

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN ELİPTİK
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ VE
BAZI UYGULAMALARI**

169264

Hikmet YAMAN

Tez Yöneticisi:
Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ ,2005

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN ELİPTİK
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ VE
BAZI UYGULAMALARI**

Hikmet YAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, ~~09.09.2005~~ tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12/10/2005 tarih ve 2005/35-1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ 'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Saygılarımı sunarım.

Ayrıca tezin hazırlanmasında yardımcı olan değerli meslektaşım Yunus BULUT' a teşekkür ederim.

Hikmet YAMAN



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER LİSTESİ.....	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
2. İKİNCİ MERTEBEDEN ELİPTİK OPERATÖRLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ	11
2.1. İkinci Mertebeden Eliptik Operatörler.....	11
2.2. İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Denklemler İçin Maksimum Prensibi (E. Hopf	
Maksimum Prensibi).....	16
3. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ ELİPTİK	
DENKLEMLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ.....	22
3.1. Lineer Olmayan Operatörler için Maksimum prensibi.....	22
3.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Eliptik Operatörler İçin Maksimum	
Prensibi.....	25
4. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN ELİPTİK OPERETÖRLER İÇİN MAKSİMUM	
PRENSİBİ.....	30
4.1. Dördüncü Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler İçin Maksimum Prensibi...	30
4.2. Dördüncü Mertebeden Yarı-Lineer Eliptik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	
İçin Maksimum Prensibi.....	33
4.3. Dördüncü Mertebeden Problemler.....	40
5. UYGULAMALAR.....	47
5.1. Sıkıştırılan Bir Sıvı Akışı.....	47
5.2. Teorem 4.3.2'nin Bir Uygulaması.....	50
KAYNAKLAR.....	53

SİMGELER LİSTESİ

u	: Çözüm Fonksiyonu
Γ	: Gama
μ	: Mü
λ	: Lamda
Ω	: Omega
∇	: Nabla
Δ	: Delta
ϕ	: Fi
η	: Eta
β	: Beta
τ	: To
α	: Alfa
ζ	: Zeta
$\in$	: Eleman
$\forall$	: Her
$\overline{D}$	: D'nin kapanışı
D	: D bölgesi
∂D	: D bölgesinin sınırı
Δ^2	: Biharmonik operatör
κ	: Kapa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER OLMAYAN DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN ELİPTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ VE BAZI UYGULAMALARI

Hikmet YAMAN

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2005, Sayfa: 53

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, ikinci mertebeden eliptik operatörler için maksimum prensibi kurulmuş ve genelleştirilmeler yapılarak bazı uygulamalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, lineer olmayan operatörler incelenmiş ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli eliptik denklemler için maksimum prensibi ve bazı uygulamalara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, dördüncü mertebeden eliptik tipten kısmi türevli denklemler için maksimum prensibi incelenmiştir.

Son bölümde, eliptik denklemler için maksimum prensipleri ile ilgili uygulamalara yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Maksimum prensibi, eliptiklik, laplace operatörü, biharmonik operatör, lineer olmayan eliptik denklemler

SUMMARY

Master Thesis

THE MAXIMUM PRINCIPLE AND SOME APPLICATIONS FOR THE FOURTH ORDER NONLINEAR ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Hikmet YAMAN

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
2005, Page : 53

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter, it is established the maximum principle for the second order elliptic operators, stated generalizations and given some applications.

In the third chapter, it is investigated nonlinear operators and the maximum principle for the second order nonlinear elliptic operators and some applications are given.

In the fourth chapter, it is investigated the maximum principle for the fourth order elliptic partial differential equations.

In the last chapter, some applications related to the maximum principle for the elliptic equations are given.

KEY WORDS: Maximum principle, Elliptic, Laplace operator, Biharmonic operator, Nonlinear elliptic equations.

I.BÖLÜM

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. (Maksimum Prensibi)

Kapalı $[a, b]$ aralığında sürekli bir $u(x)$, fonksiyonu maksimumunu bu aralık üzerinde bir noktada alır. Eğer $u(x)$ ikinci mertebeden sürekli bir türeve sahip ve u , a ve b arasındaki herhangi bir c noktasında yerel maksimuma sahip ise, elementer hesaptan

$$u'(c) = 0 \quad \text{ve} \quad u''(c) \leq 0 \quad (1.1.1)$$

elde ederiz.

Şimdi $g(x)$ herhangi sınırlı bir fonksiyon olmak üzere açık (a, b) aralığında u 'nun

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' > 0 \quad (1.1.2)$$

yapısındaki bir diferansiyel eşitsizliği sağladığını kabul edelim. Bu takdirde (1.1.1) bağıntılarının (a, b) açık aralığının herhangi bir c noktasında sağlanmadığı açıktır. Dolayısıyla, (1.1.2) sağlandığında, u 'nun maksimumu, a veya b uç noktaları hariç, aralık içerisindeki hiçbir yerde alınamaz. Burada maksimum prensibinin en basit örneğini vermiş oluyoruz.

Yukarıdaki incelemede (1.1.2) eşitsizliğinin kuvvetli olmasını istemekteyiz. Yani $u'' + g(x).u'$ ifadesinin asla sıfır olmayacağını kabul edilmektedir. Diferansiyel denklemlerin çalışılmasında ve bazı uygulamalarında bu istek oldukça kısıtlayıcı olup, uygun ise onun kaldırılabilir oluşu önemlidir. Bununla birlikte ,

$$u'' + g(x).u' \geq 0$$

kesin olmayan eşitsizliği $u = \text{sabit}$ için sağlanır. Bundan dolayı böyle bir sabit çözüm için maksimum her noktada alınır [1].

Teorem 1.1. (Bir Boyutlu Maksimum Prensibi)

$g(x)$, sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $u = u(x)$ ' in

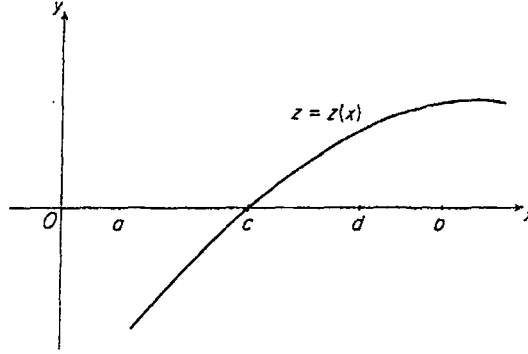
$$L[u] \equiv u'' + g(x).u' \geq 0 \quad a < x < b \text{ için} \quad (1.1.3)$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Eğer (a, b) açık aralığının içinde $u(x) \leq M$ ve u ' nun maksimumu (a, b) açık aralığının bir c iç noktasında alınıyorsa o zaman $u \equiv M$ olur.

İspat: $u(c) = M$ ve (a,b) açık aralığının içinde $u(d) < M$ olacak şekilde bir $d > c$ noktası bulunduğunu kabul edelim. Bu kabulün bir çelişkiye yol açacağını gösterelim. α belirlenecek pozitif bir sabit olmak üzere

$$z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $a < x < c$ için $z(x) < 0$, $c < x < b$ için $z(x) > 0$ ve $z(c) = 0$ olduğuna dikkat edelim.



Şekil 1.1

Basit bir hesaplama ile

$$L[z] = z'' + g(x)z' = \alpha[\alpha + g(x)].e^{\alpha(x-c)}$$

eşitliği elde edilir. Sabit olan α 'yı yeterince büyük seçelim ki $a < x < d$ için $L[z] > 0$ olsun.

Yani, $g(x)$ sınırlı olduğundan α 'yı her zaman

$$\alpha > -g(x)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçebiliriz. Şimdi,

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x)$$

eşitliğini tanımlayalım. Burada ε ,

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilmiş pozitif bir sabittir. $u(d) < M$ varsayımı ve $z(d) > 0$ gerçeği böyle bir ε 'nın bulunmasını sağlar. Bu takdirde, $a < x < c$ için z negatif olduğundan, $a < x < c$ için

$$w(x) < M$$

yazabiliriz. Şimdi ε 'nın tanım gereği

$$w(d) = u(d) + \varepsilon z(d)$$

$$< u(d) + M - u(d)$$

olur. Böylece

$$w(d) < M$$

bulunur. c noktasında

$$w(c) = u(c) + \varepsilon z(c) = M$$

yazılabilir. Bundan dolayı w 'nin (a, d) aralığının bir iç noktasında elde edilen M 'ye eşit ya da ondan daha büyük maksimuma sahip olduğu çıkar. Ancak ,

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0$$

yazabiliriz. Dolayısıyla (1.1.2) kesin eşitsizliğini içeren önceki sonucumuzdan, w maksimumunu (a, d) içinde alamaz. Böylece bir çelişkiye ulaşılmış oluruz. Eğer $d < c$ ise , $\alpha > g(x)$ olmak üzere aynı sonuca ulaşmak için

$$z = e^{-\alpha(x-c)} - 1$$

yardımcı fonksiyonunu kullanırız.

Yukarıdaki ispatın çözüm yolu

$$i) L[z] > 0, \quad ii) x < c \text{ için } z(x) < 0, \quad iii) x > c \text{ için } z(x) > 0, \quad iv) x = c \text{ için } z(c) = 0$$

özelliklerini sağlayan $z(x)$ fonksiyonunun bulunmasıdır. Eğer $d < c$ ise $x > c$ için $z(x) > 0$ ve $x < c$ için $z(x) < 0$ yani (ii) ile iii) eşitsizlikleri birbirinin terstir. z fonksiyonu hiçbir zaman tek değildir. Mesela α yeterli büyüklükte olmak üzere

$$z(x) = (x - a)^\alpha - (c - a)^\alpha$$

fonksiyonu aynı dört özelliğe sahiptir.

$$z = e^{-\alpha(x-c)} - 1$$

Teorem 1.1'i $(-u)$ 'ya uygulayarak

$$L[u] \leq 0$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan sabit olmayan bir fonksiyonun bir iç noktada minimumunu alamayacağını ileri süren minimum prensibini elde ederiz.

Teorem 1.1'de g fonksiyonu için sınırlılık durumu kaldırılabilir (Sınırlılıktan, sınırsızlığa). Eğer g fonksiyonu $[a, b]$ aralığının kapsadığı her $[a', b']$ aralığında sınırlı ise böylece Teorem 1.1'in sonucu hala geçerlidir.

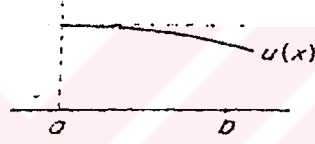
$[a, b]$ içindeki c ve d noktalarını içeren $[a', b']$ alt aralığa her incelemeyi basitçe uyguluyoruz. (a, b) 'nin her kapalı alt aralığında g 'nin sınırlılığının mümkün olduğunu ve x ' a yada b 'ye giderken sınırsız olabileceğine dikkat edelim. Mesela ,

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$(-1, 1)$ aralığının kapalı her alt aralığında sınırlıdır. Bu küçük bir nokta olarak görülebilir. Fakat matematiksel fiziğin çoğu diferansiyel denklemlerinin tanım aralığının uç noktalarında sınırsız olan g katsayılarına sahip olduğu durumlar söz konusudur. Teorem 1.1'i ispat etmek için uygulanan metot bize $a < x < b$ için

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0$$

şeklindeki bir eşitsizliği sağlayan fonksiyon hakkında ek bilgi elde etmemizi sağlar. u çözümü Şekil 1.2'de gösterilen fonksiyonun görüntüsüne sahip olabileceğini düşünebiliriz.



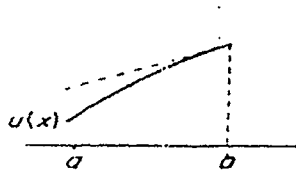
Şekil 1.2

Böylece $[a, b]$ aralığındaki u 'nun maksimumu için a noktasında $u'(a)=0$ elde edilebilir. Aslında bu durum asla ortaya çıkamaz. Eğer maksimum soldaki son noktada ortaya çıkarsa o noktadaki eğim negatif olmalıdır. Şekil 1.3'de



Şekil 1.3

Eğer maksimum sağdaki son noktada ortaya çıkarsa Şekil 1.4'de görüldüğü gibi o noktadaki eğim pozitif olmalıdır.



Şekil 1.4

kesin sonucu bulunur.

1.2. Harmonik Fonksiyon

$u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ n -boyutlu öklit uzayında bir D bölgesinde tanımlı, iki defa sürekli türetilbilir bir fonksiyon olsun. Laplace operatörü ya da Δ laplasyeni

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

olarak tanımlanır. $\Delta u = 0$ eşitliği bir D bölgesinin her bir noktasında sağlanıyorsa u , D bölgesinde harmoniktir. Ya da basitçe u bir harmonik fonksiyondur denir. D bölgesinin içindeki bir noktada u 'nun yerel maksimuma sahip olduğunu varsayalım. Daha sonra elementer hesaptan bu noktada

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \leq 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \leq 0, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \leq 0$$

olduklarını biliyoruz. Dolayısıyla yerel bir maksimum noktasında

$$\Delta u \leq 0$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Yukarıdaki basit akıl yürütme şu iddiaya götürür. Eğer bir u fonksiyonu bir D bölgesinin her bir noktasında

$$\Delta u > 0 \tag{1.2.1}$$

kesin eşitsizliğini sağlıyorsa bu takdirde u , maksimum değerini D 'nin herhangi bir iç noktasında alamaz. $b_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $b_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ..., $b_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 'lerin D 'de tanımlı herhangi sınırlı fonksiyonlar olduklarını kabul edelim. Yukarıdaki incelememizde herhangi bir değişiklik yapmaksızın. Eğer u , D 'de

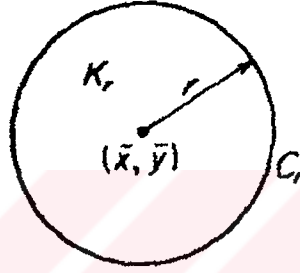
$$\Delta u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0 \tag{1.2.2}$$

kuvvetli eşitsizliğini sağlıyorsa, bu takdirde u 'nun bir iç noktada maksimumunu alamayacağı sonucuna varırız.

