

BİR EĞRİ ÜZERİNDEKİ UMBİLİK NOKTA ÇİFTLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep ÇANAKCI
(101121110)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri
Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü.)

KASIM-2013

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BİR EĞRİ ÜZERİNDEKİ UMBİLİK NOKTA ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep ÇANAKCI

(101121110)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü.)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 13 Kasım 2013

KASIM-2013

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BİR EĞRİ ÜZERİNDEKİ UMBİLİK NOKTA ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep ÇANAKCI

(101121110)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Kasım 2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Kasım 2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)

Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (İ.Ü)

KASIM-2013

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkânlar sağlayan, çalışmamın her aşamasında yanımda olup her vesilede birikimini aktararak sürekli yardımda bulunan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e ve değerli bilgilerini ve birikimlerini esirgemeyen çok kıymetli hocalarım Sayın Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI ve Arş. Gör. Muhittin Evren AYDIN' a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca bana anlayış gösteren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen eşime teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Zeynep ÇANAKCI
ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER.....	2
3. YÜZEYLERİN İNCELENMESİ.....	17
3.1. Yüzeylerin Gösterimi.....	17
3.2. Klasik Flat Yüzeyler.....	18
4. BİR EĞRİ ÜZERİNDEKİ UMBİLİK NOKTA ÇİFTLERİ.....	33
4.1. Temel Kavramlar.....	33
4.2. Umbilik Eğriden Oluşan Yüzeylerin Birinci ve İkinci Temel Formları.....	33
4.3. Tüb Yüzeyler.....	35
4.4. Darboux Çatısıyla Verilen Tüb Yüzeyler.....	36
5. DARBOUX ÇATISIYLA VERİLEN VE MERKEZ EĞRİSİ UMBİLİK EĞRİDEN OLUŞAN TÜB YÜZEYLER.....	37
5.1. Darboux Çatısıyla Verilen ve Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeylerin Temel Formları ve Eğrilikleri.....	37
5.2. Darboux Çatısıyla Verilen ve Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeylerin Asli Eğrilik Çizgileri.....	39
5.3. Darboux Çatısıyla Verilen ve Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeyin Weingarten Yüzey Olması.....	39
5.4. Darboux Çatısıyla Verilen ve Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeylerin K Gauss Eğriliği ve H Ortalama Eğriliğinin Yorumlanması.....	41
6. SONUÇLAR.....	43
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

ÖZET

BİR EĞRİ ÜZERİNDEKİ UMBİLİK NOKTA ÇİFTLERİ

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölüm tezin giriş kısmıdır.

İkinci bölümde; bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; yüzeylerin kapsamlı bir incelemesi yapıldı ve yüzeyler üzerinde umbilik noktaların varlığı incelendi.

Dördüncü bölümde; umbilik noktalardan oluşan eğri ile oluşturulan yüzey tanımlandı, yüzeyin temel formları bulundu, Gauss ve ortalama eğrilikleri verildi, asli eğrilik çizgileri gösterildi. Ayrıca tüb yüzeyler tanımlandı ve Darboux çatısıyla verilen tüb yüzeyler incelendi.

Beşinci bölüm ise; çalışmanın orijinal kısmı olup; bu bölümde, Darboux çatısıyla verilen tüb yüzeylerin merkez eğrisi, özel olarak umbilik noktalardan oluşan bir eğri olarak seçildi; buna bağlı olarak, Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplandı ve Weingarten yüzey olup olmadığı incelendi.

Son bölümde ise; sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Umbilik nokta, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik, Temel formlar, Asli eğrilik çizgileri, Tüb yüzeyi, Darboux çatısı, Weingarten yüzey

SUMMARY

ON THE PATTERNS OF UMBILICAL POINTS ON THE CURVE

This work consists of six chapters:

The first chapter is the introduction section of the thesis.

In the second chapter; some basic definitions and theorem have been introduced.

In the third chapter; an extensive analysis of the surfaces have been made and the existence of umbilical points on the surfaces are analysed.

In the fourth chapter; the surface made of the curves which are built up with umbilical points is defined, basic forms of the surface are found, Gauss and mean curves were given, and principle curvature lines are displayed. Also, the tub surfaces were described and The tub surfaces with Darboux Frame were analysed.

The fifth chapter is the original part of the thesis, in which center curve of tube surfaces given with Darboux frame are chosen as a special curve which is built up with umbilical points, and according to those data, Gauss and mean curves are calculated and it is analysed if the surface is Weingarten.

In the last chapter; the results were given.

Keywords: Umbilical points, Gauss curvature, Mean curvature, Fundamental forms, Principle curvature lines, tube surface, Darboux frame, Weingarten surface.

SİMGELER LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\ , \ $	Norm
$\wedge$	Vektörel çarpım
$<, >$	İç çarpım
V	İç çarpım uzayı
E^3	3- boyutlu Öklid uzay
M	Bir yüzey
N	Bir yüzeyin birim normali
I	Bir yüzeyin birinci temel formu
II	Bir yüzeyin ikinci temel formu
III	Bir yüzeyin üçüncü temel formu
E, F, G	Bir yüzeyin birinci temel formunun katsayıları
l, m, n	Bir yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları
S	Bir yüzeyin şekil operatörü
K	Bir yüzeyin Gauss eğriliği
H	Bir yüzeyin ortalama eğriliği
k_1, k_2	Bir yüzeyin asli eğrilikleri
T	Bir yüzeyin teğet vektörü
N	Bir yüzeyin asli normal vektörü
B	Bir yüzeyin binormal vektörü
κ	Bir yüzeyin eğriliği
τ	Bir yüzeyin burulması
κ_g	Bir yüzeyin geodezik eğriliği
τ_g	Bir yüzeyin geodezik burulması
κ_n	Bir yüzeyin normal eğriliği

1. GİRİŞ

Yüzeylerde, asli eğrilik çizgileri ve eğrilik çizgileri civarındaki umbilik noktaların çalışılması, Monge, Darboux, Caratheodory gibi matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Bu matematikçilerin makaleleriyle ilgilenen, Garcia, Sotomayor ve Gutierrez de umbilik noktaları geniş ve kapsamlı bir şekilde ele alarak dikkatle incelemişlerdir [15].

Leonhard Euler (1707-1783) yıllarında yüzeyler teorisinde eğrilikleri bulmuştur. k_n normal eğriliğini tanımlamıştır. Darboux (1842-1917) yıllarında umbilik nokta yakınlarında asli eğrilik çizgilerinin yapısını incelemiştir. Gutierrez ve Sotomayor 1982-1998 yılları arasında, Garcia ve Sotomayor 1997-2000 yılları arasında makalelerinde umbilik noktalara kapsamlı şekilde değinmişlerdir. J. Sotomayor ve R. Garcia ayrıca makalelerinde kanal yüzeyleri inceleyerek asli eğrilik çizgilerini bularak, umbilik noktaların var olup olmadığını incelemişlerdir [17]. 2009 yılında J. S. Ro ve D. W. Yoon [19] ve Y. Tunçer, D. W. Yoon, M. K. Karacan [12] makalelerinde 3- boyutlu Öklid uzayın Weingarten tipinde tüb yüzeyleri inceleyerek bazı sonuçlar vermişlerdir. 2006 yılında M. K. Karacan, H. Es, Y. Yaylı [20] Minkowski 3- uzayda tüb yüzeylerin singüler noktalarını incelemiş ve bazı sonuçlar vermiştir. 2011 yılında H.S. Abdel-Aziz, M. Khalifa Saad [21] makalelerinde Weingarten Timelike Tüb yüzeyleri incelemiştir. 2012 yılında Yusuf Yaylı ve Fatih Doğan [16] Tüb yüzeylerin Darboux çatısını incelemişlerdir.

Bu çalışmada ise, öncelikle bir eğri üzerindeki umbilik nokta çiftleri incelenmiş, umbilik noktalardan oluşan eğri ile verilen yüzey tanımlanmış, bunların temel form katsayıları bulunmuş, buna bağlı olarak K Gauss eğriliği, H ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Ayrıca umbilik noktalardan oluşan eğrilerin oluşturduğu yüzeylerde, asli eğrilik çizgileri bulunmuştur. Daha sonra Darboux çatısıyla verilen tüb yüzeylerin merkez eğrisi umbilik noktalardan oluşan bir eğri olarak seçilmiş ve buna bağlı olarak K Gauss eğriliği, H ortalama eğriliği, asli eğrilik çizgileri, Weingarten yüzey olup olmadığı incelenerek bazı sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1.1. Tanım: X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır [3].

$$(T1) . X, \emptyset \in \tau ,$$

$$(T2) . \forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau ,$$

$$(T3) . A_i \in I , i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$

2.1.2. Tanım: Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [3].

2.1.3. Tanım: X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f: X \rightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir [3].

2.1.4. Tanım: X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi iki farklı noktaları için, X de sırasıyla, P ve Q noktalarını içine alan A_p ve A_q açık alt cümleleri $A_p \cap A_q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse, X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir [3].

2.1.5. Tanım: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifolddur denir [3].

$$(M1) . M \text{ bir Hausdorff uzayıdır.}$$

$$(M2) . M \text{ nin her bir açık alt cümlesi } E^n \text{ e veya } E^n \text{ in bir açık cümlesine homeomorftur.}$$

$$(M3) . M \text{ sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.}$$

2.1.6. Tanım: E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere bir

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilir denir. Özel olarak f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir. U üstünde tanımlı C^1 sınıfından fonksiyona U üstünde 0-form adı verilir [3].

2.1.7. Tanım: U ve V , sırasıyla E^m ve E^n de birer açık alt cümle olsunlar. Bir

$$\psi : U \rightarrow V$$

$$x \rightarrow \psi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

fonksiyonu için bütün

$$f_i : U \rightarrow R$$

koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler

$$\psi \in C^k(U, V)$$

dır denir.

$$C^\infty(U, V) = \{ \psi \mid \psi \in C^k(U, V), \forall k \in N \}.$$

f_i fonksiyonlarına ψ nin Öklid koordinat fonksiyonları denir [3].

2.1.8. Tanım: Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayıda V olsun. V de

$x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [3].

2.1.9. Tanım: 3 boyutlu reel sayılar cümlesinde

$$\times : R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta$$

şeklinde tanımlı “ $\times$ ” iç işlemine vektörel çarpım işlemi denir ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nin vektörel çarpımı denir [3].

2.1.10. Teorem: $\alpha, \beta \in R^3$ olmak üzere

$$\alpha \times \beta = \sum_{i=1}^n \det(e_i, \alpha, \beta) e_i$$

şeklindedir [3].

2.1.11. Tanım: E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\psi: U \rightarrow V$ fonksiyonu diferensiyellenebilir, ψ^{-1} inversi mevcut ve diferensiyellenebilir ise ψ fonksiyonuna bir diffeomorfizm denir [5].

2.1.12. Tanım: M bir n -boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir.

$$\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

(ψ, W) ikilisine bir koordinat komşuluğu veya harita denir [3].

2.1.13. Tanım: M bir topolojik n -manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha\}$ olsun. $\{W_\alpha\}$ açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{W_\alpha\}$ örtüsü için $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. E^n de W_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir [3].

2.1.14. Tanım: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in S_p\{\Psi\}$ olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ifadesine de $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir [3].

2.1.15. Tanım: $M \in E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ keyfi parametre olmak üzere $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$\left\{ T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \times T(t) \right\}$$

şeklindedir [3].

2.1.16. Tanım: $M \in E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ise,

$$\left\{ T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \times N(s) \right\}$$

şeklindedir [3].

2.1.17. Teorem: $\alpha: (c, d) \rightarrow E^3$; $c < s < d$ için $\kappa(s) > 0$ ile birim hızlı bir eğri olsun. O halde Frenet formülleri:

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir. τ eğrinin torsiyonu, κ eğrinin eğriliğidir [6].

