T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZK (n,n,n) DENKLEMİNİN KOMPAKTAN ÇÖZÜMLERİNİN HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE BULUNMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞE ARIKAN
111121101

DANIŞMAN: Doç.Dr. Mustafa İNÇ

ELAZIĞ – 2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZK(n,n,n) DENKLEMİNİN KOMPAKTON ÇÖZÜMLERİNİN HOMOTOPİ ANALİZ YÖNTEMİ İLE BULUNMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe ARIKAN

(111121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 05. 05. 2014
Tezin Savunulduğu Tarih: 04. 06. 2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Bülent KILIÇ (F.Ü)

HAZİRAN-2014

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Doç. Dr. Mustafa İNÇ'e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu süreçte bana destek veren ve her zaman yanımda olan başta babam Osman ARIKAN ve annem Dürdane ARIKAN olmak üzere sevgili aileme ve değerli dostlarım Melis ERDOĞAN ve Münire OKAN 'a çok teşekkür ederim.

Ayse ARIKAN

Elazığ-2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ II

İÇİNDEKİLER III

ÖZET IV

SUMMARY V

ŞEKİLLER LİSTESİ VI

TABLOLAR LİSTESİ VIII

SEMBOLLER LİSTESİ IX

1. BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

2. BÖLÜM **5**

2.1. TEMEL TANIM ve TEOREMLER 5

3. BÖLÜM **12**

3.1. HOMOTOPİ ANALİZ METODU 12

3.1.1. Homotopi 12

3.1.2. Sıfırıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi 14

3.1.3. Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi 17

3.2. Homotopi Analiz Metodu ile İlgili Temel Kurallar 21

3.3. Çözüm İfadeleri 22

3.3.1.Polinom Fonksiyonlarıyla İfade Edilen Çözüm 23

3.3.2. Kesirli Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm 26

3.3.3. Üstel Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm 29

3.4. $\hbar$ Yardımcı Parametrenin Rolü 34

4. BÖLÜM **37**

4.1. Kompaktonlar 37

4.2. Homotopi Analiz Metodunun Zakharov-Kuznetsov Denklemine Uygulanması 38

SONUÇ **65**

KAYNAKLAR **66**

ÖZET

Bu çalışma 4 bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde homotopi analiz metodunun tarihçesi ve yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde homotopi kavramı ve Homotopi Analiz metodunun temel yapısı verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde izah edilen yöntem başlangıç şartlı Zakharov-Kuznetsov denkleminin $n = 2$ ve $n = 3$ olması durumunda yaklaşık çözümünü ve genel çözümünü elde etmek için kullanıldı. Bulunan sonuçlar tablolar, 2-boyutlu ve 3-boyutlu şekillerle açıklandı. Bu çalışma Homotopi Analiz yönteminin yeni bir uygulamasıdır.

Anahtar Kelimeler: Özel fonksiyonlar, Homotopi Analiz Metodu (HAM), Zakharov-Kuznetsov Denklemi.

SUMMARY

ZK(n,n,n) Of The Equation Kompakto Presence Of Solutions Of Homotopy Analysis Method

This study has been probed in four sections.

In Section 1 chapter of the history of homotopy analysis method and are given information about the study.

In Section 2 the basic definitions and theorems are given.

In Section 3 chapter the concept of homotopy and Homotopy Analysis Method are given basic structure.

In Section 4 methodology as outlined in third section initial conditional Zakharov-Kuznetsov equation case of n = 2 and n = 3 to obtain the approximate solution and the overall solution was used. The results tables, 2-dimensional and 3-dimensional shapes have been announced. This study is a new application Homotopy Analysis Method.

Key Words: Special functions, Homotopy Analysis Method (HAM), Zakharov-Kuznetsov Equation.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı 42

Şekil 2. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı 42

Şekil 3. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin yedi terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı 43

Şekil 4. $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen analitik çözümün 3-boyutlu grafiği. 44

Şekil 5. (4.14) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen yaklaşık çözümün 3-boyutlu grafiği. 44

Şekil 6. (4.14) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için elde edilen mutlak hatanın 3-boyutlu grafiği. 45

Şekil 7. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı. 48

Şekil 8. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı. 49

Şekil 9. $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen analitik çözümün 3-boyutlu grafiği. 50

Şekil 10. (4.27) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen yaklaşık çözümün 3-boyutlu grafiği. 50

Şekil 11. (4.27) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için elde edilen mutlak hatanın 3-boyutlu grafiği 51

Şekil 12. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı 54

Şekil 13. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı. 55

Şekil 14. $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen analitik çözümün 3-boyutlu grafiği. 56

Şekil 15. (4.40) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen yaklaşık çözümün 3-boyutlu grafiği. 56

Şekil 16. (4.40) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için elde edilen mutlak hatanın 3-boyutlu grafiği. 57

Şekil 17. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı 62

Şekil 18. $c = t = 1.5$, $x = 0.1$, $y = a = 0.5$, $b = 0.05$ ve $k = 1$ değerleri için HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı. 62

Şekil 19. $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen analitik çözümün 3-boyutlu grafiği. 63

Şekil 20. (4.53) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için HAM ile elde edilen yaklaşık çözümün 3-boyutlu grafiği 64

Şekil 21.(4.53) çözüm serisinde $c = 1$, $\hbar = -0.9$, $t = a = 0.5$, $b = 0.1$ ve $k = 0.3$ değerleri için elde edilen mutlak hatanın 3-boyutlu grafiği. 64

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1. $c = x = y = 0.1$, $\hbar = -0.99$, $a = b = 2$ ve $k = 1$ değerleri için hesaplanan 7 terimin HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası 43