Bir boyutlu hali incelediğimiz Teorem 1.1’de, kuvvetli olmayan diferansiyel eşitsizlikler için bir maksimum prensibinin kurgusunun önemli olduğunu görmüştük. Yukarıda maksimum prensibinin, (1.2.1) ve (1.2.2) bağıntılarında eşitlik olması halinde bile geçerli olduğunu göstereceğiz. Özellikle harmonik fonksiyonlar maksimum prensibini sağlar. Önce

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0 \quad (1.2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan iki değişkenli fonksiyonlar için bir maksimum prensibi ispat edeceğiz. Böyle yaparken Laplace operatörünün birkaç özelliğini kullanacağız. Daha sonra daha genel diferansiyel operatörleri göz önüne alarak Teorem’1.1’ deki metotların bir maksimum prensibini elde etmek için nasıl değiştirilebileceğini göreceğiz.



Şekil 1.5

D bölgesinin bir noktası $(\bar{x}, \bar{y})$ olsun ve K_r ; $(\bar{x}, \bar{y})$ merkezli r yarıçaplı D bölgesindeki bir disk olsun. K_r ’nin sınırını C_r ile gösterelim. Bir skaler v fonksiyonunun gradyenti, $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ düzlemde bilinen dik birim vektörler olmak üzere

$$\text{grad} v \equiv \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}$$

ile tanımlanmış bir vektör fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Bir $\vec{w} = a(x,y) \vec{i} + b(x,y) \vec{j}$ vektör fonksiyonunun diverjansı

$$\text{div} \vec{w} \equiv \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$$

formülü ile tanımlanan skaler fonksiyondur. Böylece

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad} u) \quad (1.2.4)$$

eşitliğine ulaşırız .

Diverjans teoremini K_r diskinin içinde u 'nun laplasiyenine uygulayarak s 'nin C_r boyunca yay uzunluğu olduğu ve $\frac{\partial u}{\partial r}$ 'nin C_r sınırı üzerinde alınmış normal türevi olmak üzere

$$\iint_{K_r} \Delta u dx dy = \iint_{K_r} \text{div}(\text{gradu}) dx dy = \oint_{C_r} \frac{\partial u}{\partial r} ds$$

eşitliğini elde ederiz. Kutupsal koordinatlarda $ds=r.d\theta$ dönüşümünden faydalanırsak

$$\iint_{K_r} \Delta u dx dy = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta$$

eşitliğini buluruz. D bölgesinde $\Delta u \geq 0$ ise

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta \geq 0 \quad (1.2.5)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Şimdi r 'yi sıfır ile sabit bir R sayısı arasında değiştirelim ve K_r ; $(\bar{x}, \bar{y})$ 'de merkezi olan bir daire olduğunu kabul ediyoruz. K_R tamamen D bölgesinin içinde kalacak biçimde R sayısı yeteri kadar küçük alınmalıdır. (1.2.5)'teki eşitsizliğini sıfırdan R 'ye integrali alınarak ve integrasyon sırasını değiştirerek

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta dr = \int_0^{2\pi} u(R, \theta) d\theta - 2\pi u(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$$

yada

$$u(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) R d\theta = \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_R} u ds \quad (1.2.6)$$

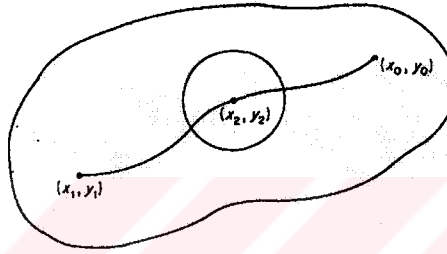
elde ederiz. (1.2.6) 'nın sağ tarafı R yarıçaplı $(\bar{x}, \bar{y})$ merkezli C_R çemberi üzerinde alınan u 'nun ortalama değeridir. Böylece (1.2.6) şunu belirtir. D bölgesinin herhangi bir noktasındaki (o noktayı merkezi olarak alan) u 'nun değeri D bölgesinin içerisindeki herhangi bir çember üzerindeki ortalama değeriyle sınırlıdır. Eğer $\Delta u = 0$ ise bu eşitsizlik hem u hem de $-u$ için geçerlidir. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 1.2. (Ortalama Değer Teoremi)

Eğer u , D bölgesinde harmonik ise bu taktirde $u(\bar{x}, \bar{y})$, D bölgesindeki $(\bar{x}, \bar{y})$ merkezli herhangi bir çember üzerinde alınan ortalama değerine eşittir. Yani,

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_R} u ds$$

dir. Bir maksimum prensibini elde etmek için u 'nun D bölgesindeki (1.2.3) eşitsizliği sağladığını ve D bölgesinde (x_0, y_0) gibi bir noktada M maksimum değerini alacağını varsayalım. $u \leq M$ ve $u(x_0, y_0) = M$ olduğundan (1.2.6)'dan merkezi (x_0, y_0) ve D 'nin içinde olan her çemberin üzerinde u özdeş olarak M 'ye eşit olmalıdır. Şimdi $u < M$ için D bölgesinde bir (x_1, y_1) noktası bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda aynı şey (x_1, y_1) noktasının bir komşuluğunda geçerlidir. (x_1, y_1) noktasını (x_0, y_0) noktası ile D bölgesindeki bir eğri ile birleştirelim ve (x_2, y_2) noktası bu eğri üzerindeki $u = M$ eşitliğini sağlayan ilk nokta olsun.



Şekil 1.6

Böylece $u(x_2, y_2)$ merkezli yeteri kadar küçük çemberin üzerindeki M noktasına özdeş olarak eşit değildir. Bundan dolayı (1.2.6) eşitsizliği ile çelişiyoruz ve dolayısıyla aşağıdaki sonuca ulaşıyoruz.

Teorem 1.3. (Maksimum Prensibi)

D bölgesinde $\Delta u \geq 0$ olsun. Eğer u , M maksimumunu D bölgesinin herhangi bir iç noktasında alıyorsa bu taktirde D içinde $u \equiv M$ olur.

D bölgesinin sınırlı olmadığını kabul edelim. D bölgesinin sınırını ∂D ile gösterirsek u , $D \cup \partial D$ 'de sürekli, sabit değilse u 'nun D bölgesindeki değerleri ve D bölgesi sınırlı ise u 'nun ∂D üzerindeki maksimumunun altında olduğunu anlıyoruz. Eğer D bölgesi sınırsız ise bu değerler ∂D üzerindeki u 'nun maksimumunun ya altındadır ya da $(x^2 + y^2)$ sonsuza giderken u 'nun limit supunun altındadır.

Karşılık gelen minimum prensibi

$$\Delta u \leq 0$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar ile ilgili bir maksimum prensibinden dolayı sabit olmayan harmonik bir fonksiyonun D bölgesinin herhangi bir iç noktasında ne maksimum ne de minimum değerini alamayacağı sonucuna varırız.

Teorem 1.4. (Sonlu D bölgesinde harmonik fonksiyonun maksimum değeri)

Sonlu bir D bölgesinde harmonik ve $\bar{D}$ bölgesinde sürekli olan fonksiyon en büyük ve en küçük değerini yalnız bölgenin sınırı üzerinde alır. Fonksiyonun sabit olması durumunda bu geçerli değildir.

Tanım 1.3. (Altharmonik ve Üstharmoniklik)

Bir D bölgesinde $\Delta u \geq 0$ bağıntısını sağlayan bir u fonksiyonuna D içinde altharmoniktir ya da altharmonik bir fonksiyondur denir. $-u$ altharmonik olacak şekilde eğer $\Delta u \leq 0$ ise u 'ya üstharmoniktir denir.

Tanım 1.4. (Altharmonik Fonksiyon)

Bir D bölgesinde $\Delta u \geq 0$ 'ı sağlayan bir u fonksiyonuna D 'de altharmonik ya da kısaca altharmoniktir denir. $-u$ altharmonik olduğunda $\Delta u \leq 0$ ise u 'nun üstharmonik olduğunu söyleriz. u 'nun altharmonik olduğunu ve ∂D sınırına sahip bir D bölgesinde v 'nin harmonik olduğunu kabul edelim. Yani,

$$w = u - v$$

fonksiyonu D 'de altharmonik olacaktır. u ve v , ∂D üzerinde çakışırsa w , ∂D üzerinde sıfır olur. Maksimum prensibi uyarınca tüm D 'de pozitif olmayacaktır. Böylece D 'de

$$u \leq v$$

eşitsizliğini elde ederiz. Altharmonik terimi az önce anlatılan özellikten gelir. Bir D bölgesindeki bir altharmonik u fonksiyonunun değerleri daima D üzerinde u ile çakışan harmonik fonksiyonun değerlerinin altındadır. Teorem 1.2 ve 1.3'den her hangi boyutta uygun genişletmelere sahiptir.

u , n -değişkenli bir altharmonik fonksiyon; yani $\Delta u \geq 0$ olduğunu kabul edelim. K_R ile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)$ merkezli R yarıçaplı n -boyutlu bir yuvarı tanımlayalım ve sınırını C_R ile gösterelim. Denklemi

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_k)^2 = R^2,$$

olan C_R küresinin yüzey alanı S_R ile gösterilir. ω_n sadece n 'ye bağlı mutlak bir sabit olmak üzere

$$S_R = \omega_n R^{n-1}$$

yazılması uygun olur. Mesela $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$ dir. dS , $(n-1)$ boyutlu yüzey alan elemanı olmak üzere $(n - 1)$ - katlı integral ile altharmonik fonksiyonların ortalama değer teoremi

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \leq \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \oint_{C_R} u dS \quad (1.2.7)$$

eşitsizliği ile tanımlanır. (1.2.7)'nin ispatı aynen (1.2.6)'da verilen metotla yapılabilir. Harmonik fonksiyonlar için ortalama değer teoremi ve n -boyutlu altharmonik fonksiyonlar için maksimum prensibi (1.2.7)'nin doğrudan sonuçlarıdır.

II BÖLÜM

2.İKİNCİ MERTEBEDEN ELİPTİK OPERATÖRLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ

2.1.İkinci Mertebeden Eliptik Operatörler

Bu bölümde

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

formundaki ikinci mertebeden diferansiyel operatörler incelenecektir.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

denkliğinden dolayı

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$$

olarak tanımlayabilir ve yukarıdaki diferansiyel ifade

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1.1)$$

olarak yazılabilir. Diğer bir ifade ile genellemeden bir şey kaybetmeksizin ikinci mertebeden $\mathcal{L}$ operatörünün katsayılarının simetrik olması genelliği bozmaz [1]. Biz bu genellemeyi devamlı kullanacağız.

Tanım 2.1.1. (2.1.1) operatörüne $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasında eliptiktir denilebilmesi için gerek ve yeter bir şart, tüm reel $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ n-lileri için

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \mu(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (2.1.2)$$

olacak şekilde pozitif bir $\mu(\mathbf{x})$ niceliği bulunmasıdır. Eğer D 'nin her bir noktasında eliptik ise $\mathcal{L}$ operatörüne D bölgesinde eliptiktir denir. Eğer (2.1.2), D 'nin her bir noktası için sağlanıyor ve D 'deki her $\mathbf{x}$ için $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0$ olacak şekilde pozitif bir μ_0 sabiti varsa $\mathcal{L}$ operatörü D 'de düzgün eliptiktir. Matris dilinde eliptiklik şartı,

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin her bir $\mathbf{x}$ noktasında pozitif olmasını gerektirir.

Şimdi $\mathcal{L}$ formu üzerinde çeşitli koordinat dönüşümlerinin etkisini inceleyelim.
Koordinatların

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j, \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (2.1.3)$$

şeklinde bir lineer dönüşümü

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

matris formunda yazılabilir. Bu eşitlikte $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$, $n \times 1$ tipinde matrisler olup, C ise $n \times n$ tipinde (c_{ij}) matrisidir. $n \times n$ tipindeki C matrisinin ortogonal olduğunu söylemek için elemanları

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} c_{ik} = \begin{cases} 1 & j = k \text{ ise} \\ 0 & j \neq k \text{ ise} \end{cases}, \quad j,k=1,2,3,\dots,n \quad (2.1.4)$$

ancak ve ancak bağıntılarını sağlıyorsa $n \times n$ tipindeki C matrisi ortogoneldir denir.

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} c_{jk} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases}, \quad i,j=1,2,3,\dots,n \quad (2.1.5)$$

şartının (2.1.4) şartına denk olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten C 'nin transpozesi C^T , ve inversi C^{-1} ile gösterilirse ortogonellik kriterleri, (2.1.4) ve (2.1.5) bağıntılarının

$$C^T = C^{-1}$$

eşitliğine denk olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.2. Ancak ve yalnız $C = (c_{ij})$ matrisi bir matris ise (2.1.3) dönüşümüne bir rotasyon veya ortogonal bir dönüşüm denir.

Şimdiki sonuç, bir operatörün eliptikliğinin ortogonal koordinat dönüşümlerinden etkilenmediğini ifade etmektedir.

Teorem 2.1.1.

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

operatörü eliptik olsun. O zaman (2.1.3) ortogonal dönüşümü altında $\mathcal{L}$ operatörü

$$b_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj} \quad k, l=1, 2, \dots, n \quad (2.1.6)$$

olmak üzere,

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \quad (2.1.7)$$

şeklini alır. Ayrıca (2.1.7) operatörü eliptiktir.

İspat: $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = c_{ij}$ olduğundan $\mathcal{L}$ operatörüne zincir kuralını uygular ve

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}$$

eşitliğini elde ederiz. (2.1.6) bağıntıları ile $B=(b_{kl})$ matrisi tanımlanırsa (2.1.7) formundaki $\mathcal{L}$ elde edilir. (2.1.7)'nin eliptikliğini kurmak için herhangi bir $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ n -lileri göz önüne alalım ve

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \xi_k \xi_l = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj} \xi_k \xi_l$$

yazalım.

$$\eta_l = \sum_{k=1}^n c_{kl} \xi_k$$

şeklinde tanımlayarak

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \xi_k \xi_l = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_i \eta_j$$

yazabiliriz (2.1.2) eliptiklik şartı ve (2.1.5) yardımıyla

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n b_{kl} \xi_k \xi_l &\geq \mu(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n \eta_i \eta_i \\ &= \mu(\mathbf{x}) \sum_{i,k,l=1}^n c_{ki} \xi_k c_{li} \xi_l \end{aligned}$$

$$= \mu(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^n \xi_k^2$$

bulunur.

