

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FUZZY SAYI DİZİLERİNDE
GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Damla YAĞDIRAN
(101121122)**

**Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi**

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Hıfı ALTINOK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 5 Haziran 2012

HAZİRAN-2012

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNDE
GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Damla YAĞDIRAN
(101121122)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Haziran 2012

Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Haziran 2012

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Hıfı ALTINOK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

: Doç.Dr. Ayşegül GÖKHAN

HAZİRAN-2012

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım sayın hocam Yrd.Doç.Dr. Hıfı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Damla YAĞDIRAN

ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ	8
3.1. Fuzzy Kümeler	8
3.2. Fuzzy Sayılar	10
3.3. Fuzzy Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri	16
4. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI	21
KAYNAKLAR	33

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde fuzzy kümenin tanımı verilerek kesin kümelerle arasındaki farka değinilmiş ve günlük hayattan örnekler verilerek bu kavramın daha iyi anlaşılması sağlanmıştır. İkinci bölümde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy küme, fuzzy sayı ve fuzzy sayı dizisi tanımları verilerek fuzzy sayı dizilerinin yakınsaklığı, sınırlılığı ve istatistiksel yakınsaklığı gibi bazı özelliklerinden ve aralarındaki bağıntılardan bahsedilmiştir. Çalışmanın orjinal olan son bölümünde, istatistiksel sınırlılık kavramı fuzzy sayı dizileri için genelleştirilerek Δ^m -istatistiksel sınırlılık tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel sınırlılık, Fark operatörü, Fark dizisi

SUMMARY

Generalized Statistical Boundedness in Sequences of Fuzzy Numbers

In the introduction of this thesis that consist of four chapters, we give the definition of a fuzzy set and mention differences between a crisp set and it. Moreover, we give examples from daily life in order to understand the topic. In the second chapter, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters. In the third chapter, we give the concepts of fuzzy set, fuzzy number and sequence of fuzzy numbers and mention convergence, boundedness and statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and relations among them. In the last chapter which is original part of the study, we generalize the concept of statistical boundedness for sequences of fuzzy numbers and define Δ^m -statistical boundedness and examine some properties of it.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, statistical convergence, statistical boundedness, difference operator, difference sequence

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Bir fuzzy küme	1
Şekil 3.1. Bir fuzzy sayı	12
Şekil 3.2. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına yakınsaması.....	17
Şekil 3.3. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaması.....	19
Şekil 3.4. İstatistiksel yakınsak olmayan, fakat sınırlı olan bir fuzzy sayı dizisi	19
Şekil 3.5. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi	20
Şekil 4.1. Δ^m —sınırlı ve Δ^m —yakınsak, fakat sınırsız ve ıraksak bir fuzzy sayı dizisi	22
Şekil 4.2. Δ^m —sınırlı, fakat Δ^m —yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi.....	23
Şekil 4.3. Δ^m —istatistiksel sınırlı, fakat Δ^m —sınırlı olmayan bir fuzzy sayı dizisi...	27

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n –boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$L(\mathbb{R})$	: Reel fuzzy sayılar kümesi
$L(\mathbb{R}^n)$	: n –boyutlu reel fuzzy sayılar kümesi
A^α	: A fuzzy kümesinin α –kesimi
$cl(A)$	: A kümesinin kapanışı
$\text{supp } A$	: A fuzzy kümesinin desteği (support)
$h.h.k$	: hemen hemen her k
$A \approx B$	: A ve B fuzzy sayıları kıyaslanamaz
Δ^m	: m . dereceden fark operatörü

1. GİRİŞ

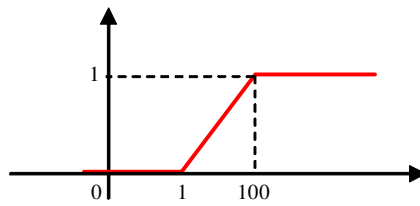
1965’de Zadeh [1] doğruluk derecesi olası olan çok değerli bir mantığı büyük bir titizlikle hazırladı. Zadeh tarafından yayınlanan bu makale modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Zadeh, bu makalede kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu fuzzy küme teorisini ortaya koydu.

Fuzzy kümeler, boş olmayan bir X kümesinin ilgili elemanlarına göre göz önüne alınır. Temel düşünce, her bir $x \in X$ elemanının $[0, 1]$ aralığında değerler alan bir $u(x)$ üyelik derecesine atanmasıdır. Burada $u(x) = 0$, üyeliğin olmamasına; $0 < u(x) < 1$ kısmi üyeliğe ve $u(x) = 1$ de tam üyeliğe karşılık gelir. Zadeh’e göre X ’in bir fuzzy alt kümesi en az bir $u : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu için $X \times [0, 1]$ kümesinin boş olmayan bir $\{(x, u(x)) : x \in X\}$ alt kümesidir.

Örneğin

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{99}(x - 1), & 1 \leq x \leq 100 \text{ ise} \\ 1, & x \geq 100 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu reel $x \gg 1$ sayılarının fuzzy kümesine bir örnek olarak verilebilir (Şekil 1.1). Şüphesiz üyelik derece fonksiyonunun pek çok farklı uygun seçimleri vardır.



Şekil 1.1 Bir fuzzy küme

X ’in adi bir A alt kümesi için üyelik ihtimalleri sadece üyesizlik ve tam üyeliktir. Buna göre böyle bir küme, kendisinin $f_A : X \rightarrow [0, 1]$ karakteristik fonksiyonuyla X kümesi üzerinde verilen bir fuzzy kümesiyle tanımlanabilir, yani

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \text{ ise} \\ 1, & x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanabilir.

Fuzzy kümeler bizim günlük hayatımızda sık sık kullandığımız belirsizlikle ilgilenmenin daha zeki bir yoludur. Örneğin, araba kullanan birisine frene basma zamanı hakkında bir tavsiyede bulunacaksınız. Tavsiyeniz: "Yaya geçidine 25 metre mesafe kala fren yapmaya başla" yoksa "Yaya geçidine yaklaşırken frene basmaya başla" şeklinde mi olurdu? Elbette ikincisi olurdu. Çünkü ilk talimat kolayca yerine getirilemeyecek kadar kesindir.

Veri yapılarının fuzzy yorumları, çeşitli problemleri çözmenin ve bunları formüle dökmenin doğal ve akla mantığa çok uygun bir yoludur. Kesin kümeler, üyelik için gereken kesin özellikleri sağlayan nesneleri ihtiva eder. 6 'dan 8 'e kadar olan sayılardan oluşan bir H kümesini $H = \{r \in \mathbb{R} : 6 \leq r \leq 8\}$ şeklinde yazabiliriz. Bu yazım biçimine denk olarak H ,

$$f_H(r) = \begin{cases} 1, & 6 \leq r \leq 8 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $f_H : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ üyelik (veya karakteristik) fonksiyonuyla tanımlanır. Her r reel sayısı ya H 'a aittir yada değildir. f_H tüm $r \in \mathbb{R}$ reel sayılarını $\{0, 1\}$ gibi iki noktaya dönüştürdüğü için kesin kümeler iki değerli mantığa karşılık gelir: "aittir veya ait değildir, açık veya kapalı, siyah veya beyaz, 1 veya 0 ". Mantıkta, f_H 'ın değerleri " r, H 'a ait midir?" sorusu için iki değerlidir denilir. Cevabın evet olması için gerek ve yeter şart $f_H(r) = 1$ olmasıdır. Aksi halde cevap hayırdır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. ([2]) $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.2. ([3]) Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “ $h.h.k$ ” biçiminde gösterilir.