Tablo 2. $c = x = y = 0.1$, $\hbar = -0.99$, $a = b = 2$ ve $k = 1$ değerleri için hesaplanan 5 terimin HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası. 49

Tablo 3. $c = x = y = 0.1$, $\hbar = -0.99$, $a = b = 2$ ve $k = 1$ değerleri için hesaplanan 5 terimin HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası. 55

Tablo 4. $c = x = y = 0.1$, $\hbar = -0.99$, $a = b = 2$ ve $k = 1$ değerleri için hesaplanan 5 terimin HAM, analitik çözüm ve mutlak hatası. 63

SEMBOLLER LİSTESİ

L:	Lineer Operatör
L^{-1}:	İntegral Operatörü
Nu:	Lineer Olmayan Operatör
$\sum$:	Toplam Sembolü
α:	Alpha
β:	Beta
δ:	Delta
ε:	Epsilon
η:	Eta
λ:	Lambda
τ:	Tau
Γ:	Gamma
L^1:	Lebesque İntegrali
$\mathbb{R}$:	Reel Sayılar Cümlesi
$\bar{\mathbb{R}}^+$:	$[0, \infty) \cup \{\infty\}$

KISALTMALAR

HAM	Homotopi analiz metodu
KdV	Korteweg-de Vries denklemi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bu problemlerin diferansiyel denklemlerle modellenmesi gerekir. Daha sonra modellenen problemlerin analitik çözümleri ve kapalı formdaki çözümleri bulunmaya çalışılır. Fakat her problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak çoğunlukla mümkün olmayabilir. Bu durumda ise denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak önem kazanır. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi artarak devam etmiştir. Biz ise tezimizde homotopi analiz metodunu inceleyip bazı uygulamaları ele aldık.

Literatürde bir çok yarı-analitik metod bulunmaktadır. Bu tür metodlar arasında en iyi bilinenleri pertürbasyon teknikleridir. Pertürbasyon teknikleri lineer olmayan denklemlerin bir çok özelliğinin ortaya çıkmasında etkin olduğundan çok iyi bilinirler ve geniş bir uygulama alanına sahiptirler. Pertürbasyon teknikleri aslında, pertürbasyon niceliği olarak adlandırılan küçük veya büyük parametrelere dayanır. Temel olarak lineer yardımcı problemlerin sonlu bir grubu ile lineer olmayan bir probleme dönüşen pertürbasyon niceliği kullanılır. Sonuçta çözüm, ele alınan yardımcı problemlerin çözümlerinin toplamlarının yakınsaklığıyla elde edilir. Pertürbasyon niceliğinin varlığı tekniklerin temel noktasıdır ancak bu terim bazı sınırlamalara neden olur. İlk olarak her lineer olmayan problemin bir pertürbasyon niceliği içermesi mümkün değildir. İkinci olarak, bu teknikler kuvvetli lineer olmayan problemler için kullanışlı değildir. Bu durumlardan dolayı pertürbasyon teknikleri bir çok problemde çözümün yakınsaklığı hakkında yeterli bilgi vermez [23].

Pertürbasyon tekniklerinde kullanılan küçük veya büyük parametrelere ihtiyaç duymayan diğer bir yarı-analitik metotta Lyapunov'un 1892 de geliştirdiği metottur. Bu metot;

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1.1}$$

denkleminin ϵ yapay bir parametre olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon A(t)x \tag{1.2}$$

şeklinde ϵ ile genişleyen kuvvet serilerinin hesaplanmasına dayanır. Lyapunov $\epsilon = 1$ durumunda serilerin yakınsaklığını bir çok şekilde ispatlamıştır. Bu yaklaşım, Lyapunov'un küçük yapay parametre metodu olarak adlandırılır [20].

Karmishin, Lyapunov'un küçük yapay parametre metodunu temel alarak $\delta-$genişleme yöntemini tanımlamıştır. δ yapay bir parametre olmak üzere,

$$x^5 + x = 1 \tag{1.3}$$

denklemini

$$x^{5+\delta} + x = 1 \tag{1.4}$$

olarak yenilemiştir [21]. Burada δ'nın genişletilmesi ile kuvvet serisi hesaplanabilir. Aslında bu metod ve Lyapunov'un metodu benzerdir. Çünkü her iki metot da yapay bir parametre içerir. Ancak bazı durumlarda (1.3) denklemi (1.4) şeklindeki yenilenmiş durumu keyfidir. Örneğin; (1.3) denklemi,

$$\delta x^5 + x = 1 \tag{1.5}$$

şeklinde de olabilir.

Lyapunov'un küçük yapay parametre metodu ve Karmishin'in $\delta-$ genişleme metodunda, daha iyi yaklaşımlar elde edebilmek için ϵ ve δ gibi yapay parametrelerin belirlenmesinde bazı temel kurallara ihtiyaç duyulur. Çünkü parametrelerin durumu yaklaşımları etkiler. Ancak her iki metodda bu tür kuralları içermemektedir ve pertürbasyon teknikleri gibi yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızı hakkında yeterli bilgi edinlimesinde kullanışlı ve güvenilir. bir yol sağlamazlar.

Lineer olmayan problemlerin çözümü için kullanılan bir diğer yarı-analitik teknik ise Adomian ayrışım metodudur [22]. Adomian ayrışım metodu küçük veya büyük bir parametre içermeksizin adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır. Bu metod ile elde edilen çözüm serilerinin hızlı yakınsadığı görülür. Buna rağmen metodun bazı sınırlamaları vardır. Şöyle ki; lineer olmayan problemlerde Adomian polinomları ortaya çıkar. Ayrıca elde edilen çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi genelde küçüktür ve yakınsaklık bölgesinin genişletilmesine ihtiyaç duyulur. Ancak metod farklı fonksiyonların

kullanılabileceği keyfi durumlara izin vermez, bu nedenle yakınsaklık bölgesi sınırlanmış olur. Sonuçta bu metot da diğerleri gibi yakınsaklık bölgesi ve hızı hakkında güvenli bir yol sağlamaz.