Uyarılar 2.1.

i) Koordinatların ortogonal bir dönüşümü altında sadece eliptiklik değil aynı zamanda $\mu(\mathbf{x})$ niceliğinin de değişmediğine dikkat edilmelidir.

ii) Bir operatör düzgün eliptik ise herhangi bir ortogonal dönüşümden etkilenmez.

iii) Anlatılan tarzda zincir kuralının uygulanabilmesi için C 'nin elemanlarının sabit olması gerekir.

iv) Sabit katsayılı bir operatör bir noktada eliptikse, o zaman n -boyutlu uzayın tamamında düzgün eliptiktir. Özel olarak laplace operatörü her yerde eliptiktir.

Lineer cebirden bilindiği gibi, herhangi bir $A = (a_{ij})$ özel simetrik matrisi için,

$$B = (b_{ij})$$

$$b_{ij} = \sum_{k,l=1}^n c_{ik} a_{kl} c_{jl} \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

ya da buna denk olan

$$B = C A C^{-1}$$

bir diyagonal matris olmak üzere bir $C = (c_{ij})$ ortogonal matrisi bulunmasıdır. Yani B matrisi $i \neq j$ ise

$$b_{ij} = 0$$

özellğine sahiptir. B 'nin diyagonalliğinde b_{kk} elemanları (a_{ij}) orjinal matrisinin özdeğerleri ve (c_{ij}) 'nin satırlarının lineer dönüşümüne karşılık gelen lineer dönüşümün, özvektörler olarak isimlendirilir.

Özel bir $\bar{x}$ noktasında diyagonalleştirirsek bütün reel $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ n -liler için

$$\sum_{k,l} b_{kl}(\bar{x}) \eta_k \eta_l = \sum_{k=1}^n b_{kk}(\bar{x}) \eta_k^2 \geq \mu(\bar{x}) \sum_{k=1}^n \eta_k^2$$

elde ederiz. Buradan bütün $b_{kk}(\bar{x})$ diyagonal elemanlarının pozitif olduğu sonucu çıkar.

Gerçekten

$$b_{kk}(\bar{x}) \geq \mu(\bar{x})$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\mathcal{L}$ eliptik değil ise herhangi bir pozitif $\mu(\bar{x})$ sayısı için eşitsizlik sağlanmaz. Eğer sağlanırsa ters dönüşüm orijinal operatör için bir eşitsizliğe denk olur ki bu da eliptiklikle aynı anlamdadır. Bundan dolayı $\mathcal{L}$ operatörü eliptik değil ise $b_{kk}(\bar{x})$ öz değerlerinin en azından biri pozitif olmamalıdır.

Farz edelim ki; $\mathcal{L}$ orijinal operatörü özel bir $\bar{x}$ noktasında diyagonal forma dönüştürülmüş olsun. Bu noktada

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i=1}^n b_{ii}(\bar{x}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$

yazılabilir. Şimdi bir uzamadan oluşan ikinci bir koordinat dönüşümünü uygulayalım.

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(\bar{x})}} y_k, \quad k=1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1.8)$$

alalım. Orijinal $\{x_k\}$ koordinatları cinsinden,

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}}} \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \equiv \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j, \quad k=1, 2, 3, \dots, n$$

yazabiliriz. $\mathcal{L}$ operatöründe

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}$$

formunda bir yapı oluşturulur. (2.1.8) dönüşümü yalnız bütün $b_{kk}(\bar{x})$ 'ler pozitif olduğu zaman yapılabilir. Şimdi aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Teorem 2.1.2. İkinci basamaktan bir $\mathcal{L}$ operatörü yalnız ve yalnız bir lineer dönüşümü oluyorsa o zaman $\bar{x}$ noktasında eliptiktir.

$$z_k = \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j, \quad k=1, 2, 3, \dots, n$$

Böylece $\bar{x}$ 'te $\mathcal{L}$ operatörü $\{z_k\}$ koordinatlarında Laplasiyon olur. Yukarıdaki denklem bizim her yerde (d_{kj}) matrisini sabit bir matris olarak kabul ettiğimiz vurgulanmalıdır. Bu indirgeme formülü bütün tanım bölgesinden ziyade özel bir $\bar{x}$ noktasında oluşur.

$$(L + h) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + h$$

operatörü $\bar{x}$ 'de eliptik olması için yalnız ve yalnız

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

operatörünün $\bar{x}$ noktasında eliptik olmasıdır. Eğer $\mathcal{L}$, D 'de düzgün eliptik ise $(L + h)$ operatörü D 'de düzgün eliptiktir. $\mathcal{L}$ operatörü $L + h$ 'ın temel kısmı olarak isimlendirilir.

Teorem 2.1.3. Genel bölgelerde incelenmiş olan ikinci basamaktan operatörler için maksimum prensibi ve esas özdeğer kavramlarının Rieman manifoldlarına genişletilmesi bulunabilir [2].

2.2. İkinci Mertebeden Kısmi Türevli Denklemler İçin Maksimum Prensibi (E. Hopf Maksimum Prensibi)

Bir D bölgesinde

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0 \quad (2.2.1)$$

kesin diferansiyel eşitsizliğini ele alarak, L 'nin D 'de eliptik olduğunu kabul edelim. Eğer u bir $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ noktasında bir yerel maksimuma sahip ise çok değişkenli fonksiyonlar ile ilgili bilgilerden $\bar{x}$ 'de lineer bir dönüşümle $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinatlarından elde edilen herhangi bir $z_1, z_2, \dots, z_n$ koordinatları için,

$$\frac{\partial u}{\partial z_k} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olduğunu biliyoruz. Özel olarak L 'nin temel kısmı $\mathcal{L}$, z -koordinatlarında laplace operatörü ise bu taktirde (2.2.1) $\bar{x}$ 'de sağlanmaz. L eliptik olduğu zaman $\bar{x}$ 'de $\mathcal{L}$ laplace operatörü olacak şekilde lineer bir koordinat dönüşümü bulmak mümkündür. $\bar{x}$ noktalarını D 'de bulmak mümkündür. L eliptik ise bir D bölgesinde (2.2.1)'i sağlayan bir u fonksiyonu bir D bölgesi içinde bir maksimuma sahip olamaz [3].

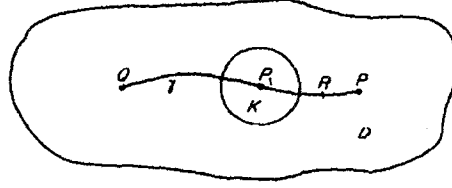
Bir boyutlu durumda olduğu gibi maksimum prensibini $L[u]$ 'nun sağladığı kesin olmayan bir eşitsizliği içerecek şekilde genişletebiliriz.

Teorem 2.2.1. L düzgün eliptik operatör olmak üzere bir D bölgesinde $u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$,

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

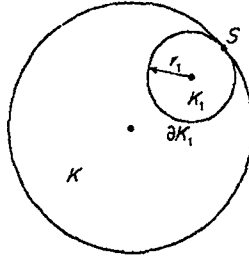
diferansiyel eşitsizliğini sağlasın ve a_{ij} ve b_i katsayıları düzgün sınırlı olduğunu kabul edelim. Eğer u fonksiyonu, D 'nin bir noktasında M maksimumunu alıyorsa o zaman D 'de $u \equiv M$ dir.

İspat: D 'nin bir P noktasında $u = M$ olduğunu ve D 'nin diğer bir Q noktasında $u < M$ olduğunu kabul edelim. Bir çelişki kuracağız. D bölgesinde Q 'dan P 'ye giden bir γ yayı çizelim.



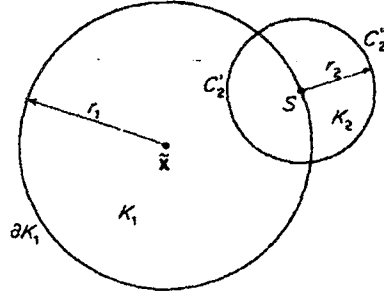
Şekil 2.1

γ üzerinde $u = M$ olan ilk noktayı R ile gösterelim. Böylece Q ve R arasında γ parçası üzerinde $u < M$ ve $u(R) = M$ dir. D 'nin sınırı içindeki herhangi bir nokta ile γ 'nın herhangi bir noktası arasındaki uzaklığın en büyük alt sınırı $d > 0$ olsun. R ; $\frac{1}{2}d$ den daha az bir uzaklıktan γ 'nın QR parçası olan bir P_1 noktasını düşünüyoruz. Ve $u < M$ olan P_1 merkezli en geniş yuvarı oluşturalım. Bu yuvar (K ile adlandırılan) $\frac{1}{2}d$ 'den daha az yarıçapa sahip olacaktır. Ve böylece D 'nin içinde yer alacaktır. K 'nın ∂K sınırı üzerinde $u = M$ olan bir nokta S olsun. Böyle en az bir nokta olmalıdır. Tamamı K içinde kalan ve S 'de ∂K 'ya teğet K_1 yuvarını oluşturalım.



Şekil 2.2

K_1 'in sınırını ∂K_1 ile gösterelim. K_1 'in içinde $u < M$ olduğuna dikkat etmeliyiz. Ve ∂K_1 'in üzerinde bulunan tek nokta S 'de $u = M$ olur. K_1 'in yarıçapını r_1 olarak gösterelim. Diğer bir yapı oluşturunuz. ∂K_2 sınırlı ve $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ yarıçaplı bir K_2 yuvarı S merkezli olarak çizilir.



Şekil 2. 3

K_1 içindeki ve ∂K_1 üzerindeki ∂K_2 kısmını C_2' ile gösteririz. Böylece C_2' yüzeyi ∂K_2 ve ∂K_1 'in kesişimindeki sınırı kapsar. ∂K_1 dış kısmındaki ∂K_2 'nin diğer parçasını C_2'' ile gösteririz.

C_2' kapalı kümesi üzerinde $u < M$ olduğu öyle bir $\zeta > 0$ sabiti için C_2' üzerinde,

$$u \leq M - \zeta,$$

dir. Sınırlı kapalı bir küme üzerindeki sürekli bir fonksiyon maksimumunu alır. Gerçeğinden bu sonuç çıkar. Diğer taraftan her yerde $u \leq M$ olduğundan, biliyoruz ki C_2'' zerinde,

$$u \leq M,$$

dir. K_1 yuvarının merkezi $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ile gösterelim

$$z(\mathbf{x}) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2} \quad (2.2.2)$$

α' nın belirlenecek olan, uygun bir sabit olduğu yardımcı fonksiyonu tanımlarız. Böylece

$$z > 0, \quad K_1 \text{ de}$$

$$z = 0, \quad \partial K_1 \text{ 'in üzerinde}$$

$$z < 0, \quad K_1 \text{ 'in dışında}$$

olduğu açıktır.

$$L[z] = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \left\{ 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - \bar{x}_i) (x_j - \bar{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^n [a_{ii} + b_i (x_i - \bar{x}_i)] \right\}$$

yazabiliriz. L operatörünün düzgün eliptikliğinden dolayı

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - \bar{x}_i) (x_j - \bar{x}_j) \geq \mu_o \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2$$

olur. K_2 'de

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 > \frac{1}{4} r_1^2$$

olduğundan K_2 'de $\mathbf{x}$ için

$$L[z] \geq \alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \left\{ \alpha \mu_o r_1^2 - 2 \sum_{i=1}^n [a_{ii} + b_i (x_i - \bar{x}_i)] \right\}$$

sonucuna ulaşırız. Yeterince büyüklükteki α seçimi ile K_2 içinde

$$L[z] > 0,$$

elde ederiz. Teorem 1.1 ispatında olduğu gibi

$$0 < \varepsilon < \frac{\zeta}{1 - e^{-\alpha r_1^2}}$$

olacak şekilde seçilecek bir ε ile

$$w = u + \varepsilon z$$

fonksiyonunu belirleyelim. w fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) C_2' üzerinde $w < M$ dir. Bunu görmek için öncelikle

$$0 \leq z < 1 - e^{-\alpha r_1^2}$$

olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla C_2' üzerinde $\varepsilon z < \zeta$ ve $u \leq M - \zeta$ olduğundan eşitsizliklerin taraf tarafa toplamları ile C_2' üzerinde $w < M$ olduğu görülür.

ii) C_2'' üzerinde $w \leq M$ dir. Bu C_2'' üzerinde $z < 0$ ve her yerde $u \leq M$ olduğundan ortaya çıkar.

iii) K_2 nin merkezi olan S noktasında $u = M$ dir. Bu ifade S noktasında $u = M$ hipoteziyle ve yine S noktasında $z = 0$ yapısıyla doğrudur.

i), ii), iii) özelliklerini temel alarak w maksimumunu, K_2 yuvarının iç kısmında bir yerde alır. Diğer taraftan K_2 'de

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0$$

dır. Böylece L eliptik ise K_2 'nin içinde hiçbir noktada maksimum oluşamaz. Bir çelişkiye ulaşılmıştır ve ispat tamamlanmıştır [3].

Teorem 2.2.2. L, D' 'de düzgün eliptik $h \leq 0$ ve L 'nin katsayıları ile h sınırlı olmak üzere u ,

$$(L+h)[u] \geq 0$$

diferansiyel eşitliğini sağlasın. Eğer u negatif olmayan bir M maksimumunu D 'nin bir iç noktasında alıyorsa o zaman $u \equiv M$ olur.

Yardımcı fonksiyon z ve ε pozitif niceliği aynı şekilde tanımlanmak üzere Teorem 2.2.2'nin ispatı tamamen Teorem 2.2.1'deki yöntem ile yapılır.

Teorem 2.2.3. L 'nin düzgün eliptik olduğu bir D bölgesi içinde u fonksiyonu,

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlasın. D içinde $u \leq M$ ve bir P sınır noktasında $u=M$ olduğunu kabul edelim. P noktasının D bölgesindeki K_1 yuvarının sınırı üzerinde olduğunu kabul edelim. Eğer u ,

$D \cup P$ 'de sürekli ve P noktasında dışa yönelmiş $\frac{\partial u}{\partial v}$ türevi mevcut ise bu taktirde $u \equiv M$ olmadıkça P noktasında

$$\frac{\partial u}{\partial v} > 0$$

dır.

