

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE İKİ BOYUTLU
POTANSİYEL DAĞILIMININ HESAPLANMASI**

Altan GENCER

116647

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ELAZIĞ

2002

116647

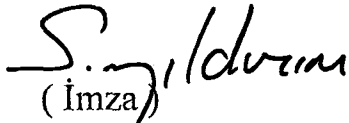
T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE İKİ BOYUTLU
POTANSİYEL DAĞILIMININ HESAPLANMASI

Altan GENCER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI

Bu Tez, 24.10.6. / 2002 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ ile Başarılı / ~~Başarısız~~ Olarak Değerlendirilmiştir.


(İmza)
Danışman

Yrd. Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM


(İmza)
Üye


(İmza)
Üye

Doç. Dr.
Mehmet CEBECİ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../ 2002 tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

YÜKEK LİSANS TEZİ

**SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE İKİ BOYUTLU
POTANSİYEL DAĞILIMININ HESAPLANMASI**

Altan GENCER

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı
2002, Sayfa : 73

Bu tez çalışmasında, Sınır Elemanları Yöntemi yardımıyla iki boyutlu potansiyel dağılımları hesaplanmıştır. MATLAB yazılımında hazırlanan bir program ile sabit sınır elemanları kullanılarak Laplace denklemi tipindeki çeşitli potansiyel problemleri çözülmüştür. Sınır bilinmeyenleri hesaplandıktan sonra, problem bölgesi ızgara ile bölmelenerek iç noktalardaki potansiyeller hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar, analitik olarak hesaplanan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Sınır Elemanları Yöntemi, Potansiyel Dağılımı, Laplace Denklemi.



ABSTRACT

Master Thesis

**TWO DIMENSIONAL POTENTIAL DISTRIBUTION CALCULATION
BY BOUNDARY ELEMENT METHOD**

Altan GENCER

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical Education

2002, Page : 73

In this thesis study, two dimensional potential distributions using the Boundary Element Method have been calculated. Various problems of Laplace Equation type have been solved by a computer program developed in MATLAB software package using constant Boundary Elements. After the Boundary unknowns variable have been calculated, the potentials of interior points have been determined by meshing the problem region with grid. The obtained results have been compared with those results determined from analytical calculations.

Key Words : Boundary Element Method, Potential Distribution, Laplace Equation.



TEŞEKKÜR

Engin bilgisi,değerli fikirleri ve tecrübeleriyle yönlendiren, tez yöneticim aynı zamanda saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM beye vermiş olduğu katkılardan ve yardımlarından dolayı teşekkürlerimi arz ederim.

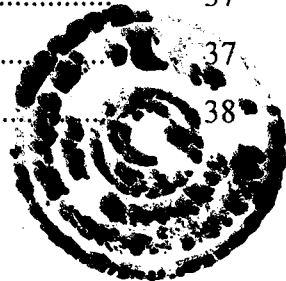
Fırat Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Öğretmenliği, Bölümü'ndeki öğretim üyesi hocalarıma ve özellikle Öğretim Üyesi Dr. Hüseyin ALTUN'a yardımlarından ve desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda Teknik Öğretmen Alper Ulaş arkadaşımın Yüksek Lisans eğitimimde beni yalnız bırakmadığı ve verdiği desteklerden dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışması boyunca gösterdikleri sabır ve destekten dolayı aileme en içten sevgilerimi sunarım. Hayat çizgimin belirlenmesinde önemli rol oynayan Op.Dr. Seyfi Şahin'e şükranlarımı bildiririm.



İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ		<u>Sayfa</u>
1.1.	Genel Bilgi	1
1.2.	Sınır Elemanları Yönteminin Elektrik Mühendisliği Literatüründeki Yeri	3
1.3.	Bu Çalışmanın Amacı	4
2. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ		
2.1.	Temel İntegral Denklemi.....	5
2.2.	Temel Çözüm	7
2.3.	İç Nokta Formülasyonu	8
2.4.	Sınır İntegral Denklemi	9
3. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ		
3.1.	Sınır Elemanları	11
3.2.	Sabit Elemanlar	12
3.3.	İntegrallerin Hesaplanması	15
3.4.	Lineer Elemanlar	17
3.4.1.	Köşe Düğümlerinin İşlemleri	20
3.5.	Karesel ve Daha Yüksek Dereceli Elemanlar	23
3.6.	Kübik Elemanlar	25
3.7.	Poisson Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi	27
3.7.1.	Hücre (Cell) İntegrasyon Yaklaşımı	29
3.8.	Farklı Bölgelerin Birleştirilmesi	32
4. ETKİ KATSAYILARI		
4.1.	Sınırın Temsil Edilmesi	34
4.2.	Fonksiyonun Temsil Edilmesi	37
4.2.1.	Sürekli İnterpolasyon	37
4.2.2.	Süreksiz İnterpolasyon	38



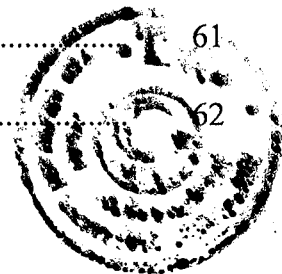
4.3.	Sabit Elemanlar	40
4.3.1.	İntegral Denkleminin Discretization	40
4.3.2.	İntegral Sabitlerinin Hesaplanması	41
4.3.2.1.	Kolaksiyon Noktası Elemanı Ait Değilse.....	41
4.3.2.2.	G_{ij} Etki İntegrallerinin Hesaplanması	44
4.3.2.3.	$\bar{H}_{ij}$ Etki İntegrallerinin Hesaplanması	44
4.3.3.	Tekil İntegrallerin Hesaplanması	45
4.4.	Lineer Elemanlar	47
4.4.1.	g_{ij}^1 ve g_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması	48
4.4.2.	h_{ij}^1 ve h_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması	49
4.4.3.	Tekil İntegrallerin Hesaplanması	49

5. BİLGİSAYAR PROGRAMI

5.1.	Genel Bilgi	50
5.2	SİNEY Ana Programı	51
5.2.1.	SEYMENU Alt Programı.....	52
5.2.2.	INPUT Alt Programı	53
5.2.2.1.	Eleman Bağlantılarının Belirlenmesi ve Eleman Uzunluklarının Hesaplanması	54
5.2.2.2.	Sınır Elemanları Yönteminde Numaralandırma Kuralları	54
5.2.3.	SEYALT Alt Programı	54
5.2.4.	KİCNOK Alt Programı	55
5.2.5.	GRAFİK Alt Programı	55
5.3.	Uygulama Örnekleri	56
5.3.1.	Çok Yalıtkanlı Elektrot Sistemleri	56
5.3.1.1.	Düzlemsel Elektrot Sistemi	56
5.3.1.2.	Koaksiyel Kablo	58

6. SONUÇLAR	61
-------------------	----

KAYNAKLAR	62
-----------------	----



EK-A SINEY PROGRAMI	63
EK-B GAUSS ALAN HESABI	68
B.1. Bir Boyutlu Gauss Alan Hesabı	68
B.2. Bir Boyutlu Logaritmik Gauss Alan Hesabı	70
B.3. İki Boyutlu Logaritmik Gauss Alan Hesabı	70



SİMGELER

Ω	: Poisson denkleminin uygulandığı alan
R	: İki boyutlu bölge.
α	: Bilinmeyen katsayılar.
$\epsilon, \epsilon_r, \epsilon_0$	: Mutlak, bağıl ve boşluk için dielektrik sabitleri (F/m).
$\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}_r$	: Mutlak kompleks ve bağıl kompleks dielektrik sabitleri.
ϕ_i	: İnterpolasyon fonksiyon
u	: Potansiyel (V).
Q	: Elektrik yükü (C).
J	: Jacobian.
ρ	: Hacimsel yük yoğunluğu (C/m ³).
σ	: Elektriksel iletkenlik (1/ Ω m).
t	: Zaman (s).
ω	: Açısal hız (rad/s).
∇	: Gradient operatörü.
Δ	: Laplace operatörü.
Δ_i	: Dirac delta fonksiyonu
$\bar{u}$	: Sınır üzerinde bilinen potansiyel değeri.
$\bar{q}$	: Sınır üzerinde bilinen potansiyelin türevinin değeri.
u^*	: Laplace denkleminin temel çözümü.
q^*	: Temel çözümün normale göre türevi.
N_1, N_2	: Lineer şekil fonksiyonları.
ϕ_1, ϕ_2	: Lineer eleman interpolasyon fonksiyonları.
x, y	: Global koordinat sistemi.
ξ, η	: Lokal koordinat sistemi.



ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : İki boyutlu kısmi integrasyon bölgesi	5
Şekil 2.2 : Dirac delta fonksiyonu	7
Şekil 2.3 : İki ve üç boyutlu durumlar için sınır noktalarının, yarım daire veya yarım küre ile büyütülmesi	9
Şekil 3.1 : Sınır eleman	11
Şekil 3.2 : (a) Sabit, (b) Lineer, (c) Karesel sınır elemanları	12
Şekil 3.3 : 'i' sınır düğümündeki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki	13
Şekil 3.4 : 'i' iç noktasındaki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki	14
Şekil 3.5 : Lineer eleman	17
Şekil 3.6 : Lineer elemanın interpolasyon fonksiyonu	19
Şekil 3.7 : Süreksiz elemanlar	22
Şekil 3.8 : Karesel eleman	23
Şekil 3.9 : Dört düğümlü kübik elemanlar	26
Şekil 3.10: İki düğümlü kübik elemanlar	26
Şekil 3.11: Sınır elemanları ve iç elemanlar	29
Şekil 3.12: Sınır elemanları ve iç hücreler	30
Şekil 3.13: Problem bölgesinin iki alt bölgeye ayrılması	32
Şekil 4.1 : Sınırın temsil edilmesi	34
Şekil 4.2 : Lineer integrasyon fonksiyonu	35
Şekil 4.3 : Parabolik elemanlarda doğrusal koordinatlar	36
Şekil 4.4 : Parabolik interpolasyon fonksiyonları.....	36
Şekil 4.5 : Lineer fonksiyonun temsili	37
Şekil 4.6 : Parabolik fonksiyonu	38
Şekil 4.7 : Süreksiz lineer eleman tanımı	39
Şekil 4.8 : Sabit eleman	40
Şekil 4.9 : Kollokasyon noktası	42



Şekil 4.10 :	Kollokasyon noktalarının farklı notasyonu	43
Şekil 4.11 :	Gauss noktaları	44
Şekil 4.12 :	(a) Kurallı bir eleman boyunca integrasyon, (b) Tekil bir eleman boyunca integrasyon	46
Şekil 5.1 :	Sınır Elemanları Yöntemi ile sınır problemlerinin çözüm aşamaları	51
Şekil 5.2 :	SEYMENU programının aktif görüntüsü	53
Şekil 5.3 :	(a) Dış yüzey, (b) İç yüzey için, numaralandırma kuralı	54
Şekil 5.4 :	(a)Düzlemsel elektrot sistemi, (b) Izgaralanması, (c) Eş potansiyel eğrilerinin çizilmesi	58
Şekil 5.5 :	(a)Koaksiyel kablounun çeyrek kesiti, (b) Koaksiyel kablounun çeyrek kesitinin ızgaralanması.....	59
Ek B.1 :	Üçgen koordinatlar	73



BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Genel Bilgi

Yüksek gerilimde kullanılan cihazların optimum imalat ve işletme karakteristiklerinin belirlenebilmesi amacıyla, elektrik alanı ve potansiyel dağılımının hesaplanmasında kullanılan çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

Sınır elemanları yöntemi, diğer sayısal yöntemlerin kullanımlarına göre daha avantajlıdır. Diğer sayısal yöntemlerde, iç noktalarda sadece elemanların düğüm noktalarındaki değerler hesaplanabilir, fakat sınır elemanları yönteminde istenen iç noktalarda bilinmeyenlerin değerlerin çözümü hesaplanabilir. Sınır elemanları yöntemi ile, Laplace denklemi çözülerek iki boyutlu potansiyel dağılımın çözümü hesaplanır. Diğer sayısal teknikler ile belirli uygulamalarda tahmini çözümlerin yerine daha kesin hesaplama yapılabilir (Watson vd., 1988).

Sınır elemanları yöntemi, elektrik alan profillerin çözümünde kullanılır. Elektrik cihazlarının testlerinde kullanılır ve optimum cihaz karakteristiklerinin belirlenmesine yardımcı olur (Bamji vd., 1993).

Sınır elemanları yöntemi, diğer yöntemlerdeki zorlukları aşmak için geliştirilmiştir. Yöntem sadece sınır ayrışımını gerektirdiğinden, bir problemi çözmek için gerekli veri sayısını indirger. Temelde bu yöntem, analitik fonksiyonları (temel çözümü) kullanarak farklı sınır noktalarındaki değişkenlerin ilişkisinden oluşmaktadır. Bu yöntemde, bir matris şekline getirilebilen etki katsayıları elde edilerek, sonlu elemanlar yöntemine benzer şekilde sınır şartları uygulanır. Sınır elemanları yönteminde problemin boyutsallığı bir derece indirgenir ve eğrisel sınırlar kolaylıkla modellenebilir. Temel çözüm terimlerinden oluşan problem formülasyonu nedeniyle, süreksizlikler ve tekillikler gibi durumlarda özel zorluklar olmaksızın modelleme yapılabilir. Çözüm sadece sınırda istendiğinden yöntem, hareketli ve serbest yüzey problemleri için oldukça uygundur. Yöntemin diğer önemli bir üstünlüğü ise sonsuzluk bulunan problemlere, sonlu hale getirecek alanlara bölmeksizin uygulanmasıdır (Yıldırım, 1999).



Sınır elemanları yöntemi, sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi bölge tipi çözümlerinden daha önemli avantajlara sahip bir tekniktir. Yöntemin en çok dikkate değer özelliklerinden birisi, denklem sisteminin çok küçük olması ve bir problemin çalıştırılması için gerekli veri girişinde yaptığı önemli ölçüdeki azaltmadır. Ayrıca sınır elemanlarının sayısal doğruluğu genellikle sonlu elemanlardan daha büyüktür. Bu avantajlar, iki ve üç boyutlu problemlerde daha fazla göze çarpmaktadır. Sınır elemanları yöntemi, klasik bölge metotlarının uygun olmadığı katı mekaniklerde, hidroliklerde ve gerilme analizlerinde sık sık meydana gelen sonsuz bölge problemlerinin çözümü için de çok uygundur (Saatçioğlu, 1997).

Klasik sınır çözümü, literatürde 'sınır integral yöntemleri' genel başlığı altında sık sık adı geçen etki fonksiyonları terimlerinde formüle edilir. Bu yöntem iyi bilinir ve çoğunlukla ağırlıklı artıklar yaklaşımı kullanıldığından, sınır yöntemleri daha klasik mühendislik teknikleri ile daha fazla ilişkilidir ve etkilidir. Bütün yaklaşım yöntemleri ağırlıklı artıklar tekniklerinin özel uygulamaları olarak yorumlanabilir (Vishnevsky vd., 1993).

İki veya üç boyutlu alanların, farklı dielektrik sabitli ve iletkenlikli yalıtkan malzemelerden oluşan yüksek gerilim sistemlerinin matematiksel modellerini oluşturan, Laplace ve Poisson tipindeki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en son yöntemlerden biri Sınır Elemanları Yöntemi 'dir. Sınır elemanları yöntemi, elektrostatik alan hesaplamalarında doğru ve hızlı bir şekilde sayısal çözüm elde edilmesini sağlar (Yıldırım, 1999).

Sınır elemanları yöntemi, sonlu elemanlara kuvvetli bir alternatif olarak ortaya çıkmıştır. Özellikle alan şiddetinin hesabında veya açık sınırlı problemlerde daha çok doğruluğa gereksinim duyulmaktadır. Sınır elemanlarının en önemli özelliği, hacimden çok sadece yüzey ayrışmasının yeterli oluşudur. Bu nedenle sınır elemanları yönteminin kullanımı, mevcut sabit modellerden ve ağ üreticilerinin kullanımından çok daha kolaydır. Bu durum özellikle sonlu elemanların uygulamasının daha zor olduğu ve bir seri değişikliğin yapılmasının gerekli olduğu tasarım problemlerinde önem kazanır. Ağ kolaylıkla üretilebilir ve değişiklikleri düzenlemek yeni baştan ağ oluşturmayı gerektirmez.



Yöntemin uygulamaları, potansiyel problemleri ve iki boyutlu elektrostatik problemler için ayrıntılarıyla açıklanmıştır, şeklin dış yüzeyindeki sınır elemanları farklı dizinlerin fonksiyonları ile beraber kullanılabilir.

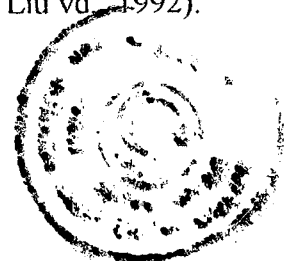
1.2. Sınır Elemanları Yönteminin Elektrik Mühendisliği Literatüründeki Yeri

1978'den beri sınır elemanlarında kullanılan notasyonlar günümüzde de kabul edildiği için genellikle bu tarih sınır elemanlarının modern tanımının yapıldığı tarih olarak kabul edilmektedir. Sınır elemanları hakkındaki ilk uluslararası konferansta ilk gelişmelerin kısmen yayınlanmasının bir sonucu olarak Southampton'da bilgisayarlı mekanik araştırma grubu tarafından konu hakkındaki ilk kitap yayınlanmıştır.

Sınır elemanlarının kullanıcıları, 1978 'den önce kullanılmış olan kaynaklar veya dipoller gibi kavramlarla ilişkili olan indirekt formülasyonlardan ziyade daha cazip olan, potansiyel ve akılar gibi fiziksel değişkenlerin problemin bilinmeyenleri olduğu direkt formülasyonlarla ilgilenmişlerdir. Direkt formülasyon bir dereceye kadar daha geneldir, bilgisayar kodlarına uygulamak için basit ve mükemmeldir.

Potansiyel problemlerinin sınır integral denklem formülasyonu ilk olarak 1963'te Fredholm-tipi integral denklemlerinin çözümü için bir sayısal model olarak Jaswon ve Symm tarafından araştırılarak bulunmuştur. Jaswon ve Symm parçaların veya elemanların sayısına göre problemin sınırını ayrıştırdıktan sonra, elemanların her birinin üzerinde sabit bir kaynak yoğunluğu olduğunu kabul etmişlerdir. İntegral denklem serilerini elde etmek için kollokasyon tekniği kullanılmış ve analitik olarak veya köşegen olmayan terimlerin toplamı tarafından hesaplanan tekil katsayıların hariç tutulması ile etki katsayıları Simpson kuralı kullanılarak hesaplanmıştır.

Sınır elemanları yöntemi kullanılarak elektrostatik alanlarda kapasite ve kuvvet hesaplanması ile ilgili bir çalışmada, farklı potansiyellerdeki iki küreden oluşan bir sistem ile iki düzlem elektrot arasındaki bir küreden oluşan örnek sistemler için kapasite ve kuvvet hesaplamaları yapılmıştır. Bulunan sayısal sonuçlar, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Böylece sınır elemanları yönteminin alan çözümlerindeki yüksek doğruluğunun bir sonucu olarak, elektrik alanlarındaki kapasite ve kuvvet gibi parametrelerin de çok yüksek bir doğrulukla elde edildiği gösterilmiştir (Liu vd., 1992).



Başka bir tür çalışmada, iki boyutlu Laplace problemi için varyasyonel sınır elemanları formülasyonu geliştirilmiştir. Uygulama olarak farklı potansiyellerde iki adet koaksiyel iletkenlerden oluşan problem varyasyonel sınır elemanları yöntemi ile çözülmüş, sınırdaki hesaplanan ve bir radyal eksen boyunca iç noktalarda hesaplanan potansiyel ve akı değerleri analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Diğer bir uygulamada koaksiyel bir kapasitörde, potansiyel dağılımları hesaplanarak eşpotansiyel eğriler çizdirilmiş ve kapasitesi hesaplanmıştır (Sun vd.,1994).