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.3. ([3]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{s} L$ biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \exists L \in \mathbb{C} \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x_k = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 1, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x_k = L_1$, $S - \lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 2.4. ([3]) Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.5. ([4]) $S - \lim x_k = a$, $S - \lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

- i) $S - \lim cx_k = ca$ dir,
- ii) $S - \lim (x_k + y_k) = a + b$ dir.

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Teorem 2.6. ([3]) Aşağıdaki önermeler denktir.

- i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,
- ii) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii) $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

Tanım 2.7. ([5]) $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. $\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > u\}) = 0$ olacak şekilde bir u reel sayısı varsa (x_k) dizisine üstten istatistiksel sınırlıdır denir. Benzer şekilde $\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < v\}) = 0$ olacak şekilde bir v reel sayısı varsa (x_k) dizisine alttan istatistiksel sınırlıdır denir. Eğer (x_k) dizisi hem alttan hem de üstten istatistiksel sınırlı ise (x_k) dizisine istatistiksel sınırlıdır denir.

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [6] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.8. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz, bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK-uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [7], Çolak ve Et [8] $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}, \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\},\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK—uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [9], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genişleterek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Fark dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz.

Teorem 2.9. ([9]) *Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır.*

Teorem 2.10. ([9]) *Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir.*

Teorem 2.11. ([10]) *X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde A konveks ise $A(\Delta^m)$ uzayı $X(\Delta^m)$ uzayında konvektir.*

Teorem 2.12. ([9]) *Eğer $X, \|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$ uzayı da*

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.13. ([9]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani *h.h.k* için $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m —istatistiksel yakınsaktır denir. Δ^m —istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sıfıra Δ^m —istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir.

Sonuç 2.14. $S(\Delta^m)$ uzayı bir lineer uzaydır.

Tanım 2.15. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m —istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.16. ([9]) Δ^m -istatistiksel yakınsak her dizi Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 2.17. ([9]) $y = (y_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$, h.h.k için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise bu dizi Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizidir.

3. FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ

Bu bölümün ilk kısmında fuzzy kümenin tanımı ve bazı özellikleri verildi. İkinci kısımda fuzzy sayılar arasındaki bazı cebirsel işlemlerden ve bu sayıların oluşturduğu $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinin üzerinde tanımlanan metriğin yapısından bahsedildi. Üçüncü kısımda ise fuzzy sayı dizisi ve bu dizilerin bazı temel özellikleri verilip fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramı hakkında kısa bir bilgi sunuldu. Bu kısımda ayrıca, reel sayı dizilerinde tanımlanan sınırlılık ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarının fuzzy sayı dizileri bakımından karşılıklarını ifade etmek için örnekler eklendi.

3.1. Fuzzy Kümeler

Fuzzy kümeyi tanımlamadan önce bir kümenin karakteristik fonksiyonunu tanımlamak gerekir. Karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1.1. X herhangi bir küme ve A , X in bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Buna göre X in bir A alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Karakteristik fonksiyonu kullanarak X in herhangi bir elemanının A kümesinin elemanı olup olmadığını kesin olarak anlayabiliriz.

Aşağıda Zadeh [1] tarafından tanımlanan bazı tanımları verelim.

Tanım 3.1.2. χ , elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. χ kümesinde bir A fuzzy kümesi, χ deki her bir noktayı $[0, 1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir.

χ deki bir A fuzzy kümesinden bahsedilirken $X_A : \chi \rightarrow [0, 1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon $x \in A$ için $X_A(x) \in (0, 1]$, $x \notin A$

için $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanmış karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu diyeceğiz.

Üyelik fonksiyonunun tanımından yararlanarak bir A fuzzy kümesini

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in (0, 1]\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada $X_A(x)$ in değeri A fuzzy kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre $X_A(x)$ in 1 e en yakın değeri, A fuzzy kümesindeki x in en yüksek üyelik derecesidir. Eğer A kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $X_A(x) = 1$ veya $X_A(x) = 0$ olması x in A ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur.

Tanım 3.1.3. A bir fuzzy küme olsun. En az bir $x_0 \in \chi$ için $X_A(x_0) = 1$ ise A fuzzy kümesine normaldir denir.

Örnek 3.1.4.

$$X(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{5}, & x \in [\frac{5}{2}, 5] \text{ ise} \\ \frac{-2x+15}{5}, & x \in [5, \frac{15}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fuzzy kümesi $x = 5$ için 1 değerini aldığından normaldir.

Konvekslik kavramı, klasik kümelerdeki pek çok özellik korunacak şekilde fuzzy kümelere genişletilebilir. Bu kavram, fuzzy sayının tanımını yapabilmek için gerekli olan önemli özelliklerden birisidir. Konveksliğin tanımını vermeden önce α -kesim tanımını verelim.

Tanım 3.1.5. A bir fuzzy küme olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ verilsin. A fuzzy kümesinin α -kesimi A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak 0-kesim kümesi $cl \{x \in \mathbb{R} : X_A(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanımın benzeri olan ve fuzzy kümelerde sık kullanılan "Destek" kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 3.1.6. A bir fuzzy küme olsun. A nın desteği (support), üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktaların kümesidir ve

$$\text{supp}(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.7. χ , n boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı olsun. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0, 1]$ için A^α kümesinin konveks olmasıdır.

Konveksliğin diğer bir tanımı ise şöyle verilebilir.

Tanım 3.1.8. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x_1, x_2 \in \chi$ için

$$X_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

3.2. Fuzzy Sayılar

Fuzzy sayı kavramını tanımlamadan önce reel sayılarda aralık kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.2.1. a ve b iki reel sayı olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine kapalı bir aralık denir.

A bir aralık olmak üzere bu aralığın uç noktalarını $\underline{A}$ ve $\overline{A}$ ile göstereceğiz. Yani $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ şeklinde bir gösterim kullanacağız. Ayrıca bir $[a, a]$ aralığını a reel sayısına karşılık getireceğiz.

A ve B yukarıdaki şekilde tanımlanmış iki aralık olmak üzere reel sayılar için tanımlanmış olan “ $\leq$ ” ve “ $<$ ” sıralama bağıntılarını aralıklar için aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \overline{A} \leq \overline{B}.$$

$$A < B \Leftrightarrow \underline{A} < \underline{B} \text{ ve } \overline{A} < \overline{B}.$$

A ve B aralıkları birer sayı gibi düşünölebileceği için bu aralıkların oluşturduğu kümede toplama işlemi $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ ve $B = [\underline{B}, \overline{B}]$ olmak üzere

$$[\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre iki aralığın toplamı yine bir aralıktır.

A ve B aralıkları arasındaki çıkarma işlemi de

$$[\underline{A}, \overline{A}] - [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}]$$

şeklinde tanımlanır.

