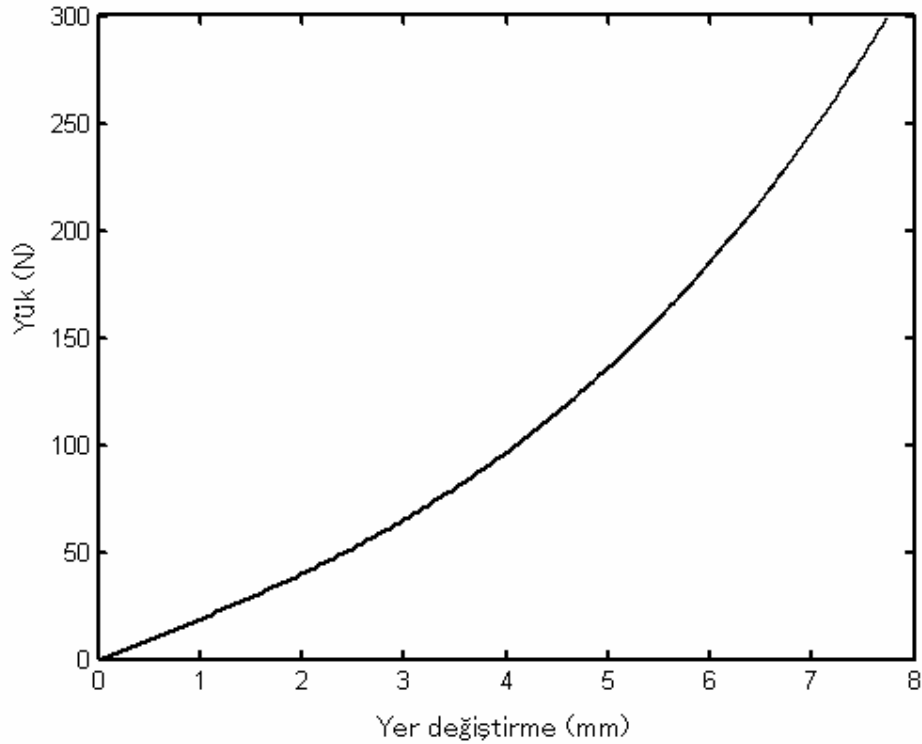
5.1.10. Tekil Yüke Maruz Ankastre Mesnetli Kırık Kiriş

Şekil 5.30'de tepe noktasında tekil yüke maruz kırık kirişin geometrisi ve kesiti verilmiştir. Kirişin açıklığı $L = 657.14$ mm, genişliği $b = 19.13$ mm, kalınlığı $t = 6.17$ mm, elastisite modülü $E = 72320$ MPa ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır. Kirişin geometrik bakımdan lineer olmayan davranışı farklı H yükseklikleri için elde edilmiştir. Simetriden dolayı sadece kirişin yarısı dikkate alınmıştır. Kullanılan ağ sistemi 8 tane dokuz düğümlü dörtgen kabuk elemandan oluşmaktadır.

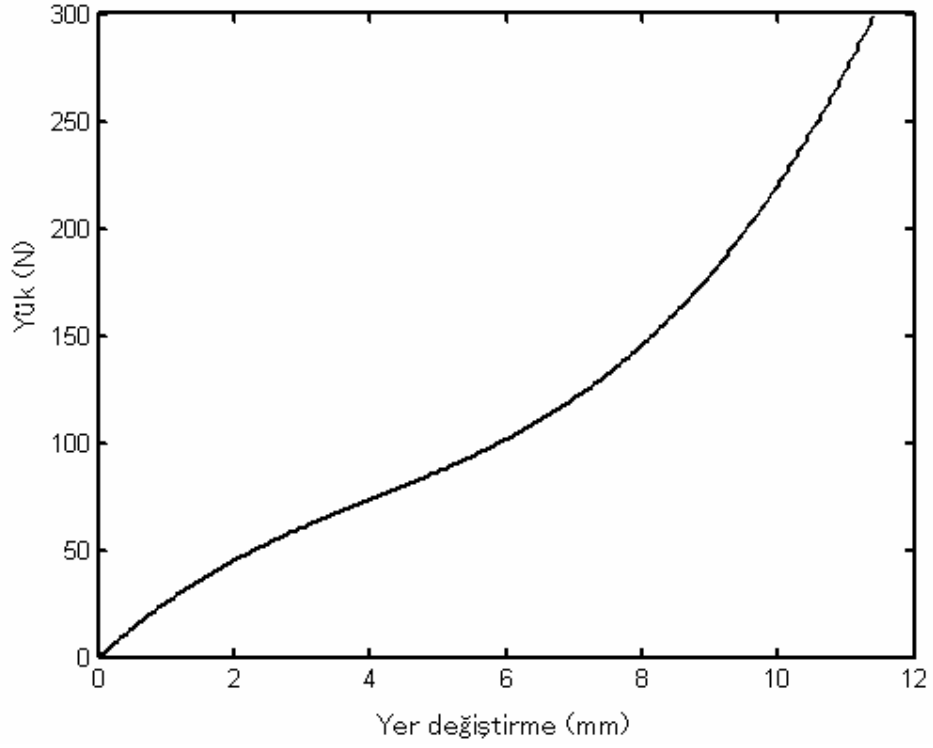
Kırık kirişin tepe noktasının yüksekliği $H=0$ mm'den $H=29.40$ mm'ye kademeli olarak artırılmıştır. Şekil 5.31-5.35'de kirişin tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi verilmektedir. Bu eğrilerde görüldüğü gibi kiriş yüksekliği artırılınca, kirişin vurgu burkulması davranışına olan eğilimi artmaktadır.



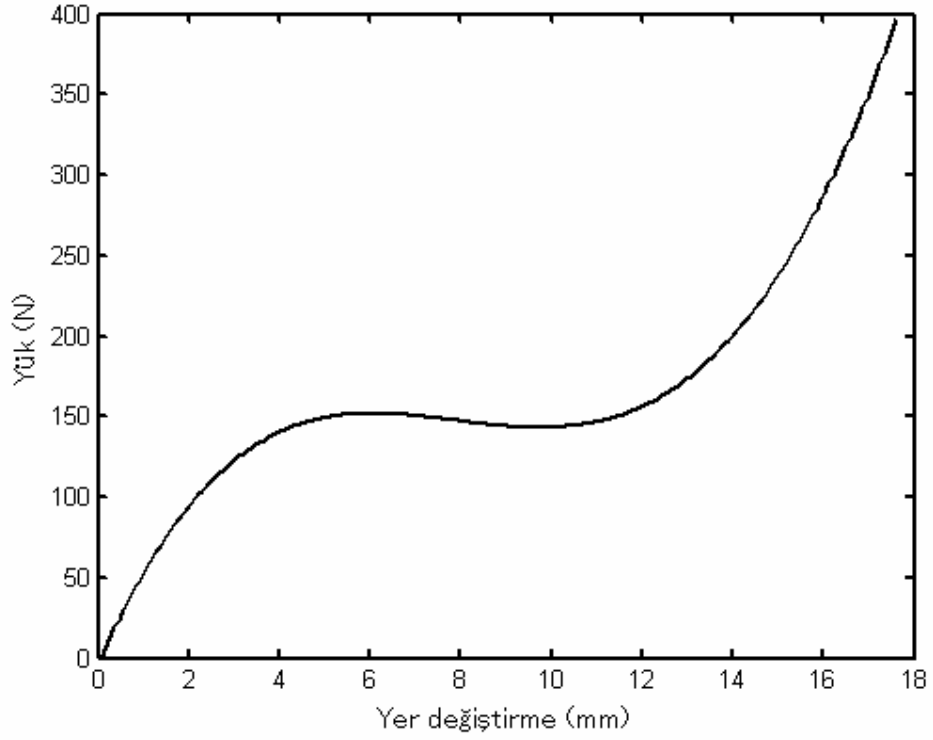
Şekil 5.30 Tepe noktasından tekil yüke maruz kırık kiriş.