1.3. Bu Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada, bazı elektrot sistemlerinde iki boyutlu potansiyel dağılımları hesaplanacaktır. Bu amaçla elektrot sistemlerinin matematiksel modelleri oluşturulduktan sonra, Sınır Elemanları Yöntemi yardımıyla MATLAB paket programında bir simülasyon gerçekleştirilerek sınırlardaki ve iç noktalardaki potansiyeller hesaplanacaktır. Bulunan sonuçlar, teorik sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

Bu amaçla yapılan işlemler şunlardır:

- 1) Elektrik alanlarının matematiksel modellerini oluşturan Laplace tipi, ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemleri, ağırlıklı artıklar yöntemini ve iki boyutlu Laplace denkleminin temel çözümünü kullanarak, sınır integral denklemine dönüştürmek,
- 2) Sınır integral denklemlerini, sınır elemanları ile ayrıştırarak, sınırdaki bilinmeyenlerden oluşan sabit bir denklem sistemi elde etmek,
- 3) Bu denklemleri elde ettikten sonra, sınır elemanları yöntemi ile iki boyutlu, izotropik bir ortamda potansiyel dağılımını hesaplamaktır. Bu amaçla geliştirilen programın sahip olduğu özellikler şunlardır:
 - a) Problem bölgesinin istenen sıklıkta lineer sınır elemanları ile bölmelenerek, eleman düğümlerinin koordinatları, potansiyelin hesaplanacağı iç noktaların koordinatları ve sınır şartlarından oluşan basit bir veri girişinin yapılması,
 - b) Sayısal integrasyon yöntemi yardımıyla, lineer denklem sisteminin katsayılarını hesaplayarak denklem sisteminin çözülmesi,
 - c) Denklem sisteminin çözümüyle elde edilen sınır değerlerini (potansiyel ve potansiyelin normale göre türevini) kullanarak, istenen iç noktalardaki potansiyellerin hesaplanması.



BÖLÜM 2

SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ

2.1. Temel İntegral Denklemi

Sınır integral denklemlerini elde etmek için yapılacak ilk ve en önemli işlem; problemi tanımlayan diferansiyel denklemin ‘temel çözümü’nün bulunmasıdır. Bu temel çözüm, kısmi diferansiyel denklemin B bölgesinde sağlar ve bu denklemin bir sınır integral denklemine dönüştürür. Böylece problem iki boyutlu durumdan, bir boyutlu duruma indirgenmiş olur (Yıldırım, 1999).

İki veya üç boyutlu B bölgesinde, Laplace denklemi,

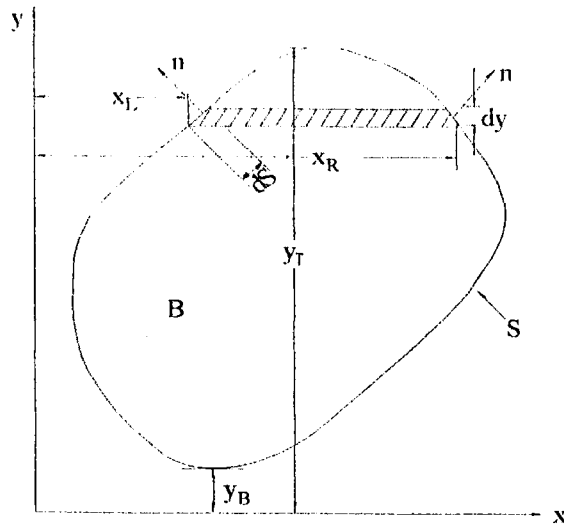
$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır.

S sınırında aşağıdaki şartlarda:

- 1) Gerekli şartlar $u = \bar{u}$ S_1 'de
- 2) Doğal şartlar $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ S_2 'de

Burada, $S = S_1 + S_2$, n sınırın normali, bilinen değerler üst çizgi ile belirtilmiştir.



Şekil 2.1 İki boyutlu kısmi integrasyon bölgesi.

Denkleimde verilen hata ,eğer kesin (fakat binmeyen) u ve q değerleri yaklaşık bir çözüm ile yer değiştirilebilirse, ağırlıklı u fonksiyonuna ve sınırdaki türevlerine bağlı olarak ortogonalize edilerek en aza indirilir. Başka bir ifadeyle, R'ler artarlarsa,

$$R = \nabla^2 u \neq 0 \quad (2.2)$$

$$R_1 = u - \bar{u} \neq 0 \quad (2.3)$$

$$R_2 = q - \bar{q} \neq 0 \quad (2.4)$$

Burada u ve q yaklaşık değerlerdir.

$$\int_B R u^* dB = \int_{S_1} R_2 u^* dB - \int_{S_2} R_1 q^* dB \quad (2.5)$$

Bu denklemin sol tarafındaki integrasyon,

$$\int_B (\nabla^2 u) u^* dB = \int_{S_1} (q - \bar{q}) u^* dB - \int_{S_2} (u - \bar{u}) q^* dB \quad (2.6)$$

ifadesini verir.

Bundan sonra, sol taraftaki terimlerin integrasyonu ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$-\int_B \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_K} \frac{\partial u^*}{\partial x_K} \right\} dB = -\int_{S_2} q u^* dB - \int_{S_2} u q^* dB - \int_{S_1} u q^* dB - \int_{S_1} u q^* dB \quad (2.7)$$

Denk.(2.7), başlangıç noktası olduğundan, sınır elemanları yöntemi için önemlidir. Bundan sonra, bu denklem sınır integral denkleminde kullanılacaktır. Bu işlem, temel çözüm olarak isimlendirilen, ağırlık fonksiyonu u^* 'nun özel türü kullanılarak yapılır.

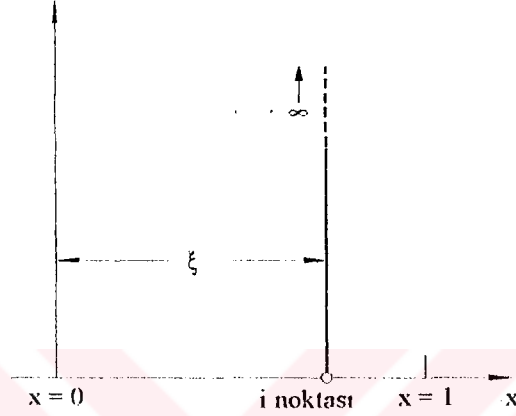
2.2. Temel Çözüm

Temel çözüm, u^* Laplace denklemini sağlar. Temel çözüm, bir 'i' noktasında bulunan bir yük tarafından oluşturulan alanı temsil eder. Bu yükün etkisi, 'i' noktasından sonsuza kadar yayılır. Bu nedenle u^* , çözüm aşağıdaki denklemdeki gibi yazılabilir:



$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (2.8)$$

Burada, Δ_i bir Dirac delta fonksiyonudur. Bu fonksiyon $x = x_i$ noktasında sonsuza giderken, bu nokta dışındaki herhangi bir noktada sıfıra eşittir. Δ_i fonksiyonunun bir bölge üzerindeki integrali ise 1'e eşittir (Yıldırım, 1999).



Şekil 2.2 Dirac delta fonksiyonu.

Dirac delta fonksiyonunun herhangi bir fonksiyonla çarpımının integrali, bu fonksiyonun 'i' noktasındaki değerine eşittir. Bu şartla,

$$\iint_B u(\nabla^2 u^*) dB = \iint_B u(-\Delta_i) dB = -u_i \quad (2.9)$$

yazılabilir. Denk.(2.7) şu şekilde yazılabilir:

$$\iint_B \{(\nabla^2 u^*)u\} dB = -\int_{s_1} q u^* dS - \int_{s_2} \bar{q} u^* dS + \int_{s_1} \bar{u} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS + \int_{s_2} u \frac{\partial u^*}{\partial n} dS \quad (2.10)$$

ifadesi bulunur. İzotropik üç boyutlu bir ortam için temel çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.11)$$

İki boyutlu izotropik bölge için çözümü de,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ell n \left[\frac{1}{r} \right] \quad (2.12)$$



şeklinde yazılır. Bu ifadede r , dirac delta fonksiyonun uygulandığı x_i noktasının, herhangi bir noktaya olan uzaklığıdır.

Denk.(2.11) ve denk.(2.12)'nin çözümleri, iki veya üç boyutlu Laplace denklemlerini sağlamaktadırlar.

2.3. İç Nokta Formülasyonu

Denk.(2.9)'da bulunan kavram denk.(2.10)'da yerine yazılırsa,

$$-u_i = -\int_{S_1} q u^* dS - \int_{S_2} \bar{q} u^* dS + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS + \int_{S_2} u q^* dS \quad (2.13)$$

bulunur. Daha sonra denklem düzenlenerek,

$$u_i + \int_{S_1} \bar{u} q^* dS + \int_{S_2} u q^* dS = \int_{S_1} q u^* dS + \int_{S_2} \bar{q} u^* dS \quad (2.14)$$

formda yazılır. Denklemden sınır şartları dikkate alındığında integraller,

$$\int_S q u^* dS = \int_{S_1} q u^* dS + \int_{S_2} \bar{q} u^* dS \quad (2.15)$$

$$\int_S u q^* dS = \int_{S_1} \bar{u} q^* dS + \int_{S_2} u q^* dS \quad (2.16)$$

toplam sınır ifadeleri formunda kısaltılabilir. Bundan sonra,

$$u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (2.17)$$

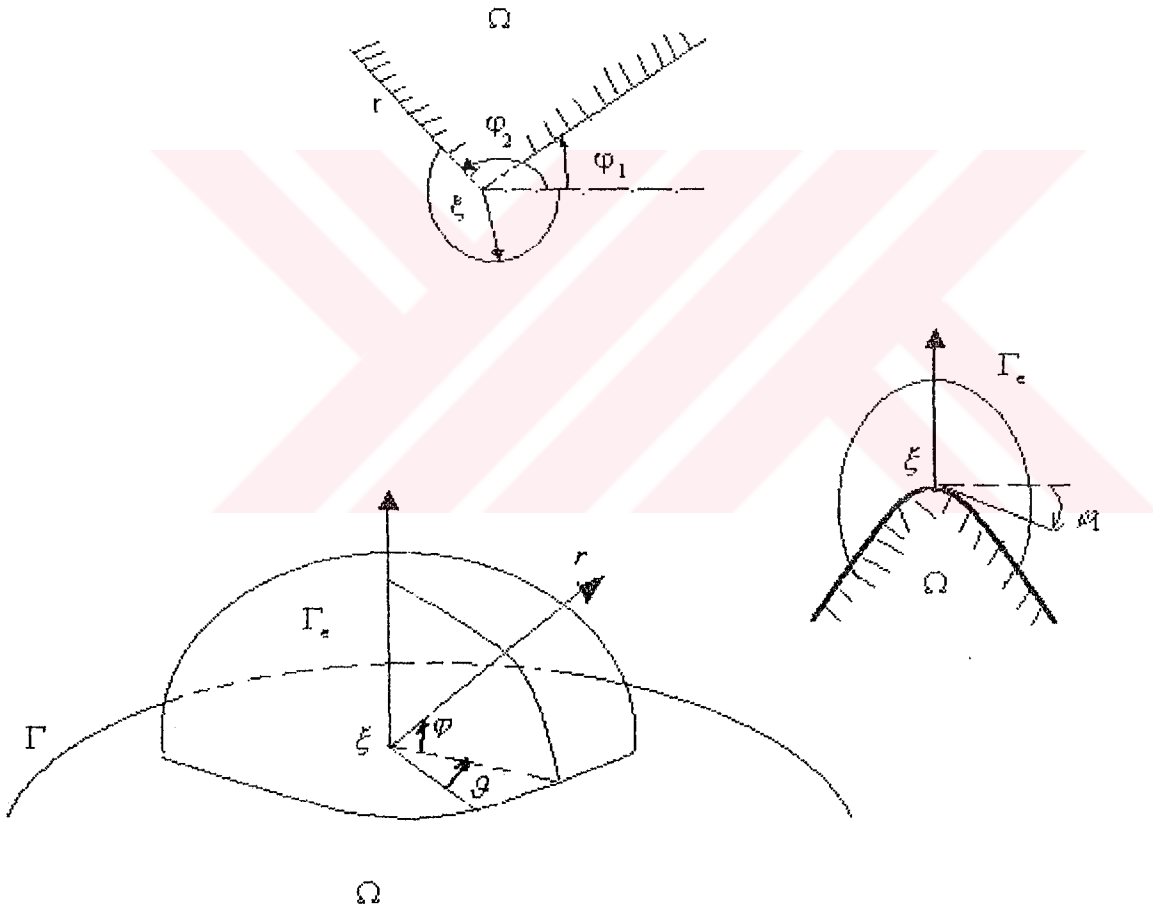
ifadesi elde edilir. Bu ifade, B bölgesi içindeki herhangi bir 'i' noktasında geçerlidir.

Bundan dolayı denkleme 'iç nokta formülasyonu' denir (Tang, 1988).



2.4. Sınır İntegral Denklemleri

Sınır elemanları yönteminde, iç noktaların hesaplanması için B problem bölgesinin her noktasında geçerli olan denk. (2.17) kullanılır. Ancak, için x_i noktasının sınırda olduğu durumun hesaplanması gerekir. Bu amaçla Γ noktasının sınır üzerinde olduğu, fakat kendi bölgesinin iki boyutlu durumda bir yarım daire ile veya üç boyutlu durumda ε yarıçaplı bir yarım küre ile büyütüldüğü göz önüne alınır. Γ noktasının sınır üzerinde olduğu durumlar için sınır integral denkleminin elde edilmesi gerekir. Bunun için Γ noktasının sınıra taşınması gerekir.



Şekil 2.3 İki ve üç boyutlu durumlar için sınır noktalarının, yarım daire ve yarım küre ile büyütülmesi.

Bu konumda Γ noktasının S^ε ile benzetilen yarım dairenin veya yarım kürenin merkezinde olduğu (Şekil 2.3) ve limitin ε yarıçapı sıfıra giderken ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$) bulunduğu



dikkate alınacaktır. Bu yöntem ile 'i' noktası bir sınır noktası haline gelecektir ve sonuç ifadesi sınır üzerindeki herhangi bir nokta için geçerli olacaktır.

Bu nedenle denk.(2.17)'in her iki tarafındaki sınır integral ifadeleri, $\int_{S-S^e}$ ve $\int_{S^e}$ olmak üzere iki integralin toplamı şeklinde yazılabilir:

$$u_i + \int_{S-S^e} u q^* dS + \int_{S^e} u q^* dS = \int_{S-S^e} q u^* dS + \int_{S^e} q u^* dS \quad (2.18)$$

Üç boyutlu durumda, S^e çevresindeki integraller aşağıdaki sonuçları verir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S^e} q u^* dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S^e} q \frac{1}{4\pi\varepsilon} dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ q \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \right\} \equiv 0 \quad (2.19)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S^e} u q^* dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S^e} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \right\} = -\frac{1}{2} u_i \quad (2.20)$$

İki boyutlu durumda, denk.(2.17)'in sağ tarafındaki integral aynı şekilde sıfır olur. Denklemin sol tarafındaki integral ise aşağıdaki şekilde hesaplanır:

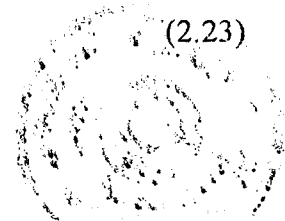
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S^e} u q^* dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S^e} u \frac{1}{2\pi\varepsilon} dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} u_i \quad (2.21)$$

Bu durumda ε sıfır olduğu için denk.(3.42)'nin her iki tarafındaki $S-S^e$ sınırı tekrar S sınırı haline gelecektir. Hesaplanan değerler denk.(3.41)'de yerine yazılarak 'i' noktasının sınırda olması durumunda, iki veya üç boyutlu problemler için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\frac{1}{2} u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (2.22)$$

Denk.(2.22)'ye '*sınır integral denklemi*' adı verilir ve genellikle sınır elemanları yönteminin başlangıç formülasyonu olarak kullanılır. 'i' noktasının düzgün sınırda olduğu durum için bulunan bu denklem aşağıdaki şekilde geliştirilebilir (Yıldırım, 1999):

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (2.23)$$

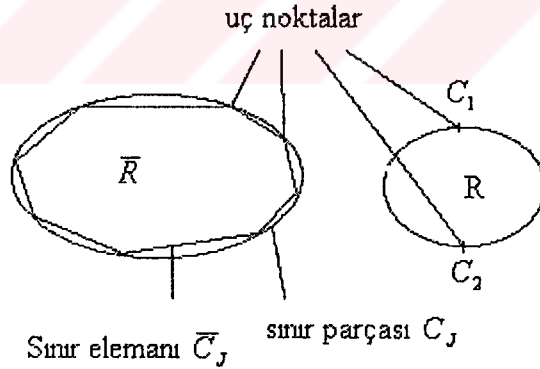


BÖLÜM 3

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

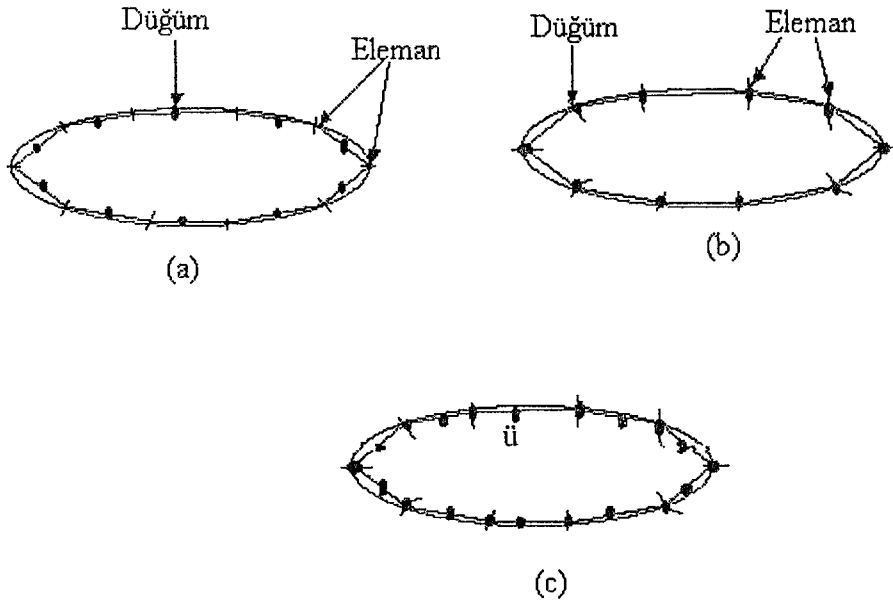
3.1.Sınır Elemanları:

Şekil 3.1’de gösterildiği gibi iki boyutlu R bölgesi, Sınır elemanlarıyla N parçaya bölünür. Sınır elemanları $C_j = 1, \dots, N$ şeklinde gösterilir. Bölmeleme noktaları, sınır elemanlarının uç noktalarıdır. Genelde yaklaşık bölge $\bar{R}$ ve yaklaşık sınır $\bar{C} = \bigcup_{j=1}^N \bar{C}_j$ ile tanımlanır. C sınırı ile yaklaşık sınır $\bar{C}$ arasındaki parça, ayrıştırma hatası üretir. Sınır elemanları seçme, bölmeleme hatasını en aza indirir. Sınır durumları karışık ise, normal sınır durumları iki parçada uygulanır C_1 ve C_2 ($C = C_1 \cup C_2$). İki ortak nokta ile bu parçalar, uç noktalara kadar götürülür. Bu durumda bölmeleme hatası sıfırdır ($\bar{R} = R$ ve $\bar{C} = C$). Üç tip sınır elemanı sabit, lineer ve eğrisel eleman yaklaşımı ile bir sınır problemi çözülebilir. Yöntemde, bilinmeyen değerlerin olduğu noktalar 'düğüm'ler' olarak isimlendirilir.



Şekil 3.1 Sınır elemanları





Şekil 3.2 (a) Sabit eleman, (b) Lineer eleman, (c) Karesel eleman

3.2. Sabit Elemanlar

Düzgün R bölgesinin C sınırının, N elemana bölündüğü kabul edilirse, N_1 elemanlarını C_1 ve N_2 elemanlarını da C_2 ile numaralandırmak uygun olur. Yaklaşık bölge $\bar{R}$ ve yaklaşık sınır $\bar{C}$ meydana gelir. Düğüm olarak adlandırılan ve değerlerin bilinmediği varsayılan noktalar, sabit elemanların ortasında alınır (Şekil 3.2.a).

Burada sınırın N sabit elemana bölündüğü varsayılır. Her eleman üzerindeki u ve q değerlerinin sabit ve elemanın ortasındaki düğümdeki değere eşit olduğu kabul edilir. Denk.(3.1), sınır koşullarını uygulamadan önce verilen “i” noktası için şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{u_i}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\bar{C}_j} q^* ds = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\bar{C}_j} u^* ds \quad (3.1)$$

Burada $q^* \equiv \frac{\partial u^*}{\partial n}$ olur. Bu sınır elemanları denklemi, özel “i” düğümüne uygulanır. İntegralde, i düğümleri j elemanları üzerinde hesaplanır. Denk.(3.1)’nin sol tarafındaki $\int_{\bar{C}_i} q^* ds$ yerine $\hat{H}_i$ ve sağ tarafındaki $\int_{\bar{C}_i} u^* ds$ yerine G_i yazılırsa, denk.(3.1) şu şekilde yazılır:



$$\frac{u_i}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} \quad (3.2)$$

Sabit elemanlar için H_{ij} ve G_{ij} integralleri kolay hesap edilebilir. Yüksek dereceden elemanlar için analitik çözüm çok zordur. Bu nedenle Gauss alan hesabı yöntemi ile hesap edilir.