2.1.18. Tanım: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir [3].

2.1.19. Teorem: $\alpha: (c, d) \rightarrow M$ birim hızlı eğri ve M nin α eğrisine göre Darboux çatısı $\{T, V_2, V_3\}$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} T' \\ (V_2)' \\ (V_3)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & k_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

2.1.20. Tanım: Bir topolojik n -manifold M ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun.

Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir [3].

2.1.21. Tanım: M bir topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [3].

2.1.22. Tanım: $F : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olsun. Eğer $v_p \in T_{E^n}(P)$ ise $(F_*)_P(v_p) \in T_{E^m}(F(P))$ de E^m in $t \rightarrow F(p+tv)$ eğrisinin $t=0$ daki hız vektörü olsun.

Böylece tanımlı

$$(F_*)_P : T_{E^n}(P) \rightarrow T_{E^m}(F(P))$$

fonksiyonuna, F nin $P \in E^n$ noktasındaki türev dönüşümü denir [2].

2.1.23. Tanım: $F: E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $P \in E^n$ için $(F_*)_P$ olsun.

Sırasıyla, $T_{E^n(P)}$ ve $T_{E^m(P)}$ de

$$\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} |_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} |_P \right\}, \psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} |_{F(P)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} |_{F(P)} \right\}$$

standart bazları için $(F_*)_P$ nin karşılık geldiği matris $J(F,P)$ ile gösterilir ve $J(F,P)$ matrisine, F nin P noktasındaki Jakobien matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F nin Jakobien dönüşümü denir. Açık olarak yazmak gerekirse, seçilen koordinat sistemlerine göre F nin $P \in E^n$ noktasındaki Jakobien matrisi,

$$J(F,P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} |_P & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} |_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} |_P \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} |_P & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} |_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} |_P \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} |_P & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} |_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} |_P \end{bmatrix}$$

dir [2].

2.1.24. Tanım: M ve N birer C^∞ manifold ve $f: M \rightarrow N$ bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* Jakobien matrisi $\forall P \in M$ noktasında regüler ise f ye M den N ye bir immersiyon denir ya da $\text{rank} f = \text{boy} M$ ise f bir immersiyondur [10].

2.1.25. Tanım: N bir C^∞ $(n-1)$ -manifold olsun. $f: N \rightarrow E^n$ fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N)=M$ manifolduna E^n in bir hiperyüzeyi denir [2].

2.1.26. Tanım: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X:M \xrightarrow{\text{birebir-örten}} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ile gösterilir [2].

2.1.27. Tanım: (İrtibatlılık) M bir yüzey olsun. M nin her iki p ve q noktası için p ile q noktalarını birleştiren ve M içinde bulunan en az bir sürekli eğri varsa M yüzeyi irtibatlıdır denir [7].

2.1.1. Örnek: E^3 Öklid uzayında bir küre yüzeyi irtibatlı bir yüzeydir [7].

2.1.28. Tanım: U, R^2 uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\vartheta: U \rightarrow E^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\vartheta: U \rightarrow \vartheta(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\vartheta(U)$ cümlesine E^3 uzayında bir basit yüzey denir.

M, E^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. M nin her bir p noktası için, $p \in \vartheta(U)$ ve $\vartheta(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\vartheta(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa, M cümlesine E^3 uzayında bir yüzey denir.

$\vartheta(U)$, M yüzeyi içinde basit bir yüzey ve $\vartheta^{-1}: \vartheta(U) \rightarrow U$ dönüşümüne M yüzeyi içinde bir koordinat sistemi denir [7].

2.1.29. Tanım: (Monge Yüzeyi) $\vartheta: U \rightarrow R^3$, $\vartheta = (x^1, x^2, f)$ biçiminde bir $\vartheta(U)$ basit yüzeyine, Monge gösterimiyle verilmiş bir yüzey veya kısaca Monge yüzeyi denir [7].

2.1.2. Örnek: $U=E^2$ olmak üzere, $f: U \rightarrow R$, $f = (x^1)^2 + (x^2)^2$ olsun. f fonksiyonu düzgün fonksiyon olduğundan,

$$\{(q_1, q_2, q_1^2 + q_2^2): (q_1, q_2) \in U\}$$

cümlesi bir yüzeydir.

$$\vartheta: U \rightarrow E^3, \quad \vartheta = (x^1, x^2, (x^1)^2 + (x^2)^2)$$

olmak üzere, $\vartheta(U)$, E^3 Öklid uzayında Monge gösterimiyle verilmiş bir yüzeydir [7].

2.1.30. Tanım: Yüzeyin her p noktasının komşuluğundaki bir biçim incelenirken, $p \in \vartheta(U)$ olacak biçimde bir $\vartheta(U)$ basit yüzeyini göz önüne almak yeterlidir. Yüzeylerin bir nokta komşuluğundaki biçimlerinin incelenmesine, yüzeylerin yerel (lokal) incelenmesi denir [7].

2.1.31. Tanım: (Parametrelendirilmiş Yüzey-Patches) E^3 de M parametrelendirilmiş yüzeyi $\vartheta: U \rightarrow E^3$, $(u, v) \rightarrow \vartheta(u, v)$ düzgün bir dönüşümdür. Burada, U irtibatlı açık bir bölgedir ve

$$\vartheta'_u \times \vartheta'_v \neq 0$$

dır. İfade edilen bu durum regülerlik durumu olarak adlandırılır [13].

2.1.32. Tanım: $U \subset E^2$ bir açık cümle ve $x: U \rightarrow E^n$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. O halde $x(U) \subset E^n$ cümlesine bir lokal yüzey veya yama denir [9].

2.1.33. Tanım: $M \subset E^n$ bir alt cümle olsun. Eğer M nin her $p \in M$ noktası için , p yi içeren bir V komşuluğu var ve bir $x: U \subset E^2 \rightarrow V \cap M \subset E^n$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, M ye bir regüler yüzey denir:

- (i) x diferensiyellenebilirdir.
- (ii) $x: U \rightarrow V \cap M$ bir homeomorfizmdir.
- (iii) her $x: U \rightarrow M$ dönüşümü bir regüler lokal yüzeydir [9].

2.1.34. Tanım: M, C^m sınıfından bir yüzey , M^* da C^n sınıfından bir yüzey olsun.

$f: M \rightarrow M^*$ bir dönüşüm olsun. U bölgesinden M yüzeyine her $x=x(u,v)$ koordinat komşuluğu için, U dan M^* yüzeyine $x^* = x^*(u,v) = f(x(u,v))$ bileşim dönüşümü C^r sınıfından regüler bir parametrik gösterimdir. O halde, $f \in C^r$ sınıfından M den M^* a regüler diferensiyellenebilir bir dönüşüm denir [8].

2.1.35. Tanım: $X \subset E^3$ regüler bir yüzey için birim normalini N ile gösterirsek,

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v)$$

şeklindedir ve $(u, v) \in R^3$ noktalarında $X_u \times X_v$ sıfırdan farklıdır [2].

2.1.36. Tanım: $x:U \rightarrow E^n$ bir lokal yüzey olsun. $E = \|x_u\|^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \|x_v\|^2$ şeklinde tanımlı $E, F, G:U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını alalım. O zaman $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ifadesine x in Riemann metriği ya da birinci esas formu denir. E, F, G ye ise x in birinci esas formunun katsayıları denir [9].

2.1.37. Tanım: $x:U \rightarrow E^n$ bir regüler lokal yüzey olsun. O zaman

$$l = -\langle U_u, x_u \rangle = \langle U, x_{uu} \rangle$$

$$m = -\langle U_v, x_u \rangle = \langle U, x_{uv} \rangle = \langle U, x_{vu} \rangle = -\langle U_u, x_v \rangle$$

$$n = -\langle U_v, x_v \rangle = \langle U, x_{vv} \rangle,$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$ ifadesine x in ikinci esas formu denir. l, m, n fonksiyonlarına ise x in ikinci esas formunun katsayıları denir [9].

2.1.38. Tanım: E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann koneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir [10].

2.1.39. Tanım: M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları E, F, G ve ikinci temel formunun katsayıları l, m, n olmak üzere yüzeyin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{1}{EG-F^2} \begin{vmatrix} Gl - Fm & Em - Fl \\ Gm - Fn & En - Fl \end{vmatrix}$$

şeklindedir [2].

2.1.40. Tanım: E^3 te regüler bir yüzey M olsun. M yüzeyinin Gauss eğriliği K , Ortalama eğriliği H ve $K, H: M \rightarrow R$ olmak üzere, sırasıyla,

$$K(P) = \det(S(P))$$

ve

$$H(P) = \frac{1}{2} \text{tr}(S(P))$$

şeklinde tanımlanır [4].

2.1.41. Tanım: $M: U \rightarrow E^3$ bir regüler yüzey olsun. M nin Gauss eğrilik ve ortalama eğrilik formülleri;

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

ve

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}$$

dir. l, m, n , M nin ikinci temel formunun katsayıları ve E, F, G de M nin birinci temel formunun katsayılarıdır [2].

2.1.42. Teorem: $M \subset E^3$ regüler yüzeyinin, K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği ile asli eğrilikleri k_1 ve k_2 arasında

$$K = k_1 k_2$$

ve

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Sonuç olarak

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

olur. Buradan da

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dır [2].

2.1.43. Tanım: E^3 te regüler bir yüzey M ve M nin herhangi bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P)$ ve $k_2(P)$ olmak üzere $k_1(P) = k_2(P)$ ise, P ye M yüzeyinin bir umbilik noktası denir [4].

2.1.44. Teorem: $\alpha, M \subset E^3$ regüler yüzeyi üzerinde bir eğri, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ, α nın eğriliği ve N, M yüzeyinin birim normali olsun. α nın asimptotik çizgi olması için gerek ve yeter şart $\kappa=0$ ya da $\langle N, N \rangle = 0$ olmasıdır [4].

2.1.1. Önerme: Bir yüzeyin asimptotik çizgilerinin diferensiyel denklemi

$$l du^2 + 2m dudv + n dv^2 = 0$$

şeklindedir [4].

2.1.45. Teorem: $M: U \rightarrow E^3$ bir regüler lokal yüzey olsun. $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\vartheta_1, \vartheta_2 \in V$ olmak üzere, bir $a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2$ vektörünün bir asli vektör olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_1 a_2 & a_1^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{pmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

olmasıdır [14].

Bir umbilik noktadan bahsedebilmek için gerek ve yeter şart; umbilik noktada, $k_1 = k_2 = k$ iken $l = kE$, $m = kF$, $n = kG$ olmasıdır.

Bunu, (2.1) den yazabiliriz. Çünkü a_1, a_2 nin tüm değerleri için determinant değeri sıfır olur.

$a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2$ vektörünün bir asimptotik vektör olması için gerek ve yeter şart

$$la_1^2 + 2ma_1a_2 + na_2^2 = 0$$

olmasıdır.

Bir noktada $F=m=0$ ise, ϑ_1 ve ϑ_2 o noktada asli vektörlerdir ve

$$-dv(\vartheta_1) = \frac{l}{E}\vartheta_1, \quad -dv(\vartheta_2) = \frac{n}{G}\vartheta_2$$

dir.

Verilen yüzey, $h: R^2 \rightarrow R$ şeklinde bir fonksiyonun grafiği olduğunda,

$$\vartheta(s, t) = (s, t, h(s, t))$$

$$\vartheta_1 = (1, 0, h_1(s, t))$$

$$\vartheta_2 = (0, 1, h_2(s, t)), \quad \vartheta_{ij} = (0, 0, h_{ij})$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece, aşağıdaki formülleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} E &= 1 + h_1^2, \quad F = h_1 h_2, \quad G = 1 + h_2^2 \\ N &= \frac{\vartheta_1 \times \vartheta_2}{|\vartheta_1 \times \vartheta_2|} = \frac{(-h_1, -h_2, 1)}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}} \\ l &= \frac{h_{11}}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}}, \quad m = \frac{h_{12}}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}}, \quad n = \frac{h_{22}}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2}} \\ K &= \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{[1 + h_1^2 + h_2^2]^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$H = \frac{(1+h_1^2)h_{22}+(1+h_2^2)h_{11}-2h_1h_2h_{12}}{2[1+h_1^2+h_2^2]^{3/2}}, \quad (2.3)$$

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \quad (2.4)$$

$a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2 = (a_1, a_2, a_1h_1 + a_2h_2)$ vektörünün bir asli vektör olması için

$$\det \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_1a_2 & a_1^2 \\ 1+h_1^2 & h_1h_2 & 1+h_2^2 \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

olmasıdır.

$$\begin{aligned} \text{Bir umbilik noktada; } k_1 = k_2 = k\sqrt{1+h_1^2+h_2^2} \text{ iken,} \\ h_{11} = k(1+h_1^2), \quad h_{12} = kh_1h_2, \quad h_{22} = k(1+h_2^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dir.