Özet olarak, yukarıda verilen metodlar gibi teknikler ile yaklaşık serinin yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızının ayarlanması ve kontrolü için güvenli bir yol sağlanamaz. Yani kuvvetli lineer olmayan bir problemin yakınsaklık bölgesinin yeterince genişletilebilmesi ve problemin yakınsaklığının yeterince hızlı bir şekilde hesaplanabilmesi için bazı yeni yarı-analitik tekniklerin genişletilebilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu yeni oluşturulan teknik

i) Lineer olmayan problem küçük veya büyük herhangi bir parametre içermese bile uygulanabilir olmalıdır.

ii) Metod lineer olmayan problemin yaklaşık serisinin yakınsaklık bölgesi ve hızının ayarlanmasında belirli ve güvenli bir yol sağlamalıdır.

iii) Lineer olmayan problemin bağlı olduğu fonksiyonlardan farklı olarak, yakınsaklık bölgesinin genişletilebilmesi için keyfi olarak farklı temel fonksiyonların seçimini sağlamalıdır.

Yarı-analitik bir metod olan " Homotopi Analiz Metodu (HAM) " bu özelliklere sahiptir. Homotopi analiz metodu ilk olarak 1992 yılında Shijun Liao 'nun doktora tezinde tanımlanmıştır [17]. Çalışmamızın 3. bölümünde verilmiş olan homotopi analiz metodu lineer olmayan problemlerde yaklaşık çözümü elde ederken yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızının ayarlanmasında güvenilir ve kullanışlı bir yol sağlar. Kuvvetli lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanışlı olan bu metod bir çok bilim adamı tarafından denklemlere uygulanmıştır. Örneğin; Zakharov-Kuznetsov denklemi [23], Korteweg-de Varies denklemi [24], Burger's denklemi [25], Dirichlet ve Neumann sınırlı şartlı Laplace denklemi [26], lineer olmayan fin-tipi problem [27], Fisher denklemi [28], Fitzhugh-Naguma denklemi [29], integro-diferansiyel denklemlere [30], modifiye edilmiş KdV denklemine [31], Kuramato-Sivashinsky denklemi [32], beşinci mertebeden KdV denklemi [33], Isı yayılımı denklemi [34], Benjamin-Bona-Mahony denklemi [35], v.b.

Bu çalışmada lineer olmayan saçılma terimine sahip Zakharov-Kuznetsov Denklemini göz önüne aldık. Başlangıç şartlı bu denklemin kompakton ve solitary pattern çözümlerini

Homotopi Analiz Metodu yardımıyla bulduk. Elde edilen seri çözümlerinin yakınsaklık aralığını tespit ettik. Literatürde var olan bazı sonuçlarla karşılaştırdık.

2.BÖLÜM

2.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1.1 Tanım

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

veya genel olarak

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklemler, adi diferansiyel denklemler olarak adlandırılır [1].

2.1.2 Tanım

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan denkleme kısmi türevli denklem adı verilir [2].

z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy,...}\right) = 0,$$

şeklindedir.

2.1.3 Tanım

Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin kuvvetine denklemin derecesi denir [2].

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit yada bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-lineer) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y)\,z_x + Q(x,y)\,z_y + R(x,y)\,z = S(x,y),$$

$$A(x,y)\,z_{xx} + B(x,y)\,z_{xy} + C(x,y)\,z_{yy} + D(x,y)\,z_x$$

$$+E(x,y)\,z_y + F(x,y)\,z = G(x,y)$$

2.1.1 Örnek

$$xz_x - yz_y = \sin x,$$

denklemi birinci mertebeden, birinci dereceden, lineer bir denklemdir.

2.1.2 Örnek

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z} + z^3,$$

denklemi ikinci mertebeden, ikinci dereceden, lineer olmayan bir denklemdir.

2.1.4 Tanım

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) denklem adı verilir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y,z)\,z_x + Q(x,y,z)\,z_y = R(x,y,z),$$

$$A(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{xx} + B(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{xy} + C(x,y,z,z_x,z_y)\,z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0.$$

2.1.3 Örnek :

a) $z_x z_{xx} + xzz_y = \sin y$

b) $z_{xy} + 2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(z_x^2 + z\right) - 6xz^3 \sin y = 0$

c) $z_y z_{xx} - 3x^3 z z_{xy} + 2z_x - x^3 yz = 0$

denklemlerinin tümü yarı-lineer denklemlerdir.

2.1.5 Tanım

Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f 'in k. mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna $C^k - sınıfındandır$ denir.

2.1.6 Tanım

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x,y)\, z_{xx} + B(x,y)\, z_{xy} + C(x,y)\, z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0,$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x,y) = [B(x,y)]^2 - 4A(x,y)\, C(x,y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

1) $\Delta(x,y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;

2) $\Delta(x,y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;

3) $\Delta(x,y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

2.1.4 Örnek

a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+t\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^3(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2=t+1$

b)$3xu_{xx}+4xyu_{yy}+5xz^3u_{zz}+2zu_{xy}-4u_{yz}+u^2u_x-u_y+xye^z=0$

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

2.1.5 Örnek

$$\left(x^2-1\right)z_{xx}+2yz_{xy}-z_{yy}+z_x+z_y=0$$

denkleminin tipini belirtiniz.

