

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**m. MERTEBEDEN λ -YAKINSAKLIK VE
BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI**

DOKTORA TEZİ

Sinan ERCAN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof. Dr. Çiğdem ASMA BEKTAŞ

OCAK-2017

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**m. MERTEBEDEN λ -YAKINSAKLIK VE
BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI**

**DOKTORA TEZİ
Sinan ERCAN
(121121202)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi**

Danışman: Prof. Dr. Çiğdem ASMA BEKTAŞ

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 06.12.2016
OCAK-2017**

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**m. MERTEBEDEN λ -YAKINSAKLIK VE
BAZI YENİ DİZİ UZAYLARI**

DOKTORA TEZİ

Sinan ERCAN

(121121202)

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 06.12.2016
Tezin Savunulduğu Tarih: 02.01.2017**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Çiğdem ASMA BEKTAŞ (F.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK (F.Ü.)

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU (A.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN (İ.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü.)

OCAK-2017

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, akademik hayatım boyunca, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Çiğdem ASMA BEKTAŞ'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezin yazılması süresince manevi desteğini aldığım eşime teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince maddi desteklerinden dolayı **TÜBİTAK**'a teşekkür ederim.

Sinan ERCAN
ELAZIĞ – 2017

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	iv
SUMMARY	v
SEMBOLLER LİSTESİ.....	vi
1. Temel Tanım ve Teoremler	1
2. Klasik Dizi Uzayları.....	7
2.1 Literatür Özeti	7
2.2 Kesirli Mertebeden Fark Operatörü.....	15
3. Mutlak Olmayan Tipten Yeni Dizi Uzayları	20
3.1 λ^m -yakınsaklık ve λ^m -sınırlılık	20
3.2 λ^m -Dizi Uzayları	24
4. Bazı Kapsama Bağlılıkları.....	30
5. α -, β -, γ - Dualleri.....	36
6. Bazı Matris Dönüşümleri	44
7. SONUÇLAR	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ	53

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; çalışma boyunca kullandığımız temel tanımlar, teoremler ve bazı eşitsizlikler verildi.

İkinci bölümde; klasik dizi uzayları ve literatür özeti verildi.

Üçüncü bölümde; λ^m -yakınsaklık ve λ^m -sınırlılık kavramları tanımlandı, klasik anlamda yakınsaklık ve sınırlılık ile aralarındaki ilişki incelendi.

$\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) mutlak olmayan tipten yeni dizi uzayları tanımlanıp bu uzayların bazı topolojik özellikleri verildi.

Dördüncü bölümde; $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) uzaylarının kendi aralarındaki kapsama bağıntıları verildi. Ayrıca bu uzaylar ile klasik dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları incelendi.

Beşinci bölümde; bu uzayların α -, β - ve γ - dualleri hesaplandı.

Altıncı bölümde; tanımladığımız uzaylardan bazı klasik dizi uzaylarına matris sınıfları karakterize edildi.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzayları, BK-uzayları, Schauder bazı, α -, β - ve γ - dual, Matris dönüşümleri, Mutlak olmayan tipten dizi uzayları.

SUMMARY

λ -convergence of m-th order and some new sequence spaces

This thesis consists of six main chapters.

In chapter one; basic definitions, theorems and some inequalities which we used in our thesis are introduced.

In chapter two; classical sequence spaces and literature data are examined.

In chapter three; λ^m -convergence and λ^m -boundedness are defined and relationship of these notions with ordinary convergence and ordinary boundedness is examined.

The spaces $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $\ell_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) which are non-absolute type new sequence spaces are defined and some topological properties of these spaces are introduced.

In chapter four; some inclusion relations between $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $\ell_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) spaces are introduced. Furthermore, inclusion relations between these spaces and classical sequence spaces are investigated..

In chapter five; α -, β - and γ -duals of these spaces are computed.

In chapter six; some matrix classifications of these spaces into some classical sequence spaces are characterized.

Key Words: Sequence spaces, BK-spaces, Schauder basis, α -, β -, γ -dual, Matrix transformations, Sequence spaces of non-absolute type.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi

w : Reel ya da kompleks terimli bütün dizilerin uzayı

ℓ_{∞} : Sınırlı dizilerin uzayı

c : Yakınsak dizilerin uzayı

c_0 : Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı

cs : Yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı

bs : Sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayı

ℓ_p : p . dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı

X_A : A sonsuz matrisinin bir X dizi uzayı üzerindeki etki alanı

Δ : Fark operatörü

Δ^m : m . mertebeden fark operatörü

Δ^{α} : α . mertebeden kesirli fark operatörü

F : Doğal sayılar cümlesinin bütün sonlu alt cümlelerinin ailesi

$(X : Y)$: X 'den Y 'ye tanımlı matrislerin cümlesi

1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel tanımlar, teoremler ve eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel ya da kompleks sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, \cdot : K \times X \rightarrow X$$

dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlarsa X cümlesine K üzerinde bir lineer uzay denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır.

L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1.x = x$

L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

dir.

Teorem 1.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subset X$ olsun. Her $y_1, y_2 \in Y$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ oluyorsa, Y 'ye X uzayının lineer bir alt uzayı denir.

Tanım 1.3. Tanım cümlesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi olan fonksiyona dizi denir. Değer cümlesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olan diziye reel terimli, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi olan diziye de kompleks terimli dizi adı verilir.

Tanım 1.4. Reel ya da kompleks terimli bütün dizilerin cümlesini w ile gösterilir. Bu cümle dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir lineer uzaydır. w 'nin her bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir.

Tanım 1.5. X boş olmayan bir cümle olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

(i) $d(x, y) \geq 0,$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği)
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d 'ye X 'de bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. [4]

Tanım 1.6. (X, d) bir metrik uzay ve A , X in bir alt cümlesi olsun. A nın kapanışı X 'e eşitse, yani $\bar{A} = X$ ise A 'ya X 'de yoğun denir. X sayılabilir yoğun bir alt cümleye sahipse X 'e ayrılabilir denir. [4]

Tanım 1.7. X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bu dönüşüme bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ ve α skaleri için

- (i) $\|x\| \geq 0$
- (ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir. Eğer (iii) yerine (iii)* $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ alınırsa X bir p -normlu uzay olur. [1]

Tanım 1.8. X bir normlu uzay ve (x_n) , X 'de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisi X 'de yakınsaktır denir. [1]

Tanım 1.9. X normlu bir uzay ve (x_n) , X 'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. [1]

Tanım 1.10. X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı iki lineer uzay olsun. $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve α skaleri için

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ ve } T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer operatör denir.

Tanım 1.11. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun.

T operatörü normu koruyorsa, yani her $x \in X$ için $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T 'ye lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün bire-bir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T 'ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ve Y normlu uzaylarına izomorfik uzaylar denir. [2]

Tanım 1.12. X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X 'den K 'ya bir f dönüşümü her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y \in X$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

özellikliğini sağlıyorsa f 'ye X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. [3]

Tanım 1.13. Normlu bir uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. [4]

Tanım 1.14. Bir X tam normlu uzayına Banach uzayı denir. [4]

Tanım 1.15. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\begin{aligned} \tau_k : X &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow \tau_k(x) = x_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK-uzayı (Banach Koordinat Uzayı) denir. [5]

Tanım 1.16. X bir dizi uzayı ve A sonsuz bir matris olmak üzere

$$X_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in X\} \quad (1.1)$$

cümlesi A matrisinin etki alanı olarak tanımlanır. [6]

Tanım 1.17. $A = (a_{nk})$ matrisi her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ve $k > n$ iken $a_{nk} = 0$ ise A matrisine üçgensel bir matris denir.

$x \in w$ ve A, B üçgensel matrisler olmak üzere $A(Bx) = (AB)x$ sağlanır. Ayrıca bir U üçgensel matrisi her zaman $U^{-1} = V$ olacak şekilde bir V ters matrisine sahiptir. V ters matrisi de üçgensel bir matristir. Dolayısıyla her $x \in w$ için $U(Vx) = (UV)x$ sağlanır.

Tanım 1.18. $A = (a_{nk})$ matrisi, $c \subset c_A$ ($x \in c$ iken $Ax \in c$) ve $\lim_n (Ax)_n = \lim_n x_n$ şartlarını sağlıyorsa regüler matris olarak adlandırılır.

Tanım 1.19. $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k) \in w$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $((Ax)_n)$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen A -dönüşümü denir. Ayrıca x dizisine A -toplanabilirdir denir. [7]

Teorem 1.20. (Steinhaus Teoremi) A regüler bir matris olsun. Bu taktirde sınırlı olup A -toplanabilir olmayan bir dizi mevcuttur. [8]

Teorem 1.21. X bir BK-uzayı ve T üçgensel bir matris olsun. X_T cümlesi her $x \in X_T$ için

$$\|x\|_T = \|T(x)\|$$

normuna göre bir BK-uzayıdır. [6]

Tanım 1.22. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir $b = (b_k) \in X$ dizisi verilsin. Eğer her $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k \right\| = 0$$

olacak şekilde bir tek $\alpha = (\alpha_k)$ skaler dizisi mevcut ise (b_k) dizisine X uzayının Schauder bazı denir. [1]

Teorem 1.23. Schauder bazına sahip her Banach uzayı ayrılabilir.

Teorem 1.24. T üçgensel bir matris ve tersi de S olsun. (b_n) bir X normlu uzayının Schauder bazı ise X_T normlu uzayının Schauder bazı $(S(b^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$ olur. [9]

Tanım 1.25. K bir cisim ve X bir vektör uzayı olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir. Her $x, y, z \in X$ ve α skaleri için

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (kompleks eşlenik),
- (iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

$$(iv) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle .$$

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \quad (1.2)$$

ile verilen bir norm tanımlar. Buna göre, iç çarpım uzayları birer normlu uzaylardır. [4]

Tanım 1.26. Bir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı (1.2) normuna göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. [4]

Teorem 1.27. (Paralel Kenar Kanunu) Herhangi bir iç çarpım uzayında

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliği sağlanır. [4]

Tanım 1.28. (Abel kısmi toplam formülü) $(a_k), (b_k) \in w$ olsun. $x_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ve $x_{-1} = 0$ olmak üzere her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=v}^{n+v} a_k b_k = \sum_{k=v}^{n+v} x_k (b_k - b_{k+1}) - x_{v-1} b_v + x_{n+v} b_{n+v+1}$$

sağlanır. [10]

Tanım 1.29. $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $x = (x_k) \in \ell_p$, $y = (y_k) \in \ell_q$ alalım. Bu taktirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir. [1]

Tanım 1.30. $p \geq 1$ olmak üzere $x = (x_k)$ ve $y = (y_k) \in \ell_p$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe Minkowski Eşitsizliği denir. [1]

Tanım 1.31. (Jensen eşitsizliği) $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ ve $r > s > 0$ olmak üzere

$$\left(\sum_{k=0}^n |x_k|^r \right)^{1/r} < \left(\sum_{k=0}^n |x_k|^s \right)^{1/s}$$

eşitsizliği mevcuttur. [11]

Teorem 1.32. Bir X Banach uzayından Y normlu uzayına sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi (T_n) olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty$$

ise bu taktirde

$$\sup_n \|T_n\| < \infty$$

dir. Dolayısıyla $(\|T_n\|)$ normlar dizisi sınırlı olur. [1]

Tanım 1.33. X bir dizi uzayı olsun. X 'in α -, β - ve γ -duali

$$X^\alpha = \left\{ a = (a_k) \in w : \text{her } x = (x_k) \in X \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \right\},$$

$$X^\beta = \left\{ a = (a_k) \in w : \text{her } x = (x_k) \in X \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x_k) \text{ yakınsak} \right\},$$

$$X^\gamma = \left\{ a = (a_k) \in w : \text{her } x = (x_k) \in X \text{ için } \sup_n \left| \sum_{k=0}^n a_k x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. [11]

Tanım 1.34. (Gamma Fonksiyonu) $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

(1.3) ile verilen eşitlikten Gamma fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir. [25]

- (i) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),$
- (ii) $p \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(p+1) = p!,$
- (iii) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2!, \Gamma(4) = 3! \dots$

2. Klasik Dizi Uzayları

ℓ_∞ , c ve c_0 sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizilerin uzayıdır. Bu uzaylar $\|x\| = \sup_n |x_n|$ normu ile birer BK-uzaylarıdır. ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) p -mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayıdır. Bu uzay $\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}$ normu ile bir BK-uzayıdır. bs ve cs sırasıyla sınırlı seri ve yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayıdır. bs , cs uzayları da $\|x\| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$ normuyla BK-uzaylarıdır.