$a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2 = (a_1, a_2, a_1h_1 + a_2h_2)$ vektörünün bir asimptotik vektör olması için

$$h_{11}a_1^2 + 2h_{12}a_1a_2 + h_{22}a_2^2 = 0 \quad (2.7)$$

genel ve yeter şart olmasıdır [14].

2.1.46. Tanım: E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir.

Bu tanıma göre M üzerinde eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi, $\lambda \neq 0$ bir skalar olmak üzere,

$$S(T) = \lambda T$$

dir [2].

2.1.47. Tanım: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere,

1) $\exists \lambda \in R$ için, $S = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M nin bir umbilik noktası denir.

2) $S = 0$ şeklinde S bir sıfır dönüşümü ise P noktasına M nin bir düzlemsel noktasıdır (flat noktası) denir [2].

2.1.48. Tanım: $x:U \rightarrow E^n$ bir regüler lokal yüzey olsun. O zaman x e karşılık gelen $\Gamma_{jk}^i(i, j, k = 1, 2)$ Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{EF_u - 2EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{21}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{EG_u - FF_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada E, F, G ile x in birinci esas formunun katsayıları gösterilmektedir [9].

2.1.49. Teorem: $x:U \rightarrow E^3$ bir regüler lokal yüzey olsun. O zaman x in S şekil operatörü $\{x_u, x_v\}$ bazı cinsinden,

$$\begin{aligned}-S(x_u) &= U_u = \frac{LF - KG}{EG - F^2} x_u + \frac{KF - LE}{EG - F^2} x_v \\ -S(x_v) &= U_v = \frac{MF - LG}{EG - F^2} x_u + \frac{LF - ME}{EG - F^2} x_v\end{aligned}\tag{2.8}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, sırasıyla, E, F, G ve K, L, M ile x in birinci ve ikinci esas form katsayıları gösterilmektedir [9].

İspat:

x regüler ve $\{x_u, x_v\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ fonksiyonları için,

$$\begin{aligned}-S(x_u) &= a_{11}x_u + a_{12}x_v \\ -S(x_v) &= a_{21}x_u + a_{22}x_v\end{aligned}\tag{2.9}$$

yazılabilir. (2.8) eşitliklerini elde etmek için $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ katsayı fonksiyonlarını hesaplayalım. Bunun için (2.9) eşitlikleri x_u ve x_v ile iç çarpıma tabi tutulursa;

$$\begin{aligned} -K &= a_{11}E + a_{12}F \\ -L &= a_{11}F + a_{12}G = a_{21}E + a_{22}F \\ -M &= a_{21}F + a_{22}G \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) denklemleri matrisel gösterimle,

$$-\begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.11)$$

olur. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

olur. (2.12) ifadesi (2.11) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} KG - LF & -KF + LE \\ LG - MF & -LF + ME \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{LF - KG}{EG - F^2} & a_{12} &= \frac{KF - LE}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{MF - LG}{EG - F^2} & a_{22} &= \frac{LF - ME}{EG - F^2} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ifadeler, (2.9) de yerine yazılırsa (2.8) eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

2.1.50. Tanım: E^3 Öklid uzayında bir M yüzeyi verilsin. M nin her bir p noktasına,

$$I_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow R, \quad I_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren I_p fonksiyonuna, M üstünde birinci temel form denir.

$I_p(v_p, w_p)$ yerine çoğunlukla, $I(v_p, w_p)$ yazılır.

M nin her bir p noktasına,

$$II_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow R, \quad II_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

fonksiyonu karşılık getiren II_p fonksiyonuna, M üstünde ikinci temel form denir.

M nin her bir p noktasına,

$$III_p : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow R, \quad III_p(v_p, w_p) = \langle S^2(v_p), w_p \rangle$$

fonksiyonu karşılık getiren III_p fonksiyonuna, M üstünde üçüncü temel form denir [7].

2.1.51. Teorem: (Cayley-Hamilton Teoremi) Her matris kendi karakteristik denkleminin bir köküdür [1].

2.1.52. Teorem: E^3 ün bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde birinci, ikinci ve üçüncü temel formlar, sırasıyla I, II, III ve gauss eğrilik fonksiyonu K , ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere,
 $III - H.II + K.I = 0$ dır [11].

2.1.53. Tanım: M(u,v) bir yüzey, K ve H da, sırasıyla, M nin Gauss ve ortalama eğriligi olmak üzere, yüzeyin eğrilikleri

$$\Phi(K, H) = \det \begin{pmatrix} K_u & K_v \\ H_u & H_v \end{pmatrix} = 0$$

Jacobi denklemini sağlıyorsa bu yüzeye Weingarten yüzeyi denir. Yüzeyin, Weingarten yüzeyi olması için

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

denklemini sağlaması gerekir [12].

2.1.54. Teorem (Kapalı Fonksiyon Teoremi): F , F_x ve F_y fonksiyonlarının (x_0, y_0) komşuluğunda sürekli ve $F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$ olduklarını varsayalım. Bu durumda

(a) $|x - x_0| < h$ komşuluğunda her x için $F(x, y) = 0$ denklemini sağlayan $|y - y_0| < k$ komşuluğunda bir tek y olacak şekilde (x_0, y_0) komşuluğunda bir $R: |x - x_0| < h, |y - y_0| < k$ dikdörtgenini belirleyen pozitif h ve k sayıları vardır. Yani y , x in bir fonksiyonudur ve $y = f(x)$ yazılabilir. f in tanım cümlesi $|x - x_0| < h$ komşuluğunu ve görüntü cümlesi de $|y - y_0| < k$ komşuluğunu kapsar.

(b) f fonksiyonu ve bunun f' türevi $|x - x_0| < h$ komşuluğunda süreklidir. Ayrıca, $|x - x_0| < h$ için

$$F_y[x, f(x)] \neq 0, \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F_x[x, f(x)]}{F_y[x, f(x)]}$$

dır [18].

3. YÜZEYLERİN İNCELENMESİ

3.1. Yüzeylerin Gösterimi

3.1.1. Tanım: (Parametrik Gösterim) M bir yüzey ve (u, v) , S nin bir lokal parametrezisyonu ve $\vartheta(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ise,

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}, \quad (u, v) \in U$$

eşitlikleri yüzeyin parametrik eşitlikleri olarak adlandırılır. Burada, bu eşitliklerin sadece lokal eşitlikler olduğunu söylemeliyiz. Bu eşitlikler, yüzeyin tüm noktalarını tanımlamaz [13].

3.1.2. Tanım: (Açık Gösterim) $f: U \rightarrow R$ düzgün bir fonksiyon, $U \subset E^2$ bir bölge ise,

$$M = \{(x, y, z) \in R^3 | z = f(x, y)\}$$

basit bir yüzeydir. Ayrıca, $\vartheta: U \rightarrow E^3$, $\vartheta(u, v) = (u, v, f(u, v))$ şeklinde global bir parametrezisyon vardır [13].

3.1.3. Tanım: (Kapalı Gösterim) $V \subset R^3$ açık bir küme, $F: V \rightarrow R$ düzgün bir fonksiyon olsun.

$$M = \{(x, y, z) \in R^3 | F(x, y, z) = 0\}$$

F nin 0-seviye cümlesidir. S nin her noktasında,

$$\text{grad} F = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$$

vektörü sıfırdan farklı ise, M bir yüzeydir. Ayrıca, $(x_0, y_0, z_0) \in M$ noktasında, $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ dır. O halde Kapalı Fonksiyon Teoremi gereğince, (x_0, y_0, z_0) ın açık bir A komşuluğu vardır. Öyleki, $A \cap M$ cümlesi $z=f(x, y)$ düzgün fonksiyonunun grafiğidir. Böylece, (x_0, y_0, z_0) noktası civarında M nin lokal bir parametrezisyonu vardır [13].

3.1.1. Örnek: 1) r_0 dan geçen $a \times b \neq 0$ olmak üzere a ve b vektörleriyle verilen π düzlemi,

$$r(u, v) = r_0 + ua + vb$$

global parametrezisyonu ile basit bir yüzeydir. Düzlemin parametrik eşitlikleri;

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x \\ y = y_0 + ua_y + vb_y \\ z = z_0 + ua_z + vb_z \end{cases}, \quad (u, v) \in E^2$$

olur.

2) Küre: $F: E^3 \rightarrow R, F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ olsun. F düzgün bir fonksiyondur ve F nin 0-seviye cümlesi

$$S_r^2 = \{(x, y, z) \in E^3 | F(x, y, z) = 0\}$$

r yarıçaplı, merkezi orijin olan küredir.

$$\text{grad}F = \{2x, 2y, 2z\}$$

olduğundan, bu küre regüler bir yüzeydir.

3) Tor: $F: E^3 \rightarrow R, F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - b^2, 0 < b < a$ olsun. F nin 0-seviye cümlesi

$$T^2 = \{(x, y, z) \in R^3 | F(x, y, z) = 0\}$$

2-boyutlu tor olarak adlandırılır. F nin x,y,z ye göre türevleri hesaplanırsa,

$$F'_x = 2(\sqrt{x^2 + y^2} - a) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$F'_y = 2(\sqrt{x^2 + y^2} - a) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$F'_z = 2z$$

elde edilir. Böylece, F nin gradiyenti

$$x = y = z = 0$$

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y = 0, \quad z = 0$$

ya da

$$x = 0, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

ya da

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

ise sıfır olur. gradF nin T^2 üzerinde 0 dan farklı olduğu açıktır. Böylece tor bir yüzeydir.

Tor, Oz eksenini etrafında, xoz düzleminde yatan, $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ dairelerinin döndürülmesiyle elde edilir [13].

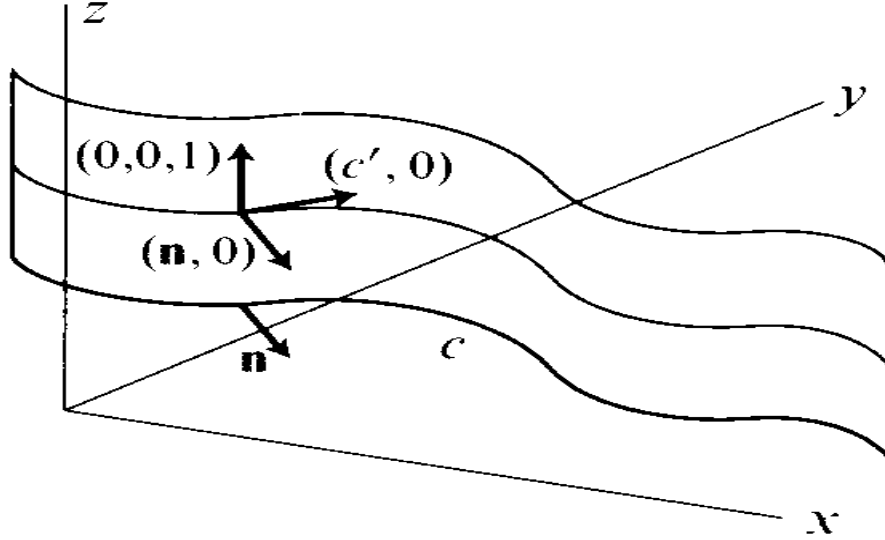
3.2. Klasik Flat Yüzeyler

3.2.1. Düzlem: Her düzlem için N birim normal dönüşümü sabittir. Bu yüzden $dN=0$ dır. Böylece, $k_1 = k_2 = 0$ ve $K = H = 0$ iken tüm noktalar umbilik noktalarıdır. Ayrıca tüm vektörler asimptotik vektörlerdir [14].