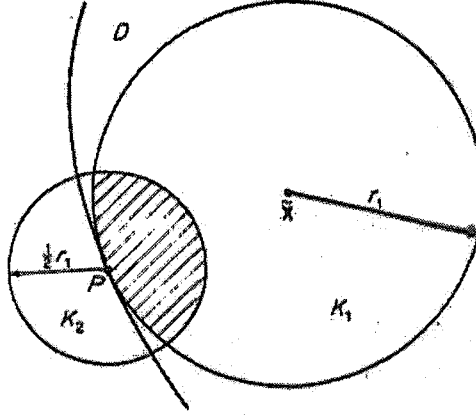
İspat: Teorem 2.2.1.'in ispatında izlediğimiz yolu izleyeceğiz. Gerekirse K_1 biraz daraltılarak ∂K_1 'in bütünüyle $D \cup P$ 'de olduğu kabul edilir. K_1 'in yarıçapı r_1 olmak üzere; P merkezli $\frac{1}{2}r_1$ yarıçaplı K_2 yuvarını oluşturalım. (Şekil 2.4.), (2.2.2)'de tarif edilen z fonksiyonu yeterince büyük α seçimi ile K_2 'de sağlar. Fonksiyon

$$w = u + \varepsilon z$$

şeklindedir. Teorem 2.2.1'e göre u , M 'ye denk olmaz ise o zaman sınır üzerinde P noktasında hariç, K_1 içinde $u < M$ dir. Biliyoruz ki, K_1 'in sınırında $z=0$ dir. Seçtiğimiz yeterince küçük $\varepsilon > 0$ ile K_1 'de olan K_2 'nin sınırının parçasında $w \leq M$ dir. O zaman (şekil 2.1.4). 'de gösterilen taralı bölgenin tüm sınırında $w \leq M$ dir. $L[w] > 0$ 'dan dolayı bu bölgede P 'de olan w 'nın maksimumundan $w(P) = M$ dir. Bu nedenle P 'de

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial v} + \varepsilon \frac{\partial z}{\partial v} \geq 0$$

dır.



Şekil 2.4

Şimdi göstereceğiz ki, P 'de $\frac{\partial z}{\partial v} < 0$ öyle ki o noktada $\frac{\partial u}{\partial v} > 0$ dır. $\bar{x}$ koordinat sistemimizin orjini olmak üzere $\bar{x}$ 'den öklit sistemine ait uzaklığı r ile ifade edelim ve

$$z = e^{-ar^2} - e^{-ar_1^2}$$

seçelim. O zaman

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -2ax_i e^{-ar^2}$$

ve

$$\eta_i = \frac{x_i}{r}$$

olur. Bundan dolayı

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -2are^{-ar^2} \sum_{i=1}^n v_i \eta_i < 0$$

dır. Bu nedenle $\frac{\partial u}{\partial v} > 0$ olarak bulunur ve teorem ispatlanır.

Teorem 2.2.4. L , Teorem2.2.3.'deki operatör ve D bölgesinde $h(x) \leq 0$ olmak üzere u fonksiyonu,

$$(L+h)[u] \geq 0$$

eşitsizliğini sağlasın. Kabul edelim ki; D 'de $u < M$, P sınır noktasında $u = M$ ve $M \geq 0$ dır. P 'nin D içindeki bir yuvarın sınırında olduğunu kabul edelim. Eğer u , $D \cup P$ 'de sürekli ise D içinde $u \equiv M$ olmadıkça P 'de u 'nun dışa yönlü türevi pozitifdir.

III. BÖLÜM

3. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVİLİ ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ

3.1. Lineer Olmayan Operatörler İçin Maksimum Prensibi

Lineer diferansiyel operatörler için oluşturulan bir takım sonuçlar lineer olmayan operatörleri kapsayacak şekilde genişletilebilir. $u(x)$, $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde

$$u'' + H(x, u, u') = 0 \quad (3.1.1)$$

lineer olmayan denklemin bir çözümü olsun.

$$H(x, y, z), \quad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z}$$

fonksiyonları x, y, z 'nin tanım bölgelerinde sürekli fonksiyonlar olduklarını kabul edelim. Ayrıca her x, z için

$$H(x, y_1, z) \leq H(x, y_2, z) \quad y_1 \geq y_2 \quad (3.1.2)$$

olduğunu, ya da buna denk olan

$$\frac{\partial H}{\partial y} \leq 0$$

eşitsizliği kabul edelim.

$$H(x, u, u') = g(x)u' + h(x)u - f(x)$$

ise (3.1.1)'in bir lineer eşitlik olduğunu görülür. (3.1.2) şartı bu durumda $h(x) \leq 0$ olur.

$w(x)$ 'in (a, b) 'de

$$w'' + H(x, w, w') \geq 0 \quad (3.1.3)$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığını kabul edelim.

$$v = w - u$$

fonksiyonunu göz önüne alarak (3.1.3)'den (3.1.1)'i çıkarırsak

$$v'' + H(x, w, w') - H(x, u, u') \geq 0$$

buluruz. Yukarıdaki H 'a ortalama değer teoremini uygulayarak

$$v'' + \frac{\partial H}{\partial z} v' + \frac{\partial H}{\partial y} v \geq 0$$

bulunur. $\partial H/\partial y$ ve $\partial H/\partial z$ ifadeleri 0 ve 1 arasındaki bir α değeri ile $(x, u + \alpha(w-u), u' + \alpha(w' - u'))$ noktasında hesaplanır. v fonksiyonu lineer bir eşitliği sağlar ve maksimum prensibi uygulanabilir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.1.1. $H, \partial H/\partial y, \partial H/\partial z$ sürekli ve $\partial H/\partial y \leq 0$ olmak üzere; $a < x < b$ aralığı için

$$w'' + H(x, w, w') \geq u'' + H(x, u, u') \quad (3.1.4)$$

eşitsizliği sağlansın. $w(x) - u(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında negatif olmayan bir M maksimumu alırsa,

$$w(x) - u(x) \equiv M$$

denkliği sağlanır.

H, x ve z 'ye bağlı fakat y 'ye bağlı değilse (3.1.4) eşitsizliğini değiştirmeksizin w 'ye herhangi bir sabit eklenebilir. Bu durumda Teorem 3.1.1'deki M 'nin negatif olmadığı varsayımı kaldırılabilir

Teorem 3.1.2. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ve θ ile ϕ her ikisi birden sıfır olmamak üzere $u(x)$

$$u'' + H(x, u, u') = 0, \quad a < x < b \text{ için} \quad (3.1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} -u'(a) \cos \theta + u(a) \sin \theta &= \gamma_1, \\ u'(b) \cos \phi + u(b) \sin \phi &= \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

sınır değer probleminin bir çözümü olsun. $H, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$ fonksiyonlarının sürekli olduklarını

ve $\frac{\partial H}{\partial y} \leq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Eğer $z_1(x)$,

$$z_1'' + H(x, z_1, z_1') \leq 0$$

$$-z_1'(a) \cos \theta + z_1(a) \sin \theta \geq \gamma_1$$

$$z_1'(b) \cos \phi + z_1(b) \sin \phi \geq \gamma_2$$

eşitsizliklerini ve $z_2(x)$,

$$z_2'' + H(x, z_2, z_2') \geq 0$$

$$-z_2'(a).\cos\theta + z_2(a).\sin\theta \leq \gamma_1$$

$$z_2'(b).\cos\phi + z_2(b).\sin\phi \leq \gamma_2$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x)$$

alt ve üst sınırları geçerlidir.

Bu teorem (3.1.6)'daki sınır şartlarını sağlayan (3.1.5)'in çözümünün tek olması gerektiğini gösterir. Çünkü u ve $\tilde{u}$ ise $u \equiv \tilde{u}$ denklemini bulmak için $z_1 = z_2 = \tilde{u}$ eşitliğini alabiliriz. Teorem 3.1.2'nin (3.1.5)'in bir çözümü için sayısal bir sınır elde etmek için nasıl kullanılabildiğini gösteren bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.1.1. $u'' - u^3 = 0$, $0 < x < 1$ denkleminin

$$u(0) = 0, u(1) = 1$$

sınır şartlarını sağlayan $u(x)$ fonksiyonunun çözümü için sınırlar bulalım .

$$z_1 = x, \quad z_2 = x^{(1+\sqrt{5})/2}$$

eşitliklerini seçelim. Böylece

$$z_1'' - z_1^3 = -x^3 \leq 0$$

$$z_2'' - z_2^3 = x^{-(3-\sqrt{5})/2} - x^{3(1+\sqrt{5})/2} \geq 0$$

olur. Bundan dolayı

$$x^{(1+\sqrt{5})/2} \leq u(x) \leq x$$

eşitsizliklerini bulunur. Şimdi başlangıç değer problemi için de bir yakınsaklık teoremi elde edebiliriz.

Teorem 3.1.3. $u(x)$ fonksiyonunun

$$u'' + H(x, u, u') = 0 \tag{3.1.7}$$

denklemini ve

$$u(a) = \gamma_1, \quad u'(a) = \gamma_2 \tag{3.1.8}$$

başlangıç şartlarının sağlandığını ve $H, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$ fonksiyonlarının sürekli olduklarını ve

$$\frac{\partial H}{\partial y} \leq 0 \text{ olduğunu kabul edelim. } z_1(x),$$

$$z_1'' + H(x, z_1, z_1') \geq 0$$

$$z_1(a) \geq \gamma_1, \quad z_1'(a) \geq \gamma_2$$

eşitsizliklerini ve $z_2(x)$,

$$z_2'' + H(x, z_2, z_2') \leq 0$$

$$z_2(a) \leq \gamma_1, \quad z_2'(a) \leq \gamma_2$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman

$$z_2(x) + \gamma_2 - z_2(a) \leq u(x) \leq z_1(x) + \gamma_1 - z_1(a)$$

$$z_2'(x) \leq u'(x) \leq z_1'(x)$$

alt ve üst sınırları elde edilir.

$\tilde{u}$, (3.1.7) ve (3.1.8)'in varsayılan diğer herhangi bir çözümü olmak üzere $z_1 = z_2 = \tilde{u}$ seçilmesiyle (3.1.7) ve (3.1.8)'den bir u çözümünün tekliği çıkar. Böylece $\tilde{u} \equiv u$ bulunur.

3.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Eliptik Operatörler İçin Maksimum Prensibi

Daha önce (3.1) de maksimum prensibinin lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin çeşitli sonuçlarını elde etmek için kullanılabildiğini göstermiştik. Şimdi aynı metotları lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili bilgi edinmek için uygulayabiliriz. $F(x, y, u, p, q, r, s, t)$ sekiz değişkenli sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer D' nin her bir (x, y) noktasında

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), p = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, q = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \\ r &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ifadeleri F de yerine yazıldığında verilen $f(x, y)$ fonksiyonuna eşit oluyorsa, D bölgesinde

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f(x, y) \quad (3.2.2)$$

kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümü iki değişkenli bir $u(x,y)$ fonksiyonudur.

Örnek 3.2.1. $F = (1 - p^2)r + (1 + q^2)t + 1$ yi seçilirse ilgili diferansiyel denklem

$$\left[1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = f(x, y) \quad (3.2.3)$$

şeklinde bulunur. Eğer $\xi^2 + \eta^2 > 0$ olmak üzere tüm (ξ, η) reel sayı çiftleri için, (3.2.2) ile verilen değerler F' de uygulandığında

$$\frac{\partial F}{\partial r} \xi^2 + \frac{\partial F}{\partial s} \xi \eta + \frac{\partial F}{\partial t} \eta^2 > 0 \quad (3.2.4)$$

elde ediliyorsa, (3.2.1) denkleminde bir (x,y) noktasında özel bir u fonksiyonuna göre eliptiktir denir. (3.2.1) denklemini D bölgesinin her bir noktasında eliptik ise bu denklem D bölgesinde eliptiktir denir. Lineer olmayan bir denklem bazı u fonksiyonları için eliptik olabilir ancak diğerleri için olmayabilir. Mesela (3.2.3) eşitliği $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < 1$ şeklindeki u fonksiyonları için eliptiktir. Aksi durumda eliptik değildir. Elbette (3.2.1) lineer ise (3.2.4) ün sol tarafı u 'dan bağımsız olup, eliptiklik sadece D' nin herhangi bir (x,y) noktasındaki F' nin karakterine bağlıdır.

Lineer olmayan eliptik denklemlerin maksimum prensibini sağladığı durumları belirlemeyi istiyoruz. (3.2.1)'in bir çözümünün $u(x,y)$ olduğunu ve $w(x,y)$ fonksiyonunun da

$$F(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \leq f(x, y)$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığını kabul edelim.

$$v(x, y) = u(x, y) - w(x, y)$$

fonksiyonunu oluşturup, kısmi türevler için alt indisleri kullanarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) - F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) \geq 0$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Çok-boyutlu analizin ortalama değer teoremini yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafına uygulayalım. Sonuç olarak

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 v \geq 0 \quad (3.2.5)$$

bulunur. Burada sıfır alt indisi

$$\begin{aligned} u_0 &= w + \theta(u - w), & p_0 &= w_x + \theta(u_x - w_x), & q_0 &= w_y + \theta(u_y - w_y), \\ r_0 &= w_{xx} + \theta(u_{xx} - w_{xx}), & s_0 &= w_{xy} + \theta(u_{xy} - w_{xy}), & t_0 &= w_{yy} + \theta(u_{yy} - w_{yy}) \end{aligned}$$

olmak üzere $(x, y, u_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$ noktasında türevlendiğini gösterir. Burada $\theta = \theta(x, y)$ sayısı, sıfır ile her bir (x, y) noktası arasındaki bir sayıdır. D 'deki her (x, y) noktası için $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere bütün $\theta w + (1-\theta)u$ şeklindeki fonksiyonlar için F 'nin eliptik olduğunu kabul edelim. Öyleyse (3.2.5) v fonksiyonu için lineer eliptik diferansiyel bir eşitsizliktir. v sabit değil ve

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 \leq 0$$

sağlanıyorsa v fonksiyonu D bölgesinin herhangi bir noktasında negatif olmayan bir maksimuma sahip değildir.

Teorem 3.2.1. D bölgesinde tanımlı

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = f(x, y)$$

eşitliğin çözümü $u(x, y)$ fonksiyonu olsun ve ∂D üzerinde,

$$u = g$$

olsun. D içinde z ve Z

$$F(x, y, Z, Z_x, Z_y, Z_{xx}, Z_{xy}, Z_{yy}) \leq f(x, y) \leq F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) \quad (3.2.6)$$

ve ∂D üzerinde $z(x, y) \leq g(x, y) \leq Z(x, y)$ eşitsizliklerini sağladığını kabul edelim. $0 \leq \theta \leq 1$ olacak şekilde her bir θ sabiti için F fonksiyonunun D 'de $u + \theta(z - u)$ ve $u + \theta(Z - u)$ ifadelerine göre eliptik olduğunu ve D içinde $\frac{\partial F}{\partial u} \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece D içinde

$$z(x, y) \leq U(x, y) \leq Z(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Genellikle u bilinmeyen fonksiyon olduğundan Teorem 3.2.1'i uygulamadaki zorluk, $\theta z + (1-\theta)u$ fonksiyonlarının istenen sınıf içinde F 'nin eliptikliğini kurmaya çalışmada ortaya çıkar. Bunun ile birlikte bu zorluğun çözümlenebildiği durumlarda vardır. Şimdi bir örnek verelim.