Bu uzaylardan bazıları arasındaki kapsama bağıntıları aşağıdaki gibidir.

- (i) $\ell_p \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$
- (ii) Jensen eşitliğinden $0 < p < r$ için $\ell_p \subset \ell_r$ kapsaması sağlanır. [11]

2.1 Literatür Özeti

Birçok araştırmacı sonsuz bir matris yardımıyla yeni dizi uzayları inşa etmişlerdir. Araştırmacılar bu uzayların genel olarak çeşitli topolojik ve geometrik özelliklerini inceleyip, var olan dizi uzayları ile aralarındaki kapsama bağıntılarını, α -, β - ve γ - duallerini ve çeşitli matris sınıflarını araştırmışlardır.

Şimdi sonsuz matrislerin etki alanı vasıtasıyla tanımlanan dizi uzaylarına ait bazı çalışmalar hakkında bilgi verelim.

$\Delta = (a_{nk})$ fark matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk} = \begin{cases} -1 & , \quad k = n \\ 1 & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.1)$$

olmak üzere Kızmaz [12], ℓ_∞ , c , c_0 klasik dizi uzaylarını

$$\ell_\infty(\Delta) = (\ell_\infty)_\Delta = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^{n+1} (-1)^{n-k} x_k \right| < \infty \right\},$$

$$c(\Delta) = (c)_\Delta = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n+1} (-1)^{n-k} x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\Delta) = (c_0)_\Delta = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{n+1} (-1)^{n-k} x_k = 0 \right\}$$

uzaylarına genelleştirdi. Et [13], ikinci mertebeden $\Delta^2 = (a_{nk}^2)$ fark matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}^2 = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \\ -2 & , \quad k = n-1 \\ 1 & , \quad k = n-2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^2) = (\ell_\infty)_{\Delta^2} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{v=0}^2 (-1)^v \binom{2}{v} x_{k-v} \right| < \infty \right\},$$

$$c_0(\Delta^2) = (c_0)_{\Delta^2} = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^2 (-1)^v \binom{2}{v} x_{k-v} \right) = 0 \right\},$$

$$c(\Delta^2) = (c)_{\Delta^2} = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^2 (-1)^v \binom{2}{v} x_{k-v} \right) \text{ mevcut} \right\}$$

uzaylarını tanımladı. Daha sonra Malkowsky [14], m . mertebeden genelleştirilmiş $\Delta^m = (a_{nk}^m)$ fark matrisi

$$a_{nk}^m = \begin{cases} (-1)^{n-k} \binom{m}{n-k} & , \quad \max\{0, n-m\} \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, bu uzayları

$$\ell_\infty(\Delta^{(m)}) = (\ell_\infty)_{\Delta^{(m)}} = \left\{ x \in w : \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k-v} \right| < \infty \right\},$$

$$c(\Delta^{(m)}) = (c)_{\Delta^{(m)}} = \left\{ x \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k-v} \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\Delta^{(m)}) = (c_0)_{\Delta^{(m)}} = \left\{ x \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k-v} = 0 \right\}$$

uzaylarına genelleştirdi. Et ve Çolak [15], m . mertebeden genelleştirilmiş Δ^m fark operatörü, $m \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = (\ell_\infty)_{\Delta^m} = \left\{ x \in w : \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right| < \infty \right\},$$

$$c(\Delta^m) = (c)_{\Delta^m} = \left\{ x \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\Delta^m) = (c_0)_{\Delta^m} = \left\{ x \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} = 0 \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar.

Moricz [16], Λ -kuvvetli yakınsaklık kavramını tanımladı. Mursaleen ve Numan [7], [17] bu çalışmadan yararlanarak, bir $\lambda = (\lambda_k)$ dizisi

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere λ -yakınsaklık ve λ -sınırlılık kavramlarını tanımladılar. Ayrıca λ -yakınsaklık ve λ -sınırlılık kavramlarının klasik anlamda yakınsaklık ve sınırlılık ile ilişkisini incelediler. Daha sonra (2.2) ile tanımlı λ dizisini kullanarak, $\Lambda = (\lambda_{nk})$ sonsuz matrisini her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklinde verdiler ve

$$c^\lambda = (c)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0^\lambda = (c_0)_\Lambda = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k = 0 \right\},$$

$$\ell_{\infty}^{\lambda} = (\ell_{\infty})_{\Lambda} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right| < \infty \right\},$$

$$\ell_p^{\lambda} = (\ell_p)_{\Lambda} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right|^p < \infty, (0 < p < \infty) \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar. Daha sonra Mursaleen ve Numan [18], (2.1) ile verilen Δ fark operatöründen yararlanarak, bu uzayları

$$c_0^{\lambda}(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$c^{\lambda}(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\}$$

uzaylarına genelleştirdiler. Burada $\bar{\Lambda} = (\bar{\lambda}_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{\lambda}_{nk} = \begin{cases} \frac{(\lambda_k - \lambda_{k-1}) - (\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_n}, & k < n \\ \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

alınırsa, bu matrisin etki alanı vasıtasıyla bu uzaylar

$$c_0^{\lambda}(\Delta) = (c_0)_{\bar{\Lambda}} \text{ ve } c^{\lambda}(\Delta) = (c)_{\bar{\Lambda}}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Ganie ve Sheikh [19], $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$ olmak üzere bir $u = (u_k)$ dizisini kullanarak

$$c_0^{\lambda}(\Delta_u^u) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k (x_k - x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$c(\Delta_u^{\lambda}) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_k (x_k - x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\}$$

uzaylarını tanımladılar. Burada her $n, k \in \mathbb{N}$ için $\hat{\Lambda} = (\hat{\lambda}_{nk})$ matrisi

$$\hat{\lambda}_{nk} = \begin{cases} \frac{(\lambda_k - \lambda_{k-1}) - (\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_n} u_k & , \quad k < n \\ \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} u_n & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu uzaylar bu matrisin etki alanı olarak

$$c(\Delta_u^\lambda) = (c)_{\hat{\lambda}} \text{ ve } c_0(\Delta_u^\lambda) = (c_0)_{\hat{\lambda}}$$

şeklinde tanımlanabilir. Sönmez ve Başar [20], ikili band matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$B = (b_{nk}(b_1, b_2))$$

$$b_{nk}(b_1, b_2) = \begin{cases} b_1 & , \quad k = n \\ b_2 & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere

$$c^\lambda(B) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(b_1 x_k - b_2 x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0^\lambda(B) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(b_1 x_k - b_2 x_{k-1}) = 0 \right\}$$

uzaylarını tanımladılar. Burada $\bar{B} = (\bar{b}_{nk}(b_1, b_2))$ matrisi

$$\bar{b}_{nk}(b_1, b_2) = \begin{cases} \frac{b_1(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + b_2(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_n} & , \quad k < n \\ b_1 \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu dizi uzayları $\bar{B}$ matrisinin etki alanı olarak

$$c^\lambda(B) = (c)_{\bar{B}} \text{ ve } c_0^\lambda(B) = (c_0)_{\bar{B}}$$

şeklinde verilebilir.

Candan [21], $\tilde{r} = (r_n)$ ve $\tilde{s} = (s_n)$ pozitif ve yakınsak diziler ve $\tilde{B}(r, s) = (\tilde{b}_{nk}(r, s))$

matrisi

$$\tilde{b}_{nk}(\tilde{r}, \tilde{s}) = \begin{cases} r_n & , \quad k = n \\ s_n & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere

$$c_0^\lambda(\tilde{B}) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(r_k s_k + s_{k-1} x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$c^\lambda(\tilde{B}) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(r_k s_k + s_{k-1} x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\}$$

uzaylarını tanımladı. Burada $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{\lambda}_{nk} = \begin{cases} \frac{r_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + s_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_n} & , \quad k < n \\ r_n \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlanırsa, bu uzaylar

$$c^\lambda(\tilde{B}) = (c)_{\tilde{\Lambda}} \text{ ve } c_0^\lambda(\tilde{B}) = (c_0)_{\tilde{\Lambda}}$$

şeklinde elde edilir. Duyar, Demiriz ve Özdemir [22], r , s ve t sıfırdan farklı reel sayılar ve

$\hat{B} = (b_{nk}(r, s, t))$ matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk}(r, s, t) = \begin{cases} r & , \quad k = n \\ s & , \quad k = n-1 \\ t & , \quad k = n-2 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-2 \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere

$$\ell_\infty^\lambda(\hat{B}) = \left\{ x = (x_n) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2}) \right| < \infty \right\},$$

$$c^\lambda(\hat{B}) = \left\{ x = (x_n) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2}) \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0^\lambda(\hat{B}) = \left\{ x = (x_n) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2}) = 0 \right\},$$

$$\ell_p^\lambda(\hat{B}) = \left\{ x = (x_n) \in w : \sum_n \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})(rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2}) \right|^p < \infty \right\}$$

uzaylarını tanımladılar. Burada $\hat{W} = (w_{nk}^\lambda)$ matrisi

$$w_{nk}^\lambda = \begin{cases} \frac{r(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + s(\lambda_{k+1} - \lambda_k) + t(\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1})}{\lambda_n}, & k < n-1 \\ \frac{r(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) + s(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\lambda_n}, & k = n-1 \\ \frac{r(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\lambda_n}, & k = n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu uzaylar bu matrisin etki alanı olarak

$$\ell_\infty^\lambda(\hat{B}) = (\ell_\infty)_{\hat{W}}, \quad \ell_p^\lambda(\hat{B}) = (\ell_p)_{\hat{W}}, \quad c_0^\lambda(\hat{B}) = (c_0)_{\hat{W}} \text{ ve } c^\lambda(\hat{B}) = (c)_{\hat{W}}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bişgin ve Sönmez [23], bir $G^m(r, s) = (g_{nk}^m(r, s))$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$

ve $m \geq 2$ için

$$g_{nk}^m(r, s) = \begin{cases} \binom{m-1}{n-k} r^{m-n+k-1} s^{n-k}, & \max\{0, n-m+1\} \leq k \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$c_0(G^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{v=0}^{m-1} r^{m-v-1} s^v x_{k-v} = 0 \right\},$$

$$c(G^m) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{v=0}^{m-1} r^{m-v-1} s^v x_{k-v} \text{ mevcut} \right\}$$

uzaylarını tanımladılar. Burada $T^{m\lambda}(r, s) = (t_{nk}^{m\lambda}(r, s))$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ için

$$t_{nk}^{m\lambda}(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} r^{m-v-1} s^v (\lambda_{k+v} - \lambda_{k+v-1}) & , \quad k < n-m+2 \\ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v-1} r^{m-v} s^{v-1} (\lambda_{n-m+v+1} - \lambda_{n-m+v}) & , \quad k = n-m+2 \\ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v-2} r^{m-v+1} s^{v-2} (\lambda_{n-m+v+1} - \lambda_{n-m+v}) & , \quad k = n-m+3 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{r^{m-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) + (m-1)r^{m-2}s(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\lambda_n} & , \quad k = n-1 \\ \frac{r^{m-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\lambda_n} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

alınırsa, bu dizi uzayları

$$c^\lambda(G^m) = (c)_{T^{mk}} \text{ ve } c^\lambda(G^m) = (c^\lambda)_{T^{mk}}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Braha ve Başar [24], bir $\lambda = (\lambda_k)$ dizisi $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$\lambda_{k+1} \geq 2\lambda_k$ olmak üzere, bir $A(\lambda) = (a_{nk}(\lambda))$ matrisini her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{nk}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda_k - 2\lambda_{k-1} + \lambda_{k-2}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımladılar. Bu matris yardımıyla

$$A_\lambda(c_0) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} (A_\lambda x)_n = 0 \right\},$$

$$A_\lambda(c) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} (A_\lambda x)_n \text{ mevcut} \right\},$$

$$A_\lambda(\ell_\infty) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} |(A_\lambda x)_n| < \infty \right\}$$

uzaylarını tanımladılar. Bu uzaylar $A(\lambda)$ matrisinin etki alanı vasıtasıyla

$$A_\lambda(c_0) = (c_0)_{A(\lambda)}, \quad A_\lambda(c) = (c)_{A(\lambda)} \text{ ve } A_\lambda(\ell_\infty) = (\ell_\infty)_{A(\lambda)}$$

şeklinde tanımlanabilir.