3.2.2. Genelleştirilmiş Silindir: Burada yüzeyimiz;

$$M = \{(x,y,z) : (x,y) = c(s), \text{ bazı } s\text{'ler için}\}$$

dir. Burada, c , yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş, E^2 de daldırılmış eğridir. (immersed curve)



Şekil 3.2.1

Birim normal dönüşümü daima (x,y) düzlemine paraleldir. Asli yönlerden biri, $k_1 = 0$ iken her noktada $(0,0,1)$ dir. Diğer asli yön, s de c nin eğriliği $k_2 = \mathcal{K}(s)$ iken $(c(s),z)$ de $(c', 0) = (n, 0)$ dir. (Burada, n, c için normaldir.)

$n'(s) = -\mathcal{K}(s) \cdot c'(s)$ dir. k_2 de $-dN$ nin bir özdeğeridir.

Böylece, $K = 0$ ve $H = \frac{1}{2}\mathcal{K}(s)$ dir.

$k(s) \neq 0$ ise tek asimptotik doğrultman $(0,0,1)$ dir. $k(s)=0$ olduğunda ise tüm doğrultmanlar asimptotiktir [14].

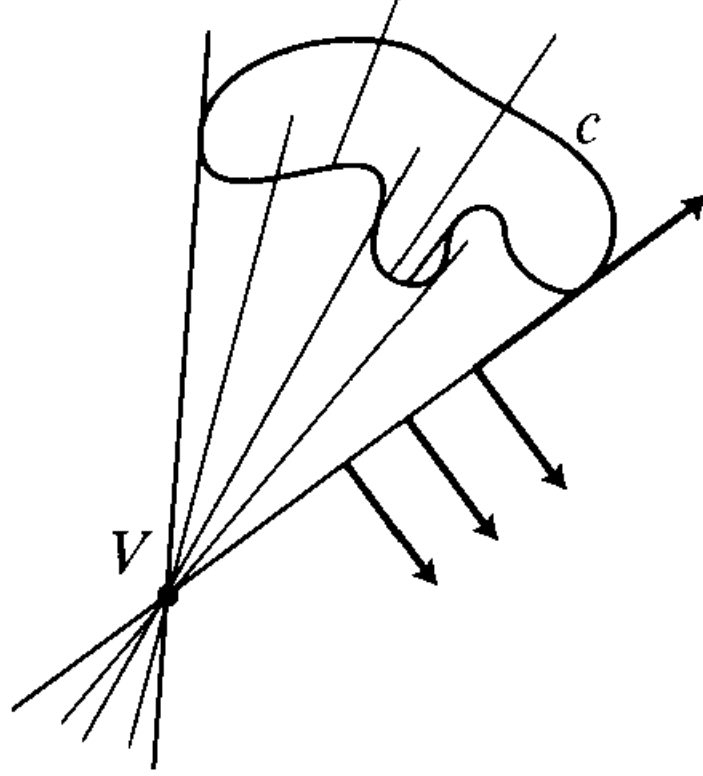
3.2.3. Genelleştirilmiş Koni: Yüzey;

$$\vartheta(s, t) = V + t[c(s) - V]$$

şeklinde elde edilir. Burada $V \in E^3$ köşe ve c, E^3 de daldırılmış bir eğridir. ϑ nin bir immersiyon olması için;

$$\vartheta_1 = tc' \quad ve \quad \vartheta_2 = c - V$$

vektörleri lineer bağımsız olmalıdır. Bu yüzden, $t \neq 0$ (V yüzeyde olamaz) ve $c'(s)$ ile $c(s) - V$ lineer bağımsız olmalıdır.



Şekil 3.2.2

$\vartheta(s, t)$ de $c'(s)$ ve $c(s) - V$ ile gerilen tanjant uzaydan dolayı, s yi sabit tutarak elde edilen düz doğru boyunca, normal dönüşüm sabittir. Sonuç olarak, $k_1 = 0$ iken,

$\vartheta_2(s, t) = c(s) - V$ vektörleri asli vektörlerdir. Bu yüzden, $K = 0$ dır. O halde, bu vektörler de asimptotiktir. Burada, $H = \frac{k_2}{2}$ sıfır olduğunda tüm vektörler asimptotik, bunun dışında asimptotik vektör yoktur [14].

3.2.4. Genişletilmiş Teğet (Tangent Developable)

Bu yüzey, E^3 de bir c eğrisine teğetlerden oluşur ve

$$\vartheta(s, t) = c(s) + tc'(s)$$

şeklinde parametrize edilir. Burada,

$$\vartheta_1 = c' + tc'' = c' + t\mathcal{K}n,$$

$$\vartheta_2 = c'.$$

Burada n , c nin normal vektörü, $\mathcal{K}$ eğriliğidir.

Böylece, $t \neq 0$ ve $\mathcal{K} \neq 0$ ise ϑ regülerdir.

Genelde, c ye normal bir düzlemle genişletilmiş teğetinin arakesitini aşağıdaki gibi inceleyebiliriz:

Uygunluk için, $s = 0$ noktasını ele alalım ve $c(0) = 0$ kabul edelim. t, n, b üç koordinat eksenini boyunca yatsın. $s \neq 0$ ve $c'(s)$ vektörü $t = c'(0)$ a yakın olduğu için (n, b) -düzleminde yatmaz. Ayrıca $c(s)$ vektöründe (n, b) -düzleminde yatmaz. Serret-Frenet formüllerini kullanarak,

$$\begin{aligned} c(s) &= c(0) + sc'(0) + \frac{s^2}{2}c''(0) + \frac{s^3}{6}c'''(0) + o(s^3) \\ &= (0,0,0) + s(1,0,0) + \frac{s^2}{2}(0, \mathcal{K}, 0) + \frac{s^3}{6}(-\mathcal{K}^2, \mathcal{K}', \mathcal{K}\tau) + o(s^3) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(0)$, $\tau = \tau(0)$ ve $o(s^3)$, $s \rightarrow 0$ iken $o(s^3)/s^3 \rightarrow 0$ özelliğinde bir fonksiyondur.

Benzer olarak;

$$\begin{aligned} c'(s) &= c'(0) + sc''(0) + \frac{s^2}{2}c'''(0) + o(s^2) \\ &= (1,0,0) + s(0, \mathcal{K}, 0) + \frac{s^2}{2}(-\mathcal{K}^2, \mathcal{K}', \mathcal{K}\tau) + o(s^2) \end{aligned}$$

yazılır. Bunları birleştirirsek;

$$\begin{aligned} \vartheta(s, t) &= c(s) + tc'(s) \tag{*} \\ &= (0,0,0) + s(1,0,0) + \frac{s^2}{2}(0, \mathcal{K}, 0) + \frac{s^3}{6}(-\mathcal{K}^2, \mathcal{K}', \mathcal{K}\tau) + o(s^3) + \\ &\quad t[(1,0,0) + s(0, \mathcal{K}, 0) + \frac{s^2}{2}(-\mathcal{K}^2, \mathcal{K}', \mathcal{K}\tau) + o(s^2)] \end{aligned}$$

elde edilir. Her s için, $t(s)$ mevcuttur ve $\vartheta(s, t(s))$ (n, b) -düzleminde yatar. Bu yüzden, $\vartheta(s, t(s))$ in birinci bileşenleri 0 dır. Yani;

$$s - \frac{\mathcal{K}^2}{6}s^3 + o(s^3) + t(s) \left[1 - \frac{\mathcal{K}^2}{2}s^2 + o(s^2) \right] = 0$$

dir. Buradan, gerekli işlemler yapılsa,

$$t(s) = -s - \frac{\mathcal{K}^2}{3}s^2 + o(s^3)$$

bulunur. (*) işleminde gerekli ifadeler yerine konulursa;

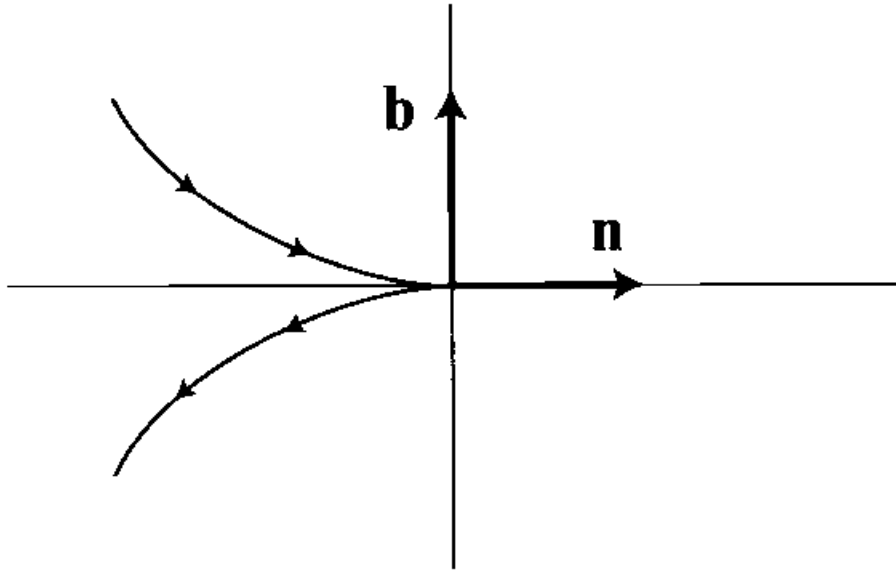
$$\begin{aligned} \vartheta(s, t(s)) \text{ nin 2.bileşeni} &= \frac{\mathcal{K}}{2}s^2 + o(s^2) + t(s)\{\mathcal{K}s + o(s)\} \\ &= -\frac{\mathcal{K}}{2}s^2 + o(s^2) \\ \vartheta(s, t(s)) \text{ nin 3.bileşeni} &= \frac{\mathcal{K}\tau}{6}s^3 + o(s^3) + t(s)\left\{\frac{\mathcal{K}\tau}{2}s^2 + o(s^2)\right\} \\ &= -\frac{\mathcal{K}\tau}{3}s^3 + o(s^3) \end{aligned}$$

olur. Böylece, c normal bir düzlemle genişletilmiş teğetinin arakesiti olan eğri olarak tanımlanır.

$$s \rightarrow \left(-\frac{\kappa}{2}s^2, -\frac{\kappa\tau}{3}s^3\right) = (y(s), z(s)) \text{ nin görüntüsü}$$

$$z^2 = -\frac{8\tau^2}{9\kappa}y^3$$

ifadesinin grafiğini verir.



Şekil 3.2.3

$\vartheta(s, t)$ de tanjant uzay $c'(s)$ ve $n(s)$ tarafından gerildiği için, tanjant uzay, s sabit tutularak elde edilen düz doğrular boyunca aynıdır. Böylece, normal dönüşüm bu doğrular boyunca sabittir ve $k_1 = 0$ iken $\vartheta_2(s, t) = c'(s)$ asli vektörlerdir ve $K=0$ dır [14].