Denk.(3.2)'de sınır dahil bütün düğümlerde u ve q değerleri ile i 'nin orta düğümünde u 'nun değeri hesaplanabilir.

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j, \quad (3.3)$$

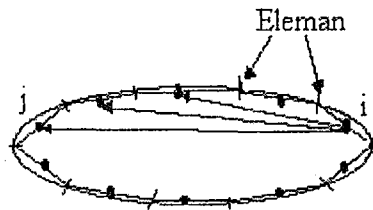
Burada,

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{for } i=j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (3.4)$$

denk.(3.2) matris şu şekilde yazılabilir:

$$HU = GQ \quad (3.5)$$

burada $N = N_1 + N_2$, u 'nun değerleri N_1 ve q 'nun değerleri N_2 olarak bilinir.



Şekil 3.3. 'i' sınır düğümündeki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki.



H_{ij} terimlerini hesaplamada c_i katsayısı kullanılır ($c_i = \frac{1}{2}$ düzgün sınır için). Bütün

sonlu bölge üzerine düzgün bir potansiyel uygulanır. $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ değeri 0 olmalıdır.

$$HI = 0 \quad (3.6)$$

Burada, I birim sütun vektörüdür. Denk.(3.5)'de bütün elemanlar için H hesaplanır.

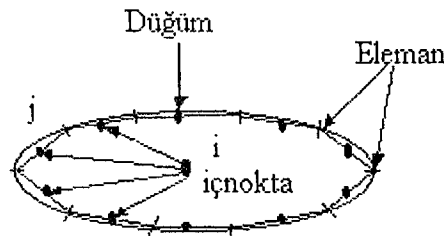
$$H_{ii} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N H_{ij}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

u ile $\bar{u}$, N_2 bilinmeyen değerleri ile hesaplanır. q ile $\bar{q}$, N_1 bilinmeyen değerleri ile hesaplanır.

$$AX = F \quad (3.8)$$

Burada X , u ve q 'nun bilinmeyenlerinden oluşan bir vektördür. Bütün $\bar{C}$ sınırı üzerinde, u 'nun ve q 'nun değerleri hesaplanabilecektir. Herhangi bir iç noktadaki u 'nun değeri aşağıdaki formülle hesaplanabilir,

$$u_i = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} \quad (3.9)$$



Şekil 3.4 'i' iç noktasındaki temel çözüm ile sınır elemanları arasındaki ilişki.

İntegral denklemi $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ve $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ayrıştırılarak çözüm yapılabilir. 'i'

iç noktası için;

$$\begin{aligned}
q_x(i) &= \int_{\bar{c}} q \frac{\partial u^*}{\partial x} ds - \int_{\bar{c}} u \frac{\partial q^*}{\partial x} ds, \\
&= \sum_{j=1}^N q_j \left(\int_{\bar{c}_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left(\int_{\bar{c}_j} \frac{\partial q^*}{\partial x} ds \right)
\end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
q_y(i) &= \int_{\bar{c}} q \frac{\partial u^*}{\partial y} ds - \int_{\bar{c}} u \frac{\partial q^*}{\partial y} ds, \\
&= \sum_{j=1}^N q_j \left(\int_{\bar{c}_j} \frac{\partial u^*}{\partial y} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left(\int_{\bar{c}_j} \frac{\partial q^*}{\partial y} ds \right)
\end{aligned} \quad (3.11)$$

burada,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (-\ell nr) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x}, \\
\frac{\partial u^*}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} (-\ell nr) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y}, \\
\frac{\partial q^*}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} \left| \frac{\partial r}{\partial x} n_1 + \frac{\partial r}{\partial y} n_2 \right| \right], \\
\frac{\partial q^*}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} \left| \frac{\partial r}{\partial x} n_1 + \frac{\partial r}{\partial y} n_2 \right| \right]
\end{aligned} \quad (3.12)$$

Burada, 'i' noktası çevresindeki akı değişimleri hesaplandığından dolayı türevler, sadece u^* ve q^* 'nun temel çözümleri üzerinde hesaplanır .

3.3. İntegrallerin Hesaplanması

Denk.(3.3) ile denk.(3.4) ve denk.(3.9)'daki gösterilen G_{ij} ve $\hat{H}_{ij}$ integralleri, $i \neq j$ durumu için sayısal integrasyon formülleri ile bulunabilir. $i=j$ olduğunda (tekil integraller) daha kesin bir integrasyon gerekir. Tekil integrallerin hesaplanması genellikle sayısal olarak yapılır. Sabit elemanlar G_{ij} ve $\hat{H}_{ij}$ integralleri analitik olarak bulunabilir.

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\bar{c}_i} q^* ds = \int_{\bar{c}_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} ds = 0 \quad (3.13)$$



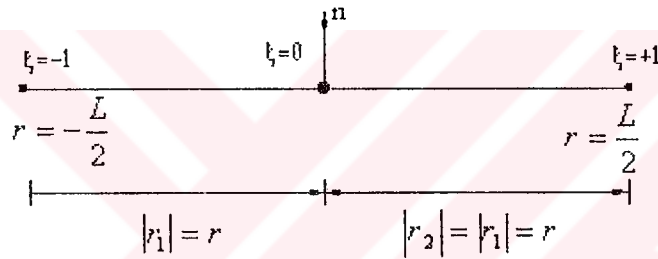
G_{ij} deki integraller için özel işlem gerekir. İki boyutlu elemanlar için,

$$G_{ij} = \int_{\bar{c}_i} u^* ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{c}_i} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds \quad (3.14)$$

Denk.(3.14)'ü integre etmek için koordinatlar eleman üzerinde homojen ξ koordinatına dönüştürülebilir (Şekil 3.4).

$$r = \left| \xi \frac{\lambda}{2} \right| \quad (3.15)$$

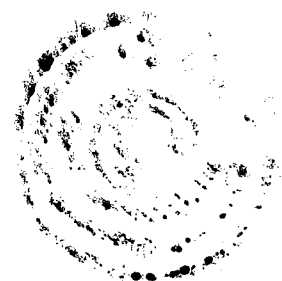
Burada λ uzunluk elemanıdır.



Şekil 3.4 Sabit eleman.

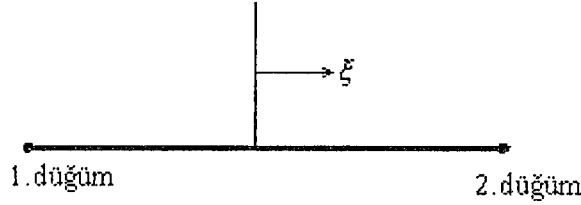
$$\begin{aligned} G_{ii} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{c}_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{\xi L_i}\right) L_i d\xi \\ &= \frac{L_i}{2\pi} \left[\xi \ln \frac{2}{L_i} - \xi \ln \xi + \xi \right]_0^1 \\ &= \frac{L_i}{2\pi} \left[1 + \ln \frac{2}{L_i} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Daha karmaşık durumlar için özel ağırlıklı formül kullanılır. Başka integraller için gauss alan hesabı kullanılır.



3.4. Lineer Elemanlar

Buraya kadar olan bölümde sadece, değişkenlerin değerlerinin bütün eleman üzerinde aynı olduğu kabul edilen sabit elemanlar incelenmiştir. Şimdi ise, Şekil 3.5'te gösterildiği gibi düğümlerin, elemanların uç noktalarında olması hali için u ve q 'nın lineer bir değişim gösterdiği durum incelenecektir.



Şekil 3.5 Lineer eleman.

Temel sınır integral ifadesi denk.(3.1)'de yazıldığı gibidir:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\bar{c}_j} u q^* dS = \int_{\bar{c}_j} q u^* dS \quad (3.17)$$

Sınır bir dizi N sayıda elemana ayrıştırıldıktan sonra denk.(3.17) yazılabilir. Bu denklemdaki integrallerde, u ve q değerleri her bir S_j elemanı üzerinde lineer olarak değiştiğinden, hesaplaması zordur. Bu nedenle bunların integral dışına alınması mümkün değildir.

Eleman üzerindeki herhangi bir noktadaki u ve q değerleri, ϕ_1 ve ϕ_2 gibi iki lineer interpolasyon fonksiyonu Şekil 3.5'da gösterildiği gibi ξ homojen koordinatlarına ve bunların düğüm değerlerine bağlı olarak tanımlanabilirler:

$$u(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Burada ξ , boyutlarının koordinatı $\xi = x/(l/2) = 2x/l$ 'dir, j elemanın integraller boyunca denk.(3.17)' sol tarafı için hesaplanırsa,



$$\begin{aligned}
\int_{\bar{C}_j} u q^* ds &= \int_{\bar{C}_j} [\phi_1 \phi_2] [u_1 u_2]^T q^* ds \\
&= \int_{\bar{C}_j} [\phi_1 \phi_2] q^* ds [u_1 u_2]^T \\
&= [h_{i1} h_{i2}] [u_1 u_2]^T
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Burada,

$$h_{i1} = \int_{\bar{C}_j} \phi_1 q^* ds \equiv \alpha_1, h_{i2} = \int_{\bar{C}_j} \phi_2 q^* ds \equiv \alpha_2 \tag{3.21}$$

denk.(3.17)'nin sağ tarafı,

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{C}_j} q u^* ds &= \int_{\bar{C}_j} [\phi_1 \phi_2] q^* ds [q_1 q_2]^T \\
&= \int_{\bar{C}_j} [g_{i1} g_{i2}] [q_1 q_2]^T
\end{aligned} \tag{3.22}$$

burada,

$$g_{i1} = \int_{\bar{C}_j} \phi_1 u^* ds \equiv b_1, g_{i2} = \int_{\bar{C}_j} \phi_2 u^* ds \equiv b_2 \tag{3.23}$$

denk.(3.20) ve denk.(3.22), bütün j elemanları için denk.(3.18)'de yerine yazılırsa,

$$c_i u_i + [\hat{H}_{i1} \hat{H}_{i2} \dots \hat{H}_{in}] [u_1 u_2 \dots u_n]^T = [G_{i1} G_{i2} \dots G_{in}] [q_1 q_2 \dots q_n]^T \tag{3.24}$$

$$\hat{H}_{ij} = h_{ij}, j + h_{i2} \text{ elemanın ve } (j-1) = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ elemanın bir terimidir} \tag{3.25}$$

benzer olarak

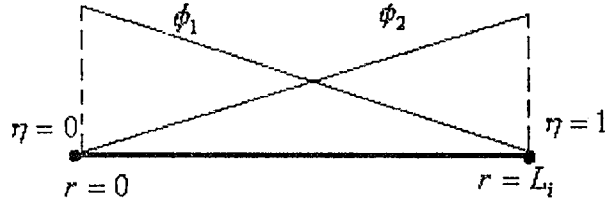
$$\hat{G}_{ij} = g_{ij}, j + g_{i2} \text{ elemanın ve } (j-1) = b_1 + b_2 \text{ elemanın bir terimidir} \tag{3.26}$$

i noktası için denk.(3.24) ve denk.(3.26) birleştirilerek yeni bir denklem elde edilir.

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{C}_i} u^* ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{C}_i} [u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2] ds$$



$$= \frac{1}{2\pi} (u_1 G_{ii}^1 + u_2 G_{ii}^2) \quad (3.27)$$



Şekil 3.6. Lineer elemanın interpolasyon fonksiyonu

Fakat bu durumda $\phi_{1,2}$ interpolasyon fonksiyonlarını buluruz. H_{ii} 'nin hesap edilmesinde kullanılır. G_{ii} 'nin hesap edilmesinde kullanıldığında ($\xi = 0$) tek başına yetmez. Bu nedenle $\phi_{1,2}$ fonksiyonu, $\xi = 1 - 2(1 - \eta)$ ile değiştirilir. Verim $\phi_1 = 1 - \eta$ ve $\phi_2 = \eta$ ($0 \leq \eta \leq 1$)'dir.

$$\begin{aligned} G_{ii}^1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{C}_i} \phi_1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \int_0^1 (1 - \eta) \ln\left(\frac{1}{L_i \eta}\right) L_i d\eta \\ &= L_i \int_0^1 (1 - \eta) (-\ln L_i - \ln \eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.28)$$

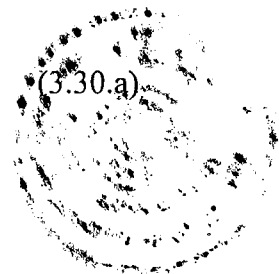
$$= \frac{L_i}{2} \left[\frac{3}{2} - \ln L_i \right]$$

$$\begin{aligned} G_{ii}^2 &= \int_{\tilde{C}_i} \phi_2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \int_0^1 \eta \ln\left(\frac{1}{L_i \eta}\right) L_i d\eta \\ &= L_i \int_0^1 \eta (-\ln L_i - \ln \eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$= \frac{L_i}{2} \left[\frac{1}{2} - \ln L_i \right]$$

şimdi denk.(3.24) olarak yazabiliriz.

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j$$



$$\sum_{j=1}^{\eta} \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{\eta} G_{ij} q_j \quad (3.30.b)$$

veya matris şeklinde,

$$HU = GQ \quad (3.31)$$

olarak yazılır. Bütün sınır üzerinde H'nin köşegen terimleri her zaman hesap edilir. q değerlerinin türevleri 0 olabilir. Buradan denk.(3.31)'de $HU = 0$ olur. H'nin bütün elemanları toplamı hiçbir zaman 0 olmamalıdır.

$$H_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij} \quad (3.32)$$

Bu nedenle $c(i)$ değerinin hesaplanmasına gerek yoktur. Temel çözüm de $-\ln\left(\frac{r}{2\pi}\right)$ olarak değil $-\ln r$ olarak alınır.

$$H_{ii} = 2\pi - \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij}, \dots, i = 1, \dots, N \quad (3.33)$$

3.4.1. Köşe Düğümlerinin İşlemleri

Sınır elemanları ile ayrılan bir bölgede, her iki taraftaki şartlar aynı olmayabileceğinden, özel bir dikkat gerektiren geometrik olarak süreksizliğe sahip noktalar ortaya çıkacaktır. Bölgenin sınırı lineer elemanlar ile ayrıştırıldığında 'j' elemanının 2. düğümü ile 'j+1' elemanın 1. düğümü aynı noktada olur. (Şekil 3.5) Potansiyel, sınırın herhangi bir noktasında aynı olduğundan, 'j' elemanının u^2 potansiyeli ile 'j+1' elemanının u^1 potansiyeli aynı değerdedir. Bununla birlikte, bu fikir genel bir kural olarak akıya uygulanamaz. Bunun nedeni ise akının aynı değere sahip olmadığı sınır noktaları vardır. Bu neden normalin sınırdaki tek olmadığı yerlerde çıkar.

Bir elemanın 2. düğümünün akısının bir sonraki elemanın 1. düğümünün akısının farklı olabileceği hesaba katılarak akılar, $2N$ boyutunda düzenlenir.



Denk.(3.33) ve denk.(3.36) bütün 'j' elemanları için, denk.(3.23)'de yerine konursa, 'i' düğümü için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$c_i u_i + \begin{bmatrix} \hat{H}_{i1} & \hat{H}_{i2} & \dots & \hat{H}_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i1} & G_{i2} & \dots & G_{i2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{2N} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Burada $\hat{H}_{ij}$, 'j' elemanının h_{ij}^1 terimi ile 'j-1' elemanının $h_{i,j-1}^2$ teriminin toplamına eşittir. Bu nedenle denk(3.36), 'i' düğümü için toplam değerini gösterir. Denk.(3.36) özetlemek için,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (3.37)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önceden denk.(3.9)'da sabit elemanlar için gösterildiği gibi,

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (3.38)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denk.(3.38)'in tamamı matris şeklinde,

$$H u = G q \quad (3.39)$$

yazılır. Burada G, N x 2N boyutunda dikdörtgen bir matristir.

Bir sınır düğümünde birçok farklı durum meydana gelebilir. Birincisi, düz sınır üzerinde düğümün olmasıdır. Bu durumda, düğümden önceki ve sonraki akılar farklı tanımlanmadıkça, potansiyel veya akıdan sadece biri bilinmiyordur. İkincisi, düğümün bir köşe noktasındadır. Burada, sınır şartlarına bağlı olarak dört durum ortaya çıkar:

1. Bilinen değerler : Köşeden önceki ve sonraki akılar.
Bilinmeyen değer : Potansiyel.
2. Bilinen değerler : Potansiyel ve köşeden önceki akı.
Bilinmeyen değer : Köşeden sonraki akı.
3. Bilinen değerler : Potansiyel ve köşeden sonraki akı.
Bilinmeyen değer : Köşeden önceki akı.



4. Bilinen değer : Potansiyel.

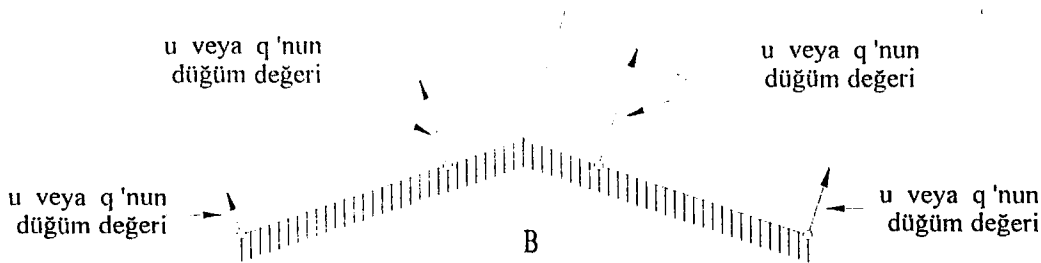
Bilinmeyen değerler: Köşeden önceki ve sonraki akılar.

İlk üç durum için, bir düğüm için bir bilinmeyen vardır; dördüncü durum için iki bilinmeyen vardır. Bir düğüm için bir bilinmeyen olduğu sürece; bilinen iki değer sağ tarafa alınır ve alışılmış $(N \times N)$ boyutlu denklem sistemi elde edilir:

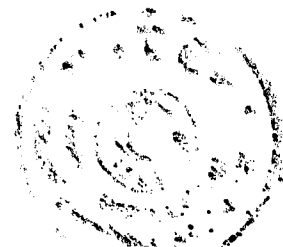
$$A x = y \quad (3.40)$$

Burada x , bilinmeyenler vektörüdür. $A, N \times N$ boyutlu bir kare matristir. y bilinenler vektörüdür. y vektörü, G veya H matrislerinin karşılık gelen katsayıları ile bilinen sınır şartlarının çarpımından hesaplanır. A matrisi, işareti değiştirildikten sonra G matrisinin kolonları ile H matrisinin kolonlarını veya karşılık gelen düğümdeki akının tek değeri bilinmediği zaman, bir işaret değişimi ile G 'nin ardışıl iki kolonunun toplamını içerir.

Köşe düğümünde bilinmeyenlerin sayısı iki olduğunda (4. durum), düğüm için farklı bir eşitlik gerekir. Problem, süreksiz elemanlar düşüncesi kullanılarak ta çözülebilir. Burada, 'j' elemanının sonundaki ve 'j+1' elemanının başlangıcındaki düğümler, içte iki lineer elemana iç tarafına kaydırılır ve köşede birleşme yerine bağımsız iki düğüm olarak kalır (Şekil 3.7). Böylece, her düğüm için bir eşitlik yazılabilir. Potansiyel ve akı, düğüm değerlerine bağlı olarak, bütün elemanlar boyunca lineer fonksiyonlar ile verilir. Fakat prensip olarak köşede süreksizdirler (Yıldırım, 1999).



Şekil 3.7 Süreksiz elemanlar.