2.2 Kesirli Mertebeden Fark Operatörü

Baliarsingh and Dutta [25], $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere Δ^α , $\Delta^{(\alpha)}$, $\Delta^{-\alpha}$ ve $\Delta^{(-\alpha)}$ kesirli mertebeden fark operatörlerini $x \in w$ olmak üzere, sırasıyla

$$\Delta^\alpha x_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i! \Gamma(\alpha-i+1)} x_{k+i} \quad (2.4)$$

$$\Delta^{(\alpha)} x_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i! \Gamma(\alpha-i+1)} x_{k-i} \quad (2.5)$$

$$\Delta^{-\alpha} x_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(1-\alpha)}{i! \Gamma(1-\alpha-i)} x_{k+i} \quad (2.6)$$

$$\Delta^{(-\alpha)} x_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(1-\alpha)}{i! \Gamma(1-\alpha-i)} x_{k-i} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlayıp yakınsak olduklarını kabul ettiler. Örneğin $\alpha = 1/2$ alırsak $\Delta^\alpha x_k$, $\Delta^{(\alpha)} x_k$, $\Delta^{-\alpha} x_k$ ve $\Delta^{(-\alpha)} x_k$ sırasıyla

$$\Delta^{1/2} x_k = x_k - \frac{1}{2} x_{k+1} - \frac{1}{8} x_{k+2} - \frac{1}{16} x_{k+3} - \frac{5}{128} x_{k+4} - \frac{7}{256} x_{k+5} - \frac{21}{1024} x_{k+6} + \dots,$$

$$\Delta^{(1/2)} x_k = x_k - \frac{1}{2} x_{k-1} - \frac{1}{8} x_{k-2} - \frac{1}{16} x_{k-3} - \frac{5}{128} x_{k-4} - \frac{7}{256} x_{k-5} - \frac{21}{1024} x_{k-6} + \dots,$$

$$\Delta^{-1/2} x_k = x_k + \frac{1}{2} x_{k+1} + \frac{3}{8} x_{k+2} + \frac{5}{16} x_{k+3} + \frac{35}{128} x_{k+4} + \frac{63}{256} x_{k+5} + \frac{231}{1024} x_{k+6} + \dots,$$

$$\Delta^{(-1/2)} x_k = x_k + \frac{1}{2} x_{k-1} + \frac{3}{8} x_{k-2} + \frac{5}{16} x_{k-3} + \frac{35}{128} x_{k-4} + \frac{63}{256} x_{k-5} + \frac{231}{1024} x_{k-6} + \dots.$$

şeklinde elde edilir. (2.4)-(2.7) operatörlerinin üçgensel sonsuz matris şeklindeki gösterimleri şu şekildedir.

$$\Delta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & -\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & -\alpha & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & -\alpha & 1 & 0 & \dots \\ -\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} & -\alpha & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{-\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & \alpha & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\Delta^{(-\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \alpha & 1 & 0 & \dots \\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} & \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} & \alpha & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$\alpha = 1$ alınırsa Δ^α operatörü Kızmaz [12] tarafından çalışılan Δ , $\Delta^{(\alpha)}$ operatörü Malkowsky ve Parashar [14] tarafından çalışılan $\Delta^{(1)}$ operatörüne indirgenir. Eğer $\alpha = m$ alınırsa Δ^α operatörü Et ve Çolak [15] tarafından çalışılan Δ^m , $\Delta^{(\alpha)}$ operatörü Malkowsky ve Parashar [14] tarafından çalışılan $\Delta^{(m)}$ operatörüne indirgenir.

Ercan ve Bektaş [26], $\Delta^{(\alpha)}$ operatörü yardımıyla $c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ ve $c(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzayların özelliklerini incelemişlerdir. Bu uzaylar her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\widehat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta^{(\alpha)} x_k$$

olmak üzere

$$c(\Delta_\lambda^{(\alpha)}) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\Lambda}_n(x) \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)}) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\Lambda}_n(x) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $\Delta^{(\alpha)}$ operatörü (2.5) ile tanımlı olup, negatif indisli terimler sıfıra eşit kabul edilmiştir, örneğin $\lambda_{-1} = 0$ ve $x_{-1} = 0$ 'dır. Her $n, k \in \mathbb{N}$ için $\widehat{\Lambda} = (\lambda_{nk}^\alpha)$ üçgensel matrisi

$$\lambda_{nk}^\alpha = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i! \Gamma(\alpha+1-i)} \cdot \frac{\lambda_{i+k} - \lambda_{i+k-1}}{\lambda_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad n < k \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. $c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ ve $c(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ dizi uzayları

$$\|x\|_{c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})} = \|x\|_{c(\Delta_\lambda^{(\alpha)})} = \|\widehat{\Lambda}(x)\|_\infty = \sup_n |\widehat{\Lambda}_n(x)|$$

normu altında birer BK-uzayıdır. $|x| = (|x_k|)$ olmak üzere $\|x\|_{(c_0)_\lambda} \neq \|x\|_{(c_0)_\lambda}$ ve $\|x\|_{(c)_\lambda} \neq \|x\|_{(c)_\lambda}$

olduğundan $c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ ve $c(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ dizi uzayları mutlak olmayan tipten birer dizi uzaylarıdır.

Teorem 2.2.1 : $c(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ ve $c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ dizi uzayları, sırasıyla, c ve c_0 dizi uzaylarına lineer izomorftur.

İspat. Bir $y = (y_n)$ dizisini

$$y_n = \widehat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta^{(\alpha)} x_k$$

şeklinde alalım. T dönüşümünü $T : c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)}) \rightarrow c_0$, $T(x) = y = \widehat{\Lambda}(x)$ şeklinde tanımlayalım.

(2.5) ile verilen ifadeden

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}_n(x) &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta^{(\alpha)} x_k \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i! \Gamma(\alpha-i+1)} x_{k-i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{\lambda_n} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{0!\Gamma(\alpha-0+1)} x_0 \right) + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{0!\Gamma(\alpha-0+1)} x_1 + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{1!\Gamma(\alpha-1+1)} x_0 \right) \right) + \\
&\dots + \left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{0!\Gamma(\alpha-0+1)} x_n - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{1!\Gamma(\alpha-1+1)} x_{n-1} + \dots (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)} x_0 \right) \right) \\
&= x_0 \left(\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{0!\Gamma(\alpha-0+1)} \right) - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{1!\Gamma(\alpha-1+1)} \right) + \dots + (-1)^n \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)} \right) \right) + \\
&x_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{0!\Gamma(\alpha-0+1)} \right) - \dots + (-1)^n \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(n-1)!\Gamma(\alpha-(n-1)+1)} \right) \right) + \\
&\dots + x_n \left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{0!\Gamma(\alpha-0+1)} \right) \right) \\
&= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i!\Gamma(\alpha-i+1)} \cdot \frac{\lambda_{i+j} - \lambda_{i+j-1}}{\lambda_n} \right) x_j
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\hat{\Lambda}(x) \in c_0$ iken $x \in c_0(\Delta^{(\alpha)})$ olur. T dönüşümünün lineer olduğunu gösterelim. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $(x_k), (y_k) \in c_0(\Delta^{(\alpha)})$ için

$$\begin{aligned}
T(\alpha x + \beta y) &= \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta^{(\alpha)}(\alpha x_k + \beta y_k) \right) \\
&= \alpha T(x) + \beta T(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla T dönüşümü lineerdir.

Şimdi bire-bir olduğunu gösterelim. Bire-birliğini göstermek için $T(x) = 0$ ise $x = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
T(x) = y &= \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta^{(\alpha)} x_k \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olması $x = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla T dönüşümü bire-birdir.

Örten olduğunu göstermek için bir $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(1-\alpha)}{i!\Gamma(1-\alpha-i)} \sum_{j=k-i-1}^{k-i} (-1)^{k-i-j} \frac{\lambda_j y_j}{\lambda_{k-i} - \lambda_{k-i-1}}$$

şeklinde alalım. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^{(\alpha)} x_k = \sum_{i=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_j$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\widehat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta^{(\alpha)} x_k$$

ve

$$\widehat{\Lambda}_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n \sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \lambda_j y_j = y_n$$

olur. Sonuç olarak $\widehat{\Lambda}(x) = y$ ve $y \in c_0$ elde edilir. $\widehat{\Lambda}(x) \in c_0$ olup $x \in c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ bulunur. Buna göre T dönüşümü örtendir. Son olarak T dönüşümünün normu koruduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|x\|_{c_0(\Delta^{(\alpha)})} &= \|\widehat{\Lambda}(x)\|_{c_0} \\ &= \sup_n \left| \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta^{(\alpha)} x_k \right| \\ &= \sup_n \left| \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha+1)}{i! \Gamma(\alpha-i+1)} \cdot \frac{\lambda_{i+j} - \lambda_{i+j-1}}{\lambda_n} \right) x_j \right| \\ &= \sup_n |y_n| \\ &= \|y\|_{c_0} \\ &= \|Tx\|_{c_0} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla her $x \in c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ için $\|T(x)\|_{c_0} = \|y\|_{c_0} = \|\widehat{\Lambda}(x)\|_{c_0} = \|x\|_{(c_0)_\lambda}$ olur ve $c_0(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ ile c_0 uzayları lineer izomorftur.

Aynı şekilde $c(\Delta_\lambda^{(\alpha)})$ ile c dizi uzaylarının lineer izomorf olduğu gösterilebilir.

3. Mutlak Olmayan Tipten Yeni Dizi Uzayları

Bu bölümde öncelikle λ^m -yakınsaklık ve λ^m -sınırlılık kavramlarını tanımlayacağız. Daha sonra $c_0(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $\ell_\infty(\lambda^m)$ ve $1 \leq p < \infty$ için $\ell_p(\lambda^m)$ dizi uzaylarını tanımlayıp, bu uzayların bazı topolojik özelliklerini vereceğiz.

3.1 λ^m -yakınsaklık ve λ^m -sınırlılık

$\lambda = (\lambda_k)$ pozitif reel sayıların kesin artan bir dizisi, her $k \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ için $\lambda_{k+1} \geq m\lambda_k$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ olsun. Burada

$$\Delta^m \lambda_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \lambda_{k-v}$$

ve $\Delta^m \lambda_k \geq 0$ dır. $\lambda_{-1} = \lambda_{-2} = \dots = \lambda_{-m} = 0$ olduğu kabul edilmiştir.

λ dizisinden faydalananak sonsuz Λ^m matrisini, $\Lambda^m = (\lambda_{nk}^m)$ olmak üzere;

$$\lambda_{nk}^m = \begin{cases} \frac{\Delta^m \lambda_k}{\Delta^{m-1} \lambda_n} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Her $k > n$ için $\lambda_{nk}^m = 0$ ve $\lambda_{nn}^m \neq 0$ olduğundan Λ^m matrisi üçgensel bir matristir. Λ^m matrisi yardımı ile bir $x \in w$ dizisinin $\Lambda^m(x) = (\Lambda_n^m(x))$ dönüşümünü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Lambda_n^m(x) = \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k) x_k \quad (3.2)$$

şeklinde verebiliriz.

Tanım 3.1.1. Bir $x = (x_k) \in w$ dizisi ve bir $l \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\Lambda_n^m(x) \rightarrow l$ ise x dizisine l sayısına λ^m -yakınsak dizi denir.