3.2.5. Regle Yüzeyler

$c: I \rightarrow R^3$ eğrisi üzerinde birim uzunlukta bir δ vektör alanının verildiğini varsayalım. δ , her bir q elemanına karşılık, $c(q)$ noktasında $\delta(q)$ vektörünü karşılık getiren bir dönüşümdür. Regle yüzeyler;

$$\vartheta(s, t) = c(s) + t\delta(s)$$

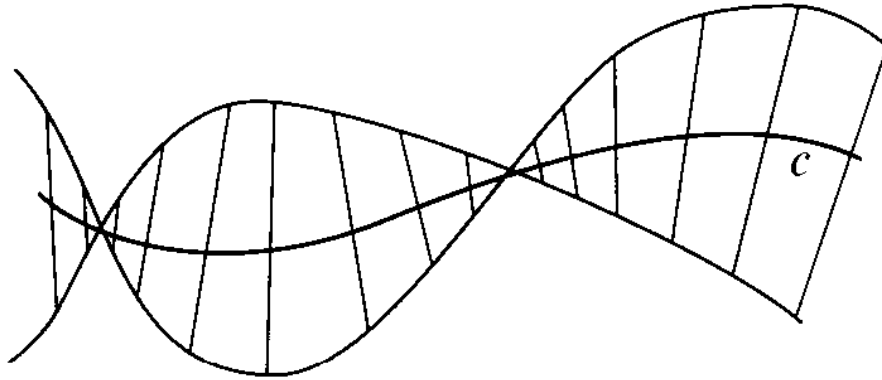
şeklinde parametrize edilir.

$$\vartheta_1 = c' + t\delta' \text{ ve } \vartheta_2 = f$$

olduğundan, δ ve $c' + t\delta'$ lineer bağımsız olduğunda, ϑ dönüşümü bir immersiyondur. Burada c eğrisine regle yüzeyin bir dayanak eğrisi denir. $\delta(q)$ vektörüne de regle yüzeyin

$c(q)$ noktasındaki doğrultmanı denir. $c(q)$ noktasından geçen ve $\delta(q)$ vektörüne paralel olan doğruya, $c(q)$ noktasından geçen ana doğru denir.

Özel olarak, yeterince küçük t için, δ ve c' lineer bağımsız olur. Sabit s ler için, $c(s)$ boyunca, düz doğru parçaları elde ederiz. Bu düz doğrular yüzeyin çizgileri(ruling) olarak adlandırılır. Koni, silindir ya da açınır teğet(tangent developable) gibi yüzeylere genelleştirilemeyen regle yüzeyler bazende sarmallar(scrolls) olarak adlandırılır.



Şekil 3.2.4

Regle yüzeyin gauss eğriliği;

$$K = \frac{-m^2}{EG-F^2} = -\frac{\langle c', \delta \times \delta' \rangle^2}{|(c' + t\delta') \times \delta|^2} < 0$$

şeklindedir. O halde, regle yüzeylerde umbilik nokta bulunmaz [14].

3.2.6. Quadrik Yüzeyler

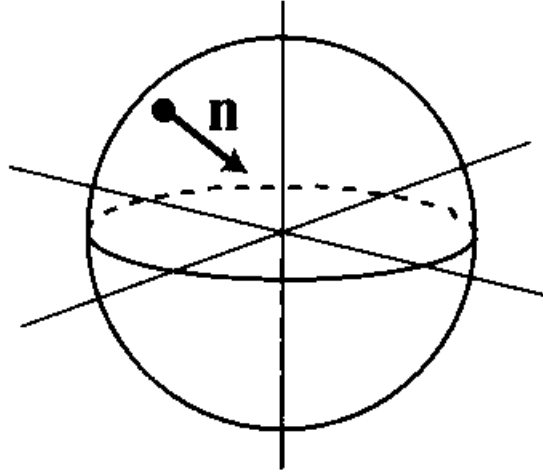
Bu yüzeyler, $W^{-1}(0)$ formunda yüzeylerdir. Burada,

$$W(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j}^3 a_{ij}x_i x_j + \sum_i^3 b_i x_i + c$$

dir. $[x_1, x_2, x_3]$, E^3 uzayında dik koordinat sistemidir. $1 \leq i, j \leq 3$ için a_{ij} sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır [14].

3.2.6.1. Küre:

Küre, yüzeyler için özel bir durumdur. Kürenin yarıçapı r , birim normal dönüşümü $-\frac{1}{R}$ dir. Her noktası umbilik noktadır. Asli eğrilikleri $\frac{1}{R}$ dir. $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{2}{R}$ dir [14].



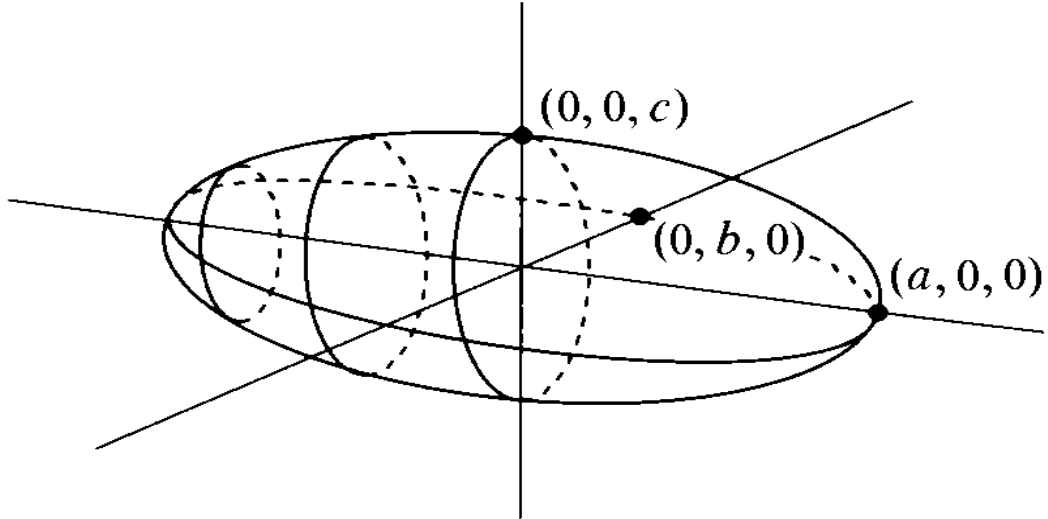
Şekil 3.2.5

3.2.6.2. Elipsoid:

Elipsoid yüzey

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

eşitliğiyle verilir.



Şekil 3.2.6

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

olarak seçelim. Buna göre;

$$W_1(x, y, z) = \frac{x}{a^2}, \quad W_2(x, y, z) = \frac{y}{b^2}, \quad W_3(x, y, z) = \frac{z}{c^2} \quad (*)$$

dir.

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{b^2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{c^2}$ değerleri yerine yazılırsa;

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}$$

olur.

$$K = \frac{1}{(W_1^2 + W_2^2 + W_3^2)^2} [W_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + W_2^2 \lambda_1 \lambda_3 + W_3^2 \lambda_1 \lambda_2]$$

$$H = \frac{1}{(W_1^2 + W_2^2 + W_3^2)^{3/2}} [W_1^2 (\lambda_2 + \lambda_3) + W_2^2 (\lambda_1 + \lambda_3) + W_3^2 (\lambda_1 + \lambda_2)]$$

eşitliklerinde (*) ifadeleri yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})^2} \left[\frac{x^2}{a^4} \frac{1}{b^2} \frac{1}{c^2} + \frac{y^2}{b^4} \frac{1}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{z^2}{c^4} \frac{1}{a^2} \frac{1}{b^2} \right] \\ &= \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-2} \frac{1}{a^2} \frac{1}{b^2} \frac{1}{c^2} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right] \\ &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-2} \end{aligned}$$

olur.

Yukarıdaki eşitlikte, (x,y,z) nin umbilik noktalar olması için gerek ve yeter şart tüm $[a_1, a_2, a_3]$ ler için;

$$\frac{a_1 x}{a^2} + \frac{a_2 y}{b^2} + \frac{a_3 z}{c^2} = 0$$

iken;

$$\det \begin{pmatrix} x/a^2 & a_1/a^2 & a_1 \\ y/b^2 & a_2/b^2 & a_2 \\ z/c^2 & a_3/c^2 & a_3 \end{pmatrix} = 0$$

olmasıdır.

Burada $a > b > c$ ise, M yüzeyi üzerinde 4 umbilik nokta oluşur. Çünkü, yukarıdaki determinant;

$$xa_2a_3(c^2 - b^2) + ya_1a_3(a^2 - c^2) + za_1a_2(b^2 - a^2) = 0$$

olup, burada,

$$x = \pm a \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right)^{1/2} \quad z = \pm c \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \right)^{1/2}$$

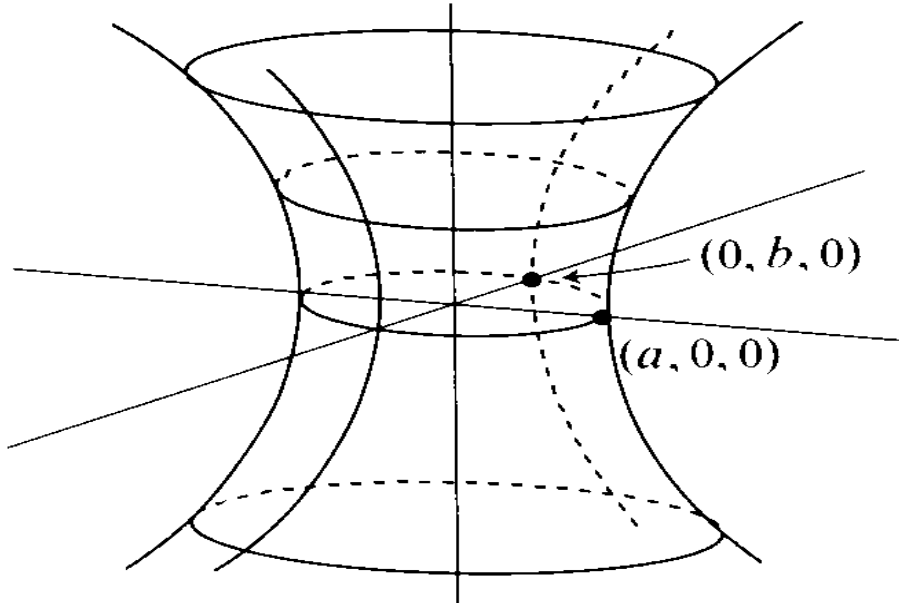
koordinatlarıyla 4 umbilik nokta elde edilir. Diğer taraftan, elipsin döndürülmesiyle, umbiliklerden oluşan iki tam daire oluşur [14].

3.2.6.3. Eliptik Hiperboloid(Bir Yapraklı)

Eliptik hiperboloidin denklemi;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

şeklindedir. $a=b$ iken hiperbolün z-ekseni etrafında döndürülmüşü elde edilebilir.



Şekil 3.2.7

Bu yüzey, aynı zamanda bir regle yüzeydir.

$$\vartheta(s, t) = (acoss, bsins, 0) + t(-asins, bcoss, c)$$

ya da

$$\vartheta(s, t) = (acoss, bsins, 0) + t(asins, -bcoss, c)$$

şeklinde parametrize edilir.

Her durumda, ruling(çizgiler) ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

elipsi boyunca geçer ve yarıçap vektörüne diktir.



Bu yüzeyin K gauss eğriliğini hesaplamak için, W yı elipsoide benzer şekilde seçersek,

$$W_1(x, y, z) = \frac{x}{a^2}, \quad W_2(x, y, z) = \frac{y}{b^2}, \quad W_3(x, y, z) = -\frac{z}{c^2}$$

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda gerekli işlemler yapılırsa,

$$K = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-2}$$

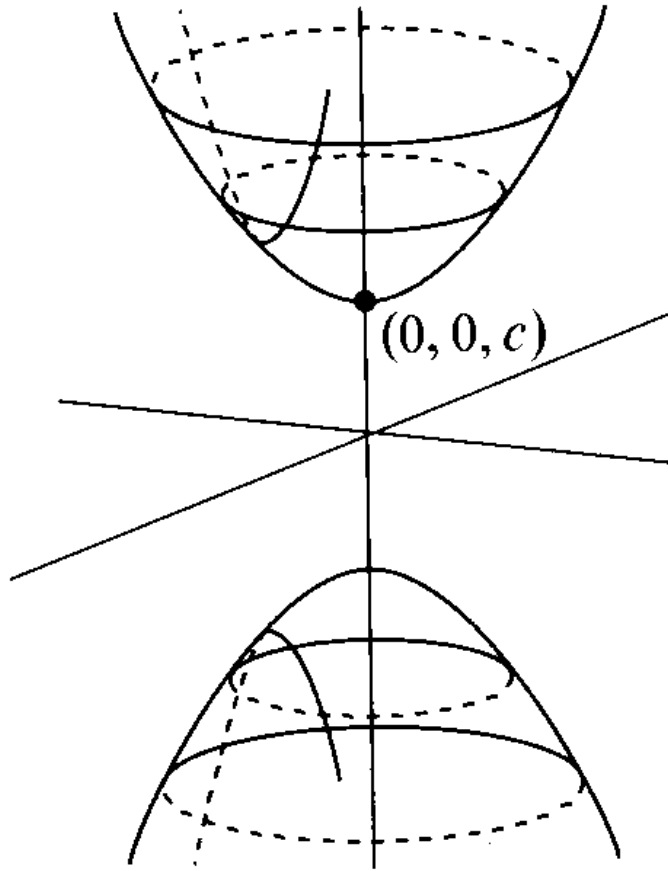
elde edilir. $K < 0$ olduğundan, umbilik nokta yoktur [14].