Reel sayılar doğrusu üzerindeki bütün kapalı ve sınırlı $[\underline{A}, \overline{A}]$ aralıklarının kümesini D ile gösterelim. Herhangi iki $A, B \in D$ için

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|)$$

şeklinde tanımlanmış bir d fonksiyonunun D üzerinde bir metrik tanımladığı ve (D, d) nin de bir tam metrik uzay olduğu kolayca gösterilebilir [11]. Ayrıca “ $\leq$ ” bağıntısı D üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 3.2.2. ([12]) Bir reel fuzzy sayı aşğıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur.

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur,
- ii) X fuzzy konvekstir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

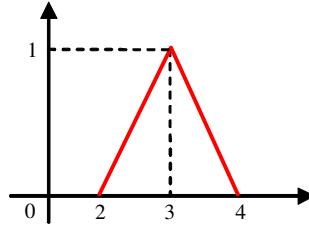
- iii) X üst-yarı-süreklidir,

- iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır.

Örnek 3.2.3.

$$X(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x + 4, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu, bir fuzzy sayıdır ve grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1. Bir fuzzy sayı

Bütün reel fuzzy sayılar kümesini $L(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $L(\mathbb{R})$ kümesinde α -kesim kümeleri için bazı aritmetik işlemler şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılarının toplamı ve farkı sırasıyla

$$(X + Y)(x) = \sup_{x=y+z} \min \{X(y), Y(z)\}$$

ve

$$(X - Y)(x) = \sup_{x=y-z} \min \{X(y), Y(z)\}$$

şeklindedir [13].

X ve Y gibi iki fuzzy sayının α -kesim kümelerine göre toplamı ve farkı ise şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ ve bunların α -kesim kümeleri $\alpha \in [0, 1]$ için $[X]^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ve $[Y]^\alpha = [\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} [X + Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha], \\ [X - Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha], \end{aligned}$$

dir.

Bir X fuzzy sayısının bir $k \in \mathbb{R}$ reel sayısı ile çarpımı da

$$[k \cdot X]^\alpha = \begin{cases} [k \cdot \underline{X}^\alpha, k \cdot \overline{X}^\alpha], & k \geq 0 \text{ ise} \\ [k \cdot \overline{X}^\alpha, k \cdot \underline{X}^\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada $[X \pm Y]^\alpha = [X]^\alpha \pm [Y]^\alpha$ ve $[k \cdot X]^\alpha = k[X]^\alpha$ yazılabilir. Bunu aşağıdaki gibi basit cebirsel işlemler yaparak gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} [X]^\alpha + [Y]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} + \{x \in \mathbb{R} : Y(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : X(x) + Y(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (X + Y)(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= [X + Y]^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k \cdot X]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : (kX)(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : kX(x) \geq \alpha\} \\ &= k \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} \\ &= k[X]^\alpha \end{aligned}$$

dir.

Her bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebilir. Ayrıca fuzzy sayının tanımına göre her bir karakteristik fonksiyon bir fuzzy sayı olur. Yani $r \in \mathbb{R}$ için $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısı

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & x = r \text{ ise} \\ 0, & x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her r reel sayısı için $\bar{r} = [r, r]$ şeklinde bir gösterim vardır. Bu düşünceden hareketle $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesine gömülebilir [14].

Fuzzy sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı, reel aralıklar arasındaki sıralama bağıntısına benzerlik gösterir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ için " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha \text{ ve } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha$$

şeklinde tanımlanır [15].

Eğer ne $X \leq Y$ ne de $Y \leq X$ oluyorsa X ve Y fuzzy sayılarına kıyaslanamaz denir ve bunu $X \approx Y$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 3.2.4. ([16]) $A \subset L(\mathbb{R})$ kümesi verilsin. Her $X \in A$ fuzzy sayısı için $X \leq U$ olacak şekilde bir $U \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır ve U fuzzy sayısına da A kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer A kümesinin her μ üst sınırı için $U \leq \mu$ ise U fuzzy sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Bir küme için alttan sınırlılık ve infimum kavramları da benzer şekilde tanımlanır.

$L(\mathbb{R})$ üzerinde X ve Y gibi iki fuzzy sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$\begin{aligned} \bar{d} &: L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(X^\alpha, Y^\alpha) \end{aligned}$$

metriği kullanılacaktır. Burada d_H Hausdorff metriğidir ve

$$d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max(|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|)$$

şeklinde tanımlanır. $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$, bir tam metrik uzaydır [17]. Bu metrik, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

$C(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini gösterebilir. Bu takdirde $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma her $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ için

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

ve her $A \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x, x \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir lineer yapı üretir.

A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_\infty(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

Hausdorff metriğiyle tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ sembolü ile $\mathbb{R}^n$ deki alışılmış Öklid normu gösterilmektedir. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$ uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir.

Bir fuzzy sayının tanımı aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

Tanım 3.2.5. n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı üzerindeki bir fuzzy sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur:

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mevcuttur,
- ii) X fuzzy konvektir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlar,

- iii) X üst-yarı-süreklidir,
- iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün fuzzy sayıların kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$0 \leq \alpha \leq 1$ için X^α kesim kümesini göz önüne alalım. Tanımdan, $X^\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. $L(\mathbb{R}^n)$ deki toplama ve skaler ile çarpma $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[X + Y]^\alpha = X^\alpha + Y^\alpha \text{ ve } [kX]^\alpha = kX^\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, her bir $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(X, Y) = \left(\int_0^1 \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım. $q \leq s$ için $d_q \leq d_s$ olmak üzere

$$d_\infty(X, Y) = \lim_{q \rightarrow \infty} d_q(X, Y)$$

olduğu açıktır. $(C(\mathbb{R}^n), d_q)$ metrik uzayı tamdır [18].

Bundan sonraki kısımlarda d_q yerine d notasyonu kullanılacaktır.

Açıkça $n = 1$ için $L(\mathbb{R}^n)$ kümesinden $L(\mathbb{R})$ ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir.

3.3. Fuzzy Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri

Fuzzy sayı dizisi ilk defa 1986 yılında Matloka [19] tarafından tanımlanmış ve diziyle ilgili temel kavramları aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 3.3.1. Fuzzy sayılarının bir $X = (X_k)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R}^n)$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir k pozitif tamsayısına bir $X(k)$ fuzzy sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde $X(k)$ yerine X_k yazacağız.

Tanım 3.3.2. $X_0 \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buna göre X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bütün X fuzzy sayılarının kümesidir. Bir X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğu $K(X_0, \varepsilon)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.3. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 dır denir. Bu durumda $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ yazılır. Eğer $\lim X_k$ mevcut değilse (X_k) dizisi ıraksaktır denir.

Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $c(F)$ ile göstereceğiz.

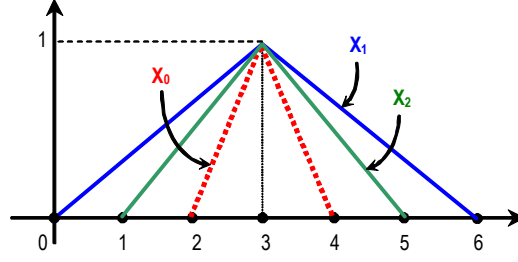
Örnek 3.3.4.