Tanım 3.1.2. Bir $x = (x_k) \in w$ dizisi verilsin. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\Lambda_n^m(x) \rightarrow 0$ ise x dizisine sıfıra λ^m -yakınsak dizi denir.

Tanım 3.1.3. Bir $x = (x_k) \in w$ dizisi verilsin. Eğer $\sup_n |\Lambda_n^m(x)| < \infty$ ise x dizisine λ^m -sınırlı dizi denir.

Tanım 3.1.4. Eğer $0 < p < \infty$ iken $\sum_n |\Lambda_n^m(x)|^p < \infty$ ise $\sum_k x_k$ serisi λ^m tipinde p -mutlak yakınsak bir seridir denir.

Teorem 3.1.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ve

$$\sup_n \frac{\Delta^{m-2} \lambda_n}{\Delta^{m-1} \lambda_n} < \infty \quad (3.3)$$

ise, bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n^m(x) - a| = 0$$

eşitliği mevcuttur.

İspat. İlk olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$ olduğunu gösterelim. $m=1$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1}) |x_k - a| \right) = 0$ olur [16]. $m=2$ alırsak, (3.3) den

$$\left| \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^2 \lambda_k)(x_k - a) \right| \leq \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta \lambda_k) |x_k - a| + \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta \lambda_{k-1}) |x_k - a|$$

ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^2 \lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$$

elde ederiz. $m=r-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{r-2} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{r-1} \lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$$

olsun. Bu taktirde $m=r$ için aşağıda verilen eşitsizliği yazabiliriz;

$$\left| \frac{1}{\Delta^{r-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^r \lambda_k)(x_k - a) \right| \leq \left| \frac{1}{\Delta^{r-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{r-1} \lambda_k)(x_k - a) \right| + \left| \frac{1}{\Delta^{r-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{r-1} \lambda_{k-1})(x_k - a) \right|$$

ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = 0$$

elde ederiz. Şimdi de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n^m(x) - a|$$

olduğunu gösterelim. Toplam açılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \left[\Delta^m \lambda_0(x_0 - a) + \Delta^m \lambda_1(x_1 - a) + \dots + \Delta^m \lambda_n(x_n - a) \right] \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \left[(\Delta^{m-1} \lambda_0 - \Delta^{m-1} \lambda_{-1})(x_0 - a) + (\Delta^{m-1} \lambda_1 - \Delta^{m-1} \lambda_0)(x_1 - a) + \dots + (\Delta^{m-1} \lambda_n - \Delta^{m-1} \lambda_{n-1})(x_n - a) \right] \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \left[(\Delta^{m-1} \lambda_0)x_0 - (\Delta^{m-1} \lambda_0)a + (\Delta^{m-1} \lambda_1)x_1 - (\Delta^{m-1} \lambda_0)x_1 - (\Delta^{m-1} \lambda_1)a + (\Delta^{m-1} \lambda_0)a + \dots - (\Delta^{m-1} \lambda_{n-1})x_n + (\Delta^{m-1} \lambda_{n-1})a \right] \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n^m(x) - a| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu teoremden aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.1.6. Eğer (3.3) ile verilen eşitsizlik sağlanıyorsa, $m \geq 2$ için klasik anlamda bir a sayısına yakınsak her dizi a sayısına λ^m -yakınsaktır.

Teorem 3.1.7. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 2$ için (3.3) sağlanıyorsa, λ^{m-1} -yakınsak bir x dizisi aynı zamanda λ^m -yakınsaktır.

İspat. $x = (x_n)$ dizisi λ^{m-1} -yakınsak bir dizi olsun. Bu taktirde

$$\left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k - a) \right| \leq \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{m-1} \lambda_k)(x_k - a) \right| + \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^{m-1} \lambda_{k-1})(x_k - a) \right|$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten ve (3.3) den λ^{m-1} -yakınsak bir dizinin aynı zamanda λ^m -yakınsak olduğu görülür.

Sonuç 3.1.8. $r, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $0 < r < m$ ve (3.3) sağlanıyorsa λ^r -yakınsak bir dizi aynı zamanda λ^m -yakınsaktır.

(3.2) ile verilen ifadeyi kullanarak her $x = (x_k) \in w$ ve $n \geq 1$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
x_n - \Lambda_n^m(x) &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{i=0}^n (\Delta^m \lambda_i)(x_n - x_i) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta^m \lambda_i)(x_n - x_i) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta^m \lambda_i) \sum_{k=i+1}^n (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sum_{i=0}^{k-1} (\Delta^m \lambda_i) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}$$

Buradan bir $x = (x_k) \in w$ dizisi için $S(x) = (S_n(x))$ dizisini $n \geq 1$ olmak üzere

$$S_n(x) = \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \text{ ve } S_0(x) = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Dolayısıyla

$$x_n - \Lambda_n^m(x) = S_n(x) \quad (3.5)$$

olur. Buradan aşağıdaki sonucu elde ederiz;

Sonuç 3.1.9. λ^m -yakınsak bir dizinin λ^m -limit değerine klasik anlamda yakınsak olması için gerek ve yeter şart $S(x) \in c_0$ olmasıdır.

Sonuç 3.1.10. Klasik anlamda her sınırlı dizi λ^m -sınırlıdır.

İspat. $x = (x_k) \in \ell_\infty$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\Lambda_n^m(x)| \leq \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k) |x_k| = M$$

olduğundan x sınırlı dizisi aynı zamanda λ^m -sınırlıdır.

Sonuç 3.1.11. λ^m -sınırlı bir dizinin klasik anlamda sınırlı olması için gerek ve yeter şart $S(x) \in \ell_\infty$ olmasıdır.

3.2 λ^m -Dizi Uzayları

$\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) dizi uzaylarını

$$\ell_\infty(\lambda^m) = \left\{ x \in w : \sup_n |\Lambda_n^m(x)| < \infty \right\},$$

$$c(\lambda^m) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^m(x) \text{ mevcut} \right\},$$

$$c_0(\lambda^m) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^m(x) = 0 \right\},$$

$$\ell_p(\lambda^m) = \left\{ x \in w : \sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda_n^m(x)|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu uzayları $\Lambda^m = (\lambda_{nk}^m)$ sonsuz matrisinin etki alanı olarak (1.1) den

$$\ell_\infty(\lambda^m) = (\ell_\infty)_{\Lambda^m}, \quad c(\lambda^m) = (c)_{\Lambda^m} \quad \text{ve} \quad c_0(\lambda^m) = (c_0)_{\Lambda^m} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.1.

- (i) $\ell_p(\lambda^m)$ dizi uzayı, $0 < p < 1$ iken

$$\|x\|_{\ell_p(\lambda^m)} = \sum_n |\Lambda_n^m(x)|^p$$

p -normu ile bir tam p -normlu uzaydır.

- (ii) $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$ ve $c_0(\lambda^m)$ dizi uzayları

$$\|x\|_{c_0(\lambda^m)} = \|x\|_{c(\lambda^m)} = \|x\|_{\ell_\infty(\lambda^m)} = \sup_n |\Lambda_n^m(x)|$$

normu ile birer BK-uzaylarıdır.

- (iii) $\ell_p(\lambda^m)$ dizi uzayı, $1 \leq p < \infty$ iken

$$\|x\|_{\ell_p(\lambda^m)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda_n^m(x)|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir BK-uzayıdır.

İspat.

$$(i) \quad \|x\|_{\ell_p(\lambda^m)} = \sum_{n=0}^{\infty} |\Lambda_n^m(x)|^p$$

normu Tanım 1.7 ile verilen p-norm özelliklerini sağlar. Ayrıca Tanım 1.13 den bu uzay bir tam uzaydır.

$$(ii) \quad \mu = \{\ell_{\infty}, c, c_0\} \text{ alalım. (3.1) ve (3.2) den}$$

$$\|x\|_{(\mu)_{\Lambda^m}} = \|\Lambda^m(x)\|_{\mu}$$

elde edilir. Teorem 1.21 gözönüne alındığında $\mu(\lambda^m)$ dizi uzayının bir BK-uzayı olduğu görülür.

$$(iii) \quad \text{Aynı şekilde } \ell_p(\lambda^m) \text{ dizi uzayının da (ii) de verilen norm ile bir BK-uzayı olduğu görülür.}$$

Tanım 3.2.2. X bir dizi uzayı, $x = (x_k) \in w$ ve $|x| = (|x_k|)$ olsun. X dizi uzayında tanımlı $\|\cdot\|$ normuna göre bu uzaydan alınan bir $x = (x_k)$ dizisi için $\|x\| \neq \| |x| \|$ oluyorsa, X dizi uzayı mutlak olmayan tipten bir dizi uzayı olarak tanımlanır.

Örneğin $c_0(\lambda^m)$ uzayının mutlak olmayan tipten bir dizi uzayı olduğunu gösterelim. $m=2$ olsun ve $\lambda = (\lambda_k)$ dizisini $\lambda_k = 2^k$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $\Delta\lambda_k = 2^{k-1}$ ve $\Delta^2\lambda_k = 2^{k-2}$ olur. Bu durumda $c_0(\lambda^2)$ uzayı

$$c_0(\lambda^2) = \left\{ x \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n (2^{k-2})x_k = 0 \right\}$$

şeklinde elde edilir.

$x = (x_k) = (4, -2, 0, 0, \dots)$ olmak üzere $x = (x_k) \in c_0(\lambda^2)$ dizisini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n^m(x)\|_{\infty} &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n (2^{k-2})x_k \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $|x| = (|x_k|) = (4, 2, 0, 0, \dots)$ için

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_n^m(|x|)\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n (2^{k-2}) x_k \right| \\
&= \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{2^{n-1}} \\
&= 4
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\|x\|_{c_0(\lambda^m)} \neq \|x\|_{c_0(\lambda^m)}$ elde edilir. Dolayısıyla $c_0(\lambda^m)$ uzayının mutlak olmayan tipten bir dizi uzayı olduğu görülür. Benzer şekilde $\ell_\infty(\lambda^m)$ ve $c(\lambda^m)$ uzaylarının da mutlak olmayan tipten dizi uzayları olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.3. $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) dizi uzayları sırasıyla ℓ_∞ , c , c_0 ve ℓ_p dizi uzaylarına lineer olarak izomorfiktir. Yani $\ell_\infty(\lambda^m) \cong \ell_\infty$, $c(\lambda^m) \cong c$, $c_0(\lambda^m) \cong c_0$ ve $\ell_p(\lambda^m) \cong \ell_p$ ($0 < p < \infty$) dir.

İspat. $0 < p < \infty$ için $\ell_p(\lambda^m) \cong \ell_p$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $\ell_p(\lambda^m)$ uzayı ile ℓ_p uzayı arasında birebir ve örten lineer bir dönüşümün varlığını gösterelim. $\ell_p(\lambda^m)$ uzayından ℓ_p uzayına bir T dönüşümünü

$$T(x) = y(\lambda^m) = \Lambda^m(x)$$

şeklinde tanımlayalım. $x = (x_k)$, $z = (z_k) \in \ell_p(\lambda^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
T(x+z) &= \Lambda^m(x+z) \\
&= \left(\frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(x_k + z_k) \right) \\
&= \Lambda^m(x) + \Lambda^m(z)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
T(\alpha x) &= \Lambda^m(\alpha x) \\
&= \left(\frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k)(\alpha x_k) \right) \\
&= \alpha \Lambda^m(x)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

dir. (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden T dönüşümünün bir lineer dönüşüm olduğu görülür.

Şimdi $T(x) = 0$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k) x_k = 0$$

dır ve buradan $x = 0$ bulunur. Dolayısıyla $T(x) = 0$ iken $x = 0$ olduğundan T bire-bir olur.