Γ 'nin x - y düzlemi üzerindeki izdüşümü konveks olan ve üç boyutlu uzayda z yönündeki her bir doğruyu en fazla bir kere kesen basit kapalı bir eğri olduğunu kabul edelim. Γ uzay eğrisini geren minimum alanlı bir yüzeyin var olduğu gösterilebilir. Bu yüzeyin denklemi $z = u(x, y)$ olup, u fonksiyonu,

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \quad (3.2.7)$$

lineer olmayan eşitliğini sağlar. 3.2.7'deki tanımlamada bu minimal yüzey denklemi

$$F \equiv (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

yapısındadır. (3.2.4) eliptiklik şartı

$$\begin{aligned} F_r \xi^2 + F_s \xi \eta + F_t \eta^2 &\equiv (1 + q^2)\xi^2 - 2pq\xi\eta + (1 + p^2)\eta^2 \\ &= \xi^2 + \eta^2 + (q\xi - p\eta)^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

ifadesine döndüür. Böylece her $\xi^2 + \eta^2 > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı her yerde (3.2.4) sağlanır. Böylece minimal yüzey denklemi daima eliptiktir.

Herhangi bir sabit (3.2.7)'yi sağladığından, z ve Z 'yi sabit olarak alarak Teorem 3.2.1 minimal yüzey denkleminde uygulanabilir. $\frac{\partial F}{\partial u} \equiv 0$ olduğunda herhangi bir minimal yüzeyin maksimumunu ve minimumu sınır üzerinde olması gerektiği sonucu çıkar. Yani yüzey alanın mümkün olduğunca küçük olması durumunda minimal bir yüzey dikey bir çıkıntıya sahip olamaz. Herhangi bir lineer fonksiyonun (3.2.7)'nin bir çözümü olduğundan da Γ sınır eğrisinin altında herhangi bir düzlemin üzerinde tamamen yayılan bir minimal yüzey bulunur. Aynı şekilde bu minimal yüzey Γ üzerinde bulunan herhangi bir düzlemin tamamen altında kalabilir. Yani minimal bir yüzeyin içini kesen herhangi bir düzlem aynı zamanda sınırını da kesmelidir.

Minimal yüzey eğriliği ve çözümleri uzun bir zamandan beri çalışılmaktadır. Maksimum prensibi yardımıyla elde edilen özellikler için ikinci bir örnek olarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = f(x, y) \quad (3.2.9)$$

eşitliğini inceliyoruz. Bu eşitlik diferansiyel geometrideki birçok problemde ortaya çıkan Monge-Ampere probleminin özel bir durumudur. (3.2.4) de verildiği gibi eliptiklik kriterlerini uygulayarak $t\xi^2 - 2s\xi\eta + r\eta^2 > 0$ eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ya (3.2.9) ya da (3.2.9)'dan elde edilen eşitliğin (-1) ile çarpılması $rt - s^2$ pozitif olduğu sürece eliptiktir. D 'de

$$f(x, y) > 0$$

kabul edersek (3.2.9) D 'deki bütün çözümler için eliptiktir. Bütün $u + \theta(z-u)$ fonksiyon ailesine göre (3.2.9)'un eliptikliğini kurmak genelde zordur. Mesela

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (3.2.10)$$

fonksiyonlarının her ikisi $K: x^2 + y^2 < 1$ diskinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = 1$$

eşitliğini sağlar. Ve ∂K üzerinde hem z hem de Z nin sınır değeri 1'e eşittir. Böylece Monge-Ampere eşitliği için Dirichlet probleminin tek bir çözüme sahip olmadığını görülür. Ayrıca $u = z$ olduğunda Teorem 3.2.1 sağlanmaz. Denklem z ve Z ye göre eliptik olmasına rağmen

$\frac{1}{2}(z + Z)$ 'ye göre eliptik olmadığından teoremin şartları karşılanmaz



IV.BÖLÜM

4. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN ELİPTİK OPERETÖRLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ

4.1. Dördüncü Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler İçin Maksimum Prensibi

Eğer u kapalı bir I aralığı üzerinde C^2 sınıfından reel değerli bir fonksiyon ve u , I aralığının içinde $u'' \geq 0$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu taktirde u 'nun maksimum prensibini sağladığı iyi bilinmektedir. Daha kesin olarak eğer u maksimumunu I aralığının bir iç noktasında alıyorsa, bu taktirde u , I üzerinde özdeş olarak sabit olur. Bununla birlikte bu sonuç, yüksek mertebeden eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlar için doğru değildir. Örneğin, $I=[1,1]$ ve $u=-x^2$ seçersek, u 'nun $u^{(4)} \geq 0$ eşitsizliğini sağladığı ve maksimumunu $x=0$ 'noktasında aldığı çıkar. Benzer şekilde $u=x^2$ aynı eşitsizliği sağlar ve maksimumunu $x=0$ 'noktasında alır.

u , $[a,b]$ aralığı üzerinde C^2 sınıfından reel değerli bir fonksiyon olsun. u 'nun

$$u^{(4)} \geq 0, \quad x \in (a,b)$$

$$u'(a) \geq 0, \quad u'(b) \leq 0$$

eşitsizliklerini sağladığını, bundan başka minimumunu bir $x_0 \in (a,b)$ noktasında aldığını kabul edelim. Bu taktirde u , $[a,b]$ aralığı üzerinde özdeş olarak sabittir.

Şimdi bu sonucun daha genel dördüncü mertebeden diferansiyel eşitsizliklere uygulanabildiği genişletilmesini vereceğiz.

Bundan başka ekstremumun alındığı uç noktalarda u''' fonksiyonunun işareti hakkında bilgi veren uç noktalar yakınında bir ekstremum prensibi elde edeceğiz.

Kabullerimizi formüle ederek esas sonuçlarını ifade edeceğiz. Ayrıca, sonuçların bir anlamda mümkün olanların en iyisi olduklarını göstermek üzere karşıt örnekler de vereceğiz.

Şimdi esas sonuçları ortaya koyan iki teorem verelim.

Teorem 4.1.1. $u \in C^4(a,b) \cap C^2[a,b]$ fonksiyonu

$$\left. \begin{aligned} u^{(4)} + g(x)u''' + h(x)u'' &\geq 0, & x \in (a,b) \\ u'(a) &\geq 0, & u'(b) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.1)$$

diferansiyel eşitsizliklerini sağlasın. Burada verilen $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları (a,b) 'nin kapalı her alt aralığında sınırlıdırlar. Eğer,

$$w(x) > 0, \quad x \in [a, b]$$

$$w'' + g(x)w' + h(x)w \leq 0, \quad x \in (a, b)$$

olacak şekilde bir $w \in C^2[a, b]$ fonksiyonu mevcutsa bu taktirde u özdeş olarak sabit olmadıkça (a, b) 'nin bir iç noktasında minimum değer alamaz [4].

Teorem 4.1.2. $u \in C^4(a, b) \cap C^2[a, b]$ a ve b de tek taraflı üçüncü türevlere sahip ve

$$u^{(4)} + g(x)u''' + h(x)u'' \geq 0, \quad x \in (a, b)$$

$$u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0$$

sistemini sağlayan sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Burada verilen $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları (a, b) 'nin her kapalı aralığı üzerinde sınırlıdır. Şimdi,

$$w(x) > 0, \quad x \in [a, b]$$

$$w'' + g(x)w' + h(x)w \geq 0, \quad x \in (a, b)$$

$$w'(a) = 0, \quad w'(b) = 0$$

sistemini sağlayan bir $w \in C^2[a, b]$ fonksiyonunun mevcut olduğunu kabul edelim. Eğer u minimum değerini $x=a$ noktasında alıyorsa, bu taktirde $u'''(a) < 0$, eğer u minimum değerini $x=b$ noktasında alıyorsa bu taktirde $u'''(b) > 0$ dır [4].

Uyarı 1. Minimum sözcüğünü maksimum sözcüğü ile yer değiştirmek üzere, u 'yu bulunduran tüm eşitsizlikler ters çevrilirse önceki sonuçlar sağlanmaya devam eder.

Uyarı 2. Eğer (a, b) üzerinde $h(x) \leq 0$ ise, bu taktirde $w(x) \equiv 1$ fonksiyonu Teorem 4.1.1. ve 4.1.2.'de belirtilen istenilen eşitsizlikleri sağlar.

Uyarı 3. Aşağıdaki örnekler (4.1.1.)'in ilk eşitsizliğinde düşük mertebeden terimlere kısıtlama getirilmediği zaman Teorem 4.1.1.'in yanlış olduğunu gösterirler.

Gerçekten, $u = -\sin x$ fonksiyonu minimum değerini $x = \pi/2$ 'de almakla beraber

$$u^{(4)} - u = 0, \quad x \in (-\pi, 2\pi)$$

$$u'(-\pi) = 1, \quad u'(2\pi) = -1$$

bağıntılarını sağlar. Benzer şekilde uygun seçilmiş a ve b için $u = -e^x \sin x$

$$u^{(4)} + 4u = 0, \quad x \in (a, b)$$

$$u'(a) \geq 0, \quad u'(b) \leq 0$$

sistemini sağlamakla beraber minimum değerini (gerçekkte, bir negatif minimum) bir $x_0 \in (a,b)$ noktasında alır. Nihayet,

$$u^{(4)} \pm u' = 0, \quad x \in (a,b)$$

$$u'(a) \geq 0, \quad u'(b) \leq 0$$

sistemleri minimum değerlerini uygun seçilmiş a ve b için (a,b) 'nin bir iç noktasında alan

$$u = -e^{\pm \frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \text{ çözümlerine sahiptirler.}$$

Uyarı 4. Eğer sınır şartları ya $u'(a) > 0$, $u'(b) \leq 0$ ya da $u'(a) \geq 0$, $u'(b) < 0$ ile yer değiştirildikleri zaman Teorem 4.1.2 genel olarak yanlıştır.

$$u^{(4)} = 0, \quad x \in (0,1)$$

$$u'(0) = 2, \quad u'(1) = 0$$

şartlarının sağlayan $u = 1 - (x-1)^2$ fonksiyonu minimum değerini $x=0$ noktasında almakla birlikte $u'''(0) = 0$ 'dır. Benzer şekilde,

$$u^{(4)} = 0, \quad x \in (-1,0)$$

$$u'(-1) = 3, \quad u'(0) = 0$$

şartlarının sağlayan $u = x^3 - 4$ fonksiyonu minimum değerini $x = -1$ noktasında almasına rağmen $u''(-1) = 6$ 'dır.

Şimdi yüksek mertebeden kısmi türevleri göstermedeki kolaylıktan ve yaygın kullanım şekli olduğundan dolayı; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ bir nokta ve $u(\mathbf{x})$ fonksiyon olmak üzere $u(\mathbf{x})$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevini

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i}$$

olarak ve laplace operatörünü

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{,ii}$$

olarak ve

$$\nabla u \nabla v = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = u_{,i} v_{,i}$$

şeklinde göstereceğiz.

4.2. Dördüncü Mertebeden Yarı-Lineer Eliptik Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler İçin Maksimum Prensibi

u Fonksiyonu D düzleminde

$$\Delta^2 u + \rho(x, y)f(u) = 0 \quad (4.2.1)$$

denkleminin bir çözümü olsun. Burada Δ Laplace operatörü, ρ pozitif yer fonksiyonu ve f 'de

$$s f(s) \geq 0 \quad (4.2.2)$$

bağıntısını sağlayan bir nokta fonksiyonudur.

D düzleminde yeteri kadar düzgün bir ∂D ile sınırlı bölge ve u 'da D 'de (4.2.1)'in bir C^4 çözümü olsun.

$$\Phi = u_{,i}u_{,i} - u\Delta u \quad (4.2.3)$$

tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= (u_{,i}u_{,i} - u\Delta u)_{,jj} \\ &= 2u_{,ij}u_{,ij} + 2u_{,i}u_{,ijj} - \Delta(u\Delta u) \\ &= 2u_{,ij}u_{,ij} + \rho u f(u) - (\Delta u)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. İki boyutta

$$u_{,ij}u_{,ij} = (\Delta u)^2 + 2(u_{,xy}^2 - u_{,xx}u_{,yy})$$

olduğundan

$$\Delta \Phi = u_{,ij}u_{,ij} + \rho u f(u) + 2(u_{,xy}^2 - u_{,xx}u_{,yy})$$

$$\Delta \Phi = (u_{,xx} - u_{,yy})^2 + 4u_{,xy}^2 + \rho u f(u)$$

elde edilir. Sonuç olarak, eğer f , (4.2.2)'yi sağlıyorsa o zaman Φ altharmoniktir [5].

Teorem 4.2.1. f , (4.2.2)'yi sağlıyor ve u , (4.2.1)'in D de bir C^4 çözümü ise, (4.2.3) ile verilen Φ , maksimumunu ∂D üzerinde alır.

D içinde $\tau(x, y) > 0$, $\Delta \tau \leq 0$ ve (4.2.1)'in bir çözümü u olmak üzere,

$$\psi = \tau^{-1} [u_{,i}u_{,i} - u\Delta u]$$

alalım.

$$\psi = \tau^{-1}\Phi, \tau > 0 \text{ ve } \Delta\Phi \geq 0 \text{ olduğundan}$$

$$\Delta\psi + 2\tau^{-1}\tau_{,i}\psi_{,i} + \tau^{-1}\psi(\Delta\tau) \geq 0$$

sonucu elde edilir. Bu eşitsizliği sağlayan ψ , ∂D üzerinde maksimum alır.

Lemma 4.2.1. ∂D üzerinde $u = 0$ ve u , D 'de C^2 sınıfından ise, D 'nin bir S altbölgesinde $u\Delta u \leq 0$ 'dır.

İspat: Farzedelim ki, D 'de $u\Delta u \geq 0$ 'dır. Üç durum söz konusudur.