Çözüm:

$$A\left(x,y\right)=x^2-1,\ B\left(x,y\right)=2y,\ C\left(x,y\right)=-1$$

olduğundan $\Delta\left(x,y\right)$ fonksiyonu

$$\Delta\left(x,y\right)=B^2-4AC=4y^2-4\left(x^2-1\right)\left(-1\right)=4\left(x^2+y^2\right)-4$$

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen denklem

$D_1=\left\{(x,y):x^2+y^2>1,\ x,y\epsilon R\right\}$ bölgesinde hiperbolik;

$D_2=\left\{(x,y):x^2+y^2=1,\ x,y\epsilon R\right\}$ çemberi üzerinde parabolik;

$D_3=\left\{(x,y):x^2+y^2<1,\ x,y\epsilon R\right\}$ açık diskinde eliptik tiptendir.

2.1.6 Örnek

$$x^2z_{xx}+xyz_{xy}+z_{yy}+xz_x+yz_y+z=0$$

denkleminin tipini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\Delta\left(x,y\right)=B^2-4AC=x^2(y^2-4)$$

olup

$y = \pm 2$ doğruları üzerinde parabolik;

$-2 < y < 2$ şeridi içinde eliptik;

$y < -2$ bölgesi ile $y > 2$ bölgesinde hiperbolik tiptendir.

2.1.7 Tanım

X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler vs...) cümlesi olmak üzere X uzayının herbir elemanına Y uzayının bir elemanını karşılık getiren dönüşüme operatör denir.

2.1.8 Tanım

Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden biri olan ∇ Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \; \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla U = 0,$$

şeklindeki bir denkleme de ∇' nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir.

Bu denklemde c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca ∇U, t ye göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0,$$

formundadır. Bu tip denklemler elektro manyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve quantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını ifade eder [2].

Matematiksel fiziğin diğer bazı denklemlerini şöyle verebiliriz [3];

a) İki boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

b) Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

c) İki boyutlu Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y\right),$$

d) Biharmonik denklem

$$\nabla^4 u = 0,$$

e) Biharmonik dalga denklemi

$$\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

f) Telegraf denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial u}{\partial T} + Au = 0,$$

g) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 u + \alpha\left[E - V\left(x, y, z\right)\right]u = 0,$$

h) Klein-Gordon denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0.$$

2.1.1 Teorem

(Birinci mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi):

$P(x,y,z), Q(x,y,z)$ ve $R(x,y,z)$ fonksiyonları (x_0,y_0,z_0) noktasını kapsayan bir $D \subset R^3$ bölgesinde C^1sınıfından olsunlar ve kabul edelim ki

$$P(x_0,y_0,z_0)\frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0,y_0,z_0)\frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0,$$

olsun. O zaman (x_0,y_0) noktasının bir U komşuluğunda, U'nun içinde yatan $\check{C}$ eğrisinin her noktasında $z(x_0(t),y_0(t)) = z_0(t)$ başlangıç şartını ve $Pz_x + Qz_y = R$ denklemini sağlayan bir tek $z = z(x,y)$ çözümü vardır.

2.1.2 Teorem (Cauchy-Kowalewski teoremi):

$$\begin{aligned} Lz &= A(x,y)z_{xx} + 2B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y)z_x + E(x,y)z_y + F(x,y)z \\ &= G(x,y), \end{aligned}$$

denklemindeki katsayılar ve G fonksiyonu, $xy-$düzleminde, orjini kapsayan bir $\Omega \subset R^2$ bölgesinde analitik olsunlar. Ω da $C(x,y) \neq 0$ olsun. $x-$ekseninin Ω tarafından kapsanan parçasında tanımlanmış keyfi, analitik $h(x)$ ve $\sigma(x)$ fonksiyonları verilsin. O zaman $(0,0)$ noktasının bir N komşuluğu vardır ve N de $Lz = G$ denkleminin bir tek analitik $z = \varphi(x,y)$ çözümü vardır, Öyle ki N komşuluğu tarafından kapsanan $x-$ekseni üzerinde $\varphi(x,0) = h(x), \varphi_y(x,0) = \sigma(x)$ sağlanır.

3. BÖLÜM

3.1.Homotopi Analiz Metodu

Homotopi kavramını ilk olarak 1895 yılında Henri Poincare çalışmıştır. Homotopinin tanımı ilk olarak 1911 yılında Brouwer tarafından verilmiştir.

3.1.1.Homotopi:

Basit olarak bir fonksiyondan diğerine tanımlanan sürekli bir dönüşüme *homotopi* denir.

$f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümler olsun. $\forall x \in X$ için $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g dönüşümlerine homotopiktir denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g dönüşümleri arasında homotopidir denir.

Eğer f ve g homotopik ise bu durumda bir parametre ailesi tanımlanabilir. Bu homotopi ailesi;

$$\{H_p : p \in [0,1]\} \tag{3.1}$$

şeklindedir ve parametre ailesi,

$$H : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonların bir parametre ailesidir. Bu fonksiyon

$$H_p(x) = (1-p)f(x) + pg(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad p \in [0,1] \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır. Burada;

$$H_0(x) = f(x) \quad , \quad H_1(x) = g(x)$$

dir.

İki fonksiyon arasında birden fazla homotopi tanımlanabilir. Yani;

$X = Y = \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = x$, $g(x) = 0$ biçiminde tanımlansın.

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad H(x,t) = (1-p)f(x)$$

şeklinde tanımlanan H dönüşümü f ve g dönüşümleri arasında bir homotopidir.Yine;

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad H(x,t) = (1-p^2)f(x)$$

şeklindeki H dönüşümü de f ve g dönüşümleri arasında bir homotopidir.