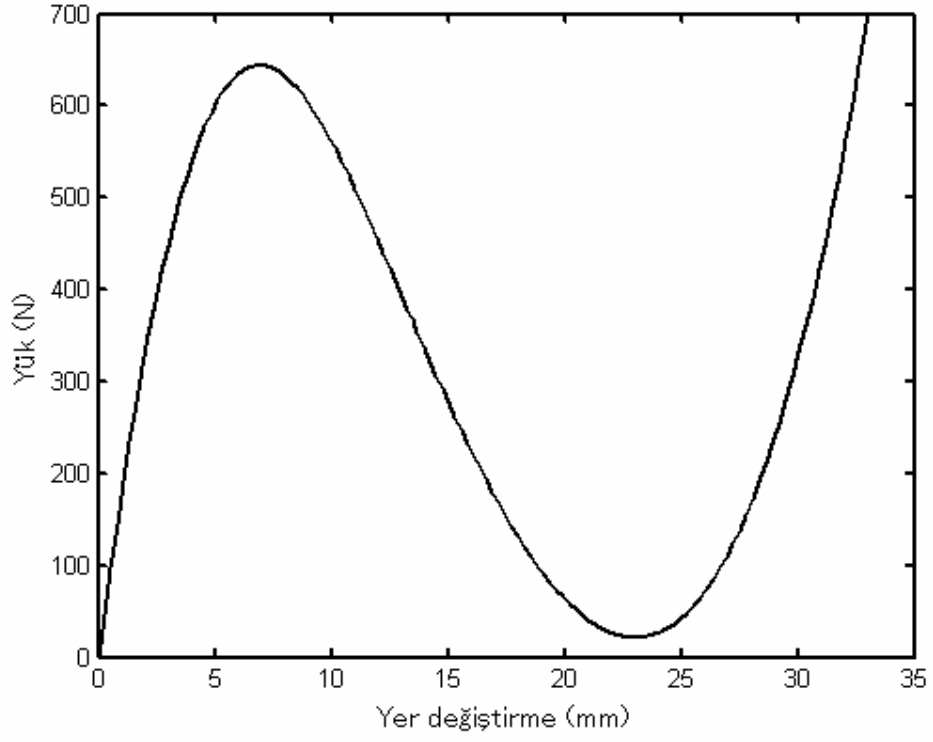
Şekil 5.31. $H=0$ için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



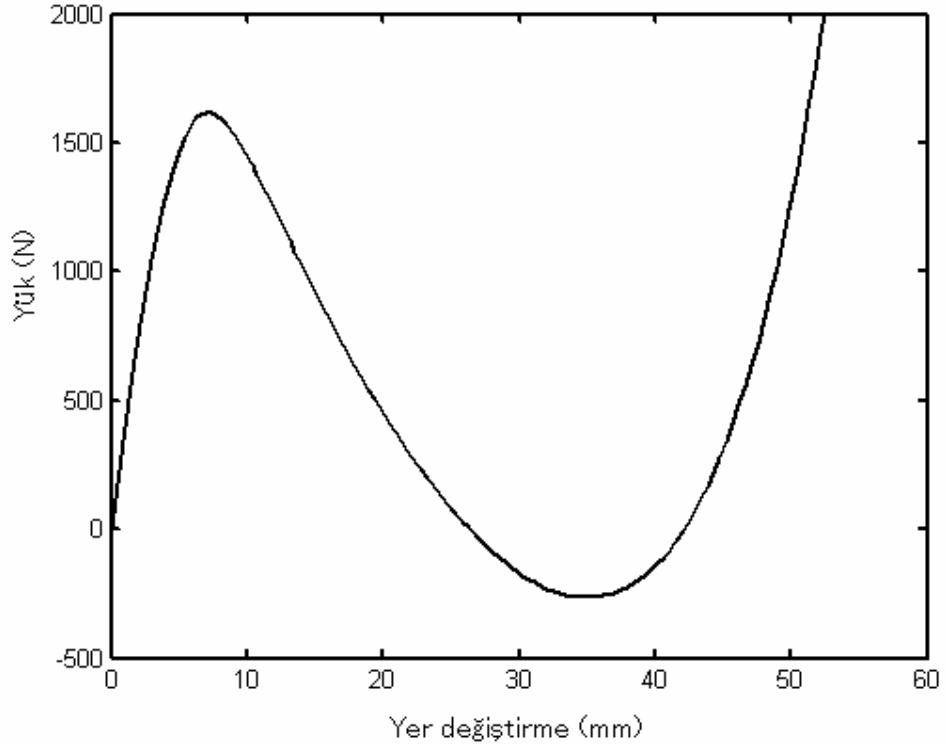
şekil 5.32. $H=4.90$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



şekil 5.33. $H=9.80$ mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



Şekil 5.34. H=19.60 mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.



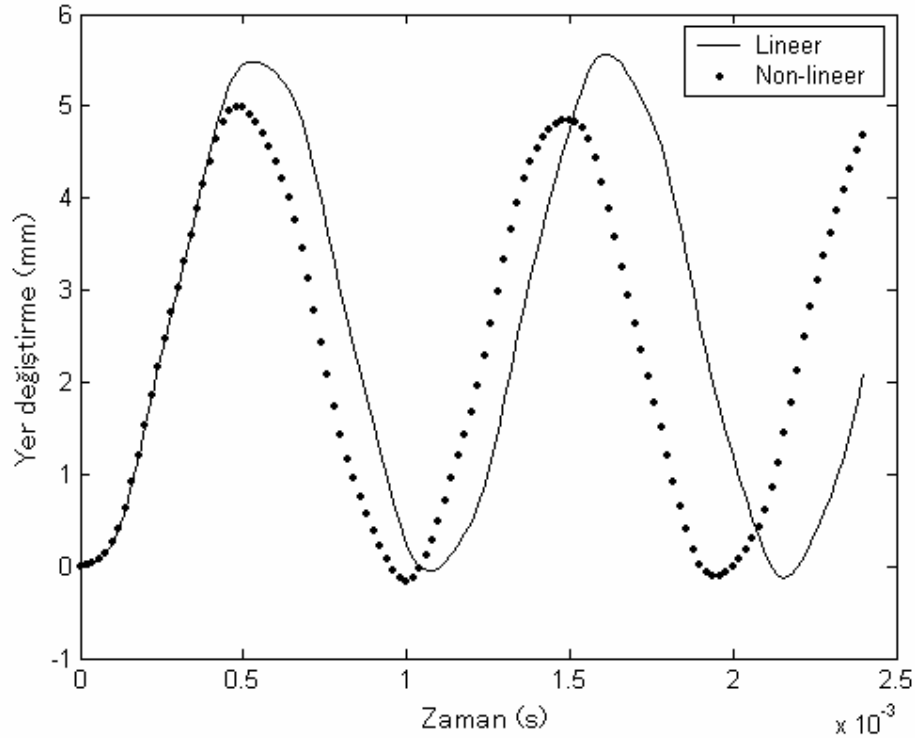
Şekil 5.35. H=29.40 mm için tepe noktasının yük-yer değiştirme eğrisi.