3.5. Karesel ve Yüksek Dereceli Elemanlar

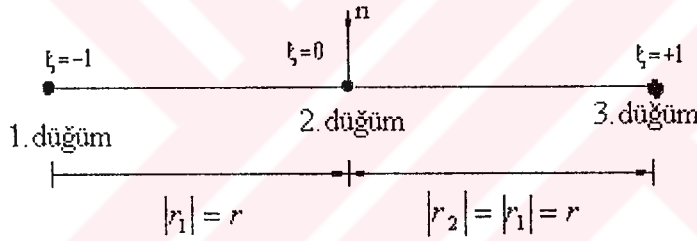
Karesel elemanlar için Şekil(3.2.c) interpolasyon fonksiyonları ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 kullanılır. U ve q fonksiyonları şu şekilde yazılır.

$$u(\xi) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] [u_1 u_2 u_3]^T \quad (3.41)$$

$$q(\xi) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] [q_1 q_2 q_3]^T \quad (3.42)$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 fonksiyonlar Şekil(3.8) görüldüğü gibi düğümler için, fonksiyonların düğüm ile ilgili değişken değerlerini karesel olarak verir. Bu interpolasyon fonksiyonları, sınır elemanı j ile integralleri tek başına hesap edilmesinde kullanılır.

$$\int_{C_j} uq^* ds = [h_{j1} h_{j2} h_{j3}] [u_1 u_2 u_3]^T \quad (3.43)$$



Şekil 3.8 Karesel eleman

Burada,

$$h_{jk} = \int_{C_j} \phi_k q^* ds, \quad k=1,2,3. \quad (3.44)$$

Jacobian kullanıldığında,

$$|J| = \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (3.45)$$

verimler;



$$\int_{\bar{C}_j} u q^* ds = \int u(\xi) |J| q^* ds \quad (3.46)$$

benzer şekilde;

$$\int_{\bar{C}_j} q u^* ds = [g_{j1} g_{j2} g_{j3}] [q_1 q_2 q_3]^T \quad (3.47)$$

yazılır. Burada,

$$g_{jk} = \int_{\bar{C}_j} \phi_k u^* ds \quad (3.48)$$

şeklinde hesaplanır. Bundan sonra i düğümü için,

$$\begin{aligned} c_i u_i &= [\hat{H}_{i1} \hat{H}_{i2} \dots \hat{H}_{in}] [u_1 u_2 \dots u_n]^T \\ &= [G_{i1} G_{i2} \dots G_{in}] [q_1 q_2 \dots q_n]^T \end{aligned} \quad (3.49)$$

yazılabilir. Burada,

$\hat{H}_{ij} = (j-1)$ elemanın h_{i1} terimi + $(j+1)$. elemanın h_{i2} terimi + j . elemanın h_{i3} terimi

$G_{ij} = (j-1)$ elemanın g_{i1} terimi + $(j+1)$. elemanın g_{i2} terimi + j . elemanın g_{i3} terimi

olarak hesaplanır.

Sabit ve lineer elemanlarda kolay hesaplanmasına rağmen, karesel elemanlar için G_{ij} 'yi hesap etmek çok zordur. Daha doğru çözüm için H_{ij} ve G_{ij} arasında sayısal olarak hesap edilir. Jacobion $|J|$ 'nin değeri denk.(3.45) ve denk.(3.46) sayısal hesap edilerek bulunur.

$$\begin{aligned} x &= \phi_1 x^1 + \phi_2 x^2 + \phi_3 x^3, \\ y &= \phi_1 y^1 + \phi_2 y^2 + \phi_3 y^3 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Burada indisler düğüm numarasını gösterir. Bu genellikle sonlu elemanlar analizinde kullanılan eş parametrelili elemanlara benzer bir kavramdır.



3.6. Kübik Elemanlar

İkinci dereceden daha yüksek dereceli elemanlar pratikte pek sık kullanılmazlar, fakat bazı özel uygulamalarda kullanılabilirler.

u ve q fonksiyonları,

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 + \phi_4 u_4 \quad (3.51)$$

$$q = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 + \phi_4 q_4 \quad (3.52)$$

benzer şekilde yazılırsa,

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \phi_4 x_4 \quad (3.53)$$

$$y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \phi_4 y_4 \quad (3.54)$$

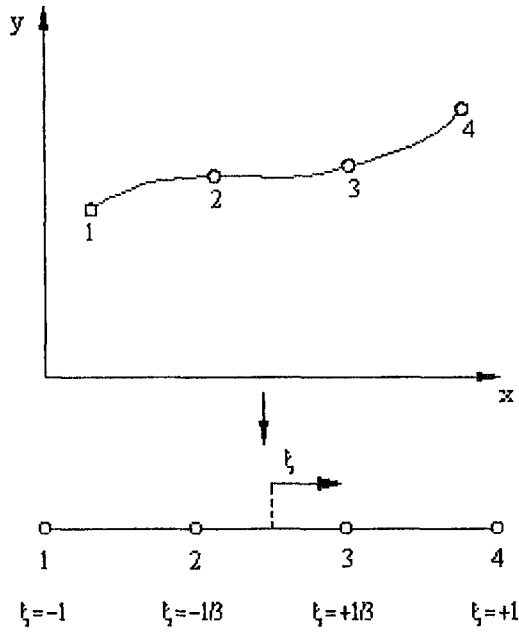
Burada interpolasyon fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{16} (1 - \xi) \left[-10 + 9 (\xi^2 + 1) \right] \\ \phi_2 &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 - 3\xi) \\ \phi_3 &= \frac{9}{16} (1 - \xi^2) (1 + 3\xi) \\ \phi_4 &= \frac{1}{16} (1 + \xi) \left[-10 + 9 (\xi^2 + 1) \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

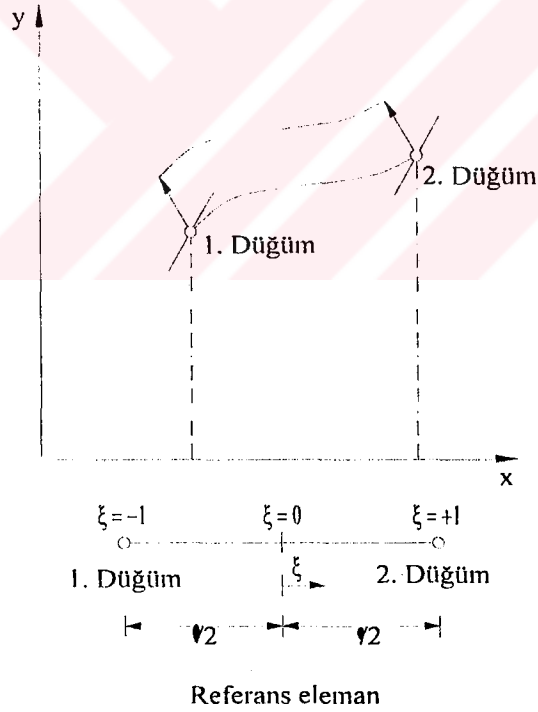
şeklinde verilir. İnterpolasyon fonksiyonları düğümlerde aşağıdaki değerleri alırlar:

Düğüm	ξ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
1	-1	1	0	0	0
2	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	0
3	$+\frac{1}{3}$	0	0	1	0
4	+1	0	0	0	1





Şekil 3.9 Dört düğümlü kübik elemanlar.



Şekil 3.10 İki düğümlü kübik elemanlar.

Kübik elemanlarda diğer bir olasılık, fonksiyonlarda u ve q 'nın değişimini ve eleman boyunca türevini, Şekil 3.10'de gösterildiği gibi iki uç noktada tanımlanmaktadır:

u için uygun fonksiyon,



$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)_1 + \phi_3 u_2 + \phi_4 \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)_2 \quad (3.56)$$

ile verilir. İnterpolasyon fonksiyonları ise şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4} (\xi - 1)^2 (2 + \xi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{8} \lambda (\xi - 1)^2 (\xi + 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} (\xi + 1)^2 (2 - \xi) \\ \phi_4 &= \frac{1}{8} \lambda (\xi + 1)^2 (\xi - 1) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Burada λ eleman uzunluğudur. Kubik elemanın son tipi, S boyunca türevin doğru tanımını meydana getirmek istediğimizde kullanılabilir. Bir λ eğrisel elemanlı durumda, eleman üzerinde denk.(3.46) ile verilen $|G|$ Jacobianı integre edilerek hesaplanabilir. Aynı ϕ fonksiyonları, q, x ve y için kullanılır (Yıldırım, 1999).

3.7. Poisson Denklemi İçin Sınır Elemanları Yöntemi

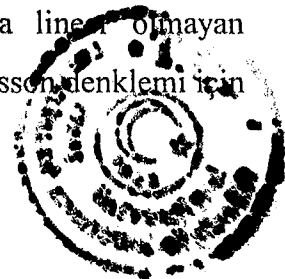
Sınır elemanları yönteminde yüzeysel veya hacimsel yükler, lineer olmayan terimler nedeniyle bölge integralleri meydana gelir. Bu nedenle homojen olmayan Poisson diferansiyel denklemi üzerinde durulacaktır.

Aşağıdaki Poisson denklemi gözönüne alınırsa;

$$\nabla^2 u = b \quad (R \text{ bölgesinde}) \quad (3.58)$$

$$u = u_0 \quad C_1 \text{ 'de}; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = q = q_0 \quad C_2 \text{ 'de}$$

Bu denklemde $b = b(x, y)$, bilinen bir fonksiyon kabul edilecektir. Bundan başka, $b = b(x, y, u)$ şeklinde potansiyelin bir fonksiyonu veya $b = b(x, y, u, t)$ şeklinde zaman bağımlı bir fonksiyon yazılabilir. Böylece zamana bağımlı veya lineer olmayan problemler de analiz edilebilir. R bölgesi iki boyutlu sınırlardır. Poisson denklemi için



temel integral denklemlerinin elde edilmesi, Laplace denkleminde izlenen yolun özdeşidir.

$$0 = \iint_R (\nabla^2 u - b) u^* dx dy = \iint_R (u \nabla^2 u^* - b) u^* dx dy + \int_{C_1} u^* q ds + \int_{C_2} u^* q_0 ds - \int_{C_1} u_0 q^* ds - \int_{C_2} u q^* ds \quad (3.59)$$

$\nabla^2 u^* = \delta(i)$ kabul edildiğinde, $\iint_R (\nabla^2 u - b) u^* dx dy = -u(i)$ denklemi elde edilir.

$$- \iint_R b u^* dx dy + \int_{C_1} u^* q ds + \int_{C_2} u^* q_0 ds - \int_{C_1} u_0 q^* ds - \int_{C_2} u q^* ds = 0 \quad (3.60)$$

veya

$$\iint_R b u^* dx dy + u(i) + \int_{C_1} u_0 q^* ds + \int_{C_2} u q^* ds = \int_{C_1} u^* q ds - \int_{C_2} u^* q_0 ds \quad (3.61)$$

veya denk.(3.17)'ün türevleri olarak, sınır integral denklemi iki boyutlu olarak elde edilir.

$$c_i u_i + \iint_R b u^* dx dy + \int_C u q^* ds = \int_C u^* q ds \quad (3.62)$$

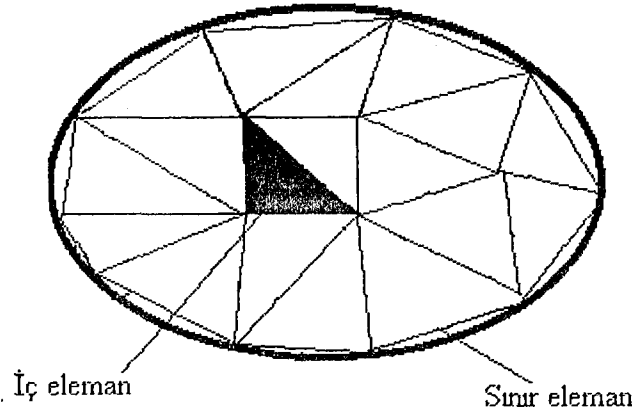
denklemi elde edilir. Laplace denkleminin temel çözümü u^* yerine yazıldıktan sonra bütün sınır terimleri ve bölge terimi ile birlikte,

$$c_i u_i + \iint_R b u^* dx dy + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\hat{C}_j} q^* ds = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\hat{C}_j} u^* ds \quad (3.63)$$

veya

$$c_i u_i + B_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (3.64)$$





Şekil 3.11 Sınır elemanları ve iç elemanlar.

veya

$$B_i + \sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (3.65)$$

denklemini elde edilir. $\bar{R}$ bölgesinin içi, ağ gibi bölünürse sonlu elemanlardaki iç hücrelere benzer. Buradaki iç noktalar, sonlu elemanlardan farklı kavramlardır. İç noktaların hesaplanması için aşağıdaki formül kullanılır.

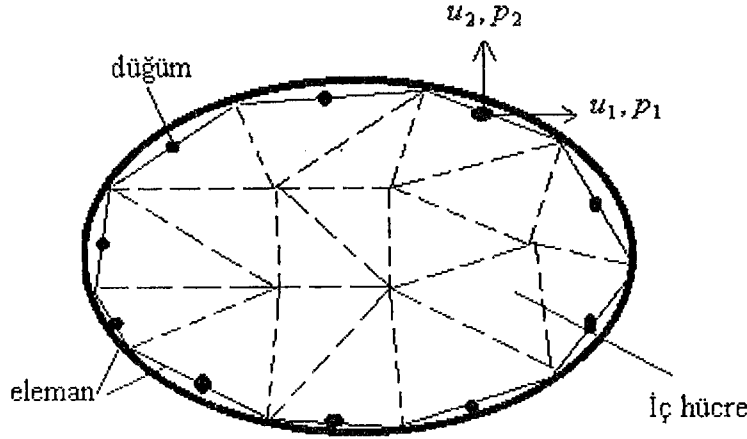
$$B_i = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{j=1}^k W_j b_j u_j^* \right) A_M \quad (3.66)$$

R bölgesinde, b fonksiyonu bilindiği için integral herhangi bir yeni bilinmeyen içermemektedir. Sınır integrallerine ek olarak bir bölge integrali hesaplanması gerektiğinden problemin karakterinde değişiklik olmuştur. c_i sabiti, sadece incelenen 'i' noktasındaki sınır geometrisine bağlıdır.

3.7.1. Hücre (Cell) İntegrasyon Yaklaşımı

Son denklemdeki bölge teriminin hesaplanmasının en basit yolu, Şekil 3.11'de gösterildiği gibi her birine bir sayısal integrasyon kuralı uygulanabilen iç hücrelerle bölgenin ayrıştırılmasıdır.





Şekil 3.12 Sınır elemanları ve iç hücreler.

Hücre durumunda, her bir 'i' sınır noktası için bölge integrali,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\mathcal{C}_i} p^* ds \right\} u_j = \iint_R u^* b dx_1 dx_2 + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\mathcal{C}_j} u^* ds \right\} p_j \quad (3.67)$$

ifadesi elde edilebilir. Burada iç hücreler alan integralinin sayısal integralini almakta kullanılır.

$$B_i = \iint_k u^* b dx_1 dx_2 \quad (3.68)$$

M tane iç hücre var ise,

$$B_i = \sum_{s=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^I (u^* b)_k \omega_k \right\} A_s \quad (3.69)$$

Burada integralin, değişik hücreler üzerinde bir toplam olarak yaklaşımı yapılmıştır. B bölgesini tanımlayan hücrelerin toplam sayısı M'dir. Hücrelerin sayısı 1 'den M 'e kadar değişir. w_k Gauss integrasyonu ağırlık katsayılarıdır ve (u^*b) fonksiyonunun her bir hücre üzerindeki k integrasyon noktalarında hesaplanması gerekir.



$$\hat{H}_{ij} = \int_{\mathcal{E}_j} p^* ds, \quad \hat{G}_{ij} = \int_{\mathcal{E}_j} u^* ds, \quad (3.70)$$

her biri 2x2 boyutunda matristir. Denk.(3.67)

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = B_i + \sum_{j=1}^N \hat{G}_{ij} p_j \quad (3.71)$$

bütün j düğümlerinde, u ve p değerleri "i" orta düğümünün potansiyel değerine bağlıdır. Aşağıdaki şekilde yazılır;

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{eğer } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + c_i & \text{eğer } i = j \end{cases} \quad (3.72)$$

Burada, c(i) sınır geometrisi üzerindeki, matris katsayılarına bağlıdır.

$$c(i) = \begin{bmatrix} c_i K & 0 \\ 0 & K c_i \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Buradan denk.(3.71) olarak yazılabilir:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = B_i + \sum_{j=1}^N \hat{G}_{ij} p_j \quad (3.74)$$

d_i terimi, sayısal integrasyonun sonucudur ve sınır düğümlerinin her 'i' pozisyonu için farklıdır. Her bir hücre üzerindeki integrasyon noktalarının toplam sayısı R'dir. k 1'den R'ye kadar değişir. B_e , 'e' hücresinin alanıdır.

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j + d_i = \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij} q_j \quad (3.75)$$

ifade edilebilir. Matris şeklinde ise,

$$H U = B + G P \quad (3.76)$$

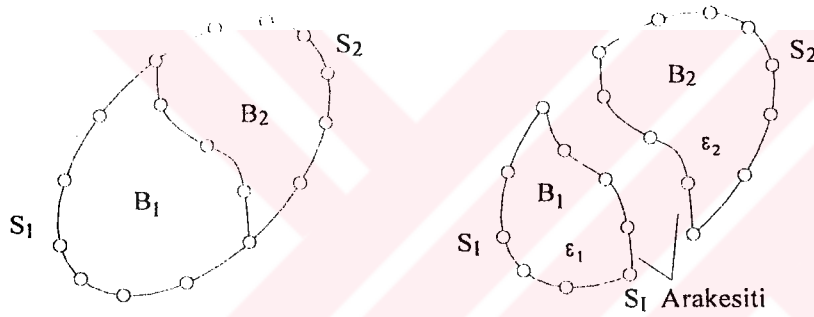


olarak gösterilir.

3.8. Farklı Bölgelerin Birleştirilmesi

İncelenen problem homojen olmayan bir yapıda ise, problem bölgesi aynı özelliklere sahip homojen alt bölgelere ayrılarak sayısal işlemler yapılabilir. Bu bölgeleri birleştiren ara kesitlerde sınır şartları olarak potansiyelin sürekliliği ve akıların süreksizliği uygulanarak, her bir alt bölge için denklem takımlarının toplanmasıyla tüm bölge için bir sonuç denklem sistemi elde edilir.

Anlaşılabilirlik açısından Şekil 3.13'te B bölgesi, B_1 ve B_2 olmak üzere sadece iki alt bölgeye ayrılmıştır.



Şekil 3.13 Problem bölgesinin iki alt bölgeye ayrılması.

B_1 alt bölgesi üzerinde;

U^1, Q^1 : S_1 dış sınırındaki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri,

U_1^1, Q_1^1 : B_1 bölgesine ait olan S_1 arakesitindeki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri.

B_2 alt bölgesi üzerinde;

U^2, Q^2 : S_2 dış sınırındaki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri,

U_1^2, Q_1^2 : B_2 bölgesine ait olan S_1 arakesitindeki düğüm potansiyelleri ve normale göre türevleri.

B_1 alt bölgesi için,

$$\epsilon_1 \cdot \nabla^2 u = 0$$



buradaki Laplace denkleminde aşağıdaki matris denklem sistemi elde edilir:

$$\varepsilon_1 \begin{bmatrix} H^1 & H_1^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_1^1 \end{Bmatrix} = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} G^1 & G_1^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_1^1 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

B₂ alt bölgesi için de

$$\varepsilon_2 \cdot \nabla^2 u = 0 \quad (3.79)$$

Laplace denkleminde,

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} H^2 & H_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_1^2 \end{Bmatrix} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} G^2 & G_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_1^2 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

matris denklem sistemi elde edilir. Tüm bölge için denklem sistemi,

$$\varepsilon_1 \cdot \nabla^2 u + \varepsilon_2 \cdot \nabla^2 u = 0 \quad (3.81)$$

şeklinde yazılır. Denk.(3.79) ve denk.(3.80), denk.(3.81)'da yerine yazılarak,

$$\varepsilon_1 \begin{bmatrix} H^1 & H_1^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_1^1 \end{Bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} H^2 & H_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_1^2 \end{Bmatrix} = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} G^1 & G_1^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_1^1 \end{Bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} G^2 & G_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_1^2 \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

denklem sistemi elde edilir. Dielektrik malzemelerden oluşan, B₁ ve B₂ alt bölgelerinin birleştiği S₁ ara kesitinde; Potansiyelin sürekliliği,

$$U_1^1 = U_1^2 = U_1 \quad (3.83)$$

ve normal gradyentin süreksizliği,

$$\varepsilon_1 Q_1^1 = -\varepsilon_2 Q_1^2 = Q_1 \quad (3.84)$$

şartları geçerlidir. Bu şartlar gözönüne alınarak alt bölgelere ait denklem sistemleri birleştirildiğinde, tüm bölge için sonuç denklem sistemi elde edilir (Yıldırım, 1999).