Homotopi Analiz Metodunun temel yapısını anlatabilmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Statik durumda bağımsız bir küre düşünelim. $\widetilde{t}$ zaman, $U(\widetilde{t})$ kürenin hızı, m kütlesi ve g yer çekim ivmesi olsun. Varsayalım ki kürenin hava direnci $aU^2(\widetilde{t})$ olsun. Burada a bir sabittir. Daha sonra Newton'un ikinci hareket kanunundan; (net kuvvet=kütle ağırlığı - ortam kuvveti veya yay kuvveti)

$$m\frac{dU(\widetilde{t})}{d\widetilde{t}} = mg - aU^2(\widetilde{t}) \tag{3.3}$$

yazılabilir. Bu denklemin başlangıç şartı;

$$U(0) = 0 \tag{3.4}$$

şeklindedir.

Fiziksel olarak sabit bir U_∞ hızına ulaşana kadar bağımsız kürenin hızının yer çekiminden dolayı arttığı söylenebilir. Bu durumda $U(\widetilde{t})$ bilinmese bile (3.1)'den U_∞ elde edilir. Yani;

$$U_\infty = \sqrt{\frac{mg}{a}} \tag{3.5}$$

olur. Kullanılan U_∞ ve U_∞/g terimleri sırasıyla karakteristik hız ve zamanı göstermek üzere;

$$U(\widetilde{t}) = U_\infty V(t) \quad , \quad \widetilde{t} = (\frac{U_\infty}{g})t \tag{3.6}$$

yazılabilir ve buradan boyutsuz,

$$\dot{V}(t) + V^2(t) = 1 \quad , \quad t \geq 0 \tag{3.7}$$

denklemi elde edilir. Başlangıç şartı;

$$V(0) = 0 \tag{3.8}$$

dır. Bu denklemde t zamanı ve $\dot{V}\ (t)$ ise t'ye bağlı türevi ifade eder.

Açık olarak $t \longrightarrow \infty$ iken $\widetilde{t} \longrightarrow \infty$ ve $U(\widetilde{t}) \longrightarrow U_{\infty}$ olduğunu söyleyebiliriz ve (3.5) ve (3.6) denklemlerinin çözülmesine ihtiyaç duyulmaksızın (3.4)'den

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} V(t) = 1 \tag{3.a}$$

ifadesi bulunur. (3.8) başlangıç şartlı (3.7) denkleminin tam çözümü;

$$V(t) = \tanh(t) \tag{3.b}$$

şeklindedir [17].

3.1.2.Sıfırıncı-Mertebeden Deformasyon Denklemi:

$V_0(t)$, $V(t)$'nin başlangıç yaklaşımı olmak üzere (3.8) başlangıç yaklaşımını

$$V_0(0) = 0 \tag{3.9}$$

olsun. $q \in [0,1]$ homotopi parametresi olmak üzere homotopi analiz metodu $V(t) \longrightarrow \Phi(t;q)$ sürekli hareketine dayanır. Yani, q parametresi 0'dan 1'e yaklaşırken $\Phi(t;q)$'da $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımından $V(t)$ tam çözümüne yakınsar. Bu ifadenin sağlanabilmesi için $\gamma_1(t) \neq 0$ ve $\gamma_2(t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere;

$$\mathcal{L}[\Phi(t;q)] = \gamma_1(t)\frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \gamma_2(t)\Phi(t;q) \tag{3.10}$$

yardımcı lineer operatörünü seçelim. (3.7) denkleminden lineer olmayan operatör

$$N[\Phi(t;q)] = \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \Phi^2(t;q) - 1 \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olsun. $q \in [0,1]$ homotopi parametresi kullanılarak;

$$(1-q)\mathcal{L}[\Phi(t;q) - V_0(t)] = \hbar q H(t) N[\Phi(t;q)] \tag{3.12}$$

denklemi yazılabilir. Bu denklemin başlangıç koşulu,

$$\Phi(0;q) = 0 \tag{3.13}$$

şeklindedir. Burada asıl vurgulanmak istenen $\hbar$ yardımcı parametre, H yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı ve $\mathcal{L}$ lineer operatörü keyfi seçilebilir. Bu keyfi seçim homotopi analiz metodunun geçerliliği ve esnekliğinde çok önemli rol oynar.

$q = 0$ iken (3.12) denkleminden,

$$\mathcal{L}[\Phi(t;0) - V_0(t)] = 0 \quad , \quad t \geq 0 \tag{3.14}$$

bulunur ve bu denklem,

$$\Phi(0;0) = 0 \tag{3.15}$$

başlangıç şartına sahiptir.

(3.9) ve (3.10) denklemlerinden faydalanarak (3.14) ve (3.15) denklemlerinin çözümü,

$$\Phi(t;0) = V_0(t) \tag{3.16}$$

olarak yazılır.

$q = 1$ iken (3.12) denkleminden,

$$\hbar H(t) N[\Phi(t;1)] = 0 \quad , \quad t \geq 0 \tag{3.17}$$

yazılabilir ve bu denklem,

$$\Phi(0;1) = 0 \tag{3.18}$$

başlangıç şartına sahiptir. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ olmak üzere (3.11) denklemi yardımıyla (3.17) ve (3.18) denklemleri asıl denklem olan (3.7) ve (3.8) denklemlerine eşit olur ve

$$\Phi(t;1) = V(t) \tag{3.19}$$

sağlanır. Bu nedenle (3.16) ve (3.19) denklemlerine göre q parametresi 0'dan 1'e artarken $\Phi(t;q)$ çözüm fonksiyonu da $V_0(t)$'den $V(t)$'ye gider. Bu topolojide "deformasyon" olarak adlandırılır. (3.12) ve (3.13) denklemlerine "sıfırıncı dereceden deformasyon denklemleri" denir.