3.2.6.4. Eliptik Hiperboloid(İki Yapraklı)

Adı geçen yüzeyin denklemi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

şeklindedir.



Şekil 3.2.8

K yı bir yapraklı eliptik hiperboloide benzer şekilde hesaplarsak, sadece eşitliğin sağ tarafındaki sabit sayı (-1) farklı olduğundan,

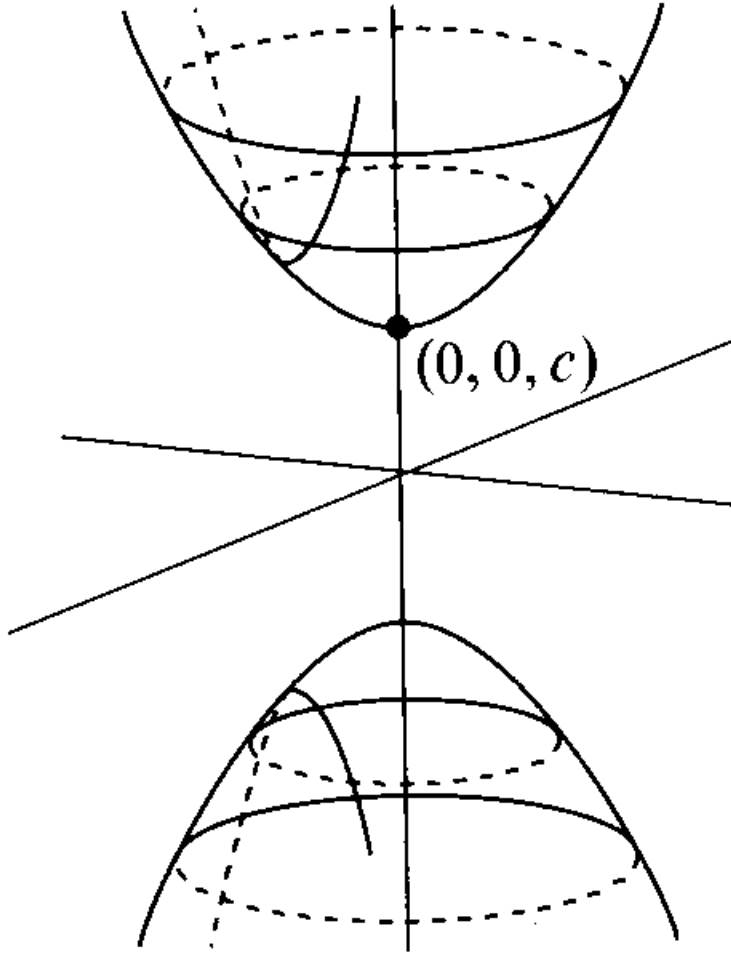
$$K = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-2}$$

bulunur. Bu da bu yüzeyin 4 tane umbilik noktaya sahip olduğunu gösterir [14].

3.2.6.5. Eliptik Paraboloid

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

denklemleri verilen eliptik paraboloid yüzey, $a=b$ olduğunda, döne paraboloid elde edilir.



Şekil 3.2.9

Benzer şekilde,

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z \right)$$

seçilirse,

$$W_1(x, y, z) = \frac{x}{a^2}, \quad W_2(x, y, z) = \frac{y}{b^2}, \quad W_3(x, y, z) = -\frac{1}{2}$$

olur. Böylece,

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

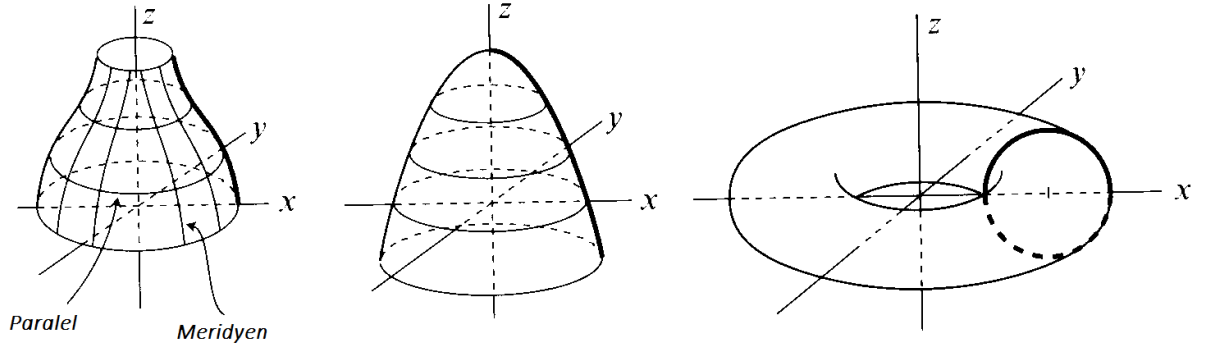
olur. Burada K Gauss eğriliği hesaplanırsa,

$$K = \frac{1}{4a^2b^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{4} \right)^{-2}$$

elde edilir. Bu da verilen yüzeyin 2 umbilik noktasının var olduğunu gösterir [14].

3.2.7. Dönel Yüzeyler

Bu yüzeyler, z-ekseni etrafında döndürülek ve (x,z)-düzleminin sağ yarısında yatan bir eğriyle başlayarak elde edilir.

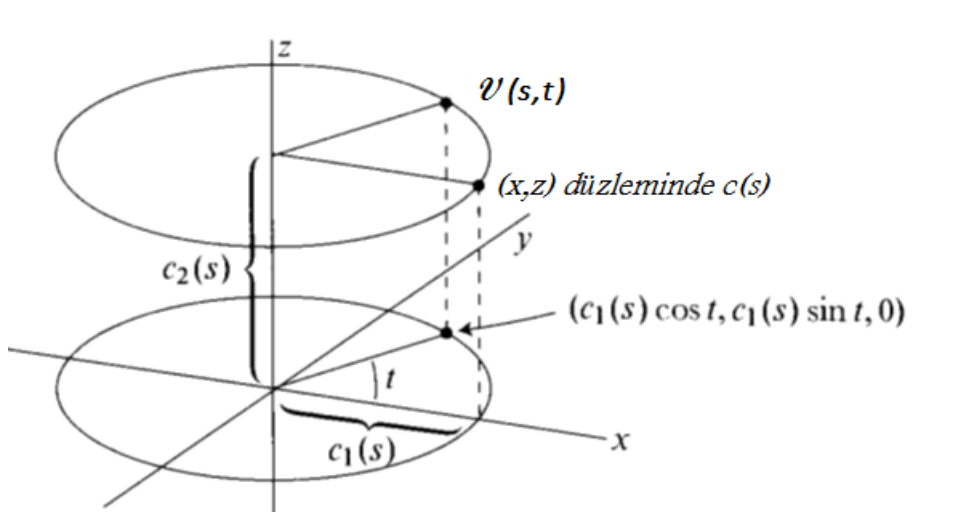


Şekil 3.2.10

Eğri, z-ekseniyle kesişirse, bir sağ açı yapmalıdır. Şekil (3.2.11) de gösterilen yüzey;

$$\vartheta(s, t) = (c_1(s)\cos t, c_1(s)\sin t, c_2(s))$$

ile parametrize edilir. s=sabit ler paraleller olarak adlandırılır. t=sabit ler ise meridyenler olarak adlandırılır.



ŞEKİL 3.2.11

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= (c_1' cost, c_1' sint, c_2') \\
\vartheta_{11} &= (c_1'' cost, c_1'' sint, c_2'') \\
\vartheta_{12} &= (-c_1' sint, c_1' cost, 0) \\
\vartheta_2 &= (-c_1 sint, c_1 cost, 0) \\
\vartheta_{22} &= (-c_1 cost, -c_1 sint, 0)
\end{aligned}$$

Böylece, yüzeyin temel form katsayıları hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
E &= \langle \vartheta_1, \vartheta_1 \rangle = (c_1')^2 + (c_2')^2 \\
F &= \langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle = 0 \\
G &= \langle \vartheta_2, \vartheta_2 \rangle = c_1^2 \\
\sqrt{EG - F^2} &= c_1 \sqrt{(c_1')^2 + (c_2')^2} \\
l &= \frac{c_1' c_2'' - c_2' c_1''}{\sqrt{(c_1')^2 + (c_2')^2}} \\
m &= 0 \\
n &= \frac{c_1 c_2'}{\sqrt{(c_1')^2 + (c_2')^2}}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

olur. Buradan $F=m=0$ olduğu görülür.

$S(\vartheta_1) = a\vartheta_1 + b\vartheta_2$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki yanı sağdan, sırasıyla ϑ_1 ve ϑ_2 ile iç çarpıma tabi tutup, $F=m=0$ olduğu göz önüne alınırsa, $a = \frac{l}{E}$ ve $b=0$ bulunur. Böylece,

$$S(\vartheta_1) = \frac{l}{E} \vartheta_1$$

olur. Bu eşitlik, her bir q için $\frac{l(q)}{E(q)}$ sayısının $\vartheta(q)$ noktasında bir asli eğrilik olduğunu ve ayrıca $\vartheta_1(q)$ vektörünün, $\vartheta(q)$ noktasında bir eğrilik vektörü olduğunu gösterir. Ayrıca asli eğrilikler yönündeki paralel ve meridyenlerin tanjant vektörleri bir noktayı gösterir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
k_{meridyen} &= \frac{l}{E} = \frac{c_1' c_2'' - c_2' c_1''}{[\sqrt{(c_1')^2 + (c_2')^2}]^{3/2}} \\
k_{paralel} &= \frac{n}{G} = \frac{c_2'}{c_1 [(c_1')^2 + (c_2')^2]^{1/2}} \\
K &= k_{meridyen} \cdot k_{paralel} = \frac{c_2' (c_1' c_2'' - c_2' c_1'')}{c_1 [(c_1')^2 + (c_2')^2]^2} \\
H &= \frac{1}{2} (k_{meridyen} + k_{paralel})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olur. Burada, $c(s)=(g(s),s)$ özel durumu elde edilmek istenirse,

$$\begin{aligned}
k_{meridyen} &= \frac{-g''}{[1+(g')^2]^{3/2}} \\
k_{paralel} &= \frac{1}{g[1+(g')^2]^{1/2}} \\
K &= \frac{-g''}{g[1+(g')^2]^2} \\
H &= \frac{1+(g')^2 - gg''}{2g[1+(g')^2]^{3/2}}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

bulunur [14].

4. BİR EĞRİ ÜZERİNDEKİ UMBİLİK NOKTA ÇİFTLERİ

4.1. Temel Kavramlar

4.1.1. Tanım: M yönlendirilmiş bir yüzey, M üzerinde pozitif birim normal vektör alanı N olsun. M yüzeyi üzerinde u yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş $c: [0, l] \rightarrow E^3$ regüler eğrisini ele alalım.

$T \circ c = c'$ olsun. Bu taktirde, c eğrisi boyunca Darboux çatısı $(T, N \wedge T, N)$ aşağıdaki diferansiyel eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned} T' &= k_g N \wedge T + k_n N \\ (N \wedge T)' &= -k_g T + \tau_g N \\ N' &= -k_n T - \tau_g (N \wedge T) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Burada, k_n normal eğrilik, k_g geodezik eğrilik ve τ_g , c eğrisinin geodezik torsiyonudur [15].