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x + 4, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fuzzy sayıdır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına yakınsaması

Teorem 3.3.5. *Yakınsak bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin limiti tektir.*

Teorem 3.3.6. *$X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ fuzzy sayı dizilerinin limitleri sırasıyla X_0 ve Y_0 olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.*

- i) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$,
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$,
- iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$,
- iv) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Eğer bütün k lar için $0 \notin \text{supp} Y_k$ ve $0 \notin \text{supp} Y_0$ ise).

Tanım 3.3.7. Her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U fuzzy sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir. Bütün sınırlı fuzzy sayı dizilerinin kümesini $\ell_\infty(F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.3.8. *Yakınsak her fuzzy sayı dizisi sınırlıdır.*

Tanım 3.3.9. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini ve doğal sayıların artan bir $\{k_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (X_{k_n}) dizisine (X_k) dizisinin bir alt dizisi denir.

Teorem 3.3.10. *Yakınsak bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizinin limiti $X = (X_k)$ dizisinin limiti ile aynıdır.*

Tanım 3.3.11. ([20]) Her $\varepsilon > 0$ için $k, n > N$ olduğunda $d(X_k, X_n) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcutsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Reel sayı dizilerinde olduğu gibi yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda Cauchy dizisidir.

Tanım 3.3.12. ([20]) $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcut ise, yani $h.h.k$ için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak ise $S(F) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \rightarrow X_0 (S(F))$ yazılır.

$S(F)$ ile istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz. Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınrsa $S(F)$ yerine $S_0(F)$ yazacağız.

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı $c(F) \subset S(F)$ kapsaması açıktır. Bu kapsamanın kesin olduğunu da aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 3.3.13. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} 2x - (2k - 1), & x \in [k - \frac{1}{2}, k] \text{ ise} \\ -2x + (2k + 1), & x \in [k, k + \frac{1}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{matrix}$$

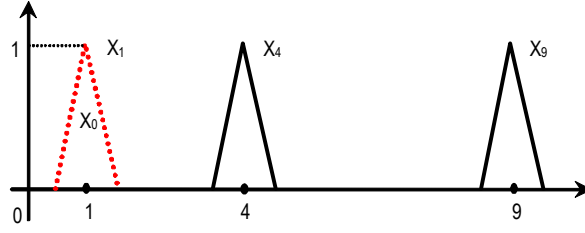
olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{4, 9, 16, \dots\}$$

olduğundan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$ dir. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi X_0 a istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olmadığı için (X_k) dizisi X_0 a yakınsak değildir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaması

$S(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ sınıfları birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

Örnek 3.3.14.

$$U_1(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

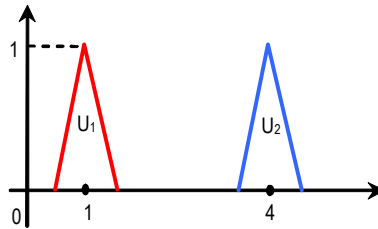
ve

$$U_2(x) = \begin{cases} 2x - 7, & x \in [\frac{7}{2}, 4] \text{ ise} \\ -2x + 9, & x \in [4, \frac{9}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k \text{ tek ise} \\ U_2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (X_k) fuzzy sayı dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir fuzzy sayı dizisi

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan $S(F) \cap \ell_\infty(F) \neq \emptyset$ dir. Hatta $c(F) \subset S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

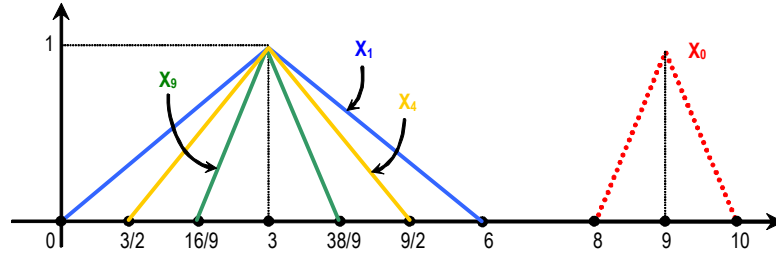
Örnek 3.3.15. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in [\frac{2k-2}{k}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in [3, \frac{4k+2}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{cases} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 8, & x \in [8, 9] \text{ ise} \\ -x + 10, & x \in [9, 10] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $X = (X_k)$ dizisi hem sınırlıdır, hem de X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak bu dizi yakınsak değildir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi

Tanım 3.3.16. ([20]) $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $d(X_k, X_N) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_N) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

4. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI

Fuzzy sayı dizilerinde istatistiksel sınırlılık kavramı ilk defa Aytar ve Pehlivan [21] tarafından verilmiştir. Daha sonra Altınok ve Mursaleen [22], bu tanımı fark dizileri için vermiştir. Bu bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş fark dizileriyle ilgili bazı kavramlara yer verip fuzzy sayı dizileri için istatistiksel sınırlılık kavramını genelleştirerek Δ^m -istatistiksel sınırlılığı tanımlayacağız.

Tanım 4.1. ([23]) $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\{\Delta^m X_k : k \in \mathbb{N}\}$ fuzzy sayılar kümesi sınırlı ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine Δ^m -sınırlıdır denir. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $K \leq \Delta^m X_k \leq M$ olacak şekilde K ve M fuzzy sayıları mevcuttur.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $k > N$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayısına Δ^m -yakınsaktır denir. Burada $\Delta^m X = (\Delta^m X_k) = (\Delta^{m-1} X_k - \Delta^{m-1} X_{k+1})$, $\Delta X = (X_k - X_{k+1})$ ve $\Delta^0 X = (X_k)$, $m \in \mathbb{N}$ dir. $\ell_\infty(\Delta^m, F)$, $c(\Delta^m, F)$ ve $c_0(\Delta^m, F)$ ile sırasıyla bütün Δ^m -sınırlı, Δ^m -yakınsak ve sıfıra Δ^m -yakınsak fuzzy sayı dizilerinin sınıflarını göstereceğiz.

Her $\varepsilon > 0$ için $k, n > N$ olduğunda $d(\Delta^m X_k, \Delta^m X_n) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcutsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir Δ^m -Cauchy dizisi denir. Reel sayı dizilerinde olduğu gibi Δ^m -yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda Δ^m -Cauchy dizisidir.

$\ell_\infty(\Delta^m, F)$, $c(\Delta^m, F)$ ve $c_0(\Delta^m, F)$ fuzzy dizi sınıfları sınırsız ve yakınsak olmayan fuzzy dizileri de ihtiva eder. Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim:

Örnek 4.2.

$$X_k(x) = \begin{cases} x - k + 1, & x \in [k - 1, k] \text{ ise} \\ -x + k + 1, & x \in [k, k + 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. (X_k) dizisi Δ^m -sınırlı ve Δ^m -yakınsak bir dizidir. Ancak bu dizi ne sınırlı ne de yakınsaktır.