5.2. Dinamik Analiz

Bu kısımda; düzgün adım basıncına maruz basit ve ankastre mesnetli kare plak, ankastre mesnetli dairesel plak, ankastre mesnetli ve sabit mafsallı eksenel simetrik kabuk ve konsol kirişin geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik davranışı incelenmiştir. Çözümlerde malzeme davranışı lineer-elastik kabul edilmiştir.

5.2.1. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Basit Mesnetli Kare Plak

Basit mesnetli bir kare plak düzgün yayılı dinamik adım basıncına maruz bırakılmıştır. Kare plağın kenar uzunluğu $L = 254.0 \text{ mm}$ (10 in), kalınlığı $t = 12.7 \text{ mm}$ (0.5 in), elastisite modülü $E = 68950 \text{ MPa}$ ($1 \times 10^7 \text{ psi}$), Poisson oranı $\nu = 0.3$ ve kütle yoğunluğu $\rho = 2765.8 \text{ kg/m}^3$ ($2.588 \times 10^{-4} \text{ lbs}^2 \text{ in}^{-4}$) olarak alınmıştır. Plağın geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizi, adım basıncı $p = 2.0685 \text{ MPa}$ (300 psi) ve zaman adımı $\Delta t = 22.3 \mu\text{s}$ alınarak gerçekleştirilmiştir.



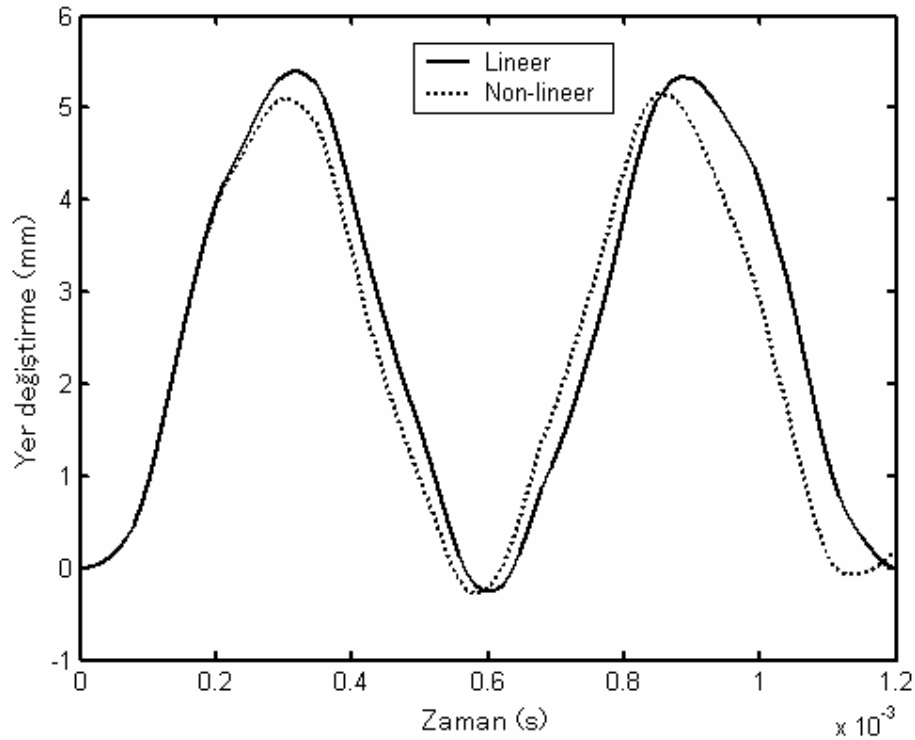
řekil 5.36. Basit mesnetli kare plağın orta noktasının dűsey yer deęiřtirmesinin zamanla deęiřimi.

Kare plağın sonlu eleman ağı, dokuz düğümlü dörtgen elemanlarla oluşturulmuş olup, ağda toplam 16 eleman kullanılmıştır. Analiz Newmark'ın ortalama ivme yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Yakınsama kriteri olarak deplasman kontrolü seçilmiş ve tolerans değeri 10^{-4} alınmıştır.

Şekil 5.36'de geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan haller için plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesi zamana bağlı olarak verilmiştir. Lineer olmayan yer değiştirmelerin lineer yer değiştirmelere göre daha az olduğu görülebilir.

5.2.2. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Ankastre Mesnetli Kare Plak

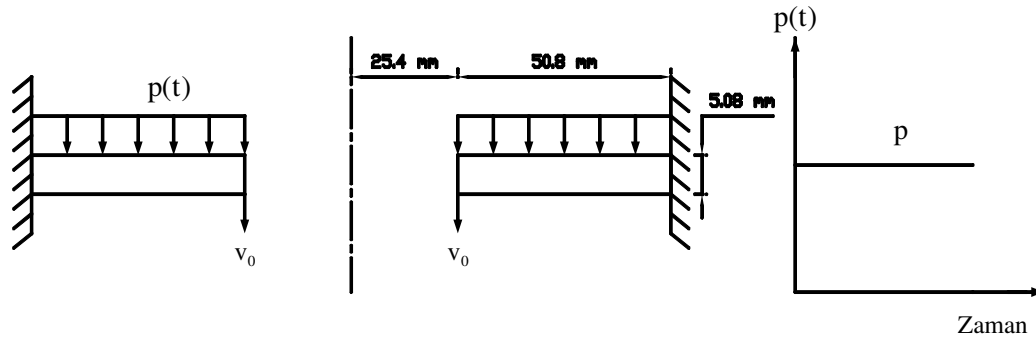
Kısım 5.2.1'de geometri, malzeme ve yükleme özellikleri verilen kare plak, ankastre mesnetli seçilmiş ve uygulanan yük üç kat artırılarak analiz edilmiştir. Şekil 5.37'de geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan haller için plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesi zamana bağlı olarak verilmiştir.