Buna göre $\Phi(t;q)$ çözüm fonksiyonu $0 \leq q \leq 1$ için (3.12) ve (3.13) denklemlerinin çözümüdür. Ayrıca $\Phi(t;q)$'nun q'ya göre m-inci dereceden türevi;

$$V_0^{[m]}(t) = \left.\frac{\partial^m \Phi(t;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0} \tag{3.20}$$

olur. Burada $m = 1, 2, 3, \ldots$'dir. Kısaca $V_0^{[m]}(t)$'ye "m-inci dereceden deformasyon türevi" denir. Burada

$$V_m(t) = \frac{V_0^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^m \Phi(t;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0} \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlanır. Taylor teoreminden $\Phi(t;q)$ çözüm fonksiyonunun q parametresine göre kuvvet serisi;

$$\Phi(t;q) = \Phi(t;0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^m \Phi(t;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0} q^m \tag{3.22}$$

şeklindedir. (3.16) ve (3.21) denklemlerine bakıldığında yukarıdaki kuvvet serisi

$$\Phi(t;q) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) q^m \tag{3.23}$$

olur.

$\hbar$ yardımcı parametre, H yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı ve $\mathcal{L}$ lineer operatörü (3.23) serisine uygun olarak seçilir. Öyleyse $q = 1$ için (3.23) serisi

$$\Phi(t;1) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \tag{3.24}$$

olarak alınır. Bu nedenle (3.19) denklemi kullanılarak

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \tag{3.25}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeden $V_m(t)(m = 1, 2, 3, \ldots)$ terimleri $V_0(t)$ başlangıç şartı ve $V(t)$ tam çözümü arasındaki ilişkiyi sağlar [17].

3.1.3.Yüksek-Mertebeden Deformasyon Denklemi:

$$\overrightarrow{V}_n = \{V_0(t), V_1(t), V_2(t), \ldots, V_n(t)\}$$

vektörü tanımlansın. (3.21) tanımına göre $V_m(t)$'nin başlangıç yaklaşımı, (3.12) ve (3.13) sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemleriden bulunabilir. (3.12) ve (3.13) denklemleri q parametresine göre m-kez diferansiyellenip $q = 0$ için kurulduktan sonra $m!$ ile bölünürse $m.$ mertebeden deformasyon denklemi,

$$\mathcal{L}[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) \tag{3.26}$$

olarak elde edilir ve bu denklemin başlangıç şartı,

$$V_m(0) = 0 \tag{3.27}$$

dır. Burada,

$$R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t;q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \tag{3.28}$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & , \quad m \leq 1 \\ 1 & , \quad m > 1 \end{cases} \tag{3.29}$$

şeklindedir. (3.11) ve (3.28) denklemlerinden

$$R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) = V_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m) \tag{3.30}$$

elde edilir. $R_m(\overrightarrow{V}_{m-1})$, (3.26) ve (3.27) denklemlerinin çözümünden bulunan

$$V_0(t), V_1(t), V_2(t), \ldots, V_{m-1}(t)$$

ifadelerine bağlıdır.

Böylece yardımcı lineer operatör $\mathcal{L}$, (3.10) denkleminin tanımına göre (3.27) başlangıç koşuluna sahip (3.26) lineer birinci mertebeden diferansiyel denklemi vardır. (3.25) denklemine göre $V_m(t)$'nin $m.$ mertebeden yaklaşımı,

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{m} V_n(t) \tag{3.31}$$

ile verilir.

Örnek 3.1.:

Bu bölümde izah edilen homotopi analiz metodunu aşağıdaki Burger's denklemine uygulayalım [11].

$$\begin{aligned} u_t + uu_x - vu_{xx} &= 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \sin \pi x \end{aligned}$$

Bu denklemde $\mathcal{L}$ operatörünü,

$$\mathcal{L}[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t}$$

olarak seçelim. Bu $\mathcal{L}$ operatörü c sabit olmak üzere,

$$\mathcal{L}[c] = 0$$

özelliğine sahiptir. Lineer olmayan operatör ise,

$$N[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t} + \Phi(x,t;p)\frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial x} - v\frac{\partial^2 \Phi(x,t;p)}{\partial x^2}$$

şeklindedir. Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi,

$$(1-q)\mathcal{L}[\Phi(x,t;p) - u_0(x,t)] = p\hbar N[\Phi(x,t;p)]$$

şeklindedir. $p = 0$ ve $p = 1$ için sırasıyla,

$$\begin{aligned} \Phi(x,t;0) &= u_0(x,t) \\ \Phi(x,t;1) &= u(x,t) \end{aligned}$$

olur. m. mertebeden deformasyon denklemi,

$$\mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\overrightarrow{u}_{m-1})$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}) &= \frac{\partial \Phi_{m-1}(x,t;p)}{\partial t} + \sum_{n=0}^{m-1} \Phi_n(x,t;p)\frac{\partial \Phi_{m-1-n}(x,t;p)}{\partial x} \\ &\quad -v\frac{\partial^2 \Phi_{m-1}(x,t;p)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

dir. Şimdi $m \geq 1$ için m-inci mertebeden deformasyon denkleminin çözümü,

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\overrightarrow{u}_{m-1})]$$

bağıntısı yardımıyla bulunur. Bu durumda çözüm serisinin terimleri,

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \sin \pi x \\
u_1(x,t) &= \pi \hbar t \sin \pi x [\cos \pi x + v\pi] \\
u_2(x,t) &= \frac{1}{4}\pi \hbar t [4(1 + \hbar + 3\hbar\pi^2 + v)\cos \pi x + \pi(4v + \hbar(t + 4v + 2\pi^2 t v^2) \\
&\quad + 3\hbar t \cos 2\pi x) \sin \pi x] \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

olur. Buna göre çözüm fonksiyonu;

$$\Phi(x,t;p) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t)p^m = u_0(x,t) + pu_1(x,t) + p^2 u_2(x,t) + \ldots$$

şeklindedir.