Birinci olarak D 'nin tamamında $\Delta u \geq 0$ ve $u \geq 0$ olduğunu kabul edelim. D 'de $\Delta u \geq 0$ olması, u 'nun ∂D üzerinde maksimum almasını gerektirir. Buradan D içinde $u \equiv 0$ sonucuna varılır.

İkinci olarak D 'nin tamamında $\Delta u \leq 0$ ve $u \leq 0$ olduğunu kabul edelim. D 'de $\Delta u \leq 0$ olması u 'nun ∂D üzerinde minimum almasını gerektirir, buradan D 'de $u \equiv 0$ sonucuna varılır.

Üçüncü olarak $D' \subset D$ üzerinde $\Delta u \geq 0$, $u \geq 0$ ve $D - D'$ üzerinde $\Delta u \leq 0$, $u \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Mantıklı bir düşünme ile bir ve ikinci durumlardan D içinde $u \equiv 0$ olduğu sonucunu çıkarırız. Sonuç olarak D 'nin tamamında $u\Delta u \geq 0$ olması mümkün değildir.

C^4 sınıfı gözönüne alındığında u , D 'de (4.2.1)'i sağlar ve ∂D üzerinde $u = 0$ 'dır. D 'nin bir S altbölgesi için lemmadan

$$\Phi \geq 0$$

sonucu çıkar. $|\nabla u|_M = \max_{\partial D} |\nabla u|$ olmak üzere ve Teorem 4.2.1'den,

$$u\Delta u \geq -|\nabla u|_M^2$$

çıkar. $u\Delta u$ 'nun negatifliği hakkında alt yaklaşım yazabiliriz.

Teorem 4.2.2. Eğer f , (4.2.2)'yi sağlıyor ve ∂D üzerinde $u = 0$, (4.2.1)'in bir C^4 çözümü ise, A , D 'nin alanı olmak üzere

$$\int_D |\nabla u|^2 dx dy \leq \frac{1}{2} |\nabla u|_M^2 A$$

yazılabilir.

İspat: ∂D üzerinde $u = 0$ olduğundan dolayı

$$\int_D u \Delta u d\tau + \int_D |\nabla u|^2 d\tau = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Green özdeşliğinden

$$\int_D |\nabla u|^2 d\tau = - \int_D u \Delta u d\tau$$

yazabiliriz. Teorem 4.2.1'den

$$|\nabla u|^2 - u \Delta u \leq |\nabla u|_M^2$$

dir.

$$\int_D |\nabla u|^2 dx dy - \int_D u \Delta u dx dy \leq \int_D |\nabla u|_M^2 dx dy$$

$$\int_D |\nabla u|^2 dx dy + \int_D |\nabla u|^2 dx dy \leq |\nabla u|_M^2 \int_D dx dy$$

$$\int_D |\nabla u|^2 dx dy \leq \frac{1}{2} |\nabla u|_M^2 A$$

elde edilir. Şimdi,

$$\Delta^2 u + \rho(x, y) f(u) = 0, D \text{ de}$$

$$u = 0, \Delta u - q_1 \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \partial D \text{ üzerinde} \quad (4.2.4)$$

lineer olmayan Dirichlet özdeğer problemini göz önüne alalım. Burada f , (4.2.2)'yi sağlıyor, D konveks ve q_1 birinci özdeğerdir. Teorem 4.2.1'den biliyoruz ki, Φ , ∂D üzerinde bir P noktasında maksimum alır. E.Hopf'un maksimum prensibi [3]'den Φ sabit olmadıkça

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(P) > 0 \quad (4.2.5)$$

dır. Φ 'de

$$|\nabla u| = \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|$$

yazmakla

$$\Phi = \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 - u \Delta u$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 2 \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - \frac{\partial u}{\partial n} \Delta u - u \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u)$$

bulunur. Sınırdaki $u = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 2 \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - \frac{\partial u}{\partial n} \Delta u \quad (4.2.6)$$

elde edilir. Bundan başka sınırın komşuluğundan öne sürülen normal koordinatlarla

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + k \frac{\partial u}{\partial n} \quad (4.2.7)$$

yazabiliriz. Burada k sınırın eğriliğini göstermektedir. (4.2.6)'da (4.2.4) ve (4.2.7) kullanılarak

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 2 \frac{\partial u}{\partial n} \left[q_1 \frac{\partial u}{\partial n} - k \frac{\partial u}{\partial n} \right] - \frac{\partial u}{\partial n} \left[q_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 [q_1 - 2k]$$

bağıntısı elde edilir. (4.2.5)'den $q_1 - 2k > 0$ veya

$$q_1 \geq 2k_m \cdot k_m = \min_{\partial D} k$$

sonucuna varılır.

Teorem 4.2.3. Eğer u , (4.2.4)'ün bir C^4 çözümü ise, o zaman k_m , sınırın eğriliğindeki minimum olmak üzere $q_1 \geq 2k_m$ dir.

$$\Delta^2 u + \rho(x, y) f(u) = 0, \quad D' \text{ de}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \partial D \text{ üzerinde} \quad (4.2.8)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım.

Teorem 4.2.4. Eğer f , (4.2.2)'yi sağlıyorsa (4.2.8)'in var olan sıfırdan farklı klasik çözümü yoktur. $f(0) = 0$ ise, $u \equiv 0$, (4.2.8)'in bir çözümüdür.

İspat: (4.2.3) ile tarif edilen Φ 'yi ve u 'nun aşikar olmayan çözümünün varlığını kabul edelim.

O zaman (4.2.8)'in sınır şartları ve Teorem 4.2.1'den D' de

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - u\Delta u \leq 0$$

olduğu görülür.

$$\int_D |\nabla u|^2 dx dy - \int_D u \Delta u dx dy \leq 0$$

olur. Green özdeşliğinden

$$\int_D |\nabla u|^2 dx dy + \int_D |\nabla u|^2 dx dy \leq 0$$

$$\int_D |\nabla u|^2 dx dy \leq 0$$

sonucu çıkarılır. Teorem 4.2.2'den $\int_D |\nabla u|^2 dx dy \leq \frac{1}{2} |\nabla u|_M^2 A$ olduğunu biliyoruz. Netice olarak D 'de $|\nabla u| = 0$ oluşu ve süreklilikten $D \cup \partial D$ 'de $u \equiv 0$ 'dır. Bu bulmaya çalıştığımız sonuçla çelişir. Şimdi

$$\begin{aligned} \Delta^2 u + \rho(x, y) f(u) &= 0, D \text{ de} \\ u &= 0, \Delta u = 0, \partial D \text{ üzerinde} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada D 'nin konveks olduğu kabul edilmektedir.

Teorem 4.2.5. Eğer f , (4.2.2)'yi sağlıyorsa, (4.2.9)'un sıfırdan farklı klasik çözümü yoktur. Eğer $f(0) = 0$ ise $u \equiv 0$, (4.2.9)'un bir çözümüdür.

İspat: Teorem 4.2.4'de olduğu gibi (4.2.3) ile tarif edilen Φ 'yi ve u 'nun aşikar olmayan çözümünün varlığını kabul edelim. O zaman Φ , ∂D üzerinde bir P noktasında maksimum alır.

Hopf'un ikinci maksimum prensibinde ya $D \cup \partial D$ 'de Φ sabittir ya da $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(P) > 0$ 'dır.

1. Durum: Farz edelim $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(P) > 0$ 'dır. (4.2.6)'dan ve (4.2.9)'un sınır şartlarından

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 2 \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$$

bulunur. (4.2.7)'den ve (4.2.9)'un sınır şartlarından

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = -k \frac{\partial u}{\partial n}$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -2k \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2$$

elde edilir. D konveks olduğundan $k > 0$ 'dır. Dolayısıyla $-2k \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 < 0$ 'dır. Bu ise kabulümüzle çelişkiye düşer.

2. Durum: Φ 'nin $D \cup \partial D$ 'de sabit olduğunu kabul edelim ve bu sabiti de C ile gösterelim. Bu taktirde ∂D üzerinde $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 = C$ olduğu çıkar. $D \cup \partial D$ ve $\Phi = C$ olduğundan ∂D üzerinde

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ yazabiliriz ki birinci durumdaki incelemeden}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -2kC^2$$

elde ederiz. Sınır üzerindeki sürekli dönen teğete sahip konveks bir bölge için $k \neq 0$ olmaktadır. Ayrıca $C \neq 0$ olmaktadır, çünkü eğer $C = 0$ ise bu takdirde $|\nabla u|_M = 0$ olup Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.4'deki düşünce tarzı ile D içinde $u \equiv 0$ sonucuna varırız. Dolayısıyla $\Phi = C$ mümkün değildir [6].

Başka göz önüne alınacak bir durum olmadığından aşıkâr olmayan çözümün var olmadığı sonucuna varırız.

Şimdi dördüncü mertebeden lineer olmak zorunda olmayan bir diferansiyel denklem için aşağıdaki teoremin ifade ve ispatını verelim.

Teorem 4.2 6. C pozitif bir sabit, $f(u)$ pozitif, azalmayan diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere eğer, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\Delta^2 u + Cf(u) = 0 \tag{4.2.10}$$

kısmi diferansiyel denkleminin sabit olmayan bir çözümü ise ve ∂D üzerinde $\Delta u = 0$ ise, o zaman bir $x_0 \in \partial D$ ve her $x \in D$ için

$$|u(x_0)| > |u(x)| \tag{4.2.11}$$

dir [7].

İspat: $\Delta u = w$ ve $\Delta w = -Cf(u)$ (4.2.12)

sistemi (4.2.10)'un sabit olmayan $u \in C^4(D) \cap C^2(\bar{D})$ çözümünü sağlar.

$$\zeta(x) = 2C \int_0^{u(x)} f(v) dv + w^2 \quad (4.2.13)$$

tarif edelim. (4.2.13)'ün α 'ya göre iki defa türevini alırsak

$$\zeta_\alpha = 2Cf'(u(x))u_\alpha + 2w w_\alpha$$

$$\zeta_{\alpha\alpha} = 2Cf''(u(x))u_\alpha^2 + 2Cf'(u(x))u_{\alpha\alpha} + 2w_\alpha^2 + 2w w_{\alpha\alpha}$$

elde ederiz. Her $\alpha = x_k$ üzerinden toplam alırsak,

$$\Delta\zeta = 2Cf''(u(x))|\nabla u|^2 + 2Cf'(u(x))\Delta u + 2|\nabla w|^2 + 2w\Delta w \quad (4.2.14)$$

bulunur. (4.2.12)'yi (4.2.14)'de yerine yazarsak

$$\Delta\zeta = 2Cf''(u(x))|\nabla u|^2 + 2|\nabla w|^2$$

elde edilir. $f(u) \geq 0$ 'dan $\Delta\zeta \geq 0$ olur. Ama u sabit olmadığı için $\Delta\zeta \neq 0$ 'dır. Bundan dolayı, ζ sabit olmayan altharmonik fonksiyondur. $\zeta(x)$ 'in D 'nin herhangi bir iç noktasında maksimum alamayacağı altharmonik fonksiyonların maksimum prensibinden çıkar.

Yani her $x \in D$ ve bir $x_0 \in \partial D$ için

$$\zeta(x_0) > \zeta(x) \quad (4.2.15)$$

olur. (4.2.15)'den

$$2C \int_0^{u(x_0)} f(v) dv + (\Delta u(x_0))^2 > 2C \int_0^{u(x)} f(v) dv + (\Delta u(x))^2$$

çıkarılır. Bununlar birlikte $\Delta u(x_0) = 0$ 'dan dolayı

$$2C \int_0^{u(x_0)} f(v) dv > 2C \int_0^{u(x)} f(v) dv + (\Delta u(x))^2 > 2C \int_0^{u(x)} f(v) dv$$

elde edilir. $C > 0$ 'dan dolayı,

$$|u(x_0)| > |u(x)|$$

bulunur. Bu, ispatı istenen sonuçtur.

Örnek 4.2.1.

$$\Delta^2 u + c u = 0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer $c < 0$ ise

$$u = \sin x \cdot \sin y$$

fonksiyonu, $D : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ karesinde

$$\Delta^2 u - 4u = 0$$

denkleminin bir çözümü olup u , ∂D üzerinde,

$$\Delta u = 0$$

sınır şartını sağlar. Açıkça $|u|$ maksimumunu bir iç noktada alır.

4.3. Dördüncü Mertebeden Problemler

Genelde bağlantılı olarak elde edilebilir, maksimum prensibine uygun durumlar bulunmadığından ikinci merteye veya daha yüksek mertebeden denklemleri kapsayacak şekilde genişletmeleri bekleyemeyeceğimiz açıktır. Ancak bir takım benzer sonuçlar ispat edilebilir. Önce [6]'de verilen bir sonuca bakalım.

Teorem 4.3.1. D düzlemsel bölgesinde u fonksiyonu, $\Delta^2 u = 0$ eşitliğini sağlayan yeterli düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$P = |\nabla u|^2 - u \Delta u$$

fonksiyonu maksimum değerini ∂D üzerinde alır. İspata geçmeden önce bir lemmayı ispatlayalım

Lemma 4.3.1. Yeteri kadar düzgün herhangi bir v fonksiyonu için,

$$N v_{,ik} v_{,ik} \geq (\Delta v)^2$$

eşitsizliği N boyutlarında sağlanır.

İspat: ε 'na bağlı

$$Q(\varepsilon) = (v_{,ik} - \varepsilon \Delta v \delta_{ik})(v_{,ik} - \varepsilon \Delta v \delta_{ik}) \geq 0$$

kuadratik formunu göz önüne alalım $Q(\varepsilon)$ diskriminantı pozitif olmamalıdır. Yani,

$$(\Delta v v_{,ik} \delta_{ik})^2 \leq v_{,ik} v_{,ik} (\Delta v)^2 \delta_{jl} \delta_{jl}$$

yazılabilir ancak

$$v_{,ik} \cdot \delta_{ik} = \Delta v \quad \text{ve} \quad \delta_{jl} \delta_{jl} = N$$

olmalarından dolayı $N v_{,ik} v_{,ik} \geq (\Delta v)^2$ eşitsizliği bilinir.