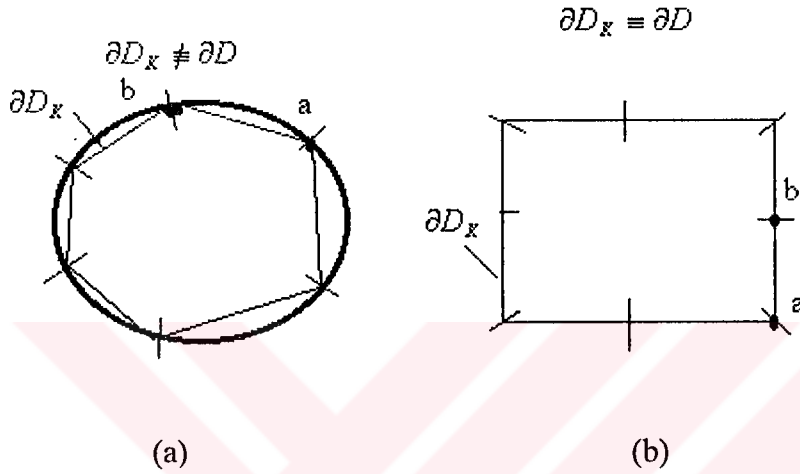


BÖLÜM 4

ETKİ KATSAYILARI

4.1. Sınırların Gösterilmesi

Sınırlar, Şekil 4.1'de gösterilen elemanlar belirli sayılarla ifade edilir.



Şekil 4.1 Sınırın temsil edilmesi

Sınır ∂D_k olarak gösterilir. ∂D_k elemanların varlık terimidir. ∂D ve ∂D_k Şekil 4.1.a'da gösterilene genellikle uymaz. Her ne kadar bazı durumlarda şekil Şekil 4.1.b'de gösterilene uyabilir. Sayısal yaklaşımda, doğal hata kaynakları kural dışıdır.

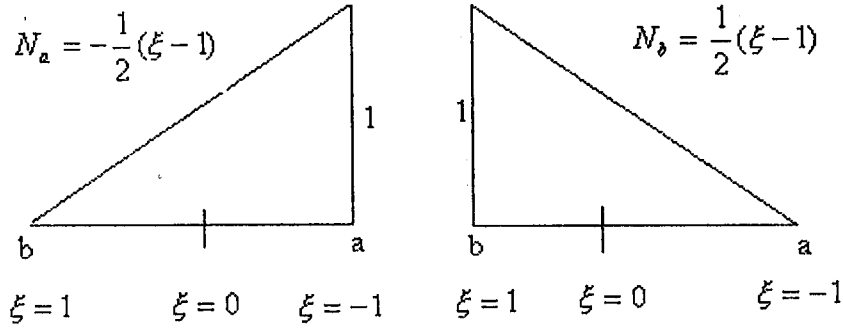
Bu elemanın uç noktaları koordinatlarının fonksiyonları olarak, eleman boyunca bir yere yerleştirilmiş nokta, sayısal çözüm için yararlıdır. Şekil (3.1.a)'da a ve b genel doğrusal bir elemanın uç noktalarına referanstır. Böylece;

$$x_i(\xi) = N_\alpha(\xi)x_{i\alpha} \quad (4.1)$$

buradaki indeks α tekrar toplamak anlamına gelir:

ξ , elemanlar boyunca, kenarlarına ± 1 değerlerini alan doğal koordinatlardır. Şekil 4.2'de görüldüğü gibi;





Şekil 4.2 Lineer integrasyon fonksiyonu

x_i , ξ ile tanımlanan orta noktada i ($i=1,2$, 2D’de)’nin koordinatıdır. $N_\alpha(\xi)$, α ($\alpha = a, b$) ucu ile şekil fonksiyonun birleşimidir. $x_{i\alpha}$, α ucunun i koordinatlarını temsil eder.

Denk.(4.1)’in açık halde yazımı;

$$x_1(\xi) = N_\alpha(\xi)x_{1\alpha} + N_b(\xi)x_{1b} = \frac{x_{1b} - x_{1\alpha}}{2}\xi + \frac{x_{1b} + x_{1\alpha}}{2} \quad (4.2)$$

$$x_2(\xi) = N_\alpha(\xi)x_{2\alpha} + N_b(\xi)x_{2b} = \frac{x_{2b} - x_{2\alpha}}{2}\xi + \frac{x_{2b} + x_{2\alpha}}{2} \quad (4.3)$$

aşağıdaki denklemde yerlerine yazılırsa;

$$ds_k = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} = \frac{L_k}{2} d\xi \quad (4.4)$$

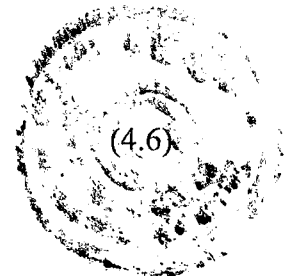
burada L_k , ∂D_k uzunluğunu gösterir.

Denk.(4.1) yüksek dereceli elemanlar için kullanılabilir. Parabolik yaklaşımı durumunda elemanı 3 düğüm ile göstermek gerekir. x_j , orta noktanın koordinatlarını ifade eder.

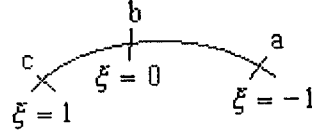
$$x_j = N_\alpha(\xi)x_{j\alpha} + N_b(\xi)x_{jb} + N_c(\xi)x_{jc} \quad (4.5)$$

burada,

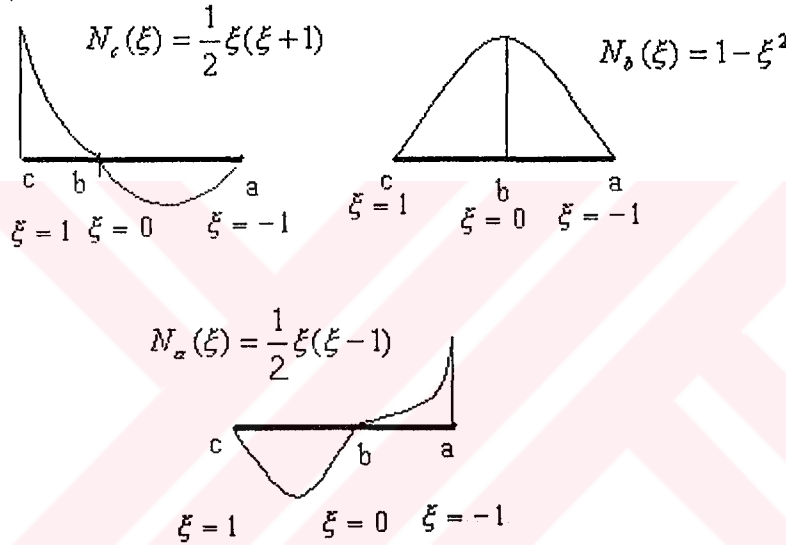
$$N_\alpha(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1); \quad N_b(\xi) = 1 - \xi^2; \quad N_c(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1); \quad (4.6)$$



Şekil 4.4'de bu şekil fonksiyonların oluşumunu gösterir. Fonksiyonların bütün durumlarında, noktada bir değer hesap edilir.



Şekil 4.3 Parabolik elemanlarda doğrusal koordinatlar



Şekil 4.4 Parabolik interpolasyon fonksiyonları

bu elemanlar için, ds_k ile ifade edilebilir.

$$ds_k = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (4.7)$$

burada denk.(4.5) ve denk.(4.6) göre

$$\frac{dx_j}{d\xi} = (2\xi - 1) \frac{x_{ja}}{2} - 2\xi x_{jb} + (1 + 2\xi) \frac{x_{jc}}{2} \quad (4.8)$$

jacobian J denk.(4.8)'de tanılanır.

4.2.Fonksiyonun Gösterilmesi

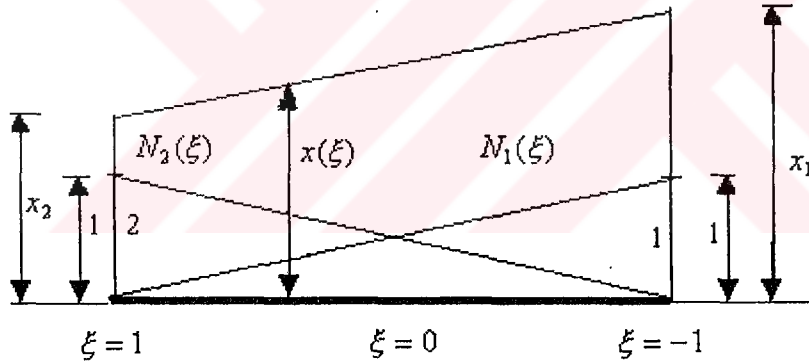
Yukarıdaki sistemin geometrisi ile benzerdir. Fonksiyonlar, eleman boyunca (potansiyel ve türevi dikkat edilmeli) aşağıdaki denklem ile gösterilir.

$$x(\xi) = N_\alpha(\xi)x_\alpha \quad (4.9)$$

burada ξ , eleman boyunca doğal koordinattır. N_α , şekil fonksiyonu ile α noktasını birleştirir. x_α α noktasında ki x değişkenin değeridir.

4.2.1.Süreklili interpolasyon

Süreklili interpolasyon, sınır boyunca değişkenlerin, 2 nokta elemanların sonundaki α alanından yapılır. Elemanlar arasındaki süreklilik, sınır boyunca değişkenlerin oluşturulmasına devam edilebilir.



Şekil 4.5 Lineer fonksiyonun temsili

Lineer yaklaşık durumu, Şekil 4.5 durumunda görülmektedir.

$$x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \quad (4.10)$$

Şekil 4.2'de $N_1(\xi)$ ve $N_2(\xi)$, N_α ve N_β olarak bazı ifadelerle açıkça sahiptir.

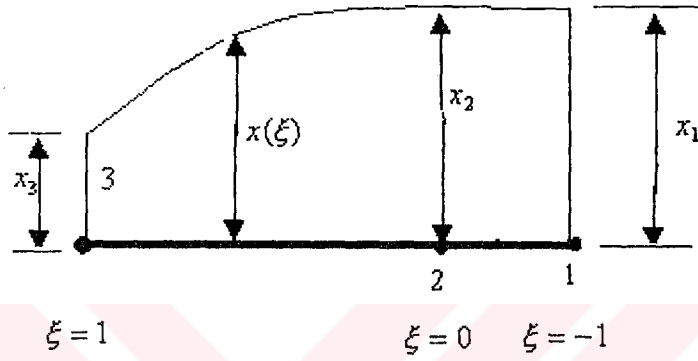
$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}(\xi - 1); \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad (4.11)$$



parabolic, kubik ve daha yüksek dereceli yaklaşımı, benzer bir yöntem ile fonksiyonun içinde düşünürüz.

$$x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3 \quad (4.12)$$

burada N_1, N_2, N_3 Şekil 4.5'de N_a, N_b, N_c olarak tanımlanır.



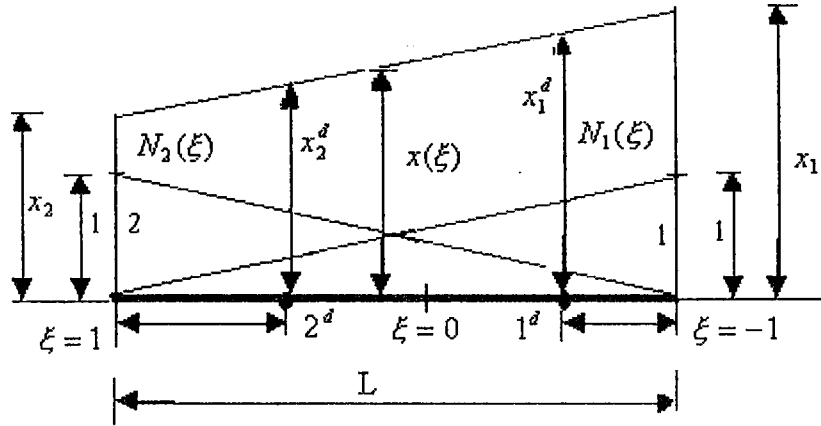
Şekil 4.6 Parabolik fonksiyonu

4.2.2. Süreksiz interpolasyon

Elemanlar arasında devamlılık, sınır elemanları yönteminde ihtiyaç değildir. Süreksiz interpolasyon sınır boyunca değişkenleri üretir. Düğümler elemanların sonunda değildir. Bu durumda lineer yaklaşım Şekil 4.7'de gösterilmektedir. Burada N_1 ve N_2 'nin değerlerini Denk.(4.11)'de verir. Elemanın uçlarındaki x değişkenin değerleri, süreksiz elemanın düğümündeki değişkenin $1^d, 2^d$ düğüm değerlerinin bir fonksiyonu olarak bulunabilir.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-d_1-d_2} \begin{bmatrix} 1-d_2 & -d_1 \\ -d_2 & 1-d_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^d \\ x_2^d \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$





Şekil 4.7 Süreksiz lineer eleman tanımı

ξ noktasındaki x değişkeninin değeri, süreksiz elemanın düğündeki değişkenin değerlerinin bir fonksiyonu olarak bulunabilir.

$$x(\xi) = \begin{bmatrix} N_1^d(\xi) & N_2^d(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^d \\ x_2^d \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

süreksiz eleman için, N_1^d ve N_2^d yeni lineer interpolasyon fonksiyonlarıdır.

$$\begin{aligned} N_1^d(\xi) &= \frac{1}{1-d_1-d_2} [(1-d_2)N_1 - d_2N_2] = \frac{1}{2(1-d_1-d_2)} (1-d_2-\xi) \\ N_2^d(\xi) &= \frac{1}{1-d_1-d_2} [(-d_1)N_1 + (1-d_1)N_2] = \frac{1}{2(1-d_1-d_2)} (1-2d_1+\xi) \end{aligned} \quad (4.15)$$

sabit elemanlar, süreksiz elemanlar bozulması durumunda hesap edilebilir.

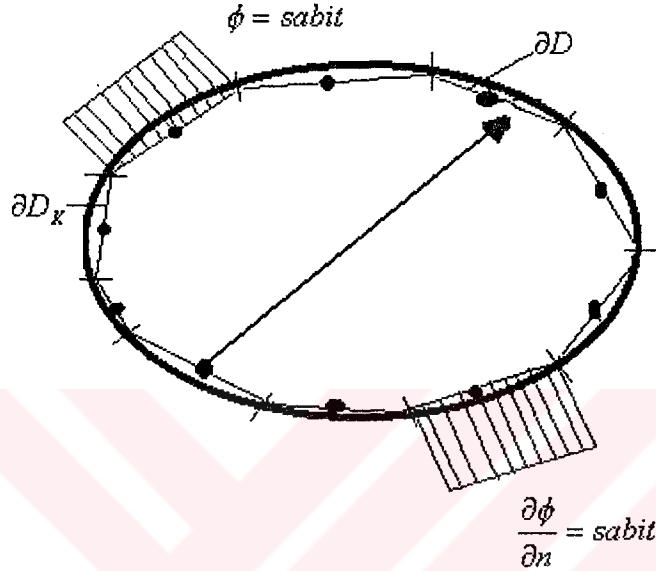
$$d_1 = d_2 = 0.5 \Rightarrow x_1^d = x_2^d = x^c \quad (4.16)$$

x değişkeni, şu değerleri verir.

$$x(\xi) = (N_1^d + N_2^d) x^c = x^c \quad (4.17)$$

4.3. Sabit Elemanlar

Bu tür elemanlarda, integral denkleminde değişkenler, potansiyel ve türevlerinden oluşmaktadır. Elemanlar boyunca sabit değerler doğrusal olarak Şekil 4.8'de gösterilmektedir.



Şekil 4.8 Sabit eleman

4.3.1. İntegral denkleminin ayrıştırılması

Elemanların merkezleri sınır integral denklemi kollokasyon noktaları olarak genellikle verilir. Fonksiyonda sabit değerler, elemanların merkezlerinde benzer olarak kullanılır. Sonuç olarak elemanların merkezinde kollokasyon noktaları elde edilir. Burada sınır düzgündür.

$$\frac{1}{2} \phi(x) + \oint_{\partial D_k} \phi(y) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, y) ds(y) = \int_{\partial D_k} \psi(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial n}(y) ds(y) \quad (4.18)$$

$$x, y \in \partial D_k$$

burada ∂D sınırı, yaklaşık sınır ∂D_k ile değiştirilir. Şimdi bu hipotezde, ∂D_k elemanı boyunca her bir ϕ ve $\partial \phi / \partial n$ sabit eleman değişimi ile tanımlanır.

$$\frac{1}{2} \phi(l) + \sum_{k=1}^K \phi(k) \oint_{\partial D_k} \frac{\partial \psi}{\partial n}(l, y) ds(y) = \sum_{k=1}^K \frac{\partial \phi}{\partial n}(k) \int_{\partial D_k} \psi(l, y) \frac{\partial \phi}{\partial n}(y) ds(y) \quad (4.19)$$



$$\sum_{k=1}^K H(l, k) \phi(k) = \sum_{k=1}^K G(l, k) q(k) \quad (4.20)$$

$\phi(k)$ k düğümündeki potansiyeli gösterir. $q(k) = \frac{\partial \phi}{\partial n}(k)$ k düğümündeki potansiyelin türevini gösterir.

$$H(l, k) = \oint_{\partial D_k} \frac{\partial \psi}{\partial n}(l, y) ds(y) + \frac{1}{2} \delta_{lk}, \quad y \in \partial D_k \quad (4.21)$$

$$\text{ile} \quad \delta_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{ise } l = k \\ 0 & \text{ise } l \neq k \end{cases} \quad (4.22)$$

$$G(l, k) = \int_{\partial D_k} \psi(l, y) ds(y); \quad y \in \partial D_k \quad (4.23)$$

sınır elemanları yönteminde sabit integrasyon genellikle, $H(l, k)$ ve $G(l, k)$ terimleri ile integrasyon uyumu denk(4.21)'de ayarlanır. Bu integrasyonların, sınır durumlarından bağımsız olduğu gözlenebilir.

4.3.2. İntegral Sabitlerinin Hesaplanması

İki genel konum, λ düğümüne bağlı olup olmadığı etraflıca düşünülürse, integral denk.(4.21)'de ∂D_k elemanı boyunca uygulanması ile integrasyon üretilir.

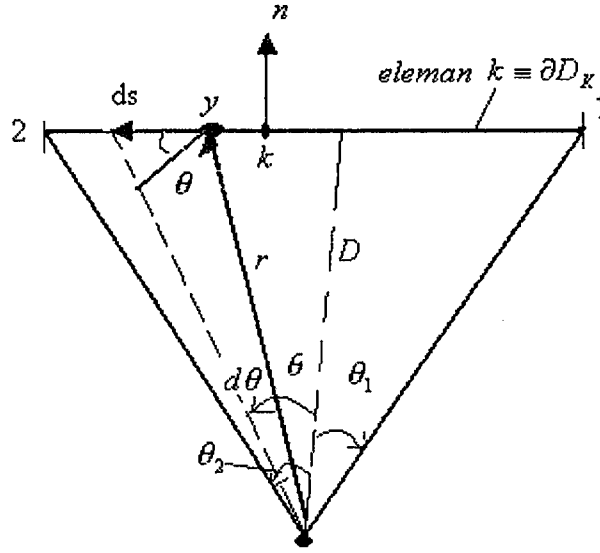
4.3.2.1. Kollokasyon Noktasının Elemana Ait Olmaması Durumu

Bu tip integrasyonlar hiç zor üretilmezler. Uygulamalarda sayısal ve analitik üretim mümkündür. Sıra ile $H(l, k)$ ve $G(l, k)$ etki katsayılarının, iki boyutlu durumda çizgisel ve üç boyutlu durumda yüzeysel integrallerin sayısal olarak hesaplanması ile değerleri bulunur. Bu değerleri hesaplamak için sayısal integrasyon yöntemleri kullanılır.

$$H(l, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_k} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r(l, y)} \right) ds(y) \quad y \in \partial D_k \quad (4.24)$$

$$G(l, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_k} \ln \frac{1}{r(l, y)} ds(y) \quad y \in \partial D_k \quad (4.25)$$





Şekil 4.9 Kollokasyon noktası

Şekil 4.9' da uygun notasyonla tanıtıldı.

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r(l, y)} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} (y) = -\frac{1}{r} \left(\frac{D}{r} \right) = -\frac{D}{r^2} \quad (4.26)$$

burada D, n ve r' nin türevi ile birleştirilmelidir. Uygun iki olası konum Şekil 4.10' da görülmektedir. Ek olarak .