TEOREM:(Yakınsaklık Teoremi)

(3.29) ve (3.30) denklemleri yardımıyla (3.26) ve (3.27) yüksek mertebeden deformasyon denklemleri ile elde edilen çözümler için (3.25) serisi yakınsak ise (3.7) ve (3.8) denklemlerinin tam çözümüdür [17].

İspat:

Eğer

$$\sum_{m=o}^{\infty} V_m(t)$$

serisi yakınsak ise

$$S(t) = \sum_{m=o}^{\infty} V_m(t)$$

yazabiliriz ve buradan

$$\lim V_m(t) = 0 \tag{3.32}$$

dır. (3.29)'daki χ_m tanımı kullanılırsa;

$$\sum_{m=1}^{n}[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)] = V_1+(V_2-V_1)+(V_3-V_2)+\ldots+(V_n-V_{n-1}) = V_n$$

olur ve (3.32) eşitliğine göre

$$\sum_{m=1}^{\infty}[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)] = \lim_{n\to\infty} V_n(t) = 0$$

bulunur. Ayrıca yukarıdaki ifade ve $\mathcal{L}$'nin (3.10)'daki tanımı kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{L}[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)] = \mathcal{L}\sum_{m=1}^{\infty}[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)] = 0$$

elde edilir. Buna göre (3.26) denkleminden

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{L}[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t)\sum_{m=1}^{\infty}R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) = 0$$

elde edilir. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty}R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) = 0 \tag{3.33}$$

yazılabilir.(3.30) denkleminden

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{\infty}[\dot{V}_{m-1}(t)+\sum_{j=0}^{m-1}V_j(t)V_{m-1-j}(t)-(1-\chi_m)] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\dot{V}_m(t)-1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}V_j(t)V_{m-1-j}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\dot{V}_m(t)-1+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=j+1}^{\infty}V_j(t)V_{m-1-j}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\dot{V}_m(t)-1+\sum_{j=0}^{\infty}V_j(t)\sum_{i=0}^{\infty}V_i(t) \\
&= \dot{S}(t)+S^2(t)-1 \\
\Longrightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty}R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) &= \dot{S}(t)+S^2(t)-1
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir.(3.33) ve (3.34) denklemlerinden

$$\dot{S}(t)+S^2(t)-1 = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

olur. (3.9) ve (3.27) denklemlerinden

$$S(0) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(0) = V_0(0) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(0) = V_0(0) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki $S(t)$ ifadesi (3.7) ve (3.8) denklemlerinin tam çözümüdür. Böylece ispat tamamlanır.

Bu teorem yaklaşık çözüm serisinin yakınsaklığını gösterdiği için önemlidir. (3.25) serisinin yakınsaklığı $\hbar$ yardımcı parametresine, $H(t)$ yardımcı fonksiyonuna, V_0 başlangıç şartına ve $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörüne bağlıdır. Homotopi analiz metodu sayesinde bu ifadeleri keyfi seçebiliyoruz. Bu ifadelerin uygun seçimiyle (3.25) serisi $0 \leq t \leq t_0$ bölgesinde tam çözüme yakınsak olur. Sonuç olarak yakınsaklık teoremi ve terimlerin keyfi seçimleri arasındaki kombinasyondan metodun geçerliliği elde edilir.

3.2. Homotopi Analiz Metodu İle İlgili Bazı Temel Kurallar

Yukarıda $\hbar$ yardımcı parametre, $H(t)$ yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı ve $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatör keyfi seçilebilir. Ancak bu keyfi seçimde bazı temel kurallara ihtiyaç duyulmaktadır. Şöyle ki; verilen bir lineer olmayan problemde, homotopi analiz metodu temel fonksiyon olarak adlandırılan yapıların uygun bir seçimine dayanır. Lineer olmayan bir problemin çözümünde birden fazla temel fonksiyon kurulabilir ve en uygun temel fonksiyonla birlikte verilen lineer olmayan denklem için en iyi yaklaşım elde edilir.

Başlangıç, sınır şartı veya lineer olmayanlık gibi bir çok durumda temel fonksiyon lineer olmayan problemin çözümüne ihtiyaç duymaksızın çözüme uygunluk gösterir. Örneğin;

$$\{e_k(t) \ / \ k = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{3.35}$$

ifadesi bu bölümde örnek olarak ele alınan problem için temel fonksiyonların bir kurumudur. Çözüm serisini,

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_k(t) \tag{3.36}$$

şeklinde gösterelim. Buradaki c_n'ler katsayılardır. Temel fonksiyonun belirlenmesiyle $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatör, $H(t)$ yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı uygun olarak

seçilebilir. Bu durumda $\mathcal{L}$, $H(t)$ ve $V_0(t)$ ifadelerinin seçimi için belli bir kural elde edilmiş olur. Bu kural "çözüm ifadesinin kuralı" olarak adlandırılır ve bu kural HAM için önemli rol oynar.

Yukarıdaki ifadelerde reel bir $f(x)$ fonksiyonu bir çok farklı temel fonksiyonla ifade edilebilir. Uygun temel fonksiyonun seçilmesinde de verilen bu kurallar çok önemli rol oynar.

Bir diğer kuralda $H(t)$ yardımcı fonksiyonun seçiminde bazı sınırlamalar getiren "katsayı ergodikliği kuralıdır." Örneğin bu kural (3.36)'daki gibi c_n katsayılarının bütünlüğünü sağlamak için oluşturulmuştur.

Çözüm ifadesinin kuralı veya katsayı ergodikliği gibi bir çok kuralda yardımcı fonksiyon tek olarak belirlenir ve yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümünün sağlandığı görülür. Bu da "çözümün varlığı kuralı" olarak adlandırılır.

Bu üç kural HAM'nun uygulanmasında önemli bir yere sahiptir.