Gerçekten, (X_k) fuzzy sayı dizisinin α -kesim kümesi $\alpha \in (0, 1]$ için

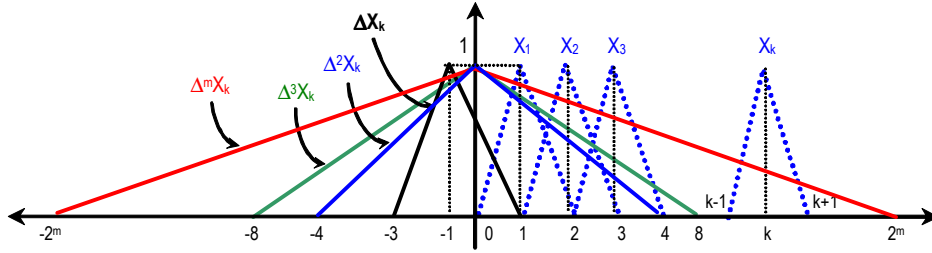
$$[X_k]^\alpha = [k - 1 + \alpha, k + 1 - \alpha]$$

olup buradan $m = 1, 2, \dots$ için

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} [-3 + 2\alpha, 1 - 2\alpha], & m = 1 \text{ ise} \\ [-2^m(1 - \alpha), 2^m(1 - \alpha)], & m \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu takdirde $[X_0]^\alpha = [-2^m(1 - \alpha), 2^m(1 - \alpha)]$ olmak üzere $m \geq 2$ için $(\Delta^m X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır. Ayrıca bu dizi sınırlı bir dizidir.

Buna göre Δ^m -sınırlı diziler sınıfı ve Δ^m -yakınsak dizilerin sınıfları, sınırlı ve yakınsak fuzzy dizi sınıflarından daha geneldir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1. Δ^m -sınırlı ve Δ^m -yakınsak, fakat sınırsız ve ıraksak bir fuzzy sayı dizisi

Ayrıca $c_0(\Delta^m, F) \subset c(\Delta^m, F) \subset \ell_\infty(\Delta^m, F)$ olup bu kapsama kesindir.

Örnek 4.3.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} x - 2, & \quad x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x + 4, & \quad x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \quad \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\} & k \text{ tek ise} \\ \left. \begin{aligned} x - 5, & \quad x \in [5, 6] \text{ ise} \\ -x + 7, & \quad x \in [6, 7] \text{ ise} \\ 0, & \quad \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

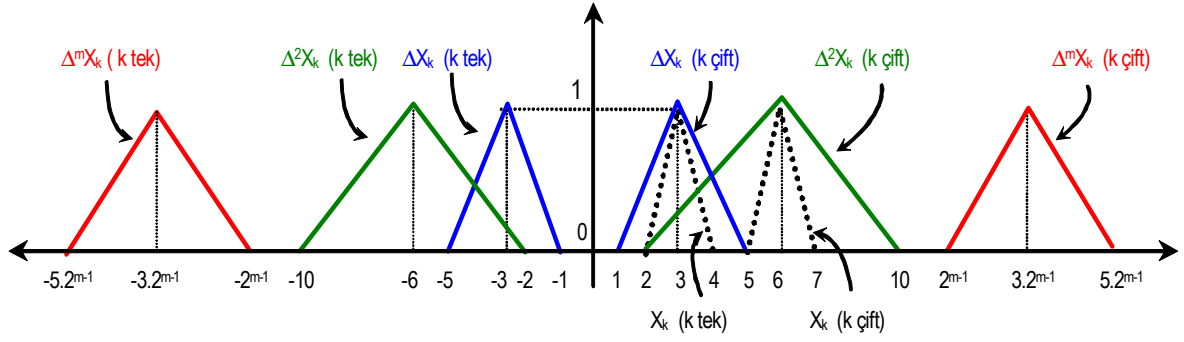
fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi Δ^m -sınırlı olduğu halde Δ^m -yakınsak değildir. Gerçekten, (X_k) fuzzy sayı dizisi için α -kesim kümesi $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [2 + \alpha, 4 - \alpha], & k \text{ tek ise} \\ [5 + \alpha, 7 - \alpha], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

olup buradan $m = 1, 2, \dots$ için

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} [-2^{m-1}(5 - 2\alpha), -2^{m-1}(1 + 2\alpha)], & k \text{ tek ise} \\ [2^{m-1}(1 + 2\alpha), 2^{m-1}(5 - 2\alpha)], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu takdirde $(\Delta^m X_k)$ dizisi sınırlıdır, ancak yakınsak değildir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Δ^m -sınırlı, fakat Δ^m -yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi

Tanım 4.4. ([23]) $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcut ise, yani $h.h.k$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsak ise $S(F) - \lim \Delta^m X_k = X_0$ veya $\Delta^m X_k \rightarrow X_0 (S(F))$ yazılır.

Klasik kümeler için (x_k) dizisi ℓ 'ye istatistiksel yakınsarken $(\Delta^m x_k)$, 0 'a istatistiksel yakınsar (yani $x_k \xrightarrow{s} \ell$ ise $\Delta^m x_k \xrightarrow{s} 0$). Aşağıdaki örnek bunun fuzzy sayı dizileri için geçerli olmadığını gösterir.

Örnek 4.5. (X_k) fuzzy sayı dizisi aşağıdaki gibi olsun:

$$X_k(x) = \begin{cases} \begin{cases} x - k, & k \leq x \leq k + 1 \\ -x + k + 2, & k + 1 < x \leq k + 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, & k = n^2 \text{ ise} \\ \begin{cases} x - 2, & 2 \leq x \leq 3 \\ -x + 4, & 3 < x \leq 4 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \end{cases}$$

Buradan

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [k + \alpha, k + 2 - \alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [2 + \alpha, 4 - \alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [k - 4 + 2\alpha, k - 2\alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [-k - 1 + 2\alpha, -k + 3 - 2\alpha], & k + 1 = n^2, \text{ ise } (n > 1) \\ [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $[\ell_1]^\alpha = [2 + \alpha, 4 - \alpha]$ olmak üzere $X_k \xrightarrow{s} \ell_1$ dır ve $[\ell_2]^\alpha = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha]$ olmak üzere $\Delta X_k \xrightarrow{s} \ell_2$ dır. Benzer şekilde işlemler yapıp m . dereceden fark alınırsa $\Delta^m X_k \xrightarrow{s} \ell_3$ elde edilir. Burada $[\ell_3]^\alpha = [-2^m(1 - \alpha), 2^m(1 - \alpha)] \neq \bar{0}$ dır.

Tanım 4.6. ([23]) $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $d(\Delta^m X_k, X_N) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, yani

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_N) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.7. ([23]) $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Bu durumda $h.h.k$ için $\Delta^m X_k = Y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $Y = (Y_k)$ fuzzy sayı dizisi varsa X dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsaktır.

Şimdi çalışmamızın ana konusunu teşkil eden Δ^m -istatistiksel sınırlılık tanımını verelim.

Tanım 4.8. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun.

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \Delta^m X_k > u\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \Delta^m X_k \not\sim u\}) = 0$$

olacak şekilde bir u fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisine üstten Δ^m -istatistiksel sınırlıdır denir.

Benzer şekilde

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \Delta^m X_k < v\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \Delta^m X_k \not\sim v\}) = 0$$

olacak şekilde bir v fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisine alttan Δ^m -istatistiksel sınırlıdır denir.