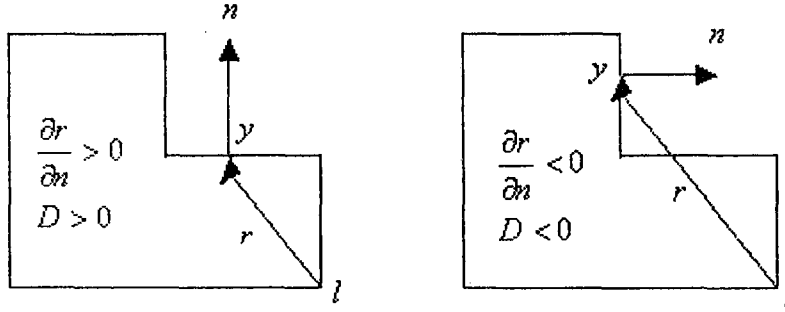
$$ds = \frac{r d\theta}{\cos \theta} = \frac{r^2 d\theta}{D} \quad (4.27)$$

denk.(4.24)' yerine konursa;

$$H(l, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_k} -\frac{D}{r^2} \frac{r^2 d\theta}{D} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi} \quad (4.28)$$

açının doğrusu, Şekil 4.9'da uygun genel pozitif doğrultu ile verilir. Sonuç olarak θ_1 açısı, negatif şeklin belirli geometrisi için çizildi. Burada θ_2 açısı pozitifdir.





Şekil 4.10 Kollokasyon noktalarının farklı notasyonu

Denk.(4.24)' de yerine konursa;

$$G(l, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_k} \ln \left| \frac{\cos \theta}{D} \right| \frac{D d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{D}{2\pi} \left\{ \ln \left| \frac{\cos \theta}{D} \right| \tan \theta + \tan \theta - \theta \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (4.29)$$

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^M W_i F(\xi_i) \quad (4.30)$$

burada integral çözümünde noktaların sayısı M ile gösterilir. ξ_i ve W_i ağırlık ve değişkenlerin iç durumlarını gösterirler. İntegrasyon sabitleri, sayısal çözülürse;

$$H(l, k) = \sum_{i=1}^M -\frac{1}{2\pi r_i^2} D \omega_i \frac{L_K}{2} \quad (4.31)$$

$$G(l, k) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_i} \right) \omega_i \frac{L_K}{2} \quad (4.32)$$

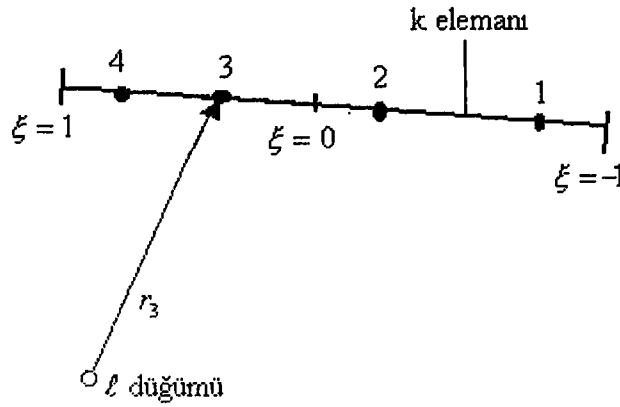
burada r_i , "i" Gauss noktası için r'nin değişkenidir. Şekil 4.11' de M=4 için Gauss noktalarının konumları çizildi.

$$\xi_1 = -0.86113631; \quad \xi_2 = -0.33998104; \quad \xi_3 = -\xi_2; \quad \xi_4 = -\xi_1;$$

benzer ağırlık vektörleri;

$$\omega_1 = 0.34785485; \quad \omega_2 = 0.65214515; \quad \omega_3 = \omega_2; \quad \omega_4 = \omega_1;$$





Şekil 4.11 Gauss noktaları

4.3.2.2. G_{ij} Etki İntegrallerinin Hesabı

$$G_{ij} = \int_{s_j} u^* dS = \int_{s_j} \frac{1}{2\pi} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (4.33)$$

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_j} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_j}{2} \int_{-1}^{+1} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi$$

$$G_{ij} = \frac{\lambda_j}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi = \frac{\lambda_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \lambda \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k$$

$$G_{ij} = \frac{\lambda_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \lambda \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (4.34)$$

4.3.2.3. $\hat{H}_{ij}$ Etki İntegrallerinin Hesabı

$$\vec{H}_{ij} = \int_{s_j} q^* dS \quad (4.35)$$

$\vec{H}_{ij}$ etki integralini hesaplamak için ilk önce, q^* teriminin bulunması gerekir

.Denk.(4.35) q^* , temel çözümün (u^*) normale göre türevidir.



$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{ve} \quad u^* = \frac{1}{2\pi} \lambda_n \left(\frac{1}{r} \right)$$

olduğundan,
$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (4.36)$$

hesaplanır. Ayrıca, $\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(n, r)$ olduğundan, $\cos(n, r) = \frac{d_{ij}}{r}$ şeklinde yazılır (Şekil 4.11). (d_{ij} , 'i' düğümünün 'j' elemanına olan dik uzaklığıdır).

Verilen denklemlere göre, denk.(4.35) şu şekilde hesaplanır:

$$\bar{H}_{ij} = \int_{s_j} q^* dS = \int_{s_j} \frac{\partial u^*}{\partial n} dS = \int_{s_j} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (4.37)$$

$$\bar{H}_{ij} = \int_{s_j} -\frac{1}{2\pi r} \frac{d_{ij}}{r} dS = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_j} \frac{d_{ij}}{r^2} dS$$

$$\bar{H}_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_j}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d_{ij}}{r^2} d\xi = -\frac{\lambda_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{d_{ij}}{r_k^2} w_k$$

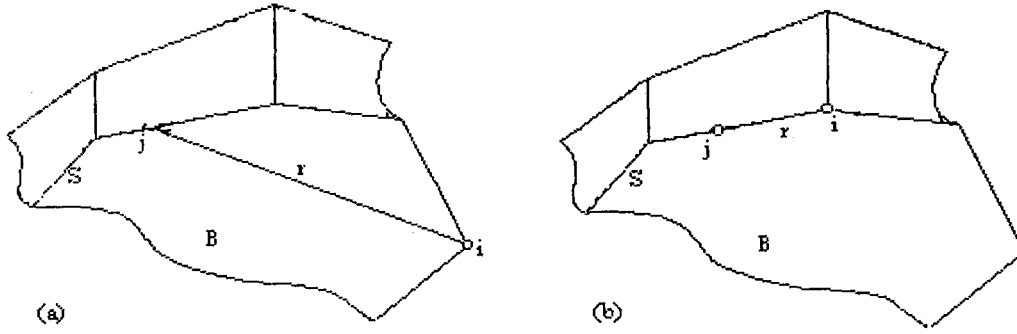
$$\bar{H}_{ij} = -\frac{\lambda_j}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{d_{ij}}{r_k^2} w_k \quad (4.38)$$

4.3.3. Tekil İntegrallerin Hesabı

G_{ij} ve $\bar{H}_{ij}$ katsayıları $i \neq j$ durumu için, 'Gauss Alan Hesabı' gibi bir sayısal integrasyon formülü yardımı ile hesaplanabilir (Şekil 4.12.a).

'i' ve 'j' düğümlerinin aynı eleman üzerinde olması durumunda ($i = j$), bir tekillik meydana geleceğinden (Şekil 4.12.b) yüksek dereceden integrasyon kuralları veya özel bir formül yardımı ile hesaplanabilir.





Şekil 4.12 (a) Kurallı bir eleman boyunca integrasyon,
(b) Tekil bir eleman boyunca integrasyon.

Sabit elemanların özel durumu için H_{ij} ve G_{ij} katsayıları analitik olarak hesaplanabilir. n normali ile kaynak noktasına olan r uzaklığı daima birbirine dik olduğundan dolayı $\bar{H}_{ij}$ terimleri sıfır olur:

$$\bar{H}_{ij} = \int_{S_i} q^* dS = \int_{S_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS \equiv 0 \quad (4.39)$$

G_{ij} integrallerinin hesaplanması ise kendine özgü işlem gerektirir. Örneğin, iki boyutlu bir eleman için,

$$G_{ij} = \int_{S_i} u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_{S_i} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (4.40)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 4.3'deki ve denk.(4.33)'teki gibi bir koordinat dönüşümü gerçekleştirilerek, denk.(4.30)'deki ifade integre edilebilir:

$$r = \frac{\lambda_j}{2} |\xi| \quad (4.41)$$

$$dS = dr = \frac{\lambda_j}{2} d\xi \quad (4.42)$$

Buradan simetri hesaba dahil edilerek aşağıdaki ifadeler bulunur:



$$\begin{aligned}
G_{ii} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Nokta (1)}}^{\text{Nokta (2)}} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{\pi} \int_{\text{dağıtım i}}^{\text{Nokta (2)}} \lambda \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr \\
&= \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_0^1 \lambda \ln\left(\frac{2}{\lambda_j \xi}\right) d\xi \\
&= \frac{\lambda_j}{2\pi} \left\{ \lambda \ln\left(\frac{2}{\lambda_j}\right) + \int_0^1 \lambda \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Son integralin, 1'e eşit olduğu kabul edilir:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \lambda \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \lambda \ln(\xi) d\xi \\
&= 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \lambda \ln \varepsilon - \varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Şimdi, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \lambda \ln \varepsilon) = 0$ olduğundan integralin değeri,

$$\int_0^1 \lambda \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi = 1 \tag{4.45}$$

olarak hesaplanır. Böylece G matrisinin köşegen terimleri,

$$G_{ii} = \frac{\lambda_j}{2\pi} \left\{ \lambda \ln\left(\frac{2}{\lambda_j}\right) + 1 \right\} \tag{4.46}$$

denklemleri ile hesaplanabilir. Karesel veya daha yüksek dereceli elemanlar gibi, karmaşık durumlarda özel ağırlık formülleri kullanılmalıdır.

4.4. Lineer Elemanlar

Sabit elemanlar için uygulanan denk.(4.34) ve denk.(4.38)'ye benzer şekilde, lineer elemanlar için, köşegen olmayan G_{ij} ve $\bar{H}_{ij}$ etki katsayıları hesaplanır. Lineer



elemanların, sabit elemanlardan farklılığı, integraller içerisinde interpolasyon fonksiyonlarının olmasıdır.

Lineer elemanlarda iki düğüm bulunmasından dolayı, incelenen 'i' düğümünün 'j' elemanının 1. düğümüne etkisi (g_{ij}^1 ve h_{ij}^1) ile 2. düğümüne etkisi (g_{ij}^2 ve h_{ij}^2) birbirinden bağımsız olarak hesaplanmalıdır. Hesaplandıktan sonra, 'i' düğümünün 'j' elemanının 1. düğümüne etkisi ile 'j-1' elemanının 2. düğümüne etkisi toplanarak G_{ij} ve $\bar{H}_{ij}$ etki katsayıları değerleri bulunur.

4.4.1. g_{ij}^1 ve g_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması

İki integralden oluşan, lineer bir 'j' elemanı üzerindeki integral, denk.(3.52) ve denk.(3.53)'de verilmiştir:

$$g_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 u^* dS \quad \text{ve} \quad g_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 u^* dS$$

Burada, ϕ_1 ve ϕ_2 lineer interpolasyon fonksiyonlarıdır. Fiziksel büyüklükler elemanın düğüm noktalarında belirtildiğinden dolayı, interpolasyon fonksiyonları bu düğümler arasındaki değerlerin hesaplanması için kullanılır.

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.47)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.48)$$

Gauss sayısal integrasyon yöntemi yararlanılarak aşağıdaki sonuç ifadeleri meydana getirilir:

$$g_{ij}^1 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 - \xi_k) \lambda_j \lambda_n \left(\frac{1}{r_k} \right) w_k \quad (4.49)$$

$$g_{ij}^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 + \xi_k) \lambda_j \lambda_n \left(\frac{1}{r_k} \right) w_k \quad (4.50)$$

4.4.2. h_{ij}^1 ve h_{ij}^2 Etki İntegrallerinin Hesaplanması

Benzer şekilde denk.(3.49) ve denk.(3.50)'de verilen,

$$h_{ij}^1 = \int_{s_j} \phi_1 q^* dS \quad \text{ve} \quad h_{ij}^2 = \int_{s_j} \phi_2 q^* dS \quad (4.51)$$

etki integralleri sayısal olarak aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$h_{ij}^1 = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 - \xi_k) \frac{d_{ij}}{r_k^2} \lambda_j w_k \quad (4.52)$$

$$h_{ij}^2 = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 + \xi_k) \frac{d_{ij}}{r_k^2} \lambda_j w_k$$

(4.53)

4.4.3. Tekil İntegrallerinin Hesaplanması

H_{ii} katsayıları köşegen olmayan H_{ij} terimlerinin toplanmasıyla , 'i' ve 'j' düğümlerinin aynı eleman üzerinde olması durumunda hesaplanır, G_{ii} katsayıları ise,

$$G_{ii} = \frac{1}{4\pi} \lambda_j \left(\frac{3}{2} - \ln(\lambda_j) \right) \quad (4.54)$$

formülü ile analitik olarak hesaplanır.



BÖLÜM 5

BİLGİSAYAR PROGRAMI

5.1. Genel Bilgi

Bu bölümde, Matlab dilinde yazılan iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözümü için geliştirilen, bir bilgisayar programı açıklanmıştır. Programın adı SINEY 'dir ve program listesi Ek-D'de verilmiştir. Bu Programda sabit sınır elemanları kullanılmıştır. Uygulama örnekleri için, analitik sonuçlarla da karşılaştırmanın yapılabileceği temel elektrot sistemleri seçilmiştir.

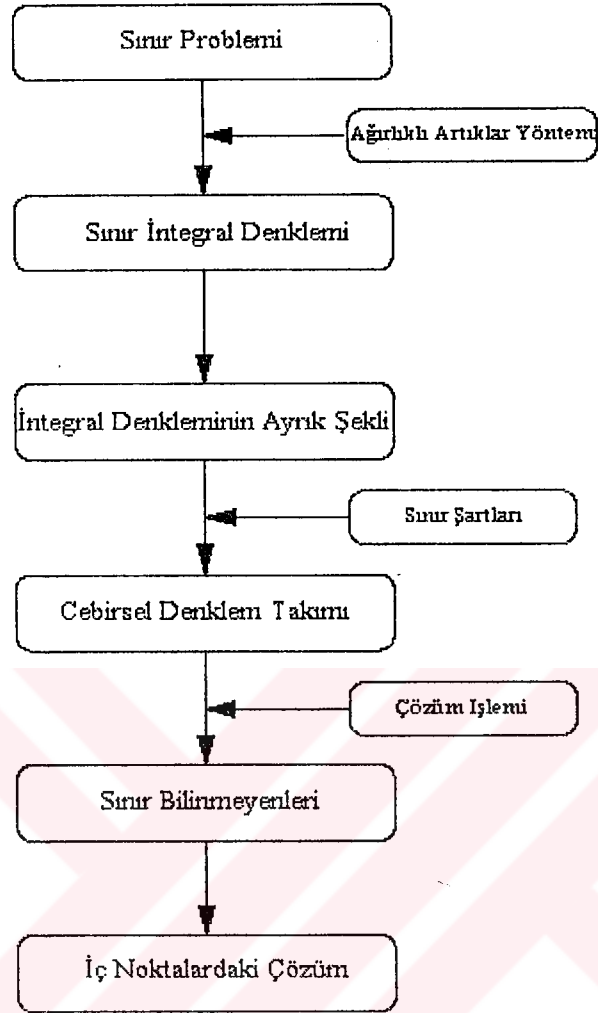
Laplace denklemi ile modellenen bir elektrostatik alan probleminin Sınır Elemanları Yöntemi ile analizinde ilk olarak problem bölgesi sabit sınır elemanları ile ayrıştırılır. Sınır elemanlarının uç noktalarının koordinatları ve eleman sayısı, sınır şartları gibi basit bir veri girişi problemin analiz edilebilmesi için yeterlidir. Bundan dolayı yöntemin en önemli özelliklerinden ikisi, denklem sisteminin küçük olması ve bir problemin çözümü için gerekli olan veri sayısında sağladığı önemli ölçüdeki azalmadır.

Denklem sistemi, sınır düğümlerindeki bilinmeyenlerden meydana gelmektedir. Buna karşılık, sistem matrisi doludur ve simetrik değildir. Ayrıca iç noktalardaki sonuçların sadece istenen noktalarda hesaplanabilmesi, yöntemin ve programın diğer önemli bir özelliğidir. Bu program;

- İzotropik malzeme özellikleri ile iki boyutlu elektrostatik alan problemlerinin çözülmesi,
- Sınırlardaki ve iç noktalardaki potansiyel dağılımının hesaplanması,
- Çok yüzeyli problemlerin çözümü,
- Açık sınırlı (sonsuz sınırlı) alan problemlerinin kolaylıkla analiz edilebilmesi, özelliklerini taşımaktadır.

SINEY programı, bir elektrostatik problemin Sınır Elemanları Yöntemi yardımı ile analizinde kullanılan aşağıdaki çözüm aşamaları gözönünde bulundurularak geliştirilmiştir (Şekil 5.1).





Şekil 5.1 Sınır Elemanları Yöntemi ile sınır problemlerinin çözüm aşamaları.

5.2. SINEY Ana Programı

SINEY Ana programı aşağıdaki alt programlardan oluşur:

SEYMENU Alt programların çalıştıran menü programıdır.

INPUT Program girişi okunur ve eleman bağlantıları belirlenerek, eleman uzunlukları hesaplanır.

SEYALT H ve G etki matrisleri hesaplanır. Sınır şartları uygulandıktan sonra $H u = G q$ denklemi, $A x = y$ sistemine indirgenir. Denklem sistemi çözülerek x vektörü hesaplanır. u ve q 'nın bilinmeyen sınır değerleri elde edilir.



- KICNOK** Izgara çizilir.İç düğümlerle ilişkili olan H ve G matrisleri ile bilinen u ve q sınır değerleri kullanılarak, seçilen iç noktalardaki potansiyel değerleri hesaplanır.
- GRAFİK** İç noktalarda hesaplanan potansiyel değerlerin eşit olanları eşdeğer grafiği çizilerek birleştirilir.

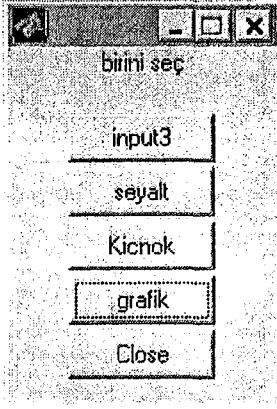
Programda kullanılan değişkenler ve anlamları şu şekildedir:

- NE** Sınır elemanlarının sayısı.
- XI(4,2)** Gauss integrasyon noktalarının apsisleri.
- W(4,2)** Gauss integrasyon noktalarının ağırlık faktörleri
- X(NT)** Sınır düğümleri ve iç noktaların X koordinatları.
- Y(NT)** Sınır düğümleri ve iç noktaların Y koordinatları.
- INC(NE,2)** Eleman bağlantısı.
- LJ(NE)** Eleman uzunluğu vektörü.
- KOD(NN)** Eleman düğümlerindeki sınır şartlarının tipini gösteren vektör
(Potansiyel tanımlanmış ise KOD=1, akı tanımlanmış ise KOD=0 alınır).
- U(NN)** Dirichlet sınır şartı vektörü.
- Q(NN)** Neumann sınır şartı vektörü.
- H1(I, J)** i. düğümün j. elemanın 1. düğümüne etkisini ifade eden H1 etki vektörü.
- H2(I, J)** i. düğümün j. elemanın 2. düğümüne etkisini ifade eden H2 etki vektörü.
- HI(NN,NT)** Sınır düğümlerinin iç noktalara etkisini ifade eden HI etki vektörü.
- G1(I, J)** i. düğümün j. elemanın 1. düğümüne etkisini ifade eden G1 etki vektörü.
- G2(I, J)** i. düğümün j. elemanın 2. düğümüne etkisini ifade eden G2 etki vektörü.
- GI(NN,NT)** Sınır düğümlerinin iç noktalara etkisini ifade eden GI etki vektörü.
- A(NN,NN)** Sistem matrisi.
- X(NN)** Denklem sistemindeki sağ taraf vektörü.

5.2.1 SEYMENU Alt programı

Alt programların çalıştıran menü programıdır. Butonlara yukarıdan aşağı doğru sıra ile seçilerek alt programlar çalıştırılır.





Şekil 5.1 SEYMENU programının aktif görüntüsü.