4.1.1. Önerme: $c: [0, l] \rightarrow M$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş umbilik noktalardan oluşan regüler bir eğri olsun. $(T, N \wedge T, N)$, E^3 Öklid uzayının pozitif bir çatısı olsun. O halde,

$$\alpha(u, v) = c(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2} k(u) v^2 + \frac{1}{6} a v^3 + \frac{1}{24} b(u) v^4 + h.o.t \right] N(u) \quad (4.1.2)$$

olup, bu eşitlik c nin komşuluğunda C^∞ sınıfından bir lokal harita tanımlar.

Burada, $k(u) = k_n(c(u), T) = (k_n(c(u), N \wedge T))$, T ve $N \wedge T$ yönlerinde M nin normal eğriliğidir. Ayrıca, $\tau_g = 0$ dır [15].

İspat: c umbilik noktalardan oluşan regüler bir eğri olması durumunda, Kapalı Fonksiyon Teoremi gereğince, c ye kısıtlanmış $k_1 \leq k_2$ asli eğrilikleri C^∞ sınıfındandır. Ayrıca, $k_n(c(u), T(u)) = (k_n(c(u), N \wedge T(u)))$ olup, her $v \in T_{c(u)}M$ için $\tau_g(c(u), v) = 0$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

4.2. Umbilik Eğriden Oluşan Yüzeylerin Birinci ve İkinci Temel Formları

(4.1.2) eşitliğinde α haritasında pozitif birim normal vektör alanı;

$$N = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{|\alpha_u \wedge \alpha_v|}$$

eşitliğiyle verilir. Bu durumda öncelikle, α_u ve α_v yi hesaplayalım:

$$\alpha_u = c'(u) + v(-k_g T + \tau_g N) + \left[\frac{1}{2} k' v^2 + \frac{1}{6} a' v^3 + \frac{1}{24} b' v^4 + h.o.t \right] N \\ + \left[\frac{1}{2} k v^2 + \frac{1}{6} a v^3 + \frac{1}{24} b v^4 + h.o.t \right] [-k_n T - \tau_g (N \wedge T)] .$$

Burada,

$$k_n = k , \quad \tau_g = 0 , \quad c'(u) = T \text{ olduğundan,} \\ \alpha_u = \left[1 - k_g v - \frac{1}{2} k^2 v^2 - \frac{1}{6} a k v^3 - \frac{1}{24} b k v^4 + h.o.t \right] T \\ + \left[\frac{1}{2} k' v^2 + \frac{1}{6} a' v^3 + \frac{1}{24} b' v^4 + h.o.t \right] N \\ \alpha_v = N \wedge T + \left[k v + \frac{1}{2} a v^2 + \frac{1}{6} b v^3 + h.o.t \right] N(u) \\ \alpha_{uv} = \left[-k_g - k^2 v - \frac{1}{2} a k v^2 - \frac{1}{6} b k v^3 + h.o.t \right] T(u) \\ + \left[k' v + \frac{1}{2} a' v^2 + \frac{1}{6} b' v^3 + h.o.t \right] N \\ \alpha_{vv} = \left[k + a v + \frac{1}{2} b v^2 \right] N \tag{4.2.1}$$

olur.

Böylece;

$$N(u, v) = - \left[\frac{1}{2} k' v^2 + \frac{1}{6} (a' + 3k' k_g) v^3 + o(v^4) \right] T(u) \\ - \left[k v + \frac{1}{2} a(u) v^2 + \frac{1}{6} b(u) - 3k^3 \right] v^3 + o(v^4) N \wedge T(u) \\ + \left[1 - \frac{1}{2} k^2 v^2 + \frac{1}{2} k' k v^3 + o(v^4) \right] N(u)$$

dir. α haritasında birinci ve ikinci temel formların katsayıları;

$$E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle , \quad F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle , \quad G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle , \\ l = \langle \alpha_{uu}, N \rangle , \quad m = \langle \alpha_{uv}, N \rangle , \quad n = \langle \alpha_{vv}, N \rangle \tag{4.2.2}$$

olup, (4.2.1) deki eşitlikler (4.2.2) de yerine yazılırsa,

$$E(u, v) = 1 - 2k_g v + (k_g^2 - k^2) v^2 + \frac{1}{6} (6k_g k^2 - 2k \alpha(u)) v^3 + o(v^4), \\ F(u, v) = \frac{1}{2} k' k v^3 + o(v^4), \\ G(u, v) = 1 + k^2 v^2 + k \alpha(u) v^3 + o(v^4), \\ l(u, v) = k - 2k_g k_v + \frac{1}{2} (2k k_g^2 - k_g \alpha(u) - 2k^3 + k'') v^2, \\ + \frac{1}{6} [\alpha'' + k_g (9k^3 - b(u)) + (3k_g^2 - k^2) \alpha(u) \\ + 3k' (k_g' + k^2)] v^3 + o(v^4) \\ m(u, v) = k' v + \frac{1}{2} (k_g k' + \alpha') v^2 + \frac{1}{6} (k_g \alpha' + 3k' k_g^2 + b') v^3 + o(v^4), \\ n(u, v) = k + \alpha(u) v + \frac{1}{2} (b(u) - k^3) v^2 - \frac{1}{2} k^2 (\alpha(u) - k') v^3 + o(v^4).$$

bulunur.

α haritasında ortalama ve gauss eğriliği;

$$\mathcal{H} = k + \alpha(u)v + \frac{1}{4}(b(u) + k'' - 3k^3 - k_g\alpha(u))v^2 + o(v^4),$$

$$\mathcal{K} = k^2 + k\alpha(u)v + \frac{1}{2}(-k_gk\alpha(u) - 3k^4 + kk'' + kb(u) - 2k'')v^2 + o(v^4).$$

şeklinde yazılır.

α haritasında eğrilik çizgilerinin diferensiyel eşitliği;

$$(Fn - Gm)dv^2 + (En - Gl)dudv + (Em - Fl)du^2$$

$$= Ldv^2 + Mdvdu + Ndu^2 = 0$$

dır. Burada;

$$L = -[k'v + \frac{1}{2}(k_gk' + \alpha')v^2 + \frac{1}{6}(k_g\alpha' + 3k'k_g^2 + b' + 3k^2k')v^3 + o(v^4)]$$

$$M = \alpha(u)v + \frac{1}{2}(b(u) - 3k^3 - k'' - 3k_g\alpha(u))v^2 + \frac{1}{6}[15k^3k_g - 3k_g'k' + (3k_g^2 - 16k^2)\alpha(u) - \alpha'' - 5k_gb(u)]v^3 + o(v^4)$$

$$N = k'v + \frac{1}{2}(\alpha' - 3k_gk')v^2 + \frac{1}{6}(3k'k_g^2 - 9k^2k' - 5k_g\alpha' + b')v^3 + o(v^4)$$

dir [15].

4.3. Tüb Yüzeyler: $\alpha: (a, b) \rightarrow R^3$ eğriliği sıfır olmayan bir tüb yüzeyi;

$$tube(u, v) = \alpha(u) + r(-N(u)\cos v + B(u)\sin v)$$

$$a \leq u \leq v, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

şeklinde tanımlanır [4].

O halde tüb yüzeyin K gauss eğriliği hesaplanırsa:

$$x_v = r(-N(u)\sin v + B(u)\cos v),$$

$$x_u = T(u) + r\cos v(-\kappa T(u) + \tau B(u) + r\sin v(-\tau N(u)))$$

$$= (1 - r\kappa\cos v)T(u) + r\tau(-N(u)\sin v + B(u)\cos v)$$

$$= (1 - r\kappa\cos v)T(u) + \tau x_v,$$

$$x_u \times x_v = (1 - r\kappa\cos v)T(u) \times r(-N(u)\sin v + B(u)\cos v)$$

$$= -r(1 - r\kappa\cos v)(N(u)\cos v + B(u)\sin v),$$

$$\|x_u \times x_v\|^2 = r^2(1 - r\kappa\cos v)^2,$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = -N(u)\cos v - B(u)\sin v$$

olup, birinci temel form katsayıları;

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = (1 - r\kappa\cos v)^2 + (r\tau)^2,$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = r^2 \tau,$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = r^2$$

şeklinde bulunur. Şimdi ikinci temel form katsayıları l, m, n yi hesaplayalım:

$$x_{vv} = -r(N(u)\cos v + B(u)\sin v),$$

$$x_{uv} = r(\kappa T(u)\sin v - \tau N(u)\cos v - \tau B(u)\sin v)$$

olup,

$$l = \langle x_{uu}, N \rangle = -\kappa \cos v + r\kappa^2 \cos^2 v + r\tau^2,$$

$$m = \langle x_{uv}, N \rangle = r\tau,$$

$$n = r$$

olur. Şimdi Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplayalım:

$$K = \frac{ln-m^2}{EG-F^2}$$

$$K = \frac{-\kappa \cos v}{r(1-r\kappa \cos v)}$$

$$H = \frac{En-2Fm+lG}{2(EG-F^2)}$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \kappa r \right)$$

bulunur.

4.4. Darboux Çatısıyla Verilen Tüb Yüzeyler

M regüler bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi boyunca $(T, N \wedge T, N)$ Darboux çatısı verilsin. O halde Darboux çatısıyla verilen tüb yüzey,

$$x(u, v) = \alpha(u) + r(\cos v(N \wedge T)(u) + \sin v N(u))$$

şeklinde yazılır [16].

5. DARBOUX ÇATISIYLA VERİLEN VE MERKEZ EĞRİSİ UMBİLİK EĞRİDEN OLUŞAN TÜB YÜZEYLER

Bu bölümde Darboux çatısıyla verilen ve merkez eğrisi umbilik eğriden oluşan tüb yüzeylerin bazı geometrik özellikleri incelendi.

5.1. Darboux Çatısıyla Verilen ve Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeylerin Temel Formları ve Eğrilikleri

$\alpha: [0, l] \rightarrow M$ yay parametresi ile parametrelendirilmiş umbilik noktalardan oluşan regüler bir eğri olsun. $(T, N \wedge T, N)$, R^3 ün pozitif bir çatısı olsun. O halde, Darboux çatısıyla verilen tüb yüzey;

$$x(u, v) = \alpha(u) + r(\cos v(N \wedge T)(u) + \sin v N(u))$$

şeklinde yazılır.

Burada, $k(u) = k_n(c(u), T) = (k_n(c(u), N \wedge T), T \text{ ve } N \wedge T \text{ yönlerinde } M \text{ nin normal eğriliğidir. Ayrıca, } \tau_g = 0 \text{ dır.}$

$$x_u(u, v) = [1 - rk_g \cos v - rk_n \sin v]T(u) - r \sin v \tau_g (N \wedge T)(u) + r \cos v \tau_g N(u)$$

$$x_v(u, v) = -r \sin v (N \wedge T)(u) + r \cos v N(u).$$

olur.

$$x_{uu}(u, v) = [-r \cos v k_g' - r \sin v k_n' + r \sin v k_g \tau_g - r \cos v k_n \tau_g]T(u)$$

$$+ [k_g - r \sin v k_n k_g - r \cos v k_g^2 - r \cos v \tau_g^2 - r \sin v \tau_g'] (N \wedge T)(u)$$

$$+ [k_n - r \cos v k_n k_g - r \sin v k_n^2 - r \sin v \tau_g^2 + r \cos v \tau_g'] N(u),$$

$$x_{uv}(u, v) = [r \sin v k_g - r \cos v k_n]T(u) - r \cos v \tau_g (N \wedge T)(u) - r \sin v \tau_g N(u),$$

$$x_{vv}(u, v) = -r \cos v (N \wedge T)(u) - r \sin v N(u).$$

$$\tau_g = 0, \quad k_n = k$$

olduğundan,

$$x_u(u, v) = [1 - rk_g \cos v - rk_n \sin v]T(u),$$

$$x_{uu}(u, v) = [-r \cos v k_g' - r \sin v k_n']T(u)$$

$$+ [k_g - r \sin v k_n k_g - r \cos v k_g^2] (N \wedge T)(u)$$

$$+ [k_n - r \cos v k_n k_g - r \sin v k_n^2] N(u),$$

$$x_{uv}(u, v) = [r \sin v k_g - r \cos v k_n] T(u),$$

$$\begin{aligned} x_u \times x_v &= [-r \cos v + r^2 \sin v \cos v k_n + r^2 \cos^2 v k_g] (N \wedge T)(u) \\ &\quad + [-r \sin v + r^2 \sin v \cos v k_g + r^2 \sin^2 v k_n] N(u), \end{aligned}$$

$$\|x_u \times x_v\| = r(1 - r \cos v k_g - r \sin v k_n),$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = -\cos v (N \wedge T)(u) - \sin v N(u),$$

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = (1 - r \cos v k_g - r \sin v k_n)^2,$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = r^2.$$

bulunur. Ayrıca

$$l = \langle x_{uu}, N \rangle = (k_g \cos v + k \sin v) [r(k_g \cos v + k \sin v) - 1],$$

$$m = \langle x_{uv}, N \rangle = 0,$$

$$n = \langle x_{vv}, N \rangle = r \cos^2 v + r \sin^2 v = r.$$

olur.