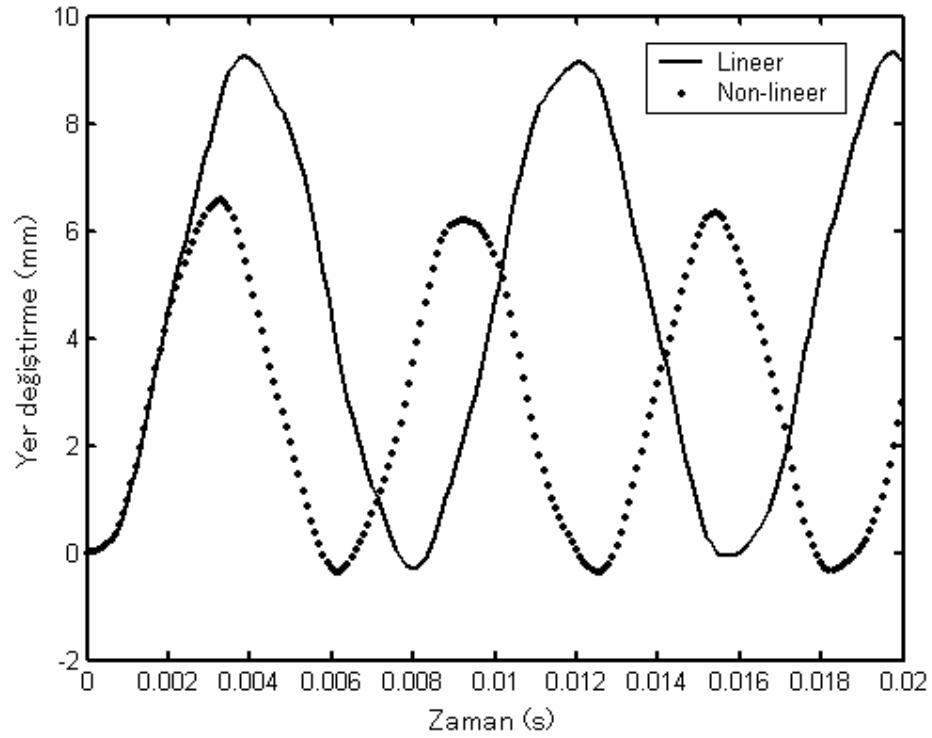
Şekil 5.37. Ankastre mesnetli kare plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.

5.2.3. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Ankastre Mesnetli Dairesel Plak

Şekil 5.38’de boyutları verilen ortası boş dairesel plağın düzgün yayılı adım basıncı altındaki lineer ve lineer olmayan dinamik davranışı incelenmiştir. Dairesel plak ankastre mesnetli olarak tasarlanmıştır. Malzemenin elastisite modülü $E = 206.85 \text{ MPa}$, Poisson oranı $\nu = 0.3$ ve kütle yoğunluğu $\rho = 3206.1 \text{ kg/m}^3$ olarak alınmıştır. Plağın geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizi, adım basıncı $p = 0.02758 \text{ MPa}$ ve zaman adımı $\Delta t = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$ alınarak gerçekleştirilmiştir.



Şekil 5.38. Düzgün yayılı adım basıncına maruz ortası boş dairesel plak.



Şekil 5.39. Dairesel plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.

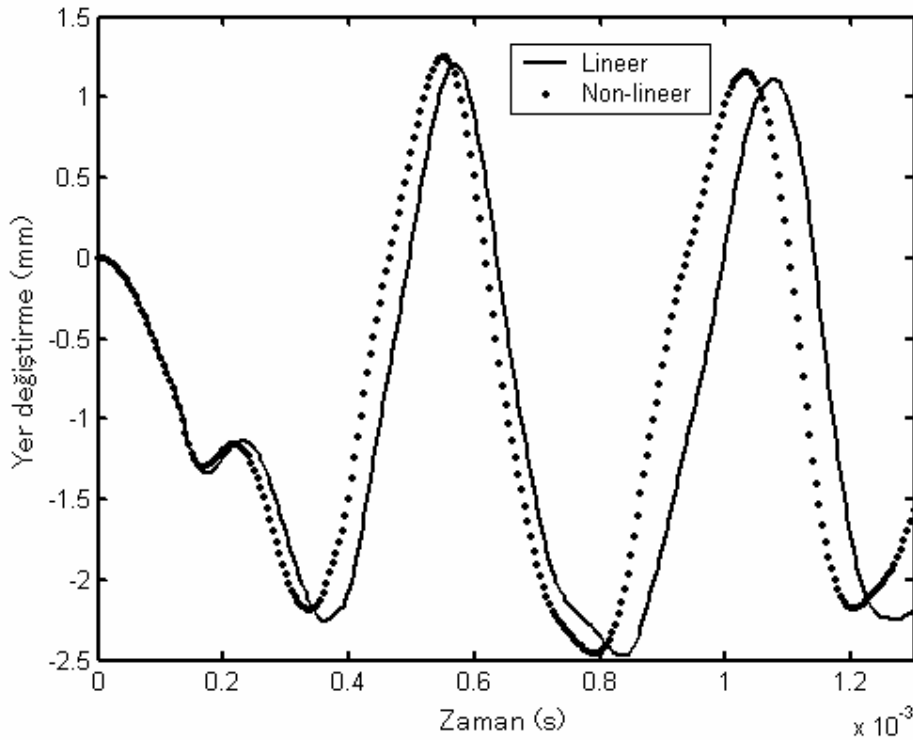
Şekil 5.39’de geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan haller için plağın orta noktasının düşey yer değiştirmesi zamana bağlı olarak verilmiştir.

5.2.4. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Ankastre Mesnetli Eksenel Simetrik

Kabuk

Şekil 5.7’de geometrisi verilen ve düzgün adım basıncına maruz eksenel simetrik kabuğun geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizi, Newmark integrasyon yöntemiyle gerçekleştirilmiştir. Kabuğun yarıçapı $R = 565.7$ mm, kalınlığı $t = 10.4$ mm, yüksekliği $H = 60.2$ mm, taban yarıçapı $\bar{R} = 254.0$ mm, elastisite modülü $E = 72400$ MPa, Poisson oranı $\nu = 0.33$, ve kütle yoğunluğu $\rho = 2618.3$ kg/m³ olarak alınmıştır. Dinamik analizde, adım basıncı $p = 4.137$ MPa ve zaman adımı $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ s olarak seçilmiştir.

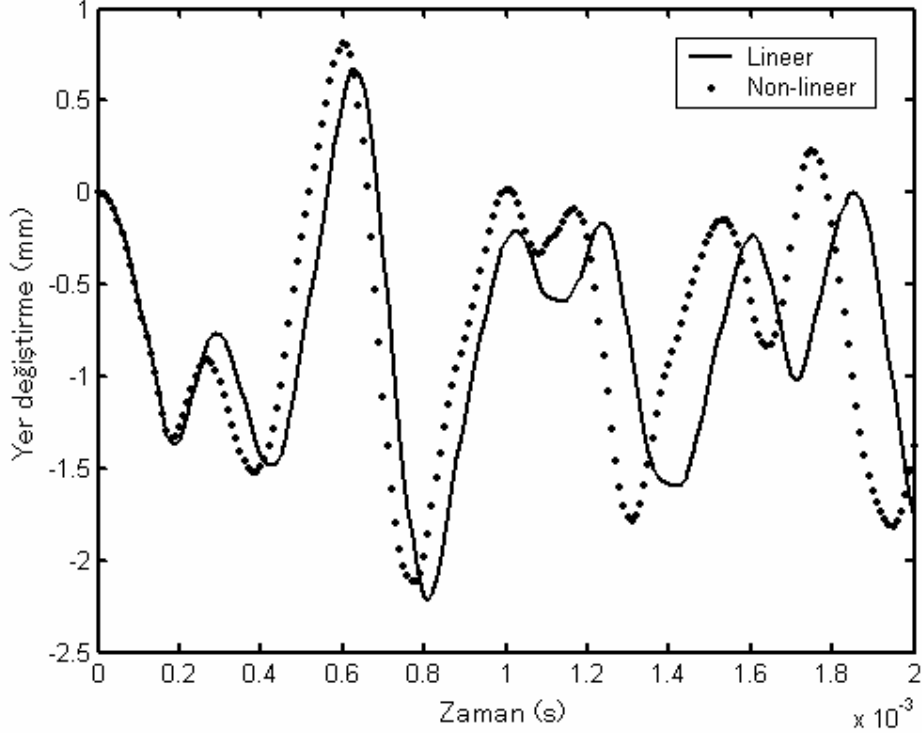
Şekil 5.40’de geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan haller için kabuğun tepe noktasının düşey yer değiştirmesi zamana bağlı olarak verilmiştir.