5.2.2. INPUT Alt Programı

Bu alt programda, program tarafından istenen bütün veri girişi okunur. Veri girişi aşağıdaki gruptan oluşur:

1. *Problemin başlığı.*
2. *Problem hakkında genel bilgi.* Problemin sınır durumunu gösteren, Şekil 5.3'teki kurallara göre tanımlanır:

NE

3. *Bölgelerin son düğüm numaraları.* Problemi oluşturan bölgelerin son düğüm numaraları, elemanlara ait düğümleri (eleman bağlantılarını) belirlemek için kullanılır. Eleman bağlantıları aynı zamanda, elemanların uzunluklarını hesaplamak için de kullanılır:
5. Dirichlet tipi problemlerde potansiyel sınır şartları. Bölgelerde sadece potansiyel sınır şartı uygulanmışsa ($NP = 0$ ise) her bölgenin ayrı ayrı potansiyeli buradan okunur. Bütün düğümler $KOD = 1$ olarak tanımlanır:
6. Sınır düğümlerinin ve iç noktaların koordinatları. Lineer sınır elemanlarının düğümlerinin koordinatları ve $NN+1 \leq K \leq NT$ olmak üzere iç noktaların koordinatları aynı dizide tanımlanır ($NT=NN+NI$). Sınır elemanlarının düğümlerinin numaralandırılmasında 5.2.1.2. kısımdaki kurallar uygulanır:
 $K, X(K), Y(K)$



7. *Karışık tip (Dirichlet ve Neumann) sınır şartları.* Problemden Dirichlet ve Neumann tipi sınır şartları birlikte tanımlandığında, NP sayısı kadar potansiyel sınır şartı, uygulandığı düğüm numaraları ve $KOD=1$ ile verilir. Burada tanımlananların dışındaki düğümler otomatik olarak Neumann tipi sınır şartı ($KOD=0$ ve $Q=0$) olarak atanır:

$K, KOD(K)$

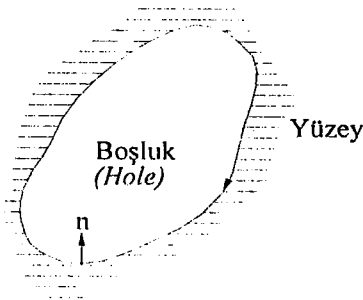
5.2.2.1. Eleman Bağlantılarının Belirlenmesi ve Eleman Uzunluklarının Hesaplanması

INPUT alt programının son kısmında, bölgelerin son düğüm numaraları kullanılarak her bölge için sınır elemanlarının birbirleri ile olan bağlantıları belirlenir. Daha sonra eleman bağlantıları yazdırılan NE sayısı kadar lineer sınır elemanının birinci düğümünün koordinatları; $X(N1)$, $Y(N1)$ ve ikinci düğümünün koordinatları; $X(N2)$, $Y(N2)$ kullanılarak, bütün elemanların uzunlukları hesaplanır.

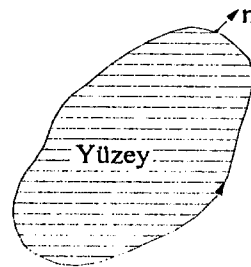
5.2.2.2. Sınır Elemanları Yönteminde Numaralandırma Kuralları

Sınır elemanları yönteminde bir dış veya iç sınır tanımlamak için normalin yönü özdeşliği kullanılır. Buna göre iki boyutlu problemler için, sınır düğümlerinin numaralandırılması işleminde aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. Dış yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünde (sağa doğru) tanımlanır (Şekil 5.3.a).
2. İç yüzeyler için numaralandırma kuralı, saat yönünün tersinde (sola doğru) tanımlanır (Şekil 5.3.b).



(a) Saat yönünde



(b) Saat yönünün tersinde

Şekil 5.3 (a) Dış yüzey ve (b) İç yüzey için, numaralandırma kuralı.

5.2.3. SEYALT Alt Programı

Bu alt programda, denklem sistemi için gerekli bütün eleman etki matrisleri hesaplanır. Sayısal integraller, tekil olmayan elemanlar üzerinde 4 Gauss integrasyon noktası kullanılarak gerçekleştirilir. Noktaların sayısı, ayrı bir düğüm veya noktadan incelenen elemanın merkezine olan bağıl uzaklığa göre seçilir. İntegrasyon noktalarının sayısı belirlendikten sonra, bu noktaların koordinatları ile incelenen düğümün bu noktalara uzaklıkları (r_k) ve sınır elemanlarına dik uzaklıkları (d_{ij}) hesaplanır.

Tekillik içeren elemanlar için G matrisinin köşegen katsayıları daha doğru sonuçlar elde etmek için analitik olarak hesaplanır (GE). H matrisinin köşegen katsayıları ise aynı satırda köşegen olmayan terimlerin toplanmasıyla hesaplanır.

Daha sonra sınır şartları uygulanır. u 'nun bilinen değerleri H matrisinin katsayıları ile çarpılır ve XM 'den çıkarılır. q 'nun bilinen değerleri G matrisinin katsayıları ile çarpılır ve XM 'e eklenir (XM vektörü çözümden sonra bilinmeyenleri içerecektir). u ve q 'nun bilinmeyen değerlerine karşılık gelen H ve G matrisinin katsayıları A matrisi şeklinde kaydedilir. Böylece $H.u = G.q$ denklem sistemi, $A.x = y$ şekline döndürür. Matris yöntemi ile bu denklem çözülür.

Sonuçta bilinmeyen sınır değerleri, ana programdaki Xx(nn) matrisi hesaplanır.

5.2.4. KİCNOK Alt Programı

Bu alt programda, bütün sınır değerleri bilindiğinden MATRX alt programında hesaplanarak saklanan ve iç noktaların sınır düğümlerine etkisini içeren HI ve GI etki matrisleri kullanılarak iç noktalardaki potansiyeller hesaplanır.

5.2.5. GRAFİK Alt Programı

Son olan bu alt programda İç noktalarda hesaplanan potansiyel değerlerin eşit olanları eşdeğer grafiği çizilerek birleştirilir.

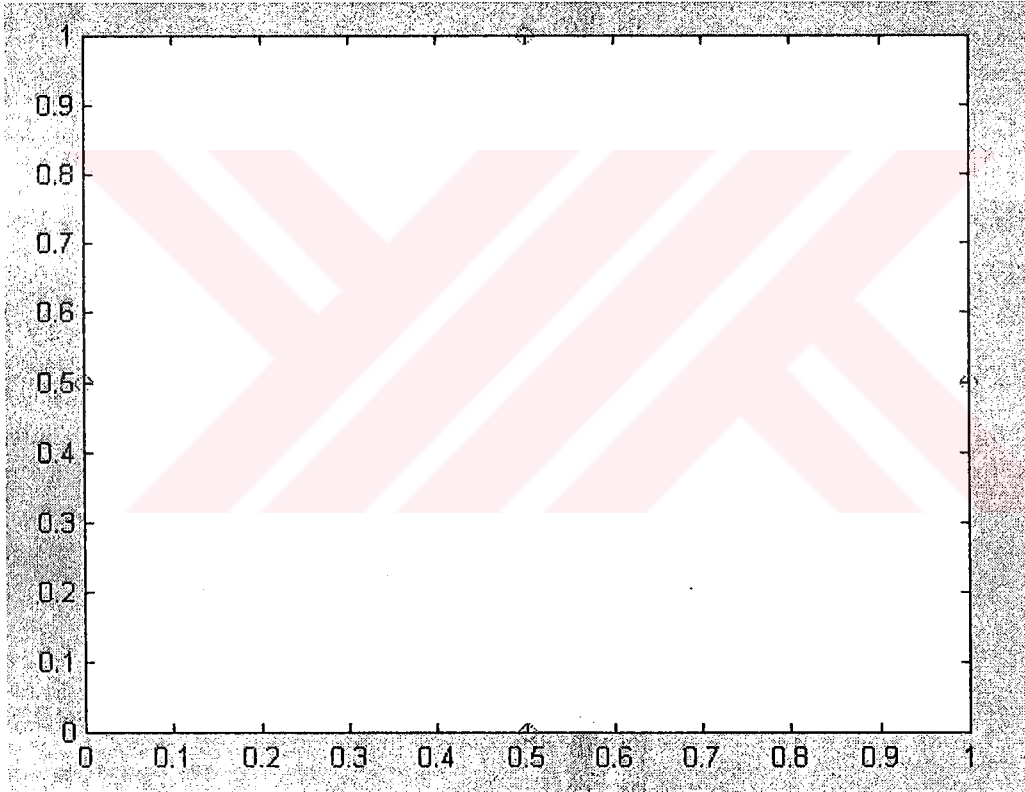


5.3. Uygulama Örnekleri

5.3.1. Çok Yalıtkanlı Elektrot Sistemleri

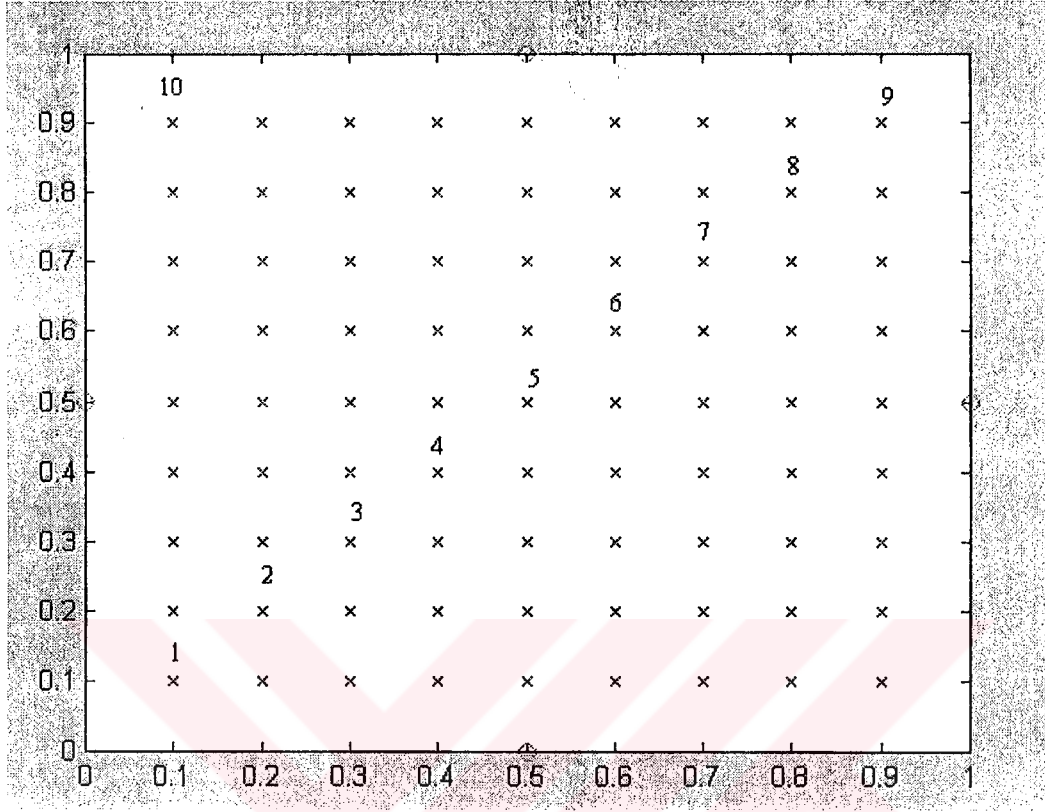
5.3.1.1. Düzlemsel Elektrot Sistemi

Şekil 5.4'de verilen örnek sistem, dielektrik sabitleri tek bölgeden oluşmaktadır. Problem bölgesi 12 sınır elemanıya bölünmüştür. Belirtilen noktalardaki potansiyel değerleri SINEY programı ile hesaplanmış, analitik olarak bulunan sonuçlarla Tablo 5.2. ve Şekil 5.5'de karşılaştırılmıştır.

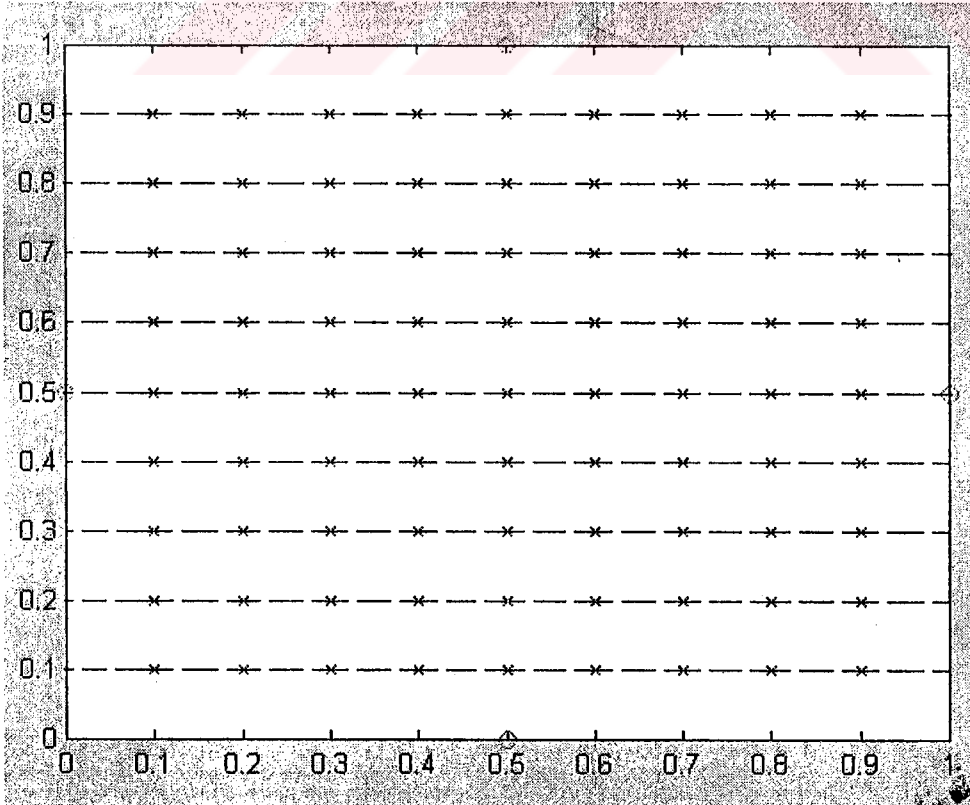


a-) Düzlemsel elektrot sistemi.

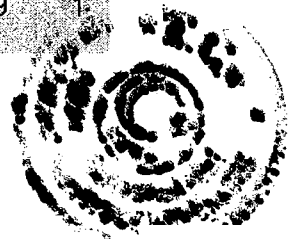




b-) Izgaralanması.



c-) Eş potansiyel eğrisinin çizilmesi.



Şekil 5.4 (a)Düzlemsel elektrot sistemi,

(b) Izgaralanması,

(c) Eş potansiyel eğrilerinin çizilmesi

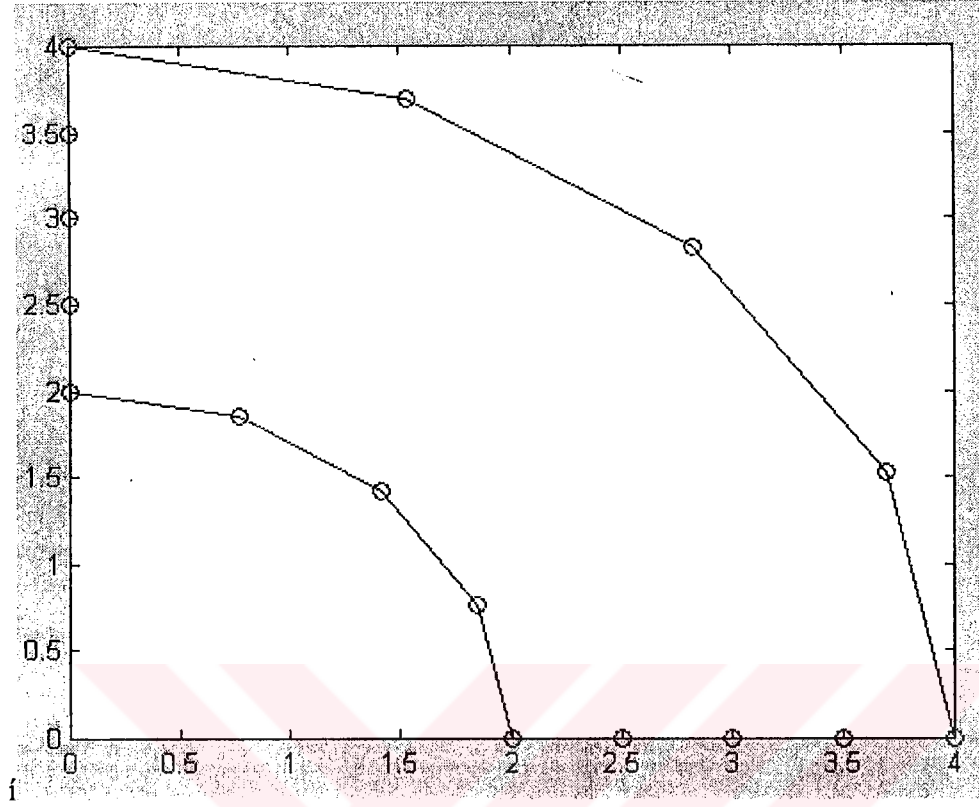
Tablo 5.2. Çok yalıtkanlı düzlemsel elektrot sisteminin çözümü.

Hesap Noktası	SINEY Programı	Analitik Çözüm
1	9.199	10
2	24.767	20
3	32.771	30
4	41.029	40
5	49.454	50
6	58.969	60
7	68.123	70
8	83.750	80
9	90.312	90

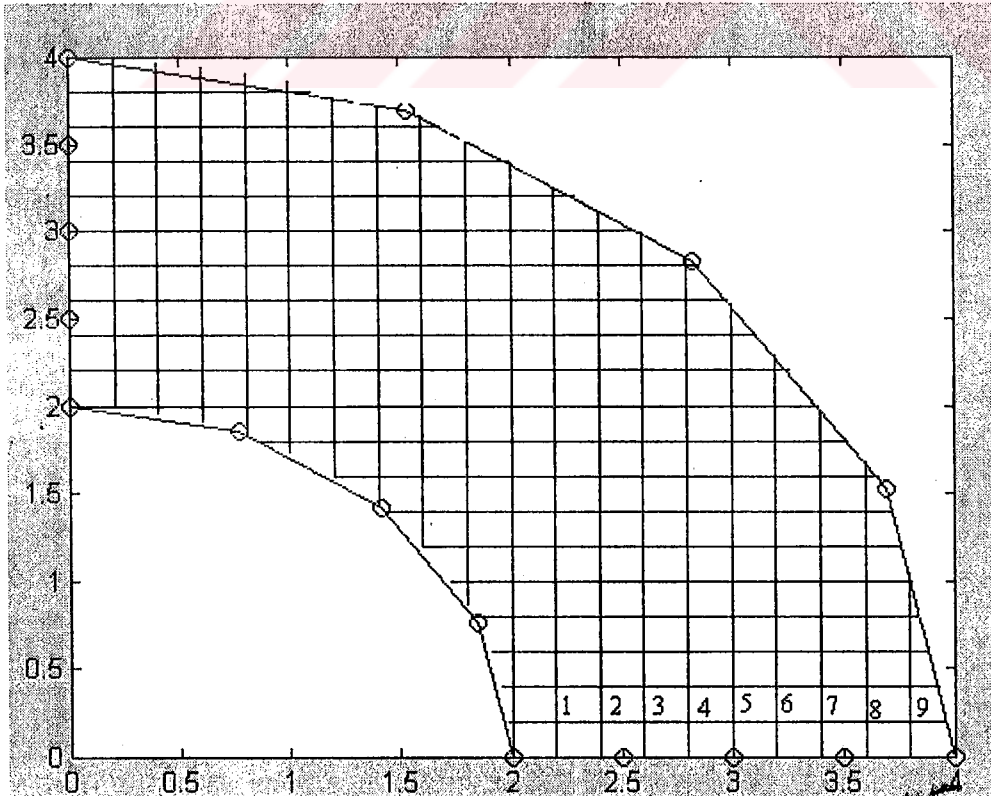
5.3.1.2. Koaksiyel Kablo

Şekil 5.6'da gösterildiği gibi bir koaksiyel kablonun çeyrek kesiti alınarak 20 sınır elemanı ile bölünmüştür. Verilen sınır şartları ile radyal yöndeki potansiyel değerleri hesaplanmıştır. Analitik olarak bulunan sonuçlar, SINEY yardımıyla bulunan sonuçlarla Tablo 5.3. ve Şekil 5.7'de karşılaştırılmıştır.





a-) Koaksiyel kablonun çeyrek kesiti.



b-) Koaksiyel kablonun çeyrek kesitinin ızgralanması

Şekil 5.5 (a)Koaksiyel kablonun çeyrek kesiti,

(b) Koaksiyel kablonun çeyrek kesitinin ızgaralanması,

Tablo 5.3. Radyal yöndeki potansiyel dağılımı.