İspat: Lemma 4.3.1 yardımıyla

$$P_{,k} = 2u_{,ik} u_{,i} - u_{,k} \Delta u - u \Delta u_{,k}$$

$$\begin{aligned} \Delta P &= 2u_{,ikk} u_{,i} + 2u_{,ik} u_{,ik} - (\Delta u)^2 - 2u_{,k} (\Delta u)_{,k} - u \Delta^2 u \\ &= 2u_{,ik} u_{,ik} - (\Delta u)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece maximum prensibi, Teorem 4.3.1'i gerektirir.

Artık Teorem 4.3.1 çeşitli yollardan genişletilebilir. İlk olarak D' de

$$\Delta^2 u + \rho(x_1, x_2) f(u) = 0 \tag{4.3.1}$$

denkleminin çözümlerine genişletelim. Aşağıdaki sonuç [6]'den elde edilmiştir.

Teorem 4.3.2. $\rho > 0$, $D \subset E^2$ de $\Delta \rho \leq 0$ ve herhangi s için $sf(s) \geq 0$ olmak üzere u , Teorem 4.3.1'in yeteri kadar düzgün bir çözümü olsun bu takdirde D' de $P < 0$ olmadıkça

$$P = \frac{1}{\rho} \left(|\nabla u|^2 - u \Delta u \right)$$

fonsiyonu ∂D üzerinde maksimumunu alır [8]..

İspat: Bilinen işlemleri yaparsak

$$P_{,k} = - \left(\frac{\rho_{,k}}{\rho^2} \right) \left(|\nabla u|^2 - u \Delta u \right) + \frac{1}{\rho} \left(2u_{,ik} u_{,i} - u_{,k} \Delta u - u (\Delta u)_{,k} \right)$$

$$\Delta P = \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(|\nabla u|^2 - u \Delta u \right) + 2 \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \nabla \left(|\nabla u|^2 - u \Delta u \right) + \frac{1}{\rho} \Delta \left(|\nabla u|^2 - u \Delta u \right)$$

buluruz. Bu eşitliklerden faydalanarak

$$\Delta P - 2\rho \nabla P \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = \left(\Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) - 2\rho \left| \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \right|^2 \right) \left(|\nabla u|^2 - u \Delta u \right) + \frac{1}{\rho} \Delta \left(|\nabla u|^2 - u \Delta u \right)$$

yazabiliriz. Şimdi Lemma 4.3.1 yardımını ve ρ , $f(u)$ üzerindeki kabullerimizle

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla u|^2 - u\Delta u) &= 2u_{,ik}u_{,ik} - (\Delta u)^2 - u\Delta^2 u \\ &= 2u_{,ik}u_{,ik} - (\Delta u)^2 + \rho u f(u) \geq 0\end{aligned}$$

buluruz. Ayrıca kabullerimizden dolayı

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) - 2\rho\left|\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|^2 = -\frac{1}{\rho^2}\Delta\rho \geq 0$$

ifadesini elde ederiz. Böylece D içinde P

$$\Delta P - 2\rho\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right)\nabla P + \frac{\Delta\rho}{\rho}P \geq 0$$

ifadesini sağlar. Teorem 4.3.2 ifadesi derhal çıkar. $\rho = \text{sabit}$ ise Teorem 4.3.2’deki “ D ’de $P < 0$ olmadıkça” şartı ihmal edilebilir.

Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2’de incelenen P fonksiyonları ikinci mertebe problemler için incelenenler ile yakından ilgilidir. Bunun ile birlikte Payne tarafından verilen daha karmaşık olan durumlar şimdiki sonuçta incelenmiştir [9].

Teorem 4.3.3. $D \subset E^N$ olmak üzere u fonksiyonu $\rho \equiv 1$, $f \leq 0$ şartları ile (4.3.1)’in yeteri kadar düzgün bir çözümü olsun

$$(\Delta u)_M = \max_{\partial D} \Delta u$$

eşitliğini alalım. Bu taktirde

$$P = u_{,ij}u_{,ij} - \nabla u \nabla(\Delta u) - \int_D f(y)dy - \frac{2(N-1)}{N+2}(\Delta u)_M \Delta u + \frac{N-4}{2(N+2)}(\Delta u)^2$$

fonksiyonu maksimum değerini ∂D üzerinde alır.

İspat: P ’nin Laplasiyeni

$$\begin{aligned}\Delta P &= 2(\Delta u)_{,ij}u_{,ij} + 2u_{,ijk}u_{,ijk} - |\nabla(\Delta u)|^2 - 2(\Delta u)_{,ij}u_{,ij} \\ &\quad - \nabla u \nabla(\Delta^2 u) - f(u)\Delta u - f'(u)|\nabla u|^2 - \frac{2(N-1)}{N+2}(\Delta u)_M \Delta^2 u \\ &\quad + \frac{N-4}{(N+2)}(\Delta^2 u \Delta u + |\nabla(\Delta u)|^2) \\ &= 2u_{,ijk}u_{,ijk} - \frac{6}{N+2}|\nabla(\Delta u)|^2 - \frac{2(N-1)}{(N+2)}f(u)[(\Delta u)_M - \Delta u]\end{aligned}$$

ile verilir. $f(u) \leq 0$ olduğundan (4.3.1) diferansiyel eşitliğinden Δu 'nun altharmonik olduğu çıkar böylece D 'de

$$\Delta u \leq (\Delta u)_M \quad (4.3.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

ΔP için olan ifadede u 'nun üçüncü türevleriyle oluşan terimlerin toplamı negatif olmadığı gösterilmelidir. Bu aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.3.2. $D \subset E^N$ olmak üzere v keyfi bir $C^3(D)$ fonksiyonu olsun. O zaman

$$v_{,ijk} v_{,ijk} \geq \frac{3}{N+2} |\nabla(\Delta v)|^2 \quad (4.3.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki ispat [9]'daki orijinal ispatından daha kısadır.

İspat: Keyfi bir γ sayısı için

$$\sum_{i,j,k} [v_{,ijk} - \gamma(\Delta v)_{,i} \delta_{jk} + (\Delta v)_{,j} \delta_{ik} + (\Delta v)_{,k} \delta_{ij}]^2 \geq 0$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlik

$$v_{,ijk} v_{,ijk} - 6\gamma |\nabla(\Delta u)|^2 + 3\gamma^2 (N+2) |\nabla(\Delta u)|^2 \geq 0$$

eşitsizliğine indirgenebilir. Buna ilaveten γ 'ya göre verilmiş kuadratik ifade için diskriminant şartı (4.3.3)'e eşittir. Bu, Teorem 4.3.3'ün ispatını tamamlar.

Teorem 4.3.3'de verildiği gibi iki boyutta P ,

$$P = u_{,ij} u_{,ij} - \nabla u \nabla(\Delta u) - \int_D f(y) dy - \frac{1}{4} (\Delta u + 2(\Delta u)_M) \Delta u \quad (4.3.4)$$

şeklini alır. $u, \rho \equiv 1$ şartıyla (4.3.2a)'nın bir çözümü olsun. Bu durumda (4.3.3) teoremi

$$P \leq \max_{\partial D} \left(u_{,ij} u_{,ij} - \frac{1}{4} (\Delta u)^2 - \frac{1}{2} \Delta u (\Delta u)_M \right)$$

şeklinde ifade edilebilir ki, bu $\delta = \max_{\partial D} |\Delta u|^2$ olmak üzere yeniden

$$u_{,ij} u_{,ij} - \nabla u \nabla(\Delta u) - \int_D f(y) dy - \frac{1}{4} (\Delta u + (\Delta u)_M)^2 \leq \delta^2 \quad (4.3.5)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int_D u_{,ij} u_{,ij} dx = \int (\Delta u)^2 dx$$

gerçeği kullanılarak (4.3.5)' in integrasyonu ∂D üzerinde $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ise

$$\frac{7}{4} \int_D (\Delta u)^2 dx - \int_D \left(\int f(y) dy \right) dx \leq \frac{5}{4} \delta^2 A \quad (4.3.6)$$

eşitsizliğini verir. Burada A , D 'nin alanıdır. $c > 0$ olmak üzere $f(u) = -c$ olduğunda uygulama 5.2'nin sabit bir yük altında sınırda gerilen ince elastik bir levhanın denklemi olarak yorumlanabildiği ortaya çıkar. Buradan

$$c \int_D u dx = \int_D (\Delta u)^2 dx$$

yazılabilir ve böylece (4.3.6), δ ve A 'ya göre tabakanın potansiyel enerjisine bir sınır olan

$$\int_D (\Delta u)^2 dx \leq \frac{5}{11} \delta^2 A \quad (4.3.7)$$

eşitsizliğini verir. ∂D üzerinde $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ise

$$\int_D u_{,ij} u_{,ij} dx = \int_D (\Delta u)^2 dx$$

bağıntısının çıkarılmasını gösterelim.

$$\frac{1}{2} \Delta(|\nabla u|^2) dx = u_{,ij} u_{,ij} + \nabla u \nabla(\Delta u)$$

eşitliğini yazabilir ve Green teoreminden

$$\frac{1}{2} \int_D \Delta(|\nabla u|^2) dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n} (|\nabla u|^2) dx = \oint_{\partial D} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

buluruz. Böylece

$$0 = \int_D u_{,ij} u_{,ij} dx + \int_D \nabla u \nabla(\Delta u) dx = \int_D u_{,ij} u_{,ij} dx - \int_D (\Delta u)^2 dx$$

sonucu çıkar. (4.3.1) denkleminin $\rho \equiv 1$ olması halini son sonuç olarak verelim.

Teorem 4.3.4. $D \subset E^N$ bölgesinde $f'(u) \leq 0$ olsun .O zaman

$$P = u_{,ij} u_{,ij} - \nabla u \nabla(\Delta u) + \frac{N-4}{N+2} \int f(y) dy + \frac{N-4}{2(N+2)} (\Delta u)^2$$

fonksiyonu maksimum değerini ∂D üzerinde alır.[9]

İspat: Doğrudan bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}\Delta P = & 2(\Delta u)_{,ij} + 2u_{,ijk}u_{,ijk} - |\nabla(\Delta u)|^2 - \nabla u \nabla(\Delta^2 u) - 2(\Delta u)_{,ij}u_{,ij} \\ & + \frac{N-4}{N+2} \left(f(u)\Delta u + f'|\nabla u|^2 \right) + \frac{N-4}{N+2} \left(\Delta u \Delta^2 u + |\nabla(\Delta u)|^2 \right)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Lemma 4.3.1 ve $\rho \equiv 1$ şartıyla (4.3.1) diferansiyel eşitliği yardımıyla D' de $f'(u) \leq 0$ olduğundan

$$\Delta P \geq -\frac{2}{N+2} f'(u)|\nabla u|^2 \geq 0$$

eşitsizliği bulunur. Bu ifade de Teorem 4.3.4'ü gerektirir. ∂D üzerinde $u, \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ şartını

sağlıyor ise

$$P \leq \frac{3N}{2(N+2)} d^2 \quad (4.3.8)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve D üzerindeki integral ,

$$\int_D (\Delta u)^2 dx \leq \frac{1}{2} \delta^2 A$$

eşitsizliğini verir. Fakat $N \leq 4$ ise

$$u_{,ij}u_{,ij} - \nabla u \nabla(\Delta u) \leq \delta^2 \quad (4.3.9)$$

eşitsizliğini elde etmek için, Teorem 4.3.4' de P 'nin son iki terimini ihmal edilebilir.

$$\Delta |\nabla u|^2 = 2u_{,ij}u_{,ij} + 2\nabla u \nabla(\Delta u)$$

olduğundan (4.3.9)'dan D 'nin içinde

$$\Delta (|\nabla u|^2) \geq -2\delta^2 \quad (4.3.10)$$

eşitsizliğini elde edilebilir. ψ, D içinde

$$\Delta \psi = -1,$$

∂D üzerinde

$$\psi = 0 \quad (4.3.11)$$

olan çözüm olsun.

Buradan ∂D üzerinde $|\nabla u|^2 = 0$ olup, dolayısıyla. (4.3.10) ve maksimum prensibinden

$$|\nabla u|^2 \leq 2\delta^2\psi \quad (4.3.12)$$

eşitsizliği bulunur. Özel olarak $\rho_1(N=2)$ iç çemberin yarıçapı olmak üzere

$$\tau^2 = \max_D |\nabla u|^2 \leq 2\delta^2\psi_M \leq \delta^2 \frac{\rho^2}{2} \quad (4.3.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu bölümde verilen bazı sonuçlar ve uygulamalar [9]'da aynen vardır.



V. BÖLÜM

5. UYGULAMALAR

5.1 Sıkıştırılan bir sıvı akışı

Sıkıştırılabilir sıvılar akışı çalışmalarında ortaya çıkan

$$[\mu(|\text{grad } \psi| - \psi_y^2)] \psi_{xx} + 2\psi_x \psi_y \psi_{xy} + [\mu(|\text{grad } \psi| - \psi_x^2)] \psi_{yy} = 0 \quad (5.1.1)$$

denklemini inceleyeceğiz. Akış hızının x ve y bileşenleri

$$\left(\frac{1}{\rho} \psi_y - \frac{1}{\rho} \psi_x\right) \quad (5.1.2)$$

ile verilmiştir. Herhangi bir noktada q hızı $\frac{|\text{grad } \psi|}{\rho}$ dir. p basıncının ρ yoğunluğunun

bilinen bir fonksiyonu olduğu kabul ediyoruz. Bu durumda μ bağıntısı $\rho^2 \frac{dp}{d\rho}$ 'ya eşit olup,

$$|\text{grad } \psi|^2 = 2\rho^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho$$

Bernoulli bağıntısını ρ cinsinden çözerek $|\text{grad } \psi|$ 'nin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

ρ_0 sabiti sonsuzda belirlenen şartlarla belirlenir.

$$\left(\frac{d}{d\rho}\right) \left\{ 2\rho^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho \right\} = 4\rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho - 2\rho \frac{dp}{d\rho} = 2\rho \left(q^2 - \frac{dp}{d\rho} \right)$$

olduğundan $q^2 < \frac{dp}{d\rho}$ olduğu sürece ρ için Bernoulli bağıntısını $|\text{grad } \psi|$ 'nin tek-değerli bir

fonksiyonu olarak çözebiliriz. Böylece $\mu(|\text{grad } \psi|)$ fonksiyonu q , $q^2 < \frac{dp}{d\rho}$ olacak şekilde

yeteri kadar küçük olduğunda tanımlanır. Sesin bölgesel hızının $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ olduğu gösterilebilir.