Şekil 5.40. Ankastre mesnetli kabuğun tepe noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.

5.2.5. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Sabit Mafsallı Eksenel Simetrik Kabuk

Kısım 5.2.4’de geometri, malzeme ve yükleme özellikleri verilen eksenel simetrik kabuk, sabit mafsallı seçilerek analiz edilmiştir. Şekil 5.41’de geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan haller için kabuğun tepe noktasının düşey yer değiştirmesi zamana bağlı olarak verilmiştir.

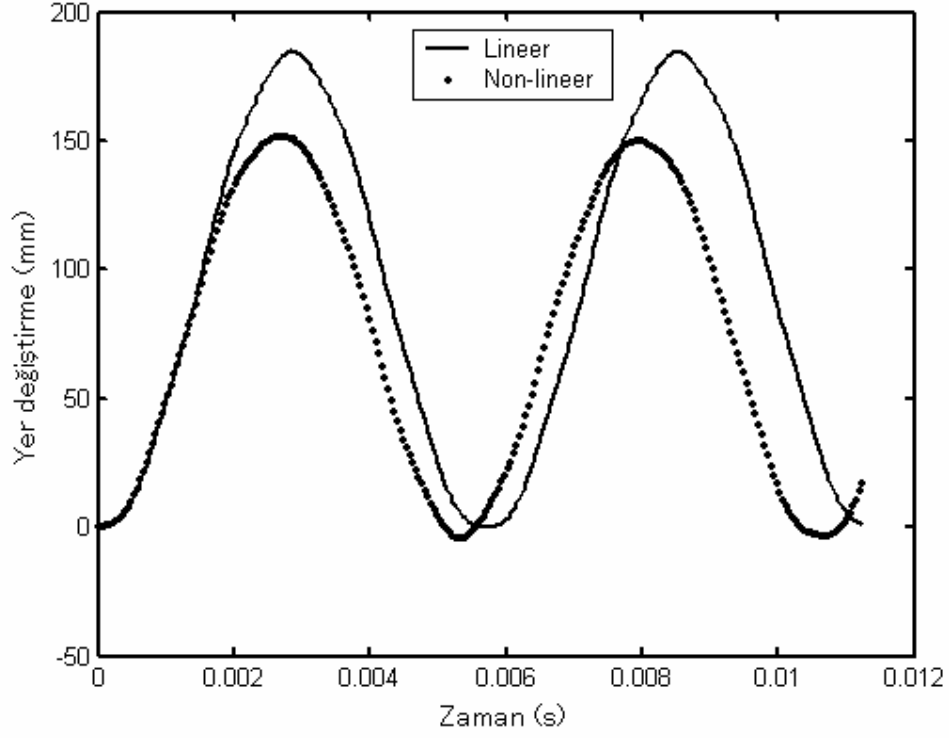


Şekil 5.41. Sabit mafsallı kabuğun tepe noktasının düşey yer değiştirmesinin zamanla değişimi.

5.2.6. Dinamik Düzgün Adım Basıncına Maruz Konsol Kiriş

Bir konsol kiriş düzgün yayılı dinamik adım basıncına maruz bırakılmıştır. Konsol kirişin uzunluğu $L = 254.0 \text{ mm}$, kalınlığı $t = 25.4 \text{ mm}$, genişliği $b = 25.4 \text{ mm}$, elastisite modülü $E = 82.74 \text{ MPa}$, Poisson oranı $\nu = 0.2$ ve kütle yoğunluğu $\rho = 10.687 \text{ kg/m}^3$ olarak alınmıştır. Kirişin geometrik bakımdan lineer olmayan dinamik analizi, adım basıncı $p = 0.02 \text{ MPa}$ ve zaman adımı $\Delta t = 45 \text{ } \mu\text{s}$ alınarak gerçekleştirilmiştir. Kirişin sonlu eleman ağı, dokuz düğümlü dörtgen elemanlarla oluşturulmuş olup, ağda toplam 9 eleman kullanılmıştır.

Şekil 5.42’de geometrik bakımdan lineer ve lineer olmayan haller için kiriş uç noktasının düşey yer değıştirmesi zamana bağı olarak verilmiştir. Lineer olmayan davranışta periyot azalması yanında yer değıştirmelerde de azalım gözlenmektedir.



Şekil 5.42. Konsol kirişin uç noktasının düşey yer değıştirmesinin zamanla değışimi.

VI. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde geometrik bakımdan lineer olmayan kabuk yapıların statik ve dinamik davranışı incelenmiştir. Bunun için MATLAB programlama dilinde bir kod yazılımı gerçekleştirilmiştir.

Bu çalışmada toplam Lagrange yaklaşımı kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir

İlk olarak toplam Lagrange yaklaşımına dayalı artımsal sürekli ortam mekaniği formülasyonu verilmiştir. Bu yaklaşım esas alınarak kabukların sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. Çalışmada eksenel simetrik kabuklar için iki, üç ve dört düğümlü eksenel simetrik kabuk elemanlar; genel kabuklar için ise, dokuz ve on altı düğümden oluşan dörtgen kabuk elemanlar kullanılmıştır. Kabuk sonlu eleman formülasyonunda Mindlin-Reissner yaklaşımı esas alınarak enine kayma etkileri dikkate alınmıştır. Lineer olmayan denklemlerin statik çözümünde Newton-Raphson ve Yay-boyu metotları, dinamik çözümünde ise Newmark ortalama ivme metodu kullanılmıştır.

Newton-Raphson yöntemi ile yapı sistemlerinin denge eğrisi sadece burkulma noktasına kadar elde edilebilmektedir. Burkulma ötesi davranışı elde edebilmek için Yay-boyu metodu uygulanmıştır.

Yay-boyu metodunda artımsal yük faktörünün işaretini belirlemek oldukça önemlidir. Bu çalışmada önceki yakınsamış artımsal yer değiştirme ile mevcut teğetsel çözüm arasındaki iç çarpımın işareti kullanılarak artımsal yük faktörünün işareti tespit edilmiştir.