Örtenliği göstermek için bir $y = (y_k) \in \ell_p$ alalım ve $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_j}{\Delta^m \lambda_k} y_j \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \Lambda_n^m(x) &= \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n (\Delta^m \lambda_k) x_k \\ &= \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n \sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} (\Delta^{m-1} \lambda_j) y_j \\ &= \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_n} \sum_{k=0}^n [(\Delta^{m-1} \lambda_k) y_k - (\Delta^{m-1} \lambda_{k-1}) y_{k-1}] \\ &= y_n \end{aligned}$$

dir. $y \in \ell_p$ olduğundan $\Lambda^m(x) = y$ eşitliğinden $\Lambda^m(x) \in \ell_p$ bulunur. Dolayısıyla $x \in \ell_p(\lambda^m)$ ve $T(x) = y$ olduğundan T dönüşümü örten olur. Ayrıca her $x \in \ell_p(\lambda^m)$ için Teorem 3.2.1 (i) ve (ii) gereğince

$$\|T(x)\|_{\ell_p} = \|\Lambda^m(x)\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p(\lambda^m)}$$

olup, T dönüşümü $0 < p < 1$ için p -normu ve $1 \leq p < \infty$ için normu koruyan bir dönüşümdür.

Sonuç olarak T lineer, birebir ve örten bir dönüşümdür. Ayrıca $0 < p < \infty$ için $\ell_p(\lambda^m) \cong \ell_p$ dir. $\ell_\infty(\lambda^m) \cong \ell_\infty$, $c(\lambda^m) \cong c$ ve $c_0(\lambda^m) \cong c_0$ için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 1.24 den c_0 , ℓ_p ve c uzaylarının Schuader bazının T dönüşümü altındaki ters görüntüsü bize sırasıyla $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$), $c_0(\lambda^m)$ ve $c(\lambda^m)$ uzaylarının Schauder bazını verir. Teorem 3.2.3 de tanımlanan $T = \Lambda^m(x)$ operatöründen $\Lambda^m(e) = e$ ve $\Lambda^m(e^{(k)}(\lambda^m)) = e^{(k)}$ olur ve aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 3.2.4. Her $k, n \in \mathbb{N}$ için $e^{(k)}(\lambda^m) \in \ell_p(\lambda^m)$ ve

$$\{e^{(k)}(\lambda^m)\}_n = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m \lambda_n} & , \quad k \leq n \leq k+1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.10)$$

olsun.

- (i) $\{e^{(0)}(\lambda^m), e^{(1)}(\lambda^m), \dots\}$ dizisi $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) uzaylarının bir Schauder bazıdır ve her $x \in c_0(\lambda^m)$, $x \in \ell_p(\lambda^m)$ dizisi

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^m(x) e^{(k)}(\lambda^m)$$

olacak şekilde bir tek gösterime sahiptir.

- (ii) $\{e, e^{(0)}(\lambda^m), e^{(1)}(\lambda^m), \dots\}$ dizisi $c(\lambda^m)$ uzayının bir Schauder bazıdır ve her $x \in c(\lambda^m)$ dizisi $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k^m(x)$ olmak üzere

$$x = le + \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda_k^m(x) - l) e^{(k)}(\lambda^m)$$

olacak şekilde bir tek gösterime sahiptir.

Sonuç 3.2.5. Mutlak olmayan tipten $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) uzayları ayrılabilir.

Teorem 3.2.6. $\ell_p(\lambda^m)$ uzayı $p \neq 2$ için bir iç çarpım uzayı değildir. Dolayısıyla bir Hilbert uzayı da değildir.

İspat. Öncelikle $\ell_2(\lambda^m)$ uzayının Hilbert uzayı olduğunu gösterelim. Teorem 3.2.1 de $\ell_2(\lambda^m)$ uzayının $\|x\|_{\ell_2(\lambda^m)} = \|\Lambda^m(x)\|_{\ell_2}$ normu ile bir BK-uzayı olduğunu gösterdik.

$\ell_2(\lambda^m)$ uzayının normu bir iç çarpımdan elde edilebilir. Yani her $x \in \ell_2(\lambda^m)$ için

$$\|x\|_{\ell_2(\lambda^m)} = \langle x, x \rangle^{1/2} = \langle \Lambda^m(x), \Lambda^m(x) \rangle_2^{1/2}$$

eşitliği mevcuttur. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, ℓ_2 uzayı üzerindeki iç çarpımı göstermektedir. Dolayısıyla $\ell_2(\lambda^m)$ uzayı bir Hilbert uzayı olur.

Şimdi $u = (u_k)$ ve $v = (v_k)$ dizilerini sırasıyla

$$u = \left(1, 1, -\frac{\Delta^{m-1}\lambda_1}{\Delta^m\lambda_2}, 0, 0, \dots \right),$$

$$v = \left(1, -\frac{\Delta^{m-1}(\lambda_1 + \lambda_0)}{\Delta^m\lambda_1}, \frac{\Delta^{m-1}\lambda_1}{\Delta^m\lambda_2}, 0, 0, \dots \right)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\Lambda^m(u) = (1, 1, 0, 0, \dots)$ ve $\Lambda^m(v) = (1, -1, 0, 0, \dots)$ elde edilir. Ayrıca $p \neq 2$ için

$$\|u + v\|_{\ell_p(\lambda^m)}^2 + \|u - v\|_{\ell_p(\lambda^m)}^2 = 8 \neq 4(2^{2/p}) = 2 \left(\|u\|_{\ell_p(\lambda^m)}^2 + \|v\|_{\ell_p(\lambda^m)}^2 \right)$$

bulunur. $p \neq 2$ iken $\ell_p(\lambda^m)$ uzayı üzerindeki norm paralelkenar kanununu sağlamadığından bu norm bir iç çarpımdan elde edilemez. Dolayısıyla $\ell_p(\lambda^m)$ uzayı $p \neq 2$ için Hilbert uzayı olmayan bir Banach uzayı olur.

4. Bazı Kapsama Bağıntıları

Teorem 4.1. $0 < p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\lambda^m) \subset c_0(\lambda^m) \subset c(\lambda^m) \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamaları kesindir.

İspat. $c_0(\lambda^m) \subset c(\lambda^m) \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamalarının mevcut olduğu açıktır. Ayrıca $c_0 \subset c$ kapsamasının kesin olduğunu biliyoruz. Sonuç 3.1.6 gözönüne alındığında $c_0(\lambda^m) \subset c(\lambda^m)$ kapsamasının kesin olduğu elde edilir.

$0 < p < \infty$ iken $\ell_p(\lambda^m) \subset c_0(\lambda^m)$ kapsaması mevcuttur. Çünkü $x \in \ell_p(\lambda^m)$ aldığımızda $\Lambda^m(x) \in \ell_p$ ve $\Lambda^m(x) \in c_0$ bulunur. Dolayısıyla $x \in c_0(\lambda^m)$ elde edilir. Bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. (3.3) ile verilen ifade sağlansın. Bir $x = (x_k)$ dizisini her $k \in \mathbb{N}$ ve $0 < p < \infty$ için

$$x_k = \frac{1}{(k+1)^{1/p}}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x \in c_0 \subset c_0(\lambda^m)$ olduğu açık olarak görülür. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |\Lambda_n^m(x)| &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^m \lambda_k}{(k+1)^{1/p}} \\ &\geq \frac{1}{\Delta^m \lambda_n (n+1)^{1/p}} \sum_{k=0}^n \Delta^m \lambda_k \\ &= \frac{1}{(n+1)^{1/p}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\Lambda_n^m(x) \notin \ell_p$ ve $x \notin \ell_p(\lambda^m)$ bulunur. Sonuç olarak $\ell_p(\lambda^m) \subset c_0(\lambda^m)$ kapsaması kesindir.

Şimdi $c(\lambda^m) \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterelim. Bunun için bir $y = (y_k)$ dizisini $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$y_k = (-1)^k \frac{\Delta^{m-1}(\lambda_k + \lambda_{k-1})}{\Delta^m \lambda_k}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Lambda_n^m(y) = \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\Delta^{m-1}(\lambda_k + \lambda_{k-1}) \right] = (-1)^n$$

bulunur. Bu eşitlikten $\Lambda_n^m(x) \in \ell_\infty$ ve $\Lambda_n^m(x) \notin c$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in \ell_\infty(\lambda^m)$ ve $x \notin c(\lambda^m)$ bulunur. Yani $c(\lambda^m) \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsaması kesindir.

Teorem 4.2. $0 < p < q < \infty$ için $\ell_p(\lambda^m) \subset \ell_q(\lambda^m)$ kapsaması kesindir.

İspat. $0 < p < q < \infty$ olsun. $\ell_p \subset \ell_q$ olduğundan $\ell_p(\lambda^m) \subset \ell_q(\lambda^m)$ elde edilir. Bu kapsamının kesin olduğunu göstermek için bir $x \in \ell_q / \ell_p$ dizisi alalım. Bu x dizisine bağlı olarak y dizisini her $k \in \mathbb{N}$ için

$$y_k = \frac{(\Delta^{m-1}\lambda_k)x_k - (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \Lambda_n^m(y) &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=0}^n \left[(\Delta^{m-1}\lambda_k)x_k - (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_{k-1} \right] \\ &= x_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\Lambda^m(y) \in \ell_q / \ell_p$ bulunur. Dolayısıyla $y \in \ell_q(\lambda^m) / \ell_p(\lambda^m)$ olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.

(i) Eğer (3.3) sağlanıyorsa $c_0 \subset c_0(\lambda^m)$ ve $c \subset c(\lambda^m)$ kapsamaları mevcuttur.

(ii) Her $x \in c_0(\lambda^m)$ için $S(x) \in c_0$ ise $c_0(\lambda^m) \subset c_0$ kapsaması mevcuttur.

(iii) Her $x \in c(\lambda^m)$ için $S(x) \in c$ ise $c(\lambda^m) \subset c$ kapsaması mevcuttur.

İspat.

(i) $c_0 \subset c_0(\lambda^m)$ ve $c \subset c(\lambda^m)$ kapsamaları Sonuç 3.1.6 dan görülür.

(ii) $x \in c_0(\lambda^m)$ alalım. Kabulümüzden $S(x) \in c_0$ olur. Sonuç 3.1.9 dan $c_0(\lambda^m) \subset c_0$ olur.

(iii) $x \in c(\lambda^m)$ olsun ve $S(x) \in c$ alalım. (3.5) den $c(\lambda^m) \subset c$ kapsaması sağlanır.

Teorem 4.4. (3.3) şartı sağlandığında $c(\lambda^m) \cap \ell_\infty \neq \emptyset$ olur ve $c(\lambda^m)$ uzayı ℓ_∞ uzayını kapsamaz.

İspat. Teorem 4.3 ile verilen ifadeden $c \subset c(\lambda^m) \cap \ell_\infty$ kapsaması elde edilir. Ayrıca Teorem 1.20 den, sınırlı olup Λ^m -toplantabilir olmayan, yani $\Lambda^m(x) \notin c$ olacak şekilde bir $x \in \ell_\infty$ dizisi mevcuttur. Dolayısıyla $\ell_\infty \subset c(\lambda^m)$ kapsaması sağlanmaz.

Teorem 4.5. $\ell_\infty \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsaması sağlanır. Ayrıca $\ell_\infty = \ell_\infty(\lambda^m)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $x \in \ell_\infty(\lambda^m)$ için $S(x) \in \ell_\infty$ olmasıdır.

İspat. Sonuç 3.1.10 ve Sonuç 3.1.11 den faydalanarak ispat yapılabilir.

Teorem 3.1.7 ile verilen ifadeden aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.6. $r, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $0 < r < m$ iken (3.3) sağlanıyorsa $c(\lambda^r) \subset c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^r) \subset c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_\infty(\lambda^r) \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamaları mevcuttur.

Teorem 4.7. $\ell_p(\lambda^m) \subset \ell_p$ kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart $x \in \ell_p(\lambda^m)$ için $S(x) \in \ell_p$ olmasıdır ($0 < p < \infty$).