F=m=0 olduğundan asli eğrilikler;

$$k_1 = \frac{l}{E}, \quad k_2 = \frac{n}{G}$$

dir.

Bu durumda,

$$k_1 = \frac{(k_g \cos v + k \sin v) [r(k_g \cos v + k \sin v) - 1]}{(1 - r \cos v k_g - r \sin v k_n)^2},$$

$$k_2 = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r},$$

$$K = k_1 \cdot k_2, \quad H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

olduğundan,

$$K = \frac{(k_g \cos v + k \sin v) [r(k_g \cos v + k \sin v) - 1]}{(1 - r \cos v k_g - r \sin v k_n)^2} \cdot \frac{1}{r},$$

$$K = \frac{1}{r} \frac{(k_g \cos v + k \sin v)}{(r k_g \cos v + r k \sin v - 1)},$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{(k_g \cos v + k \sin v)[r(k_g \cos v + k \sin v) - 1]}{(1 - r \cos v k_g - r \sin v k)^2} + \frac{1}{r} \right),$$

$$H = \frac{1}{2r} \left(\frac{2r k_g \cos v + 2r k \sin v - 1}{r k_g \cos v + r k \sin v - 1} \right).$$

elde edilir.

5.2. Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeyin Asli Eğrilik Çizgileri

Asli eğrilik çizgileri;

$$(Em - Fl)du^2 - (Gl - En)dudv + (Fn - Gm)dv^2 = 0$$

şeklindedir. E, F, G, l, m, n ifadeleri yerlerine yazılırsa;

$F=m=0$ olduğundan;

$$-(Gl - En)dudv = 0$$

olup,

$$\begin{aligned} & -(r^2(k_g \cos v + k \sin v)[r(k_g \cos v + k \sin v) - 1] - r(1 - r \cos v k_g - r \sin v k)^2 \\ & = 0 \end{aligned}$$

olur.

5.3. Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeyin Weingarten Yüzey Olması

Tanım 2.1.53 ye göre bir $x(u, v)$ tüb yüzeyin Weingarten yüzey olması için, K ve H Gauss ve ortalama eğrilikleri olmak üzere

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

denklemini sağlamasıdır. Tüb yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri;

$$K = \frac{1}{r} \frac{(k_g \cos v + k \sin v)}{(r k_g \cos v + r k \sin v - 1)},$$

$$H = \frac{1}{2r} \left(\frac{2r k_g \cos v + 2r k \sin v - 1}{r k_g \cos v + r k \sin v - 1} \right).$$

şeklindedir. Buna göre K_u, K_v, H_u, H_v ifadelerini hesaplayalım:

$$K_u$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{(k_g' \cos v + k' \sin v)(rk_g \cos v + rk \sin v - 1) - (rk_g' \cos v + rk' \sin v)(k_g \cos v + k \sin v)}{[rk_g \cos v + rk \sin v - 1]^2} \right],$$

$$K_u = \frac{1}{r} \left[\frac{-k_g' \cos v - k' \sin v}{(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$K_v$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{(-k_g \sin v + k \cos v)(rk_g \cos v + rk \sin v - 1) - (-rk_g \sin v + rk \cos v)(k_g \cos v + k \sin v)}{(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$K_v = \frac{1}{r} \left[\frac{k_g \sin v - rk k_g \cos^2 v + rk^2 \sin v \cos v}{(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$H_u$$

$$= \left[\frac{(2rk_g' \cos v + 2rk' \sin v)(rk_g \cos v + rk \sin v - 1) - (rk_g' \cos v + rk' \sin v)(rk_g \cos v + 2rk \sin v - 1)}{2r(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$H_u = \frac{1}{2r} \left[\frac{-rk_g' \cos v - rk' \sin v}{(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$H_u = \frac{1}{2} \left[\frac{-k_g' \cos v - k' \sin v}{(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$H_v$$

$$= \left[\frac{(-2rk_g \sin v + 2rk \cos v)(rk_g \cos v + rk \sin v - 1) - (-rk_g \sin v + rk \cos v)(2rk_g \cos v + 2rk \sin v - 1)}{2r(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$H_v = \frac{1}{2r} \left[\frac{rk_g \sin v - rk \cos v}{(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right],$$

$$H_v = \frac{1}{2} \left[\frac{k_g \sin v - k \cos v}{(rk_g \cos v + rk \sin v - 1)^2} \right].$$

bulunur. Şimdi de

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

olup olmadığını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} K_u H_v - K_v H_u &= \frac{1}{r} \left[\frac{-k_g' \cos v - k' \sin v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \frac{1}{2} \left[\frac{k_g \sin v - k \cos v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{-k_g' \cos v - k' \sin v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \frac{1}{r} \left[\frac{-k \cos v + k_g \sin v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2r} \left[\frac{k_g' \cos v + k' \sin v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \left[\frac{k_g \sin v - k \cos v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2r} \left[\frac{k_g' \cos v + k' \sin v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \left[\frac{k_g \sin v - k \cos v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \\ &= \left(-\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} \right) \left[\frac{k_g' \cos v + k' \sin v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \left[\frac{k_g \sin v - k \cos v}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

5.4. Darboux Çatısıyla Verilen ve Merkez Eğrisi Umbilik Eğriden Oluşan Tüb Yüzeylerin K Gauss Eğriliği ve H Ortalama Eğriliğinin Yorumlanması:

Öncelikle K yı yorumlayalım. $K=0$ durumunu ele alalım.

$$K = \frac{1}{r} \frac{(k_g \cos v + k \sin v)}{(rk_g \cos v + rksin v - 1)}$$

$K=0$ ise

$$\frac{1}{r} \neq 0 \text{ olduğundan,}$$

$$(k_g \cos v + k \sin v) = 0$$

olacaktır.

$$k_1 = \frac{(k_g \cos v + k \sin v)[r(k_g \cos v + k \sin v) - 1]}{(1 - r \cos v k_g - r \sin v k)^2}$$

olduğundan,

$$k_1 = 0$$

olur.

$K=0$ ise $k_1 = 0$ olduğundan yüzey açılabilir.

Şimdi H ortalama eğriliği yorumlayalım. $H=0$ durumunu ele alalım:

$$H = \frac{1}{2r} \left(\frac{2rk_g \cos v + 2rk \sin v - 1}{rk_g \cos v + rk \sin v - 1} \right)$$

$$H = 0$$

ise,

$$\frac{1}{2r} \neq 0 \text{ olduğundan,}$$

$$2rk_g \cos v + 2rk \sin v - 1 = 0$$

olup,

$$k_g \cos v + k \sin v = \frac{1}{2r}$$

olacaktır.

O halde,

$$k_g \cos v + k \sin v = \frac{1}{2r}$$

şartı sağlandığında, $H=0$ olduğundan yüzey minimal olacaktır.

6. SONUÇLAR

- 1) Bu çalışmada, Darboux çatısıyla verilen ve merkez eğrisi umbilik eğri olan tüb yüzeyler verilerek bu yüzeylerin temel formları, eğrilikleri, asli eğrilik çizgileri verildi.
- 2) Darboux çatısı ile verilen ve merkez eğrisi umbilik eğri olan tüb yüzeyin bir Weingarten yüzey olduğu ispatlandı.
- 3) Bu yüzeylerin Ortalama eğrilikleri ve Gauss eğriliklerinin sıfır olması durumları incelendi ve Gauss eğriliğinin sıfır olması durumunda yüzeyin açılabilir olduğu gösterildi. Belirli şartlar altında yüzeyin minimal olduğu sonucuna varıldı.

5. KAYNAKLAR

- [1] **Hacısalihoğlu, H. H.** , 1982, “Lineer Cebir”, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Elazığ
- [2] **Hacısalihoğlu, H. H.** , 1994, “Diferensiyel Geometri” , II. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınevi, Ankara
- [3] **Hacısalihoğlu, H. H.** , 2000, “Diferensiyel Geometri”, I. Cilt Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınevi, Ankara
- [4] **Gray, A.** , “Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica 2nd ed. “ , CRC Press Washington, 1998
- [5] **Hacısalihoğlu, H. H.** , 2004, “Diferensiyel Geometri”, 3. Cilt , Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınevi, Ankara
- [6] **Carmo, Manfredo P.**, 1977, “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, Prentice-Hall , inc. Englewood Cliffs, New Jersey
- [7] **Sabuncuoğlu, A.** , 2004, “Diferensiyel Geometri” , Nobel Yayın Dağıtım, Ankara
- [8] **Martin M. Lipschutz, Ph. D.**, 1969, “Differential Geometry”, McGraw-Hill Book Company, New York
- [9] **Gray, J., J., Brannan, D., A., Esplen, M., F.**, 1999, "Geometry", The Open University, Cambridge University Press.
- [10] **Hicks, N.J.** , 1974, “Notes on Differential Geometry”, Van Nostrand Reinhold Company, London.
- [11] **Kühnel, W.** , 2006, “Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds “(translated by Bruce Hunt). Providence, R. I. :American Mathematical Society, 380, New York.
- [12] **Tunçer Y., Yoon, D.W.** , Karacan M.K. , 2011, “Weingarten and Linear Weingarten Canal Surfaces”, arXiv; 1106.3175v1 [math. DG]
- [13] **Blaga Paul A.** , 2005, “Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces”, Napoca Press
- [14] **Spivak M.**, 1975, “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry”, Vol.II, Publish or Perish, Berkley.

- [15] **Garcia, R., Sotomayor, J.**, 2004, “On the Patterns of Principal Curvature Lines around a curve of Umbilical Points”, *Annals of the Brazilian Academy of Sciences* 77(1):13-24
- [16] **Doğan, F., Yaylı, Y.**, 2012, “Tubes with Darboux Frame”, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 7, no. 16, 751-758
- [17] **Sotomayor, J., Garcia, R.**, 2007, “Lines of Curvature on Surfaces, Historical Comments and Recent Developments”, arXiv:0712.1585v1 [math. DG]
- [18] **Kart, C.**, 1985, “Matris Metodları ve Lineer Dönüşümler”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*, Ankara
- [19] **Ro, J. S., Yoon, D. W.**, 2009, “Tubes of Weingarten Types in a Euclidean 3-Space”, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, Vol. 22, No.3
- [20] **Karacan, M., K., Es, H., Yaylı, Y.**, 2006, “Singular Points of Tubular Surfaces in Minkowski 3-Space, *Sarajevo Journal of Mathematics*, Vol. 2 (14), 73-82
- [21] **Abdel-Aziz, H. S., Khalifa Saad, M.**, 2011, “Weingarten Timelike Tube Surfaces around a Spacelike Curve”, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 5, no. 25, 1225-1236

ÖZGEÇMİŞ

1987 Malatya doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Malatya’da tamamladım. 2006 yılında Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. Daha sonra 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne yatay geçiş yaptım ve 2010 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Bununla birlikte 2010 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Pedagojik Formasyon eğitimimi tamamladım. 2012 yılında ise Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında lisans derecesi ile doktora başladım. Doktora eğitimim halen devam etmektedir. Evliyim.