Kabuk kalınlığı inceldikçe etkisi artan kayma kilitlemesi etkisini hafifletmek amacıyla indirgenmiş ve seçici indirgenmiş integrasyon yaklaşımları kullanılmıştır.

Yapılan çözümlerde, kabuk kalınlığının rölatif azalmasına bağlı olarak genellikle vurgu burkulması davranışına meylin arttığı ve kalınlığın daha da azaltılması halinde ters vurgu burkulması davranışının oluştuğu görülmüştür. Kalın kabuklarda ise vurgu burkulması meydana gelmemektedir.

İki çizgili kırık kirişlerde kırış tepe noktası yüksekliğinin artışına bağlı olarak vurgu burkulması davranışına meyil artmaktadır.

Kemer çubuklarda çubuk kalınlığının azalmasına veya diğer bir deyişle kemer yarıçapının kalınlığa oranının artmasına bağlı olarak vurgu burkulması davranışına meyil artmaktadır.

Eksenel simetrik kabukların analizinde iki düğümlü lineer eleman yerine üç düğümlü ikinci dereceden veya dört düğümlü kübik elemanların kullanılması daha iyi sonuçlar vermektedir.

Genel kabuklar için dokuz ve on altı düğümlü dörtgen elemanların performansı birbirlerine çok yakın görülmektedir.

Dinamik düzgün adım basıncına maruz kabukların lineer olmayan davranışında lineer hale göre genlik değişimleri ile birlikte genellikle periyot azalması oluşmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Hughes, T. J. R. and Liu, W. K., 1981, Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part I. Three- Dimensional Shells, Computers and Structures, 26, 331-362.
2. Hughes, T. J. R. and Liu, W. K., 1981, Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part II. Two-Dimensional Shells, Computers and Structures, 27, 167-181.
3. Hughes, T. J. R. and Carnoy, E., 1983, Nonlinear Finite Element Shell Formulation Accounting for Large Membrane Strains, Computers and Structures, 39, 69-82.
4. Liu, W. K., Law E. S. and Lam, D., Belytschko T., 1986, Resultant-Stress Degenerated-Shell Element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 55, 259-300.
5. Chaudhuri, R. A., 1988, A Degenerate Triangular Shell Element with Constant Cross-Sectional Warping, Computers and Structures, 28, 315-325.
6. Briassoulis, D., 1988, Monomial Test: Testing the Flexural Behavior of the Degenerated Shell Element, Computers and Structures, 29, 949-958.
7. Briassoulis, D., 1988, The Zero Energy Modes Problem of the Nine-Node Lagrangian Degenerated Shell Element, Computers and Structures, 30, 1389-1402.
8. Rhiu, J. J. and Lee, S. W., 1988, A Nine Node Finite Element for Analysis of Geometrically Non-Linear Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 1945-1962.
9. Vu-Quoc, L. and Mora, J. A., 1989, A Class of Simple and Efficient Degenerated Shell Elements-Analysis of Global Spurious-Mode Filtering, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 74, 117-175.
10. Hsiao, K. M. and Chen, Y. R., 1989, Nonlinear Analysis of Shell Structures by Degenerated Isoparametric Shell Element, Computers and Structures, 31, 427-438.
11. Fafard, M., Dhatt, G. and Batoz, J. L., 1989, A New Discrete Kirchhoff Plate/Shell Element with Updated Procedures, Computers and Structures, 31, 591-606.
12. Aditya, A. K. and Bandyopadhyay, J. N., 1989, Study of the Shell Characteristics of a Paraboloid of Revolution Shell Structure Using the Finite Element Method, Computers and Structures, 32, 423-432.
13. Ghosh, B. and Bandyopadhyay, J. N., 1989, Bending Analysis of Conoidal Shells Using Curved Quadratic Isoparametric Element, Computers and Structures, 33, 717-728.
14. Chakravorty, D., Bandyopadhyay, J. N. and Sinha, P. K., 1995, Finite Element Free Vibration Analysis of Conoidal Shells, Computers and Structures, 56, 975-978.

15. Liu, S., 1989, A Finite Element Analysis Procedure Using Simple Quadrilateral Plate/Shell Elements, *Computers and Structures*, 32, 937-944.
16. Yuan, K. Y. and Liang, C. C., 1989, Nonlinear Analysis of An Axisymmetric Shell Using Three Noded Degenerated Isoparametric Shell Elements, *Computers and Structures*, 32, 1225-1239.
17. Surana, K. S., 1982, Geometrically Nonlinear Formulation for the Axisymmetric Shell Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 477-502.
18. Surana, K. S. and Orth, N. J., 1989, Axisymmetric Shell Elements for Heat Conduction With p -Approximation in the Thickness Direction, *Computers and Structures*, 33, 689-705.
19. Lakshminarayana, H. V. and Kailash, K., 1989, A Shear Deformable Curved Shell Element of Quadrilateral Shape, *Computers and Structures*, 33, 987-1001.
20. White, D. W. and Abel, J. F., 1990, Accurate and Efficient Nonlinear Formulation of a Nine-Node Shell Element With Spurious Mode Control, *Computers and Structures*, 35, 621-641.
21. Saetta, A. V. and Vitaliani, R. V., 1990, A Finite Element Formulation for Shells of Arbitrary Geometry, *Computers and Structures*, 37, 781-793.
22. To C. W. S. and Wang, B., 1991, An Axisymmetric Thin Shell Finite Element for Vibration Analysis, *Computers and Structures*, 40, 555-568.
23. Kebari, H. and Cassell, A. C., 1991, Non-Conforming Modes Stabilization of a Nine-Node Stress-Resultant Degenerated Shell Element With Drilling Freedom, *Computers and Structures*, 40, 569-580.
24. Choi, C. K. and Yoo, S. W., 1991, Geometrically Nonlinear Behavior of An Improved Degenerated Shell Element, *Computers and Structures*, 40, 785-794.
25. Eriksson, A., 1992, On a Thin Shell Element for Non-Linear Analysis, Based on the Isoparametric Concept, *Computers and Structures*, 42, 927-939.
26. Kumbasar, N. and Aksu, T., 1995, A Finite Element Formulation for Moderately Thick Shells of General Shape, *Computers and Structures*, 54, 49-57.
27. Ben-Zvi, R., Libai, A. and Perl, M., 1992, A Curved Axisymmetric Shell Element for Nonlinear Dynamic Elastoplastic Problems—I. Formulation, *Computers and Structures*, 42, 631-639.
28. Ben-Zvi, R., Libai, A. and Perl, M., 1992, A Curved Axisymmetric Shell Element for Nonlinear Dynamic Elastoplastic Problems—II. Implementation and Results, *Computers and Structures*, 42, 641-648.