Eğer bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi hem üstten hem alttan Δ^m -istatistiksel sınırlı ise (X_k) dizisine Δ^m -istatistiksel sınırlıdır denir.

Bu tanım aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$h.h.k$ için $d(\Delta^m X_k, \bar{0}) < T$ olacak şekilde bir reel T sayısı mevcut ise (X_k) fuzzy sayı dizisine Δ^m -istatistiksel sınırlıdır denir.

$L(\mathbb{R})$ kısmi sıralı bir küme olduğu için $L(\mathbb{R})$ deki kıyaslanamayan elemanlar da göz önüne alınmalıdır. Bu yüzden $\{k \in \mathbb{N} : \Delta^m X_k \not\prec u\}$ kümesinin elemanlarını $\{k \in \mathbb{N} : \Delta^m X_k > u\}$ kümesine ekledik.

Kolayca görülebilir ki $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi Δ^m -sınırlı ise aynı zamanda Δ^m -istatistiksel sınırlıdır. Tersi her zaman doğru değildir. Bu durum $m = 1$ özel hali için aşağıdaki örnekte görülebilir:

Örnek 4.9. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi aşağıdaki gibi olsun:

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}x + \frac{k-1}{k}, & x \in [-k+1, 1] \\ -\frac{1}{k}x + \frac{k+1}{k}, & x \in [1, k+1] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 5^n \text{ ise} \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \\ u_1, & k \neq 5^n \text{ ve } k \text{ tek ise} \\ u_2, & k \neq 5^n \text{ ve } k \text{ çift ise} \end{matrix}$$

Burada

$$u_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0] \text{ ise} \\ -x+1, & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$u_2(x) = \begin{cases} x-3, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ -x+5, & x \in [4, 5] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. O halde $\alpha \in (0, 1]$ için (X_k) ve (ΔX_k) nın α -kesim kümeleri sırasıyla

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [k(\alpha - 1) + 1, k(1 - \alpha) + 1], & k = 5^n \text{ ise} \\ [-1 + \alpha, 1 - \alpha], & k \neq 5^n \text{ ve } k \text{ tek ise} \\ [3 + \alpha, 5 - \alpha], & k \neq 5^n \text{ ve } k \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha(k + 1) - k - 4, -\alpha(k + 1) + k - 2], & k = 5^n \text{ ise} \\ [\alpha(k + 2) - k + 1, -\alpha(k + 2) + k + 5], & k + 1 = 5^n \text{ ise} \\ [2\alpha - 6, -2\alpha - 2], & k \neq 5^n, k + 1 \neq 5^n \text{ ve } k \text{ tek ise} \\ [2\alpha + 2, -2\alpha + 6], & k \neq 5^n, k + 1 \neq 5^n \text{ ve } k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Bazı aritmetik işlemler yardımıyla ΔX_k dizisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Delta X_k(x) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{x+k+4}{k+1}, & x \in [-k-4, -3] \\ &\frac{-x+k-2}{k+1}, & x \in [-3, k-2] \\ &0, & \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} &k = 5^n \text{ ise} \\ &(n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \\ \left. \begin{aligned} &\frac{x+k-1}{k+2}, & x \in [-k+1, 3] \\ &\frac{-x+k+5}{k+2}, & x \in [3, k+5] \\ &0, & \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \right\} & k + 1 = 5^n \text{ ise} \\ u, & k \neq 5^n, k + 1 \neq 5^n \text{ ve } k \text{ tek ise} \\ v, & k \neq 5^n, k + 1 \neq 5^n \text{ ve } k \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{2}, & x \in [-6, -4] \text{ ise} \\ \frac{-x-2}{2}, & x \in [-4, -2] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & x \in [2, 4] \text{ ise} \\ \frac{-x+6}{2}, & x \in [4, 6] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

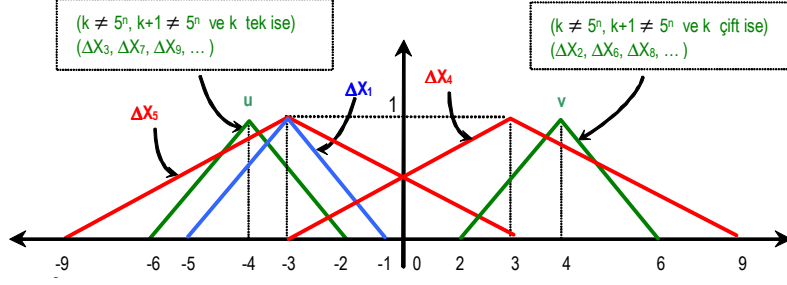
dir. Böylece

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \Delta X_k < u\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \Delta X_k \not\prec u\}) = \delta(\emptyset \cup \{5, 24, 25, 124, 125, \dots\}) = 0$$

ve

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \Delta X_k > v\} \cup \{k \in \mathbb{N} : \Delta X_k \not\approx v\}) = \delta(\emptyset \cup \{4, 24, 25, 124, 125, \dots\}) = 0$$

olduğundan (X_k) dizisi Δ^m -istatistiksel sınırlıdır. Bununla birlikte (X_k) dizisi Δ^m -sınırlı değildir ($m = 1$ için)(Şekil 4.3).



Şekil 4.3. Δ^m -istatistiksel sınırlı, fakat Δ^m -sınırlı olmayan bir fuzzy sayı dizisi ($m=1$ için)

Teorem 4.10. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsak ise, o zaman Δ^m -istatistiksel sınırlıdır.

İspat. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi alalım ve (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsak olsun yani $S_F(\Delta^m) - \lim X_k = X_0$ alalım.

O zaman her $\varepsilon > 0$ ve $h.h.k$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ yazabiliriz. X_0 bir fuzzy sayı olduğundan $d(X_0, \bar{0}) < T$ olacak şekilde bir $T \in \mathbb{R}$ vardır. Bu nedenle $h.h.k$ için

$$d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \leq d(\Delta^m X_k, X_0) + d(X_0, \bar{0}) < \varepsilon + T.$$

dir. Böylece (X_k) dizisinin Δ^m -istatistiksel sınırlı olduğu çıkar. $\square$

Aşağıdaki örnekte olduğu gibi genellikle Teorem 4.10'un tersi doğru değildir.

Örnek 4.11. Örnek 4.9'daki gibi Δ^m -istatistiksel sınırlı bir $X = (X_k)$ dizisi tanımlayalım. O halde her $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için

$$\begin{aligned} \delta(\{k \in \mathbb{N} : d(\Delta^m X_k^\alpha, u^\alpha) \geq \varepsilon\}) &= \frac{1}{2} \\ \delta(\{k \in \mathbb{N} : d(\Delta^m X_k^\alpha, v^\alpha) \geq \varepsilon\}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $m = 1, 2, 3, \dots$ için $u^\alpha = [-2^m(3 - \alpha), -2^m(1 + \alpha)]$ ve $v^\alpha = [2^m(\alpha + 1), 2^m(3 - \alpha)]$ dir. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsak

değildir. Yukarıdaki eşitlikte u^α ve v^α sayılarının alınmasının sebebi, (X_k) dizisinin Δ^m -istatistiksel limiti olabilecek sayıların sadece u^α ve v^α olmasıdır.