İspat. İlk olarak $\ell_p(\lambda^m) \subset \ell_p$ alalım. $x \in \ell_p(\lambda^m)$ ise $x \in \ell_p$ olur. (3.5) ile verilen ifadeden

$$\begin{aligned} \|S(x)\|_{\ell_p} &\leq \|x\|_{\ell_p} + \|\Lambda^m(x)\|_{\ell_p} \\ &= \|x\|_{\ell_p} + \|x\|_{\ell_p(\lambda^m)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir ve $S(x) \in \ell_p$ bulunur.

Şimdi $x \in \ell_p(\lambda^m)$ alalım. Kabulümüzden $S(x) \in \ell_p$ olur. (3.5) ile verilen eşitlikten

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_p} &\leq \|S(x)\|_{\ell_p} + \|\Lambda^m(x)\|_{\ell_p} \\ &= \|S(x)\|_{\ell_p} + \|x\|_{\ell_p(\lambda^m)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in \ell_p$ olur ve $\ell_p(\lambda^m) \subset \ell_p$ kapsaması sağlanır.

Teorem 4.8. (3.3) sağlanıyorsa $c_0 \subset c_0(\lambda^m) \cap c$ kapsaması mevcut olur.

İspat. Teorem 4.3 ile verilen ifadeden $c_0 \subset c_0(\lambda^m) \cap c$ olduğu görülür.

Şimdi herhangi bir $x \in w$ ve $n \geq 1$ için (3.4) ve (3.5) ile verilen ifadelerden elde ettiğimiz eşitliği verelim.

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \left[\sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_k - \sum_{k=1}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_{k-1} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \left[\sum_{k=0}^n (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1})x_k - \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^{m-1}\lambda_k)x_k \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \left[\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}x_n - \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^m\lambda_k)x_k \right] \\
&= \frac{\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}}{\Delta^{m-1}\lambda_n} [x_n - \Lambda_{n-1}^m(x)] \\
&= \frac{\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}}{\Delta^{m-1}\lambda_n} [S(x) + \Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)]
\end{aligned}$$

Yani

$$S_n(x) = \frac{\Delta^{m-1}\lambda_{n-1}}{\Delta^m\lambda_n} [\Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)] \quad (4.1)$$

dir. λ dizisinin tanımından

$$\lambda_k \geq m\lambda_{k-1} \Rightarrow \Delta^m\lambda_k \geq 0 \Rightarrow \Delta^{m-1}\lambda_k \geq \Delta^{m-1}\lambda_{k-1} \Rightarrow \frac{\Delta^m\lambda_k}{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}} \geq 0$$

elde ederiz. Burada iki durum söz konusudur. Birincisi $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_k / \Delta^{m-1}\lambda_{k-1} > 0$ ve ikincisi ise $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_k / \Delta^{m-1}\lambda_{k-1} = 0$ olmasıdır. Birincinin sağlanması için gerek ve yeter şart $(\Delta^{m-1}\lambda_{k-1} / \Delta^m\lambda_k)_{k=1}^\infty$ ifadesinin sınırlı olması, ikinci durumun sağlanması için gerek ve yeter şart $(\Delta^{m-1}\lambda_{k-1} / \Delta^m\lambda_k)_{k=1}^\infty$ ifadesinin sınırsız olmasıdır. Buradan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.9.

- (i) $\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k} \right)_{k=1}^\infty \notin \ell_\infty$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta^m\lambda_{k+1}}{\Delta^{m-1}\lambda_k} = 0$ olmasıdır.
- (ii) $\left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1}}{\Delta^m\lambda_k} \right)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta^m\lambda_{k+1}}{\Delta^{m-1}\lambda_k} > 0$ olmasıdır.

Teorem 4.10. $\ell_\infty \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamasının kesin olması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k = 0 \text{ olmasıdır.}$$

İspat. İlk olarak $\ell_\infty \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamasının kesin olduğunu kabul edelim. Teorem 4.5 ile verilen ifadeden $x \in \ell_\infty(\lambda^m)$ ve $S(x) = (S_n(x))_{n=0}^\infty \notin \ell_\infty$ elde edilir. $x \in \ell_\infty(\lambda^m)$ olmasından dolayı $(\Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)) \in \ell_\infty$ bulunur. (4.1) ile verilen eşitlikten $(\Delta^{m-1}\lambda_{n-1} / \Delta^m\lambda_n) \notin \ell_\infty$ elde edilir. Sonuç 4.9 (i) şikkından $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k = 0$ bulunur.

Şimdi $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k = 0$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim ve $\ell_\infty \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterelim. Sonuç 4.9 (i) ile verilen ifadeden $(\Delta^{m-1}\lambda_{k-1} / \Delta^m\lambda_k) \notin \ell_\infty$ elde edilir ve bu $((\Delta^{m-1}\lambda_{k-1} + \Delta^{m-1}\lambda_k) / \Delta^m\lambda_k) \notin \ell_\infty$ şeklinde yazılabilir. Bir $x = (x_k)$ dizisi $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = (-1)^k \left(\frac{\Delta^{m-1}\lambda_{k-1} + \Delta^{m-1}\lambda_k}{\Delta^m\lambda_k} \right)$$

şeklinde tanımlanırsa $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \Lambda_n^m(x) \right| = \frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_n} \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k (\Delta^{m-1}\lambda_{k-1} + \Delta^{m-1}\lambda_k) \right| = 1$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 4.5 den $\ell_\infty \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsamasının kesin olduğu görülür.

Teorem 4.11. $\ell_\infty(\lambda^m) = \ell_\infty$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k > 0$ olmasıdır.

İspat. $\ell_\infty(\lambda^m) = \ell_\infty$ eşitliği sağlansın. $\ell_\infty \subset \ell_\infty(\lambda^m)$ kapsaması kesin değildir. Teorem 4.10 dan $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k \neq 0$ ve buradan $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k > 0$ elde edilir.

Tersine $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^m\lambda_{k+1} / \Delta^{m-1}\lambda_k > 0$ olsun. Sonuç 4.9 (ii) ile verilen ifadeden $(\Delta^{m-1}\lambda_{k-1} / \Delta^m\lambda_k) \in \ell_\infty$ elde edilir. Şimdi $x \in \ell_\infty(\lambda^m)$ alalım. Bu taktirde $\Lambda^m(x) = (\Lambda_n^m(x)) \in \ell_\infty$ ve $(\Lambda_n^m(x) - \Lambda_{n-1}^m(x)) \in \ell_\infty$ dir. Dolayısıyla (4.1) ile verilen ifadeden de $(S_n(x)) \in \ell_\infty$ elde edilir. Bu da bize her $x \in \ell_\infty(\lambda^m)$ için $S(x) \in \ell_\infty$ olduğunu gösterir. Teorem 4.5 ile verilen ifadeden $\ell_\infty(\lambda^m) = \ell_\infty$ elde edilir.

Teorem 4.12. $\ell_p \cap \ell_p(\lambda^m) \neq \emptyset$ ve $\ell_p \subset \ell_p(\lambda^m)$ ise

$$\frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda} = \left(\frac{1}{\Delta^{m-1}\lambda_k} \right) \in \ell_p$$

olur ($0 < p < \infty$).

İspat. Teoremin ilk kısmı $(\lambda_1 - m\lambda_0, -\lambda_0, 0, \dots) \in \ell_p \cap \ell_p(\lambda^m)$ olduğundan açıkça görülür.

Şimdi $\ell_p \subset \ell_p(\lambda^m)$ olsun. $x = e^{(0)} = (1, 0, 0, \dots)$ alırsak $x \in \ell_p$ olur. Kabulümüzden $x \in \ell_p(\lambda^m)$ ve $\Lambda_n^m(x) \in \ell_p$ elde edilir. Ayrıca

$$(\Delta^m \lambda_0)^p \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_k} \right|^p = \sum_{k=0}^{\infty} |\Lambda_k^m(x)|^p < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla bu ifadeden $\left(\frac{1}{\Delta^{m-1} \lambda_k} \right) \in \ell_p$ elde edilir.

5. α -, β -, γ - Dualleri

Bu bölümde $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$), $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_\infty(\lambda^m)$ uzaylarının α -, β - ve γ - duallerini vereceğiz. Öncelikle ispatlarda yararlanacağımız bazı Lemmaları verelim.

Lemma 5.1. (i) $A \in (c_0 : \ell_1) = (c : \ell_1) = (\ell_\infty : \ell_1)$ olması için gerek yeter şart

$$\sup_{K \in \mathbb{F}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} a_{nk} \right| \right) < \infty \quad (5.1)$$

olmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $A \in (\ell_p : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{F \in \mathbb{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in F} a_{nk} \right|^q < \infty \quad (5.2)$$

olmasıdır.

(iii) $A \in (\ell_1 : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty \quad (5.3)$$

olmasıdır. [27]

Lemma 5.2. (i) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ iken $A \in (\ell_p : c)$ olması için gerek ve yeter şart

her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \text{ mevcut} \quad (5.4)$$

ve

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \quad (5.5)$$

olmasıdır.

(ii) $A \in (\ell_1 : c)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty \quad (5.6)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A \in (\ell_\infty : c)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \quad (5.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk} - \lim_n a_{nk}| = 0 \quad (5.8)$$

şartlarının sağlanmasıdır. [27]

Lemma 5.3. (i) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $A \in (\ell_p : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

(5.5) ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \quad (5.9)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $A \in (\ell_1 : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (5.6) ve (5.9) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A \in (\ell_\infty : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 0 \quad (5.10)$$

olmasıdır. [27]

Lemma 5.4. (i) $A \in (c_0 : \ell_\infty) = (c : \ell_\infty) = (\ell_\infty : \ell_\infty)$ olması için gerek yeter şart

$$\sup_n \left(\sum_k |a_{nk}| \right) < \infty \quad (5.11)$$

olmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ iken $A \in (\ell_p : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (5.5) şartının sağlanmasıdır.

(iii) $p = 1$ iken $A \in (\ell_p : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (5.6) şartının sağlanmasıdır. [27]

Teorem 5.5. (Kojima-Schur) $A \in (c : c)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4), (5.7) ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} \text{ mevcut} \quad (5.12)$$

şartlarının sağlanmasıdır. [11]

Lemma 5.6. $A \in (c_0 : c)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ve (5.7) şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 5.7. A , $B(q)$ ve C cümleleri

$$A = \left\{ a = (a_n) \in w : \sum_n \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} |a_n| < \infty \right\},$$

$$B(q) = \left\{ a = (a_n) \in w : \sum_k \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right|^q < \infty \right\},$$

$$C = \left\{ a = (a_n) \in w : \sup_k \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $\ell_\infty(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 < p < \infty$) uzaylarının α -dualleri

- (i) $\{c(\lambda^m)\}^\alpha = \{c_0(\lambda^m)\}^\alpha = \{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\alpha = A$
- (ii) $\{\ell_p(\lambda^m)\}^\alpha = B(q)$
- (iii) $\{\ell_1(\lambda^m)\}^\alpha = C$

şeklinde tanımlanır.

İspat. (i) $a = (a_n) \in w$ alalım ve $B = (b_{nk})$ matrisini her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_n} a_n & , \quad n-1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k < n-1 \text{ ya da } k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. (3.9) dan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n x_n = \sum_{k=n-1}^n (-1)^{n-k} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_n} a_n y_k = (By)_n \quad (5.13)$$

elde edilir. Bu eşitlikten “ $x \in c_0(\lambda^m)$ iken $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $y \in c_0$ iken $By \in \ell_1$ olmasıdır” sonucunu elde ederiz. Bu ifade $a \in \{c_0(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c_0 : \ell_1)$ olması demektir. Lemma 5.1 (i) şikkından $a \in \{c_0(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in \mathbb{F}} \left(\sum_n \left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| \right) < \infty \quad (5.14)$$

şartının sağlanmasıdır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ ve $K \in \mathbb{F}$ için

$$\left| \sum_{k \in K} b_{nk} \right| = \begin{cases} 0 & , \quad n-1 \notin K \text{ ve } n \notin K \\ \frac{\Delta^{m-1} \lambda_{n-1}}{\Delta^m \lambda_n} |a_n| & , \quad n-1 \in K \text{ ve } n \notin K \\ \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} |a_n| & , \quad n-1 \notin K \text{ ve } n \in K \\ |a_n| & , \quad n-1 \in K \text{ ve } n \in K \end{cases}$$

elde edilir. (5.14) ile verilen ifadenin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} |a_n| < \infty$$

olmasıdır. Buradan $\{c_0(\lambda^m)\}^\alpha = A$ elde edilir.