Bu nedenden $q^2 < \frac{dp}{d\rho}$ için olan bir akışa subsoniktir denir. $|\text{grad}\psi|^2 = p^2 q^2$ 'yi ve

$\mu(|\text{grad}\psi|) = \rho^2 \frac{dp}{d\rho}$ olduğunu hatırlayarak $q^2 < \frac{dp}{d\rho}$ eşitsizliğini

$$|\text{grad}\psi|^2 < \mu(|\text{grad}\psi|) \quad (5.1.3)$$

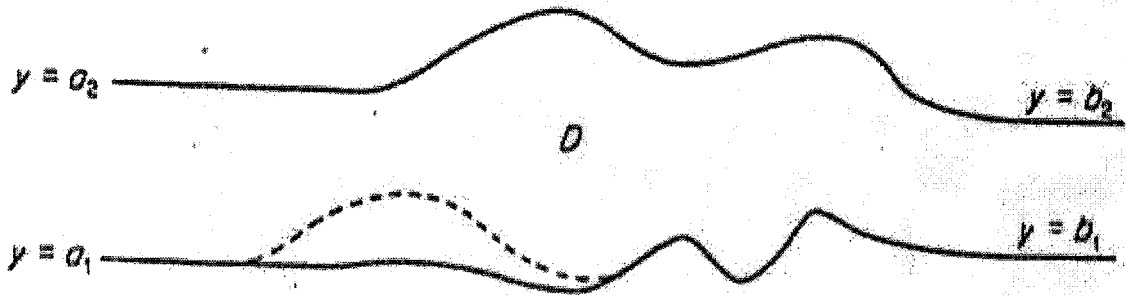
şeklinde yazabiliriz.

(5.1.2)'deki hız vektörü, akış çizgileri olarak bilinen $\psi = \text{sabit}$ eğrilerine teğettir. $\psi = \psi(x, y)$ fonksiyonu akış fonksiyonu olarak adlandırılır. $\psi = a$ ve $\psi = b$ gibi iki akış çizgisi arasında birim zamanda geçen kütle $b-a$ dır.

$$\begin{aligned} & [\mu(|\text{grad}\psi|) - \psi_y^2] \xi^2 + 2\psi_x \psi_y \xi \eta + [\mu(|\text{grad}\psi|) - \psi_x^2] \eta^2 \\ &= [\mu(|\text{grad}\psi|) - |\text{grad}\psi|^2] \cdot (\xi^2 + \eta^2) + (\psi_x \xi + \psi_y \eta)^2 \\ &\geq [\mu(|\text{grad}\psi|) - |\text{grad}\psi|^2] \cdot (\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz. (5.1.3)'den dolayı (5.1.1) denklemi her subsonik akışa göre eliptiktir.

Şimdi maksimum prensibinin (5.1.1) denklemine uygulanabilen bir uygulamasını verelim. İki katı duvar ile sınırlı sonsuz bir kanaldaki subsonik bir akışı inceleyelim. Yeterli genişlikteki sağ ve sola uzaklıklar için yani $|x|$ değerleri için duvarların x eksenine paralel doğrular olduğunu varsayalım.



Şekil 5.1

Toplam kütsel akışı A ve akış fonksiyonu ψ olarak kabul ederek alt duvarda $\psi = 0$ 'ı ve üst duvarda $\psi = A$ 'yı seçebiliriz. $x \rightarrow \mu \infty$ iken akışın düzgün hale geldiğini kabul ediyoruz.

Özellikle şekil 5.1'den gösterildiği gibi duvarın doğru parçalarının denklemlerini $y=a_1$, $y=a_2$, $y=b_1$, $y=b_2$ olarak belirterek y 'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x,y) = A \frac{y-a_1}{a_2-a_1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x,y) = A \frac{y-b_1}{b_2-b_1} \quad (5.1.4)$$

olduğunu kabul edebiliriz.

(5.1.1) denkleminin solundaki ifadenin ψ 'nin ikinci türevlerine göre lineer olduğuna dikkat edelim. Bu tür bir denkleme kuasilineerdir denir. Bu ikinci türevlerin katsayılarını x ve y 'nin sabit fonksiyonları olarak düşünersek ψ 'in daha düşük mertebeli terimi olmayan lineer eliptik ikinci mertebeden diferansiyel denklem sağladığını görürüz. Böylece E.Hopf (5. ve 7.) teoremleri uygulanır. Özellikle tüm kanalda $0 < \psi < A$ 'dır.

Kanalı D ile ifade ederek D 'nin alt sınır duvarının sonlu bir parçasının yüksekliğini arttırarak elde edilen D 'nin bir alt bölgesi olan ikinci bir D_1 kanalı düşünüyoruz. Bu değişken kısım Şekil 5.1'de kesikli bir çizgi ile gösterilmektedir.

ψ_1 , ψ ile ifade edilen orijinal akış gibi aynı A toplam akışını taşıyan D_1 kanalı boyunca (akan) subsonik bir akışla uygun olan akış fonksiyonu olsun. ψ_1 , böylece D_1 alt duvarında $\psi_1=0$ ve D_1 'in üst duvarında $\psi_1=A$ sınır şartları olan D_1 'deki (5.1.1) diferansiyel denklemini sağlar. ψ_1 fonksiyonu ayrıca (5.1.4) şartlarını da sağlar.

(5.1.1) denklemini kuasilineer olduğundan ψ ve ψ_1 için olan eşitliğin arasındaki farkın

$$\begin{aligned} & [\mu(|grad\psi|) - \psi^2_y](\psi - \psi_1)_{xx} + 2\psi_x\psi_y(\psi - \psi_1)_{xy} \\ & + [\mu(|grad\psi|) - \psi^2_x](\psi - \psi_1)_{yy} \\ & + [(\psi + \psi_1)_y\psi_{1xy} - (\psi + \psi_1)_x\psi_{1yy}](\psi - \psi_1)_x \\ & + [(\psi + \psi_1)_x\psi_{1xy} - (\psi + \psi_1)_y\psi_{1xx}](\psi - \psi_1)_y \\ & + \Delta\psi_1[\mu(|grad\psi|) - \mu(|grad\psi_1|)] = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazabildiğini buluruz. Ortalama değer teoremini son terime uygulayarak $(\psi - \psi_1)_x$ ve $(\psi - \psi_1)_y$ 'nin lineer bir kombinasyonu elde edilir. Bu şekilde $\psi - \psi_1$ 'in lineer eliptik bir denklemini sağladığını buluruz. Şimdi E.Hopf'un (5. ve 7.) teoremlerini $\psi - \psi_1$ farkına

uygulayabiliriz. D_1 'in üst duvarında $\psi - \psi_1 = 0$ ve D_1 'in alt duvarında $\psi - \psi_1 \geq 0$ olduğunu buluruz. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow \mu \infty} (\psi - \psi_1) = 0$$

dır ve D_1 içinde

$$\psi > \psi_1$$

olduğu sonucuna varırız. Ortak sınır duvarları üzerinde $\psi = \psi_1$ olduğundan $\partial D \cap \partial D_1$ üzerinde

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} < \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \quad (5.1.5)$$

eşitsizliğini buluruz.

Şimdi D 'de $0 < \psi < A$ olup, üst duvar üzerinde $\psi \equiv A$ dır. Dolayısıyla üst duvar üzerinde $\frac{\partial \psi}{\partial n} > 0$ olup aynı şekilde orada $\frac{\partial \psi_1}{\partial n} > 0$ dır. Böylece (5.1.5) üst duvarda $|\text{grad} \psi_1| > |\text{grad} \psi|$ olduğunu gösterir. q hızının $|\text{grad} \psi|$ 'nin artan bir fonksiyonu olduğunu göstermek zor değildir. D ve D_1 'e ait olan duvarın bir parçasında $\frac{\partial \psi}{\partial n} < \frac{\partial \psi_1}{\partial n} < 0$ eşitsizliğini buluruz. Sonuç olarak alt duvarın ortak alt kısmı üzerinde

$$q_1 < q$$

olur.

Bu durum duvarın bir kısmını içeri alarak bir kanalı daraltmanın karşı duvardaki hızı artırdığı fakat içeri alınan duvarın değişmeyen kısmındaki hızı düşürdüğünü göstermektedir.

Uyarılar 5.1.1 Yukarıdaki karşılaştırmada sadece (5.1.1)'deki eşitliğin kuasilineer olduğunu ve ψ ye göre eliptik olduğu gerçeklerini kullandık. $[\mu(|\text{grad} \psi|)]$ fonksiyonu (5.1.1)'deki eşitliğin tanımlandığı bütün fonksiyonlara göre eliptik olmadığı durumda da sonuç geçerli olur.

Özellikle ikinci ψ_1 çözümüne göre eliptik olmak zorunda değildir [1].

5.2. Teorem 4.3.2'nin Bir Uygulaması

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u + \rho f(u) &= 0 & D \subset E^2 \text{ nin içinde} \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \partial D \text{ üzerinde} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

ve

$$\left. \begin{array}{l} \Delta^2 u + \rho f(u) = 0 \\ u = \Delta u = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} D \subset E^2 \text{ nin içinde} \\ \partial D \text{ üzerinde} \end{array} \quad (5.2.2)$$

problemlerini inceleyelim. [6] ve [11]'de belirttiği gibi aşağıdaki sonuç Teorem 4.3.2'den elde edilir.

Sonuç 5.2.1. Eğer $\rho > 0$, $\Delta \rho \leq 0$ ve $sf(s) \geq 0$ ise problem (5.2.1) ve (5.2.2) problemleri konveks bir düzlemsel bölgede açık olmayan hiçbir çözüme sahip değildir.

İspat: Teorem 4.3.2 ye göre her sabit olmayan ve negatif olmayan P maksimumunu ∂D üzerinde almalıdır. Fakat ∂D üzerinde k eğriliği pozitif olarak kabul edildiğinden kolayca ((5.2.2) durumu)

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -2k \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 < 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan dolayı D' de $P \equiv \text{sabit}$ ya da $P < 0$ dır. Eğer P bir sabit ise $P \equiv 0$ yani $|\nabla u| = 0$ dır. Sonuç olarak sadece $u = \text{sabit} = 0$ tek ihtimaldir. D' de $P < 0$ durumunu göstermeliyiz. Fakat $P < 0$, D' de

$$|\nabla u|^2 - u \Delta u < 0$$

eşitsizliği olmasını gerektirir. Böylece D' de

$$u \Delta u > 0$$

eşitsizliğini sağlamak zorunda olacaktır. Böylece

$$i) D' \text{de } u > 0 \text{ ve } \Delta u > 0$$

$$ii) D' \text{de } u < 0 \text{ ve } \Delta u < 0$$

$$iii) D' \subset D' \text{de } u < 0 \text{ ve } \Delta u < 0 \text{ ve } D \setminus D' \text{de } u > 0 \text{ ve } \Delta u > 0,$$

durumları ortaya çıkar. ∂D üzerinde $u = 0$ olduğundan maksimum prensibi i) ve ii) durumlarında $u \equiv 0$ olmasını gerektirir. iii) $\partial D'$ üzerinde $u = 0$ ve D' üzerinde ve D' de $u \equiv 0$ olmasını gerektirir.

Eğer u , (4.3.2a) bir çözümü ise Teorem 4.3.2'nin doğrudan uygulanmasıyla D' de

$$|\nabla u|^2 - u \Delta u < 0$$

eşitsizliğini elde eder ve D üzerinden integrallendikten sonra bir çelişki olan

$$2 \int_D |\nabla u|^2 dx < 0$$

eşitsizliği bulunur. Yani D 'de $u = \text{sabit} = 0$ olmalıdır [10].

Singüler katsayılı veya lineer olmayan dördüncü mertebeden eliptik denklemler ile ilgili maksimum prensipleri için [12],[13],v.b. çalışmalara bakılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] PROTTER, M.H., WEINBERGER, H.F., 1967, **Maximum Principles in Differential Equations**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [2] PADILLA, P., 1997, The Principal Eigenvalue and Maximum Principle for Second Order Elliptic Operators on Riemannian Manifolds, **J. of Math. Anal. And App.**, 205, 285-312.
- [3] HOPF, E., 1927, Elementare Bemerkungen über die Lösungen Partieller Differentialgleichungen Zweiter Ordnung Vom Elliptischen Typus, **Sitzungsher d. Preuss. Akad. d. Wiss.**, Vol. 19, pp. 147-152.
- [4] DUNNINGER, D.R., 1981, Maximum Principles for Fourth Order Ordinary Differential Inequalities, **J. of Math. Anal. And App.**, 82, 399-405.
- [5] SCHAEFER, P.W., 1977, On a Maximum Principle for a Class of Fourth Order Semilinear Elliptic Equations, **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.**, A 77, 319-323.
- [6] MİRANDA, C. 1948, Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili, **Giorn. Mat. Battaglini** (6) 78, 97-118.
- [7] CHOW, S.N., DUNNINGER, D.R., LASOTA, A., 1973, A Maximum Principle for Fourth Order Ordinary Differential Equations, **J. of Differential Equations**, 14, 101-105.
- [8] SPERB, R.P., 1981, **Maximum Principles and Their Applications**, Academic Pres, Inc. New York.
- [9] PAYNE, L.E. 1976, Some remarks on maximum principles, **J. Analyse Math.** 30, 421-433.
- [10] DALMASSO, R., 1995, Uniqueness Theorems for Some Fourth Order Elliptic Equations, **Proc. of the Amer. Math. Soc.**, 123, 117-118.
- [11] TSAI, L., 1994, Existence of Solutions for Fourth Order Differential Equations, **Bull. Of The Inst. of Math. Acad. Sinica**, 22, pp. 1-16.
- [12] ÇATALBAŞ, M.N., 1989, The Maximum Principle and Singular Elliptic Equations, **The J. of Firat Univ.**, 4(1), 46-56
- [13] ÇATALBAŞ, M.N., 1991, Maximum Principles for Solutions of Some Fourth-order Singular Elliptic Equations, **Twenty Second Annual Iranian Mathematics Conference, Ferdowsi Univ.**, 86-91.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Karaman’da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi İzmir’de tamamladıktan sonra 1997 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nü bitirdim.11.11.1997 tarihinde Giresun iline matematik öğretmeni olarak atandım. 05.07.2001 Elazığ iline tayin oldum. 2002 güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümün’de Yüksek Lisans’a başladım. Evliyim ve iki çocuk babasıyım.

Hikmet YAMAN