Teorem 4.12. *Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi Δ^m -istatistiksel Cauchy ise, o zaman $h.h.k$ için $\Delta^m X_k = Y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $Y = (Y_k)$ fuzzy sayı dizisi vardır.*

İspat. Farzedelim ki (X_k) dizisi, $B = \bar{B}(\Delta^m X_{N(1)}, 1)$ kapalı yuvarı $h.h.k$ ve en az bir $N(1)$ pozitif sayısı için $(\Delta^m X_k)$ dizisini ihtiva edecek şekilde bir Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Ayrıca $h.h.k$ için $(\Delta^m X_k)$ dizisini $B' = \bar{B}(\Delta^m X_M, \frac{1}{2})$ yuvarı ihtiva edecek şekilde M sayısının seçimi için hipotezi uygulayalım. Açıktır ki $h.h.k$ için $B_1 = B \cap B'$ yuvarı $(\Delta^m X_k)$ dizisini ihtiva eder.

Böylece B_1 , $h.h.k$ için $(\Delta^m X_k)$ dizisini ihtiva eden ve çapı 1 den büyük olmayan kapalı bir kümedir.

Benzer şekilde $B'' = \bar{B}(\Delta^m X_{N(2)}, \frac{1}{4})$ yuvarı $h.h.k$ için $(\Delta^m X_k)$ 'yı ihtiva edecek şekilde $N(2)$ sayısını seçerek ve $h.h.k$ için $(\Delta^m X_k)$ 'yı ihtiva eden $B_2 = B_1 \cap B''$ kümesini oluşturarak ilerleyelim. Burada B_2 'nin çapı $\frac{1}{2}$ 'den küçük veya eşittir.

Bu süreci devam ettirirsek her bir i için $B_i \supset B_{i+1}$ olacak şekilde bir $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ kapalı yuvarlar dizisini elde ederiz. B_i 'nin çapı $\frac{1}{2^{i-1}}$ 'den büyük değildir ve $h.h.k$ için $\Delta^m X_k \in B_i$ dir.

Bir tam metrik uzayda iç içe geçmiş kapalı küme teoremi gereğince $\cap_{i=1}^\infty B_i \neq \emptyset$ elde ederiz ve bu küme tam olarak bir eleman ihtiva eder. Bu yüzden $L \in \cap_{i=1}^\infty B_i$ olacak şekilde bir L fuzzy sayısı vardır. $h.h.k$ için $\Delta^m X_k \in B_i$ gerçeğini kullanarak

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m X_k \notin B_i\}| < \frac{1}{i}, \quad n > H_i \text{ ise} \quad (4.1)$$

olacak şekilde artan bir $\{H_i\}_{i=1}^\infty$ pozitif tamsayı dizisi seçebiliriz.

Şimdi de $H_i < k \leq H_{i+1}$ ve $\Delta^m X_k \notin B_i$ olduğunda $\Delta^m X_k$, (Z_k) 'nın bir terimi olacak şekilde $(\Delta^m X_k)$ 'nın bir (Z_k) alt dizisini oluşturalım.

Daha sonra (Y_k) dizisini

$$Y_k(x) = \begin{cases} L, & \Delta^m X_k, Z_k \text{'nin terimi ise} \\ X_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = L$ 'dir. Gerçekten, eğer $\varepsilon > \frac{1}{i} > 0$ için $k > H_i$ alınrsa ya $\Delta^m X_k, (Z_k)$ 'nın bir terimidir -ki bu $Y_k = L$ anlamına gelir- ya da $Y_k = \Delta^m X_k \in B_i$ ve $d(Y_k, L) \leq B_i$ 'nin çapı $\leq \frac{1}{2^{i-1}}$ 'dir.

Ayrıca *h.h.k* için $\Delta^m X_k = Y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu belirlemek için $H_i < n \leq H_{i+1}$ iken

$$\{k \leq n : Y_k \neq \Delta^m X_k\} \subseteq \{k \leq n : \Delta^m X_k \notin B_i\}$$

olacağına dikkat edelim. Bu yüzden (4.1) den

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : Y_k \neq \Delta^m X_k\}| \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m X_k \notin B_i\}| < \frac{1}{i}$$

yazılabilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken limit 0'dır ve *h.h.k* için $\Delta^m X_k = Y_k$ 'dır. Bu da teoremin ispatını tamamlar. $\square$

Teorem 4.13. *Eğer bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi Δ^m -istatistiksel Cauchy ise, o zaman Δ^m -istatistiksel sınırlıdır.*

İspat. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi, Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu nedenle Teorem 4.7 ve Teorem 4.12'den (X_k) dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsaktır. Diğer taraftan Teorem 4.10'dan (X_k) 'nın Δ^m -istatistiksel sınırlı olduğu sonucuna varırız. $\square$

Teorem 4.14. *$X = (X_k)$, Δ^m -istatistiksel sınırlı bir fuzzy sayı dizisi olsun. Bu durumda $\Delta^m X = Y + Z$ olacak şekilde sınırlı bir $Y = (Y_k)$ fuzzy sayı dizisi ve sıfıra istatistiksel yakınsayan bir $Z = (Z_k)$ fuzzy sayı dizisi vardır.*

İspat. Farzedelim ki $X = (X_k)$, Δ^m -istatistiksel sınırlı bir dizi olsun. Yeterince büyük $T > 0$ sayısı için $M = \{k \in \mathbb{N} : d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \geq T\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Şimdi

$$Y_k = \begin{cases} \Delta^m X_k, & k \in M' \text{ için} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$Z_k = \begin{cases} \Delta^m X_k, & k \in M \text{ için} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde (Y_k) ve (Z_k) dizilerini tanımlayalım. Burada M', M kümesinin tümleyenidir. Kolayca görebiliriz ki Δ^m -istatistiksel sınırlılık tanımından $Y = (Y_k)$ dizisi sınırlıdır. Bununla birlikte (Z_k) istatistiksel sıfır dizisidir. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $(\Delta^m X_k) = (Y_k) + (Z_k)$ olduğu açıktır. $\square$

Bu teoremi açıklamak için aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 4.15. $m = 1$ alalım ve $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi aşağıdaki gibi olsun:

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{k}x + \frac{k-1}{k}, & x \in [-k+1, 1] \text{ ise} \\ -\frac{1}{k}x + \frac{k+1}{k}, & x \in [1, k+1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} k = 3^n \text{ ise} \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{k}{k+3}x + \frac{3-3k}{k+3}, & x \in \left[\frac{3k-3}{k}, 4\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+3}x + \frac{5k+3}{k+3}, & x \in \left[4, \frac{5k+3}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad \text{diğer durumlarda}$$

Bu durumda $\alpha \in (0, 1]$ için (X_k) ve (ΔX_k) nın α -kesim kümeleri sırasıyla