29. Ho, P. T. S., 1992, Comparison of Performance of a Flat Faceted Shell Element and a Degenerated Superparametric Shell Element, *Computers and Structures*, 44, 895-904.
30. Boisse, P., Daniel, J. L. and Gelin, J. C., 1992, A Simple Isoparametric Three-Node Shell Finite Element, *Computers and Structures*, 44, 1263-1273.
31. Sorem, R. M.. and Surana, K. S., 1992, p -Version Plate and Curved Shell Element For Geometrically Non-Linear Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1683-1701.
32. Buechter, N. and Ramm, E., 1992, Shell Theory Versus Degeneration - A Comparison in Large Rotation Finite Element Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34, 39-59.
33. Phaal, R. and Calladine, C. R., 1992, A Simple Class of Finite Elements for Plate and Shell Problems. II: An Element for Thin Shells, With Only Translational Degrees of Freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, 979-996.
34. Gebhardt, H., Schweizerhof K., 1993, Interpolation of Curved Shell Geometries by Low Order Finite Elements - Errors and Modifications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 287-302.
35. Liu, J. H. and Surana, K. S., 1993, p -Version Axisymmetric Shell Element for Geometrically Nonlinear Analysis, *Computers and Structures*, 49, 1017-1026.
36. Kabir, H. R. H., 1994, A Shear-Locking Free Robust Isoparametric Three-Node Triangular Element for General Shells, *Computers and Structures*, 51, 425-436.
37. Bhatia, R. S. and Sekhon, G. S., 1994, A Novel Method of Generating Exact Stiffness Matrices for Axisymmetric Thin Plate and Shell Elements With Special Reference to an Annular Plate Element, *Computers and Structures*, 53, 305-318.
38. Liu, H., Dirr, B. and Popp, K., 1994, Comparison of Some Shell Elements, *Computers and Structures*, 53, 357-361.
39. Parisch, H., 1995, A Continuum-Based Shell Theory for Non-Linear Applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 1855-1883.
40. Vlachoutsis, S., 1992, Shear Correction Factors for Plates and Shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1537-1552.
41. Vila, A., Rodriguez-Ferran, A. and Huerta, A., 1997, A Note on a Numerical Benchmark Test: An Axisymmetric Shell Under Ring Loads, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13, 181-192.

42. Meek, J. L. and Ristic, S., 1997, Large Displacement Analysis of Thin Plates and Shells Using a Flat Facet Finite Element Formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145, 285-299.
43. Sze, K. Y. and Zheng, S. J., 1999, A Hybrid Stress Nine-Node Degenerated Shell Element for Geometric Nonlinear Analysis, *Computational Mechanics*, 23, 448-456.
44. Sze, K. Y. and Yao, L. Q., 2000, A Hybrid Stress ANS Solid-Shell Element and its Generalization for Smart Structure Modelling. Part I: Solid-Shell Element Formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 545-564.
45. Sze, K. Y., Yao, L. Q. and Yi, S., 2000, A Hybrid Stress ANS Solid-Shell Element and its Generalization for Smart Structure Modelling. Part II: Smart Structure Modelling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 565-582.
46. Tabiei, A. and Tanov, R., 2000, A Nonlinear Higher Order Shear Deformation Shell Element for Dynamic Explicit Analysis: Part I. Formulation and Finite Element Equations, *Finite Elements in Analysis and Design*, 36, 17-37.
47. Tabiei, A. and Tanov, R., 2000, A Nonlinear Higher Order Shear Deformation Shell Element for Dynamic Explicit Analysis: Part II. Performance Validation Through Standard Tests, *Finite Elements in Analysis and Design*, 36, 39-50.
48. Liu, J., Riggs, H. R. and Tessler, A., 2000, A Four-Node, Shear-Deformable Shell Element Developed via Explicit Kirchhoff Constraints, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, 1065-1086.
49. Batoz, J. L., Zheng, C. L. and Hammadi, F., 2001, Formulation and Evaluation of New Triangular, Quadrilateral, Pentagonal and Hexagonal Discrete Kirchhoff Plate/Shell Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 615-630.
50. Sa, J. M. A. C., Jorge, R. M. N., Valente, R. A. F. and Areias, P. M. A., 2002, Development of Shear Locking-Free Shell Elements Using an Enhanced Assumed Strain Formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, 1721-1750.
51. Massin, P. and Mikdad, M. A., 2002, Nine node and seven node thick shell elements with large displacements and rotations, *Computers and Structures*, 80, 835-847.
52. Zhang, Y. X. and Cheung, Y. K., 2003, A Refined Non-Linear Non-Conforming Triangular Plate/Shell Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 2387-2408.

53. Kim, K. D., Lomboy, G. R. and Han, S. C., 2003, A Co-Rotational 8-Node Assumed Strain Shell Element for Postbuckling Analysis of Laminated Composite Plates and Shells, *Computational Mechanics*, 30, 330–342.
54. Ribeiro, P., 2003, A Hierarchical Finite Element for Geometrically Non-Linear Vibration of Doubly Curved, Moderately Thick Isotropic Shallow Shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 715-738.
55. Djoudi M.S., Bahai H., 2003, A Shallow Shell Finite Element for the Linear and Non-Linear Analysis of Cylindrical Shells, *Engineering Structures* 25, 769-778.
56. Kim, C. H., Sze, K. Y. and Kim, Y. H., 2003, Curved Quadratic Triangular Degenerated- and Solid-Shell Elements for Geometric Non-Linear Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57, 2077-2097.
57. Argyris, J., Papadrakakis, M. and Mouroutis, Z. S., 2003, Nonlinear Dynamic Analysis of Shells with the Triangular Element TRIC, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 3005-3038.
58. Wenzel, T. and Schoop, H., 2004, A Non-Linear Triangular Curved Shell Element, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20, 251-264.
59. Lee, P. S. and Bathe, K. J., 2004, Development of MITC Isotropic Triangular Shell Finite Elements, *Computers and Structures*, 82, 945-962.
60. Filho, L. A. D. and Awruch, A. M., 2004, Geometrically Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shells and Plates Using the Eight-Node Hexahedral Element with One-Point Quadrature, *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, 1297-1315.
61. Wanji, C., 2004, Refined 15-DOF Triangular Discrete Degenerated Shell Element with High Performances, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, 1817-1846.
62. Wanji, C. and Cheung, Y. K., 2005, Refined Discrete Quadrilateral Degenerated Shell Element by Using Timoshenko's Beam Function, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63, 1203-1227.
63. Ozkul, T. A., 2004, A Finite Element Formulation for Dynamic Analysis of Shells of General Shape by Using the Wilson- θ Method, *Thin-Walled Structures*, 42, 497–513.
64. Pimenta, P. M., Campello, E. M. B. and Wriggers, P., 2004, A Fully Nonlinear Multi-Parameter Shell Model with Thickness Variation and a Triangular Shell Finite Element, *Computational Mechanics*, 34, 181-193.