Hesap Noktası	SINEL Programı	Analitik Çözüm
1	185.8263	185
2	175.8318	175
3	164.9665	165
4	155.6940	155
5	146.3632	146
6	137.5749	137
7	129.7841	130
8	120.7329	120
9	106.6262	105



BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, iki boyutlu potansiyel problemleri Sınır Elemanları Yöntemi ile çözümü incelenmiştir. Laplace işleci ile ifade edilen statik elektrik alan problemlerinin analizinin yapan yapan SINEY adlı bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Potansiyeller ve normale göre türevleri, interpolasyon fonksiyonları ile ifade edildikten sonra, sınır integral denkleminde ayrıştırılmış ve sistem matrisi elde edilmiştir. Sayısal integrasyon formülleri kullanılarak, matrislerin katsayıları ($[H]$ ve $[G]$) hesaplanmıştır. Sınır şartları uygulandıktan sonra, sınır bilinmeyenlerinden oluşan bir lineer denklem sistemi bulunmuştur. Bu denklem çözülerek sınır düğümlerindeki potansiyeller ve türevleri hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar kullanılarak istenen iç noktalardaki potansiyel değerleri belirlenmiştir. Belirlenen değerlerin eşdeğer potansiyel eğrileri çizdirilmiştir.

Uygulama Bölümünde verilen örneklerde, analitik olarak hesaplanan sonuçlarla, SINEY programı kullanılarak alınan sonuçlar tablolar halinde ve grafik olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca analitik olarak çözülebilen problemlerin, SINEY program hataları da tablolara çıkarılmıştır.

Bu çalışmada ele alınan iki potansiyel dağılım problemlerinin tanım bölgeleri homojen kabul edilmiştir. Ancak bölgesi homojen olmayan problemlere ; homojen bir bölge kendi içinde homojen birçok alt bölgeye ayrılarak uygulanabilir.

Sonuç olarak, analitik sonuçlarla program sonuçlarının son derece uyumlu olduğu ve Sınır Elemanları Yöntemi'nin az miktarda veri girişi ile oldukça hassas sonuçlar sağladığı, geliştirilen programa (SINEY) yapılacak yeni katkılarla daha karmaşık problemlerin de çözülebileceği görülmüştür.



KAYNAKLAR

- [1] Brebbia, C.A., 1978, (Reprinted, 1980, 1982, 1984), **"The Boundary Element for Engineers"**. Pentech Press, London.
- [2] Brebbia, C.A., and Walker, S., 1979, **"Boundary Element Techniques in Engineering."** Newnes-Butterworths, London.
- [3] Brebbia, C.A., and Magureanu, R., 1987, **"Boundary Element Method for Electromagnetic Problems"**. Engineering Analysis, Computational Mechanics Inst., Southampton, 4, 4, 178-185.
- [4] Brebbia, C.A., and Dominguez, J., 1989, **"Boundary Elements: An Introductory Course"**. Computational Mechanics Publications, Southampton and McGraw-Hill, New York.
- [5] Cebeci, M., 1991, **"Zincir İzolatörlerde Elektrik Alan Dağılımının İncelenmesi"**. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [6] DeFigueiredo, T.G.B., 1991, **"A New Boundary Element Formulation in Engineering"**. Springer-Verlag, Berlin, New York, London.
- [7] Beer, G., and Watson, J.O., 1991, **"Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers"**. John Wiley and Sons, New York.
- [8] Bamji, S.S., Bulinski, A.T., and Prasad, K.M., 1993, **"Electric Field Calculations with the Boundary Element Method."** IEEE Transactions on Electrical Insulation, 28, 3, 420-424.
- [9] Yıldırım, S., 1999, **"Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi."** Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [10] Tsuboi, H.; Takayama, T.; Yano, K. **"Setting up curved-surface triangular elements of boundary element method for electrostatic field problems."** Magnetics, IEEE Transactions on , Volume: 35 Issue: 3 Part: 1 , May 1999. Page(s): 1123 -1126
- [11] Abramowitz I.; Setung A , K 1967. **"SHandbook of mathematical Function"** Dover New York.



EK - A

SINEY PROGRAMI

SEYMENU

```

HEADERS='BİRİNİ SEÇ';
LABELS=STR2MAT('INPUT3','SEYALT','KİCNOK','GRAFİK');
CALLBACKS=STR2MAT('INPUT3','SEYALT','KİCNOK','GRAFİK');
CHOİCES('MENÜ',HEADERS,LABELS,CALLBACKS);

```

INPUT ALT PROGRAMI

```

disp('*****SINEY*****')
disp('ALTAN GENCER 2002')
disp('SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE İKİ BOYUTLU POTANSİYEL DAĞILIM
PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ')
XI(1)=0.069;
XI(2)=0.33;
XI(3)=0.669;
XI(4)=0.93;
W(1)=0.34785485;
W(2)=0.65214515;
W(3)=0.65214515;
W(4)=0.34785485;
X(1)=0;
X(2)=1;
X(3)=1;
X(4)=0;
Y(1)=0;
Y(2)=0;
Y(3)=1;
Y(4)=1;
NE=4;
X(NE+1)=X(1);
Y(NE+1)=Y(1);
for K=1:1:NE
    INC(K,1)=K;
    INC(K,2)=K+1;
end
INC(4,2)=1;
for I=1:1:NE
    N1=INC(I,1);
    N2=INC(I,2);
    LJ(I)=sqrt((X(N2)-X(N1)).^2+(Y(N2)-Y(N1)).^2);
end
KOD(1)=1;
KOD(2)=0;
KOD(3)=1;
KOD(4)=0;
U(1)=0;
U(3)=100;
Q(2)=0;
Q(4)=0;
MM=X(1);
NN=Y(1);
XC=[X MM];
YC=[Y NN];
plot(XC,YC,'r-')

```



INPUT ALT PROGRAMI

```

cc=NE-2;
a=1;
I=0;
for I=1:1:NE
    for J=1:1:NE
        HI(I,J)=0;
    end
end
disp('SINIR ELEMANLARI ÜZERİNDEKİ DÖNGÜ')
for I=1:1:NE
    L=I+1;
    disp('İNCELENEN DÜĞÜMÜN KOORDİNATLARI')
    XS=[X(L)+X(I)]/2;
    YS=[Y(L)+Y(I)]/2;
    a=a+1;
    b=a+cc;
    k=0;
    for J=a:1:b
        if J>NE
            J=J-NE;
        end
        k=k+1;
        K=J+1;
        X1=X(J);
        X2=X(K);
        Y1=Y(J);
        Y2=Y(K);
        G1=0;
        H1=0;
        disp('SAYISAL İNTEGRASYON KULLANARAK TEKİL OLMAYAN
İNTEGRALLERİN HESAPLANMASI')
        for KK=1:1:4
            XX(KK)=X1+[(X2-X1)*XI(KK)];
            YY(KK)=Y1+[(Y2-Y1)*XI(KK)];
            R(KK)=sqrt((XS-XX(KK)).^2+(YS-YY(KK)).^2);
            A=(XS-XX(KK))*(Y1-Y2);
            B=(YS-YY(KK))*(X2-X1);
            H=-[(A+B)*W(KK)]/(4*(R(KK).^2)*pi);
            H1=H1+H;
            G=(log(1/R(KK))*W(KK))/(4*pi);
            G1=G1+G;
        end
        H2(I,k)=H1;
        G2(I,k)=G1;
    end
end
disp('SINIR DÜĞÜMLERİNİN GRAFİKTE BELİRTİLMESİ')
for I=1:1:NE
    L=I+1;
    XS(I)=[X(L)+X(I)]/2;
    YS(I)=[Y(L)+Y(I)]/2;
end
plot(XS,YS,'go')
for I=1:1:NE
    c=0;
    for J=1:1:(NE-1)
        if I==J
            for KL=1:1:(NE-1);
                disp('H MATRİSİNİN KÖŞEĞEN TERİMLERİNİN HESAPLANMASI')
            end
        end
    end
end

```



```

        HI(I,J)=HI(I,J)-H2(I,KL);
        disp('G MATRİSİNİN KÖŞEĞEN TERİMLERİNİN ANALİTİK
İNTEGRASYON KULLANARAK HESAPLANMASI')
        GI(I,J)=[(log(2/LJ(I))+1)*LJ(I)]/(2*pi);
    end
end
if I==NE
    disp('H MATRİSİNİN KÖŞEĞEN TERİMLERİNİN HESAPLANMASI')
    HI(I,NE)=HI(NE-1,NE-1);
    disp('G MATRİSİNİN KÖŞEĞEN TERİMLERİNİN ANALİTİK
İNTEGRASYON KULLANARAK HESAPLANMASI')
    GI(I,NE)=[(log(2/LJ(I))+1)*LJ(I)]/(2*pi);
end
c=J+I;
if c>NE
    c=c-NE;
end
HI(I,c)=H2(I,J);
GI(I,c)=G2(I,J);
end
end
for I=1:1:NE
    for J=1:1:NE
        disp('SINIR DEĞERLERİNİN HESAPLANMASI İÇİN A.X=Y SİSTEMİNİN
OLUŞTURULMASI')
        K1=KOD(J);
        if K1==1
            H(I,J)=-GI(I,J);
            G(I,J)=-HI(I,J);
        else
            H(I,J)=HI(I,J);
            G(I,J)=GI(I,J);
        end
    end
end
disp('SINIR DÜĞÜMLERİNİN BİLİNEREN U ve Q OLUŞAN C MATRİSİNİN MEYDANA
GETİRİLMESİ')
for I=1:1:NE
    K2=KOD(I);
    if K2==1
        C(I,1)=U(I);
    else
        C(I,1)=Q(I);
    end
end
end
A=G*C;
disp('SINIR DEĞERLERİNİN HESAPLANMASI')
Xx=H\A

```

KİCNOK ALT PROGRAMI

```

for I=1:1:NE
    K3=KOD(I);
    if K3==0
        U(I)=Xx(I,1);
    else
        Q(I)=Xx(I,1);
    end
end
for I=1:1:NE
    U1(I,1)=U(I);

```



```

    Q1(I,1)=Q(I);
end
AA=X(1);
BB=Y(1);
XA=[X AA];
YA=[Y BB];
for I=1:1:NE
    L=I+1;
    disp('İNCELENEN DÜĞÜMÜN KOORDİNATLARI')
    XB(I)=[XA(L)+XA(I)]/2;
    YB(I)=[YA(L)+YA(I)]/2;
end
plot(XB,YB,'go')
D=NE/4;
YZ=(3*D)+1;
SS=(4*D)+1;
CC=D;
for XZ=1:1:D
    ZZ=YZ-XZ;
    DD=SS-XZ;
    EE=CC+XZ;
    line([XB(XZ) XB(ZZ)], [YB(XZ) YB(ZZ)])
    line([XB(EE) XB(DD)], [YB(EE) YB(DD)])
end
for I=1:1:D
    for J=1:1:D
        E=D+I;
        Xi(I,J)=XB(J)
        Yi(I,J)=YB(E)
    end
end
disp('SINIR ELEMANLARI ÜZERİNDEKİ DÖNGÜ')
k=0;
for I=1:1:D
    for J=1:1:D
        k=k+1;
        disp('İNCELENEN DÜĞÜMÜN KOORDİNATLARI');
        XXS=Xi(I,J);
        YYS=Yi(I,J);
        for JJ=1:1:NE
            Kk=JJ+1;
            XX1=X(JJ);
            XX2=X(Kk);
            YY1=Y(JJ);
            YY2=Y(Kk);
            for n=1:1:4
                XXX(n)=XX1+[(XX2-XX1)*XI(n)];
                YYY(n)=YY1+[(YY2-YY1)*XI(n)];
                RR(n)=sqrt((XXS-XXX(n)).^2+(YYS-YYY(n)).^2);
            end
            disp('SAYISAL İNTEGRASYON KULLANARAK TEKİL OLMAYAN
İNTEGRALLERİN HESAPLANAMSI')
            GG1=0;
            HH1=0;
            for KK=1:1:4
                AA=(XXS-XXX(KK))*(YY1-YY2);
                BB=(YYS-YYY(KK))*(XX2-XX1);
                HH=-[(AA+BB)*W(KK)]/(4*(RR(KK).^2)*pi);
                HH1=HH1+HH;
                GG=(log(1/RR(KK))*W(KK))/(4*pi);
                GG1=GG1+GG;
            end
            HH2(1,JJ)=HH1;

```



```

        GG2(1,JJ)=GG1;
    end
    U2=HH2*U1;
    Q2=GG2*Q1;
    U3(k)=Q2-U2
    end
end

```

GRAFİK ALT PROGRAMI

```

plot(XC,YC,'r-')
disp('ES POTANSİYEL EĞRİLERİNİN ÇİZİLMESİ')
hold on
plot(XS,YS,'ro')
hold off
hold on
plot(Xi,Yi,'ro')
hold off
for II=1:1:NE-1
    L=II+1;
    for K=L:1:NE
        if fix(U(II))==fix(U(K)) | round(U(II))==round(U(K));
            line([XS(II) XS(K)], [YS(II) YS(K)]) ;
        end
    end
    JJ=0;
    for I=1:1:D
        for J=1:1:D
            JJ=JJ+1;
            if fix(U(II))==fix(U3(JJ)) | round(U(II))==round(U3(JJ));
                line([XS(II) Xi(I,J)], [YS(II) Yi(I,J)])
            end
        end
    end
end
end

```



EK B

GAUSS ALAN HESABI

B.1. Bir boyutlu gauss alan hesabı

İntegrallerin direkt değerlendirme şekli;

$$\int_a^b F(x) dx \quad (B.1)$$

zamanı yok etmek, bazen çok zordur, hatta imkansızdır. $F(x)$ integrand'ın formunda bağımlıdır. Böylece integraller değerlendirilir. Gauss Legendre formülünün temelinde sayısal teknik kullanılır. Dönüşüm kullanılarak elde edilir.

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \zeta, \quad dx = \frac{b-a}{2} d\zeta \quad (B.2)$$

böylece;

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 F\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \zeta\right) d\zeta \\ &= \frac{b-a}{2} [W_1 F(\zeta_1) + W_2 F(\zeta_2) + \dots + W_N F(\zeta_N)] + R_n \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n W_i F(x_i) \end{aligned} \quad (B.3)$$

burada koordinatlar x_i ve ağırlıklar W_i ile gösterilmiştir.

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \zeta_i \quad (B.4)$$

$$W_i = \frac{(1 - \zeta_i^2)}{(n+1)^2 P_{n+1}'(\zeta_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (B.5)$$

n düzeyinde $P_n(\xi)$ Legendre çok terimlidir.



$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} [(\zeta^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (B.6)$$

$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, P_n(\zeta)$ 'nin sıfırlarıdır.

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)(2n)!} F^{(2n)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b \quad (B.7)$$

burada $\alpha = -1$ ve $b=1$ ise denk(B.2) $(b-a)/2$ çarpıldığında 1 olur.

$$\int_{-1}^1 F(x) dx = \sum_{i=1}^n W_i F(x_i) + R_n \quad (B.8)$$

$n = 1, 2, \dots, 10$ için ζ_i ve W_i sayısal değerleri tablo (B.1) verilmiştir.

Örnek:

$F(x) = x \cos x, a = 0, b = \pi/2, n = 3$; sonra $x_i = \pi(1 + \zeta_i)/4$ olarak verilmiştir. Bundan sonra;

$$P_3(\zeta) = \frac{1}{2} [5\zeta^3 - 3\zeta]$$

Tablo (B.1)'deki ζ_i ve W_i değerlerini kullanırız.

$$\begin{aligned} x_1 &= \pi[1 + \zeta_1]/4 \approx 0.174264, & x_2 &= \pi[1 + \zeta_2]/4 \approx 0.785398 \\ x_3 &= \pi[1 + \zeta_3]/4 \approx 1.393765 \end{aligned}$$

buradan:

$$f(x_1) = x_1 \cos x_1 = 0.174264$$

$$f(x_2) = x_2 \cos x_2 = 0.5555360$$

$$f(x_3) = x_3 \cos x_3 = 0.24553$$

ve

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx \approx \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^3 W_i f(x_i) \approx 0.570851 - 0.0000070$$

tam değeri 0.570796' dır. Noktalarda, çok küçük sayılar kullanıldığından, metodun doğruluğunu gösterir.

B.2 Bir Boyutlu Logaritmik Gauss Alan Hesabı:

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{r}\right) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (B.9)$$

Berthod-zaborowsky alan olarak da bilinir. Tablo(B.2)'de ζ_i ve W_i değerleri verildi. formül (B.6) da η integrasyon noktalarının integralleri doğru olarak hesap edilir. $f(x)$ derecesi daha az ise $(2n-1)$ eşittir.

B.3 İki Boyutlu Logaritmik Gauss Alan Hesabı:

Üçgen bölgeler için;

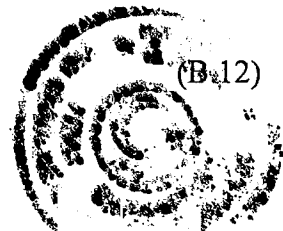
$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 \right] d\xi_2 = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) \quad (B.10)$$

burada ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , Şekil (B.1)'de gösterildiği gibi üç genin koordinatlarıdır. İntegralin tam değeri ile integral gücü, üçgen koordinatları ile verilir.

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1^i, \xi_2^j, \xi_3^k) d\xi_1 \right] d\xi_2 = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} \quad (B.11)$$

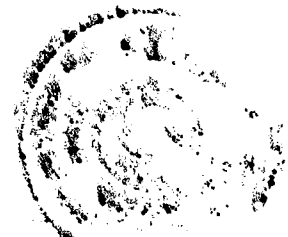
genellikle n boyutlu simplex için;

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \dots \int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} dx_n \dots dx_1 \\ &= \frac{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}{(n + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)!} \end{aligned} \quad (B.12)$$



tablo(B.1):Gauss-Legendre alan hesabı

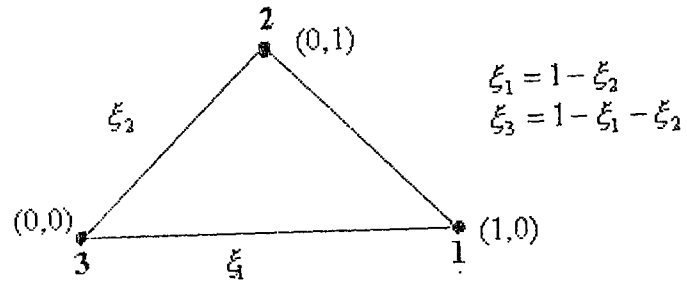
n	ζ_i	W_i
1	± 0.0	2.0
2	± 0.577350269189626	1.0
3	0.0	0.888888888888889
	± 0.774596669241483	0.555555555555556
4	± 0.861136311594053	0.347854845137454
	± 0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.0	0.568888888888889
	± 0.906179845938664	0.236926885056189
	± 0.538469310105683	0.478628670499366
6	± 0.932469514203152	0.171324492379170
	± 0.661209386466265	0.360761573048139
	± 0.238619186083197	0.467913934572691
7	0.0	0.417959183673469
	± 0.949107912342759	0.129484966168870
	± 0.741531185599394	0.279705391489277
	± 0.405845151377397	0.381830050505119
8	± 0.960289856497536	0.101228536290376
	± 0.796666477413627	0.222381034453374
	± 0.525532409916329	0.313707645877887
	± 0.183434642495650	0.362683783378362
9	0.0	0.330239355001260
	± 0.968160239507626	0.081274388361574
	± 0.836031107326636	0.180648160694857
	± 0.613371432700590	0.260610696402935
	± 0.324253423403809	0.312347077040003
10	± 0.973906528517172	0.066671343308688
	± 0.865063366688985	0.149451349150581
	± 0.679409568299024	0.219086362515982
	± 0.433395394129247	0.269266719309996
	± 0.148874338981631	0.295524224714753



tablo(B.2):Logaritmik alan hesabı

n	ξ_i	W_i
2	0.11200820	0.71853931
	0.60227690	0.28146068
3	0.63890690	0.51340455
	0.36899079	0.39128004
	0.76688030	0.09461540
4	0.04144848	0.38346406
	0.24527491	0.38687531
	0.55616545	0.19043512
	0.84898239	0.03922548
5	0.02919447	0.29789347
	0.17397721	0.34977622
	0.41170252	0.2344882
	0.67731417	0.09893045
	0.89477136	0.01891155
6	0.02163400	0.23876366
	0.12958339	0.30828657
	0.31402044	0.24531742
	0.53865721	0.14200875
	0.75691533	0.05545462
	0.92266885	0.01016895
7	0.01671935	0.19616938
	0.10018567	0.27930264
	0.24629424	0.23968187
	0.43346349	0.16577577
	0.63235098	0.08894322
	0.81111862	0.03319430
	0.94084816	0.00593278
8	0.01332024	0.16441660
	0.07750427	0.23752560
	0.19787102	0.22684198
	0.35415398	0.17575408
	0.75181452	0.05787221
	0.84937932	0.02097907
	0.95332645	0.00368640





Şekil B.1: üçgen koordinatlar