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [k(\alpha-1)+1, k(1-\alpha)+1], & k = 3^n \text{ ise} \\ \left[\frac{\alpha(k+3)}{k} + \frac{3k-3}{k}, -\frac{\alpha(k+3)}{k} + \frac{5k+3}{k} \right], & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right.$$

$$[\Delta X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} \left[\frac{\alpha(k^2+2k+4)-k^2-5k-7}{k+1}, \frac{-\alpha(k^2+2k+4)+k^2-k+1}{k+1} \right], & k = 3^n \text{ ise} \\ \left[\frac{\alpha(k^2+2k+3)-k^2+k-3}{k}, \frac{-\alpha(k^2+2k+3)+k^2+5k+3}{k} \right], & k+1 = 3^n \text{ ise} \\ \left[\frac{\alpha(2k^2+8k+3)-2k^2-8k-3}{k(k+1)}, \frac{-\alpha(2k^2+8k+3)+2k^2+8k+3}{k(k+1)} \right], & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right.$$

dır. (ΔX_k) dizisinin L fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak olduğu görülür. Burada $[L]^\alpha = [2\alpha-2, -2\alpha+2]$ dir. Diğer taraftan $[\Delta X_k]$ kümesi $[Y_k]^\alpha$ ve $[Z_k]^\alpha$ 'nın toplamı olarak yazılır. Burada

$$[Y_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} \bar{0}, & k = 3^n \text{ ise} \\ \bar{0}, & k+1 = 3^n \text{ ise} \\ \left[\frac{\alpha(2k^2+8k+3)-2k^2-8k-3}{k(k+1)}, \frac{-\alpha(2k^2+8k+3)+2k^2+8k+3}{k(k+1)} \right], & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right.$$

ve

$$[Z_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{\alpha(k^2+2k+4)-k^2-5k-7}{k+1}, \frac{-\alpha(k^2+2k+4)+k^2-k+1}{k+1} \right], & k = 3^n \text{ ise} \\ \left[\frac{\alpha(k^2+2k+3)-k^2+k-3}{k}, \frac{-\alpha(k^2+2k+3)+k^2+5k+3}{k} \right], & k+1 = 3^n \text{ ise} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır. Buradan (Y_k) dizisinin sınırlı, (Z_k) dizisinin sıfıra istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

$[Y_k]^\alpha$ ve $[Z_k]^\alpha$ α -kesim kümelerinden (Y_k) ve (Z_k) dizilerinin üyelik fonksiyonları

$$Y_k(x) = \begin{cases} 0, & k = 3^n \text{ ise} \\ \frac{k}{k+3}x + \frac{3-3k}{k+3}, & x \in \left[\frac{3k-3}{k}, 4\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+3}x + \frac{5k+3}{k+3}, & x \in \left[4, \frac{5k+3}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ve

$$Z_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}x + \frac{k-1}{k}, & x \in [-k+1, 1] \text{ ise} \\ -\frac{1}{k}x + \frac{k+1}{k}, & x \in [1, k+1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 3^n \text{ ise} \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{matrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.16. *İstatistiksel sınırlı bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi aynı zamanda Δ^m -istatistiksel sınırlıdır.*

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi bu iddianın tersi genellikle doğru değildir:

Örnek 4.17. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left. \begin{matrix} x-3, & x \in [3, 4], \\ -x+5, & x \in [4, 5], \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{matrix} \right\} & \begin{matrix} k = n^3 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, \dots) \end{matrix} \\ \left. \begin{matrix} x-k+1 & x \in [k-1, k], \\ -x+k+1 & x \in [k, k+1], \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{matrix} \right\} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda $\alpha \in (0, 1]$ için

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha + 3, -\alpha + 5], & k = n^3 \text{ ise, } (n = 1, 2, \dots) \\ [\alpha + k - 1, -\alpha + k + 1], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

α -kesim kümesini elde ederiz. Fark işlemi yapılırsa

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [2\alpha - k + 1, -2\alpha - k + 5], & k = n^3 \text{ ise} \\ [2\alpha + k - 6, -2\alpha + k - 2], & k + 1 = n^3 \text{ ise} \\ [2\alpha - 3, -2\alpha + 1], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$[\Delta^2 X_k]^\alpha = \begin{cases} [4\alpha - k, -4\alpha - k + 8], & k = n^3 \text{ ise} \\ [4\alpha + 2k - 10, -4\alpha + 2k - 2], & k + 1 = n^3 \text{ ise} \\ [4\alpha - k - 2, -4\alpha - k + 6], & k + 2 = n^3 \text{ ise} \\ [4\alpha - 4, -4\alpha + 4], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$[\Delta^3 X_k]^\alpha = \begin{cases} [8\alpha - k - 4, -8\alpha - k + 12], & k = n^3 \text{ ise} \\ [8\alpha + 3k - 17, -8\alpha + 3k - 1], & k + 1 = n^3 \text{ ise} \\ [8\alpha - 3k - 2, -8\alpha - 3k + 14], & k + 2 = n^3 \text{ ise} \\ [8\alpha + k - 9, -8\alpha + k + 7], & k + 3 = n^3 \text{ ise} \\ [8\alpha - 8, -8\alpha + 8], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

elde edilir. Bu şekilde fark işlemine devam edilirse $(\Delta^m X_k)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olduğu anlaşılır. Diğer taraftan (X_k) istatistiksel sınırlı değildir.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy sets, Inform and Control, 8, 338-353.
2. Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
3. Fridy, J.A., 1985, On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.
4. Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
5. Fridy, J.A., and Orhan, C, 1997, Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc. 125(12), 3625-3631.
6. Kızmaz, H., 1981, On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., 24, 169-176.
7. Et, M. and Çolak, R., 1995, On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math., 21, 377- 386.
8. Çolak, R. and Et, M. 1997, On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations. Hokkaido Math. J. 26 (3), 483–492.
9. Et, M. and Nuray, F., 2001, Δ^m –Statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (6) 961-969.
10. Et, M., 2000, On some topological properties of generalized difference sequence spaces, Internat. J. Math. & Math. Sci., 24 (11), 785-791.
11. Moore, R.E., 1979, Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM Philadelphia.
12. Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A., 1972, On fuzzy mapping and Control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.
13. Dubois, D. and Prade, H., 1980, Fuzzy Sets Syst., Academic Press, New York.
14. Kaufmann, A. and Gupta, M.M., 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold.

15. Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. World Scientific, Singapore.
16. Nanda, S., 1989, On sequence of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets Syst.*, **33**, 123-126.
17. Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1983, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **91**, 552-558.
18. Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1986, Fuzzy random variables, *J. Math. Anal. Appl.*, **114**, 409-422.
19. Matloka, M., 1986, Sequences of fuzzy numbers, *Busefal*, **28**, 28-37.
20. Nuray, F. and Savaş, E., 1995, Statistical convergence of fuzzy numbers, *Math. Slovaca*, **45** (3), 269-273.
21. Aytar, S. and Pehlivan, S., 2006, Statistically monotonic and statistically bounded sequences of fuzzy numbers. *Inform. Sci.*, **176** (6), 734–744.
22. Altınok, H. and Mursaleen, M., 2011, Δ –Statistical boundedness for sequences of fuzzy numbers, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **15** (5), 2081-2093.
23. Altin, Y., Et, M. and Başarır, M., 2007, On some generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Kuwait J. Sci. Eng.* **34** (1A) 1-14.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2006 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik bölümüne girdim ve 2010 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalında tezli yüksek lisansa başladım.