Benzer şekilde Lemma 5.1 (i) den faydalanarak $\{c(\lambda^m)\}^\alpha = \{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\alpha = A$ olduğu gösterilebilir.

(ii) Lemma 5.1 (ii) gözönüne alınırsa $a \in \{\ell_p(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek yeter şartın

$$\sup_{F \in \mathbb{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in F} b_{nk} \right|^q < \infty \quad (5.15)$$

olduğu görülür. Ayrıca $F \in \mathbb{F}$ için

$$\sum_{n \in F} b_{nk} = \begin{cases} 0 & , \quad k \notin F \text{ ve } k+1 \notin F \\ \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k & , \quad k \in F \text{ ve } k+1 \notin F \\ -\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_{k+1}} a_{k+1} & , \quad k \notin F \text{ ve } k+1 \in F \\ \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} - \frac{a_{k+1}}{\Delta^m \lambda_{k+1}} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) & , \quad k \in F \text{ ve } k+1 \in F \end{cases}$$

olur. Buradan (5.15) ile verilen ifadenin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sum_k \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right|^q < \infty$$

olmasıdır. Dolayısıyla $1 < p < \infty$ için $\{\ell_p(\lambda^m)\}^\alpha = B(q)$ bulunur.

(iii) Burada (ii) deki yolu izlersek (5.13) ile verilen ifadeden ve Lemma 5.1 (iii) de verilen ifadeden $a \in \{\ell_1(\lambda^m)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şartın

$$\sup_k \sum_n |b_{nk}| < \infty \quad (5.16)$$

olduğu görülür. B matrisinin tanımından her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_n |b_{nk}| = \sum_{n=k}^{k+1} \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_n} a_n \right|$$

bulunur. Sonuç olarak (5.16) ile verilen ifadenin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right| < \infty$$

şartının sağlanmasıdır. Buradan $\{\ell_1(\lambda^m)\}^\alpha = C$ elde edilir.

Teorem 5.8. D , E , F , G ve $H(q)$ cümleleri

$$D = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} \left| \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) \Delta^{m-1} \lambda_k \right| < \infty \right\},$$

$$E = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_k \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right| < \infty \right\},$$

$$F = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right) \text{ mevcut} \right\},$$

$$G = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_k \right) = 0 \right\},$$

$$H(q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_k \left| \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right|^q < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlansın. $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $\ell_\infty(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 < p < \infty$) uzaylarının β -dualleri

$$(i) \quad \{c_0(\lambda^m)\}^\beta = D \cap E, \quad \{c(\lambda^m)\}^\beta = D \cap F$$

$$(ii) \quad \{\ell_p(\lambda^m)\}^\beta = C \cap H(q), \quad \{\ell_1(\lambda^m)\}^\beta = C \text{ ve } \{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\beta = D \cap G$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. (i) $a = (a_k) \in w$ alalım. Bu takdirde (3.9) dan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_j}{\Delta^m \lambda_k} y_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^{m-1} \lambda_k) \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) y_k + \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n y_n \\ &= (Ty)_n \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde edilir. Burada $\bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) = \frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} - \frac{a_{k+1}}{\Delta^m \lambda_{k+1}}$ ve $T = (t_{nk})$ matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk} = \begin{cases} \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) & , \quad k < n \\ \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlıdır. (5.17) ile verilen ifadeden “ $x = (x_k) \in c(\lambda^m)$ iken $ax = (a_k x_k) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in c$ iken $Ty \in c$ olmasıdır” sonucu elde edilir. Bu da $a \in \{c_0(\lambda^m)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $T \in (c : c)$ olması demektir. Kojima-Schur Teoreminden $\{c(\lambda^m)\}^\beta = D \cap F$ bulunur. Benzer şekilde $\{c_0(\lambda^m)\}^\beta = D \cap E$ olduğu Lemma 5.6 dan yararlanarak gösterilebilir.

(ii) (5.18) den T matrisinin sütunları c dizi uzayının elemanıdır, yani her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n t_{nk} = \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \quad (5.19)$$

dir. (5.17) den ve Lemma 5.2 den “ $x = (x_k) \in \ell_p(\lambda^m)$ iken $ax = (a_k x_k) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in \ell_p$ iken $Ty \in c$ olmasıdır” sonucunu elde ederiz. Yani $a = (a_k) \in \{\ell_p(\lambda^m)\}^\beta$ ($1 \leq p \leq \infty$) olması için gerek ve yeter şart $T \in (\ell_p : c)$ olmasıdır.

İlk olarak $1 < p < \infty$ için $T \in (\ell_p : c)$ iken (5.5) ile verilen ifadeden

$$\sum_k \left| \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right|^q < \infty$$

ve

$$\sup_n \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n \right| < \infty \quad (5.20)$$

elde edilir. Bu da bize $\{\ell_p(\lambda^m)\}^\beta = C \cap H(q)$ olduğu sonucunu verir.

$p = 1$ iken (5.6) ile verilen ifadeden (5.20) ve

$$\sup_k \left| \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| < \infty \quad (5.21)$$

elde edilir. (5.21), (5.20) ile verilen ifadenin bir sonucudur. Dolayısıyla $\{\ell_1(\lambda^m)\}^\beta = C$ olur.

Son olarak $p = \infty$ iken (5.7) den (5.20) ve

$$\sum_k \left| \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| < \infty \quad (5.22)$$

elde edilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için (5.19) dan

$$\begin{aligned} \sum_k \left| t_{nk} - \lim_n t_{nk} \right| &= \sum_{k=n}^{\infty} \left| t_{nk} - \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| \\ &= \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n - \bar{\Delta} \left(\frac{a_n}{\Delta^m \lambda_n} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_n) \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) (\Delta^{m-1} \lambda_k) \right| \end{aligned}$$

bulunur. (5.22) ile verilen ifadeden yararlanarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_n \sum_k \left| t_{nk} - \lim_n t_{nk} \right| = \lim_n \left| \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n \right|$$

elde edilir. (5.8) ile verilen ifadeden

$$\lim_n \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n = 0$$

bulunur ve buradanda $\{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\beta = D \cap G$ elde edilir.

Teorem 5.9. $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $\ell_\infty(\lambda^m)$, $\ell_1(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 < p < \infty$) uzaylarının γ -dualleri

$$(i) \quad \{c_0(\lambda^m)\}^\gamma = \{c(\lambda^m)\}^\gamma = \{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\gamma = D \cap E$$

$$(ii) \quad \{\ell_1(\lambda^m)\}^\gamma = C$$

$$(iii) \quad \{\ell_p(\lambda^m)\}^\gamma = C \cap H(q)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. (i) $a = (a_n) \in w$ alalım. (3.9) dan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{\Delta^{m-1} \lambda_j}{\Delta^m \lambda_k} y_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^{m-1} \lambda_k) \bar{\Delta} \left(\frac{a_k}{\Delta^m \lambda_k} \right) y_k + \frac{\Delta^{m-1} \lambda_n}{\Delta^m \lambda_n} a_n y_n \\ &= (Ty)_n \end{aligned}$$

olduğundan “ $x = (x_k) \in c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $\ell_\infty(\lambda^m)$ iken $ax = (a_k x_k) \in bs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in X$, $X = c$, c_0 , ℓ_∞ iken $Ty \in cs$ olmasıdır” sonucu elde edilir. Buradan $a \in \{c_0(\lambda^m)\}^\gamma$, $\{c(\lambda^m)\}^\gamma$, $\{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\gamma$ olması için gerek ve yeter şart $T \in (c_0 : \ell_\infty)$, $(c : \ell_\infty)$ ve $(\ell_\infty : \ell_\infty)$ olmasıdır. Lemma 5.4 (i) den $\{c_0(\lambda^m)\}^\gamma = \{c(\lambda^m)\}^\gamma = \{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\gamma = D \cap E$ bulunur. (ii) ve (iii) nin ispatları benzer şekilde gösterilebilir.

6. Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$, $\ell_\infty(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) uzaylarından bazı klasik dizi uzaylarına matris sınıflarını karakterize edeceğiz. Burada her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{a}_{nk} = (\Delta^{m-1} \lambda_k) \bar{\Delta} \left(\frac{a_{nk}}{\Delta^m \lambda_k} \right) = (\Delta^{m-1} \lambda_k) \left(\frac{a_{nk}}{\Delta^m \lambda_k} - \frac{a_{n,k+1}}{\Delta^m \lambda_{k+1}} \right)$$

gösterimini kullanacağız. Şimdi bazı ispatlarda kullanacağımız aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 6.1 $1 < p < \infty$ iken $A \in (\ell_1 : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}|^p < \infty$$

olmasıdır. [27]

Teorem 6.2. (i) $A \in (\ell_\infty(\lambda^m) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_{nk} \right)_{k=0}^\infty \in c_0 \quad (6.1)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty \quad (6.2)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $A \in (c(\lambda^m) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (6.2),

$$\left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_{nk} \right)_{k=0}^\infty \in c \quad (6.3)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty \quad (6.4)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A \in (c_0(\lambda^m) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (6.2) ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{\Delta^{m-1} \lambda_k}{\Delta^m \lambda_k} a_{nk} \right)_{k=0}^\infty \in \ell_\infty \quad (6.5)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (i) İlk olarak (6.1) ve (6.2) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $x = (x_k) \in \ell_\infty(\lambda^m)$ alalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\beta$ dır ve dolayısıyla x dizisi bir A -dönüşümüne sahip olur.

(3.9) ile verilen ifadeden yararlanırsak her $l, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^l a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{a}_{nk} y_k + \frac{\Delta^{m-1} \lambda_l}{\Delta^m \lambda_l} a_{nl} y_l \quad (6.6)$$

elde ederiz. (6.6) eşitliğinin her iki tarafının $l \rightarrow \infty$ için limiti alınır ve (6.1) kullanılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk} x_k = \sum_k \tilde{a}_{nk} y_k \quad (6.7)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |(Ax)_n| \leq \|y\|_\infty \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| < \infty$$

olur. Sonuç olarak $A \in (\ell_\infty(\lambda^m); \ell_\infty)$ elde edilir.

Şimdi $A \in (\ell_\infty(\lambda^m); \ell_\infty)$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \{\ell_\infty(\lambda^m)\}^\beta$ olduğundan (6.1) açık bir şekilde görülür ve (6.7) koşulu sağlanır. $\ell_\infty(\lambda^m)$ uzayında $a_n = (a_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

şeklinde sürekli lineer f_n fonksiyonellerini tanımlar. Teorem 3.2.3'den $\ell_\infty(\lambda^m) \cong \ell_\infty$ olduğunu biliyoruz. (6.7) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n\| = \|\tilde{a}_n\|_\infty = \sup_n |\tilde{a}_n|$$

elde edilir. Teorem 1.32 den bir $M > 0$ sabiti ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n\| \leq M$ olur. Dolayısıyla (6.2) şartı sağlanır.

(iii) ve (iii) ispatları benzer şekilde yapılır.

Teorem 6.3. (i) $A \in (\ell_1(\lambda^m) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (6.5) ve

$$\sup_{n,k} |\tilde{a}_{nk}| < \infty \quad (6.8)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ iken $A \in (\ell_p(\lambda^m) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (6.5) ve

$$\sup_n \sum_k |\tilde{a}_{nk}|^q < \infty \quad (6.9)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (ii) nin ispatı Teorem 6.2 dekinе benzer şekilde yapılabilir. (i) nin ispatı da yine aynı şekilde Teorem 5.8 ve Lemma 5.4 (iii) den yararlanılarak yapılabilir.