65. Wu, S., Li, G. and Belytschko, T., 2005, A DKT Shell Element for Dynamic Large Deformation Analysis, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21, 651–674.
66. Areias, P. M. A., Song J. H. and Belytschko, T., 2005, A Finite-Strain Quadrilateral Shell Element Based on Discrete Kirchhoff–Love Constraints, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, 1166-1206
67. Gruttmann, F. and Wagner, W., 2005, A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 4279-4300.
68. Petchsasithon, A. and Gosling, P. D., 2005, A Locking-Free Hexahedral Element for The Geometrically Non-Linear Analysis of Arbitrary Shells, *Computational Mechanics*, 35, 94-114.
69. Sousa, R. J. A., Cardoso, R. P.R., Valente, R. A. F., Yoon, J. W., Gracio, J. J. and Jorge, R. M. N., 2005, A New One-Point Quadrature Enhanced Assumed Strain (EAS) Solid-Shell Element with Multiple Integration Points Along Thickness: Part I-Geometrically Linear Applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62, 952-977.
70. Sousa, R. J. A., Cardoso, R. P.R., Valente R. A. F., Yoon, J. W., Gracio, J. J. and Jorge, R. M. N., (in press), A New One-Point Quadrature Enhanced Assumed Strain (EAS) Solid-Shell Element with Multiple Integration Points Along Thickness: Part II: Nonlinear Applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
71. Wagner, W. and Gruttmann, F., 2005, A Robust Non-Linear Mixed Hybrid Quadrilateral Shell Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, 635-666.
72. Levy, R. and Gal, E., 2006, The Geometric Stiffness of Thick Shell Triangular Finite Elements for Large Rotations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, 1378-1402.
73. Klinkel, S., Gruttmann, F. and Wagner, W., 2006, A Robust Non-Linear Solid Shell Element Based on a Mixed Variational Formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 179-201.
74. Bergan, P. G., Hørrigmoen, G., Brakeland, B. and Sørensen, T. H., 1978, Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, 1677-1696.
75. Crisfield, M. A., 1981, A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through", *Computers and Structures*, 13, 55-62.

76. Crisfield, M. A., 1983, An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19, 1269-1289.
77. Bellini, P. X. and Chulya, A., 1987, An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations, *Computers and Structures*, 26, 99-110.
78. Fafard, M. and Massicotte, B., 1993, Geometrical Interpretation of the Arc-Length Method, *Computers and Structures*, 46, 603-615.
79. Carrera, E., 1994, A Study on Arc-Length-Type Methods and Their Operation Failures Illustrated by a Simple Model, *Computers and Structures*, 50, 217-229.
80. Feng, Y. T., Peric, D. and Owen, D. R. J., 1996, A New Criterion for Determination of Initial Loading Parameter in Arc-Length Methods, *Computers and Structures*, 58, 479-485.
81. Hellweg, H. B. and Crisfield, M. A., 1998, A New Arc-Length Method for Handling Sharp Snap-Backs, *Computers and Structures*, 66, 704-709.
82. Souza, N. E. A. and Feng, Y. T., 1999, On the Determination of the Path Direction for Arc-Length Methods in the Presence of Bifurcations and 'Snap-Backs', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179, 81-89.
83. Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, 732p.
84. Andruet, R. H., 1998, Special 2-D and 3-D Geometrically Nonlinear Finite Elements for Analysis of Adhesively Bonded Joints, Ph. D. Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 150p.
85. Reddy, J. N., 1997, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd edition, CRC Press, New York, 831p.
86. Zienkiewicz, O. C., 1977, *The Finite Element Method*, 3rd edition, McGraw-Hill, London, 787p.
87. Crisfield, M. A., 1991, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Volume I*, John Wiley and Sons, New York, 345p.
88. Polat, C. ve Calayır, Y., 2003, Sabit Dış Basınca Maruz Eksenel Simetrik Kabukların Geometrik Olarak Lineer Olmayan Analizi, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, Gaziantep.
89. McNeal, R. H., 1998, Perspective on Finite Elements for Shell Analysis, *Finite Elements in Analysis and Design*, 30, 175-186.
90. Hughes, T. J. R., 1987, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, New York, 682p.

91. Lars, R. J., Jens, C. R. and Jan, S., 2002, Finite Elements for Geometric Non-Linear Analysis of Composite Laminates and Sandwich Structures, M. S. Thesis, Aalborg University, Aalborg East, 165p.
92. Laulusa, A., Bauchau, O.A., Choi J. Y., Tan, V.B.C. and Li, L., 2006, Evaluation of Some Shear Deformable Shell Elements, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 5033-5054.
93. Lee, S., Goo, N. S., Park, H. C., Yoon, K. J. and Cho, C., 2003, A Nine-Node Assumed Strain Shell Element for Analysis of a Coupled Electro-Mechanical System, *Smart Materials and Structures*, 12, 355-362.
94. Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., 1989, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3th edn, John Wiley and Sons, New York, 630p.
95. Paz, M., 1997, Structural Dynamics: Theory and Computation, 4th edn, Chapman and Hall, New York, 822p.
96. Chopra, A. K., 1995, Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 1th edn, Prentice-Hall, New Jersey, 729p.
97. Memon, B. A. and Su, X. Z., 2004, Arc-Length Technique for Nonlinear Finite Element Analysis, *Journal of Zhejiang University*, 5, 618-628.
98. Riks, E., 1972, The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability, *Journal of Applied Mechanics*, 39, 1060-1065.
99. Riks, E., 1979, An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, *International Journal of Solids and Structures*, 15, 529-551.
100. Wempner, G.A., 1971, Discrete Approximation Related to Nonlinear Theories of Solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7, 1581-1599.
101. Meek, J. L. and Tan, H. S., 1984, Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by An Incremental Iterative Technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, 261-282.
102. Batoz, J.L., Dhett, G., 1979, Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, 1262-1266.
103. Warren, J.E., 1997, Nonlinear Stability Analysis of Frame-Type Structures with Random Geometric Imperfections Using a Total-Lagrangian Finite Element Formulation, Ph. D. Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 211p.

104. Calayır, Y. and Polat, C., 2002, Çok Katlı Düzlem Çerçevelerin P-Delta Etkisi Dikkate Alınarak Deprem Analizi, Balıkesir Üniversitesi, IV. Mühendislik-Mimarlık Sempozyumu, 531-540.
105. Calayır, Y. ve Polat, C., 2002, An Iterative Approach for Seismic Analysis of Multistory Plane Frames Including P-Delta Effects, Symposium Proc. CREATING THE FUTURE-2nd FAE International Symposium, 209-214, Gemikonağı, TRNC.
106. Bathe, K. J., 1976, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 528p.
107. Wanji., C. and Shijie Z., 1998, Refined Hybrid Degenerated Shell Element for Geometrically Non-Linear Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41, 1195-1213.
108. Schoop, H., 1989, A Simple Non-Linear Flat Element for Large Displacement Structures, Computers and Structures, 32, 379-385.
109. Chia, CY., 1980, Non-linear Analysis of Plates, McGraw-Hill, New York.
110. Luo, Y. F. and Teng, J.G., 1998, Stability Analysis of Shells of Revolution on Nonlinear Elastic Foundations, Computers and Structures, 69, 499-511.

ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında Kars'ta doğan Cengiz POLAT ilk, orta ve lise tahsilini Malatya'da yaptı. 1984 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı ve 1989 yılında buradan mezun oldu. 1990 yılında Fırat Üniversitesi Teknik Bilimler MYO'da öğretim görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1991 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başlayan aday 1994 buradan mezun oldu. 2000 yılında aynı bölümde doktora eğitimine kaydolun aday bu programı tamamlamak üzeredir. Yurt içi ve yurt dışı kongrelerde toplam 4 bildirisi vardır. Halen aynı programda doktora çalışmalarını sürdüren aday, evli ve üç çocuk babasıdır.