Teorem 6.4. (i) $1 < p < \infty$ iken $A \in (\ell_p(\lambda^m) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (6.5), (6.9) ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n \tilde{a}_{nk} = \alpha_k \quad (6.10)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $A \in (\ell_1(\lambda^m) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (6.5), (6.8) ve (6.10) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A \in (\ell_\infty(\lambda^m) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (6.1), (6.2), (6.10) ve

$$\lim_n \sum_k |\tilde{a}_{nk} - \alpha_k| = 0$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (i) Öncelikle A matrisi (6.5), (6.9) ve (6.10) koşullarını sağlasın. $x \in \ell_p(\lambda^m)$ dizisini alalım. (6.5) ve (6.9) dan Ax dönüşüm dizisi mevcuttur. (6.10) dan her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \rightarrow \infty$ için $|\tilde{a}_{nk}|^q \rightarrow |\alpha_k|^q$ elde edilir. (6.9) dan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=0}^k |\alpha_j|^q \leq \sup_n \sum_j |\tilde{a}_{nj}|^q = M < \infty$$

bulunur ve $(\alpha_k) \in \ell_q$ olur. $x \in \ell_p(\lambda^m)$ olduğundan $y \in \ell_p$ elde edilir. Ayrıca Hölder eşitsizliğinden $(\alpha_k y_k) \in \ell_1$ bulunur.

$\varepsilon > 0$ verilsin ve $k_0 \in \mathbb{N}$ sabit olmak üzere x dizisine karşılık gelen y dizisi için

$$\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^p \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}}$$

yazılabilir. (6.10) dan $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için

$$\left| \sum_{k=0}^{k_0} (\tilde{a}_{nk} - \alpha_k) y_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. (6.7) den yeterince büyük her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_k a_{nk} x_k - \sum_k \alpha_k y_k \right| &= \left| \sum_k (\tilde{a}_{nk} - \alpha_k) y_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{k_0} (\tilde{a}_{nk} - \alpha_k) y_k \right| + \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (\tilde{a}_{nk} - \alpha_k) y_k \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} (|\tilde{a}_{nk}| + |\alpha_k|)^q \right]^{1/q} \left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^p \right]^{1/p} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}} \left[\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\tilde{a}_{nk}|^q \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\alpha_k|^q \right)^{1/q} \right] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M^{1/q}} 2M^{1/q} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $(Ax)_n \rightarrow \sum_k \alpha_k y_k$ bulunur. Sonuç olarak

$Ax \in c$ ve buradan da $A \in (\ell_p(\lambda^m) : c)$ olur.

Tersine $A \in (\ell_p(\lambda^m) : c)$ olsun. $c \subset \ell_\infty$ olduğundan $A \in (\ell_p(\lambda^m) : \ell_\infty)$ elde edilir. Teorem 6.3 (ii) den (6.5) ve (6.9) sağlanır. Dolayısıyla (3.9) dan her $x \in \ell_p(\lambda^m)$ ve $y \in \ell_p$ için (6.7) sağlanır. Şimdi $y \in \ell_p$ olsun ve x dizisini (3.9) şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $y = \Lambda^m(x)$ dir ve dolayısıyla $x \in \ell_p(\lambda^m)$ olur. Hipotezden $Ax \in c$ ve (6.7) den $\tilde{A}y \in c$ elde edilir. $\tilde{A} = (\tilde{a}_{nk})$ olmak üzere $\tilde{A} \in (\ell_p : c)$ olur. Lemma 5.2 de verdiğimiz (5.4) ifadesinden (6.10) koşulu sağlanır.

Benzer yol izlenerek (ii) ve (iii) ispatlanabilir.

Teorem 6.5. (i) $A \in (\ell_1(\lambda^m): c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (6.5), (6.8) ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n \tilde{a}_{nk} = 0 \quad (6.11)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $1 < p < \infty$ iken $A \in (\ell_p(\lambda^m): c_0)$ olması için gerek yeter şart (6.5), (6.9) ve (6.11) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A \in (\ell_\infty(\lambda^m): c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (6.1) ve

$$\lim_n \sum_k |\tilde{a}_{nk}| = 0 \quad (6.12)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 6.4 için verilen ispattaki yol izlenerek ve Lemma 5.3 den yararlanılarak ispat yapılabilir.

Teorem 6.6. $1 \leq p < \infty$ iken $A \in (\ell_1(\lambda^m): \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart (6.5) ve

$$\sup_k \sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p < \infty \quad (6.13)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. A matrisi (6.5) ve (6.13) şartlarını sağlasın ve $x \in \ell_1(\lambda^m)$ olsun. (3.9) dan $y \in \ell_1$ elde edilir. Ayrıca Teorem 5.8 den her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k=0}^\infty \in \{\ell_1(\lambda^m)\}^\beta$ bulunur ve dolayısıyla Ax dönüşüm dizisi mevcut olur. (6.13) ile verilen ifadeden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_k |\tilde{a}_{nk}| \leq \sup_k \left(\sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k \tilde{a}_{nk} y_k$ serisi yakınsak olur ve (6.6) ile verilen ifadeden $l \rightarrow \infty$ iken (6.5) den (6.7) şartı elde edilir. (6.7), (6.13) ve Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left(\sum_n |A_n(x)|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_n \left| \sum_k \tilde{a}_{nk} y_k \right|^p \right)^{1/p} \leq \sum_k \left[|y_k| \left(\sum_n |\tilde{a}_{nk}|^p \right)^{1/p} \right] < \infty$$

bulunur. Buradan da $Ax \in \ell_p$ ve $A \in (\ell_1(\lambda^m): \ell_p)$ elde edilir.

Tersine $A \in (\ell_1(\lambda^m) : \ell_p)$ olsun. O zaman $A \in (\ell_1(\lambda^m) : \ell_\infty)$ olur. Teorem 6.2 den (6.2) ve (6.1) sağlanır. (6.2) ve (6.1) gözönüne alındığında her $x \in \ell_1(\lambda^m)$ ve dolayısıyla her $y \in \ell_1$ için (6.7) şartı sağlanır. Hipotezden de $\tilde{A} = (\tilde{a}_{nk}) \in (\ell_1 : \ell_p)$ elde edilir. Sonuç olarak Lemma 6.1 den (6.13) şartı elde edilir.



7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Mursaleen ve Noman [7] tarafından verilen λ -yakınsaklık ve λ -sınırlılık kavramı m . mertebeden λ -yakınsaklık ve λ -sınırlılık kavramlarına genelleştirildi. m . mertebeden λ -yakınsaklık ve λ -sınırlılık kavramlarının klasik anlamda yakınsaklık ve sınırlılık ile aralarındaki ilişki incelendi. Verilen bu kavramlardan yola çıkılarak yeni sonsuz üçgensel bir matrisin etki alanı yardımıyla $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($0 < p < \infty$) dizi uzayları tanımlandı.

$\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) dizi uzaylarının üzerlerinde tanımlanan norma göre mutlak olmayan tipten BK-uzayı oldukları gösterildi. Bu uzaylardan Schauder bazına sahip olan uzayların Schauder bazı hesaplandı. Ayrıca bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelendi. Tanımladığımız bu uzaylar ile literatürde verilen bazı dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları araştırıldı. Ayrıca $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ ($1 \leq p < \infty$) uzaylarının α -, β - ve γ -dualleri hesaplandı. Son olarak $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_\infty(\lambda^m)$, $c(\lambda^m)$, $c_0(\lambda^m)$ ve $\ell_p(\lambda^m)$ dizi uzaylarından ℓ_∞ , c , c_0 ve ℓ_p dizi uzaylarına bazı matris sınıfları karakterize edildi.

KAYNAKLAR

- [1] **Kreyszig, E.**, 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.
- [2] **Kantorovich, L. V., Akilov, G. P.**, 1982, Functional Analysis, Pergamon Press, Oxford.
- [3] **Maddox, I. J.**, 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Great Britain.
- [4] **Çakar, Ö.**, 2007, Fonksiyonel Analize Giriş 1, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
- [5] **Goes, G., Goes, S.**, 1970, Sequences of bounded variation and sequences Fourier coefficients I, Math. Z., 118, 93-102.
- [6] **Wilansky, A.**, 1984, Summability Through Functional Analysis, Mathematics Studies, Amsterdam, North-Holland, Vol. 85.
- [7] **Mursaleen, M., Noman, A. K.**, 2010, On the spaces of λ -convergent and bounded sequences, Thai. J. Math., 8(2), 311-329.
- [8] **Mursaleen, M.**, 2014, Applied Summability Methods, Springer Cham Heidelberg, New York, Bordrecht, London.
- [9] **Jarrah, A. M., Malkowsky, E.**, 2003, Ordinary, absolute and strong summability and matrix transformations, Filomat 17, 59-78.
- [10] **Boos, J.**, 2001, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, New York.
- [11] **Başar, F.**, 2012, Summability Theory and Its Applications, Monographs, Bentham Science Publishers E-books, İstanbul, Turkey.
- [12] **Kızmaz, H.**, 1981, On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., 24(2), 169-176.
- [13] **Et, M.**, 1993, On some difference sequence spaces, Turkish J. Math., 17, 18-24.
- [14] **Malkowsky, E., Parashar, S. D.**, 1997, Matrix transformations in space of bounded and convergent difference sequence of order m , Analysis, 17, 87-97.
- [15] **Et, M., Çolak, R.**, 1995, On some generalized difference sequence spaces, Soochow Journal of Mathematics, Soochow J. Math., 31(1), 107-119.
- [16] **Móricz, F.**, 1989, On Λ -strong convergence of numerical sequences and Fourier series, Acta Math. Hung., 54(3-4), 319-327.
- [17] **Mursaleen, M., Noman, A. K.**, 2011, On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I, Filomat, 25(2), 33-51.

- [18] **Mursaleen, M., Noman, A. K.**, 2010, On some new difference sequence spaces of non-absolute type, *Math. Comput. Modelling*, 52, 603-617.
- [19] **Ganie, A. H., Sheikh, A. N.**, 2013, On some new sequence spaces of non-absolute type and matrix transformations, *J. Egyptian Math. Soc.*, 21, 108-114.
- [20] **Sönmez, A., Başar, F.**, 2012, Generalized difference spaces of non-absolute type of convergent and null sequences, *Abstr. Appl. Anal.*, (2012), Article ID 435076.
- [21] **Candan, M.**, 2014, Domain of the double sequential band matrix in the space of convergent and null sequences, *Adv. Difference Equ.*, (2014), 163.
- [22] **Duyar, O., Demiriz, S., Özdemir, O.**, 2014, On some new generalized difference sequence spaces of non-absolute type, *J. Math.*, (2014), Article ID 876813.
- [23] **Bişgin, M. C., Sönmez, A.**, 2014, Two new sequence spaces generated by the composition of m th order generalized difference matrix and λ matrix, *J. Inequal. Appl.*, (2014), 274.
- [24] **Braha N. L., Başar F.**, 2013, On the domain of the triangle $A(\lambda)$ on the spaces of null, convergent and bounded sequences, *Abstr. Appl. Anal.*, (2013), Article ID 47636.
- [25] **Baliarsingh, P., Dutta, S.**, 2015, A unifying to the difference operators and their applications, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, (33), 49-57.
- [26] **Ercan, S., Bektaş A., Ç.**, 2014, On some sequence spaces of non-absolute type generated by the fractional order generalized difference matrix, *i-manager's Journal on Mathematics*, 4(2), 22-29.
- [27] **Stieglitz, M., Tietz, H.**, 1977, Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht, *Math. Z.*, (154), 1-16.
- [28] **Mursaleen, M., Noman, A. K.**, 2011, On some new sequence spaces of non-absolute type related to the spaces ℓ_p and ℓ_∞ II, *Math. Commun.*, 16(2), 383-398.
- [29] **Braha N. L., Mansour, T.**, 2013, On Λ^2 -strong convergence of numerical sequences and Fourier series, *Acta Math. Hung.*, 141(1-2), 113-126.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Ankara'nın Haymana ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Haymana'da tamamladım. 2004 yılında Ankara Fethiye Kemal Mumcu Anadolu Lisesinden mezun oldum. 2005 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2010 yılında mezun oldum. Aynı yıl Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladım. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandım. 2012 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansımı tamamladım. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora başladım. Halen Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.