3.3.Çözüm İfadeleri

Yukarıda bahsedilen perturbasyon ve perturbasyon olmayan (nonperturbasyon) yöntemler ile verilen ifadelerin çözümleri farklıdır. Homotopi analiz metodunda verilen kurallar göz önünde bulundurularak bir çok farklı temel fonksiyonun kurulumu yapılabilir.

3.3.1.Polinom Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm

(3.7) ve (3.8) denkelmlerinin perturbasyon metodu ile çözümü olan

$$V_{pert}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} t^{2n+1}$$

denklemi t'nin kuvvet serisidir. Böylece temel fonksiyonlar kümesi

$$\{t^{2m+1} \ / \ m = 0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{3.37}$$

şeklindedir. Yani $V(t)$;

$$V(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{2m+1} \tag{3.38}$$

olup burada a_m'ler katsayılardır. Bu ifade ile ilk kural olan çözüm ifadesinin kuralı sağlanmış olur.

Çözüm ifadesinin ilk kuralı altında ve (3.9) başlagıç koşuluna göre

$$V_0(t) = t \tag{3.39}$$

olarak ve $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörü de

$$\mathcal{L}[\Phi(t;q)] = \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} \tag{3.40}$$

şeklinde seçilir. Bu operatör

$$\mathcal{L}[c_1] = 0 \tag{2.41}$$

özelliğine sahiptir. Burada c_1 integral sabitidir. Birinci kural olan çözüm ifadesinin kuralı altında (3.26) yüksek mertebeden deformasyon denklemi ve (3.38) denkleminden $H(t)$ yardımcı fonksiyonu

$$H(t) = t^{2k} \tag{3.42}$$

formunda seçilebilir. (3.26) dekleminin çözümü

$$V_m(t) = \chi_m V_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t \tau^{2k} R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) d\tau + c_1$$

olur ve buradaki integral sabiti c_1, (3.27) başlangıç şartı ile belirlenir. $k \leq 1$ olduğu zaman $V_m(t)$'nin çözüm ifadesinde t^{-1} terimi oluşur ki bu (3.38) ile gösterilen çözüm ifadesinin kuralına uymaz. $k \geq 1$ olduğu zaman $V_m(t)$'nin çözüm ifadesinde t^3 katsayısı sıfır olduğundan yaklaşım sonsuza gitse bile t^3 terimi bulunmaz. Bu da katsayı ergodikliği kuralına uymayan bir durumdur. Buna göre her iki kuralın sağlanması için $k = 0$ olmalıdır. Böylece $H(t)$ yardımcı fonksiyonu

$$H(t) = 1 \tag{3.43}$$

olacak şekilde tek olarak belirlenir. Şimdi sonuç olarak;

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{1}{3}\hbar t^3 \\ V_2(t) &= \frac{1}{3}\hbar(1+\hbar)t^3 + \frac{2}{15}\hbar^2 t^5 \\ V_3(t) &= \frac{1}{3}\hbar(1+\hbar)^2 t^3 + \frac{2}{15}\hbar(1+\hbar)t^5 + \frac{17}{315}\hbar^3 t^7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $V(t)$'nin m-inci mertebeden yaklaşımı;

$$V(t) \approx \sum_{k=0}^{m} V_k(t) = \sum_{k=0}^{m} \mu_0^{m,n}(\hbar)[\alpha_{2n+1} t^{2n+1}] \tag{3.44}$$

şeklinde olup burada α_{2n+1} katsayıları

$$V_{pert}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} t^{2n+1}$$

perturbasyon metodunun çözümündeki katsayılara benzerdir ve $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonu

$$\mu_0^{m,n}(\hbar) = (-\hbar)^n \sum_{j=0}^{m-n} \binom{n-1+j}{j} (1+\hbar)^j \tag{3.45}$$

ile tanımlanır.

$V_0(t)$ başlangıç şartı, $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörü ve $H(t)$ yardımcı fonksiyonu kurallar doğrultusunda belirlenmesine rağmen $\hbar$ yardımcı parametresinin belirlenmesinde keyfi bir durum söz konusudur. (3.44) denklemi $\hbar$ yardımcı parametresine bağlı çözüm ifadelerinin bir ailesini gösterir. $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonunun yukarıdaki ifadelere bağlı olarak

$$\mu_0^{m,n}(-1) = 1 \quad , \quad n \leq m \tag{3.46}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

n herhangi sonlu bir tamsayı olmak üzere;

$$\lim_{m\to\infty}\mu_0^{m,n}(\hbar)=\begin{cases}1 & , \quad |1+\hbar|<1\\ \infty & , \quad |1+\hbar|>1\end{cases} \tag{2.47}$$

ifadesi elde edilir.

Böylece $\hbar=-1$ olduğu zaman (3.46), (3.44) ve

$$V_{pert}(t)=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5-\frac{17}{315}t^7+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}t^{2n+1}$$

denklemlerinden

$$V(t)=V_{pert}(t) \tag{3.48}$$

olur.

(3.44) çözüm ifadesindeki parametreler $\hbar$ yardımcı parametresine bağlıdır. (3.47)'ye göre (3.44) için gerekli şart $|1+\hbar|<1$'de yakınsak olmasıdır. Yani;

$$-2<\hbar<0$$

dır. (3.44) çözüm serisinin $\hbar$ yardımcı parametresine bağlı olması ilginçtir. (3.44)'ün yakınsaklık bölgesi;

$$0\leq t\leq\rho_0\sqrt{\frac{2}{|\hbar|}-1}$$

şeklinde olup burada $\rho_0\approx\frac{3}{2}$ terimi,

$$V_{pert}(t)=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5-\frac{17}{315}t^7+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}t^{2n+1}$$

perturbasyon çözümünün yakınsaklık yarıçapıdır. Bu durumda $\hbar\to 0$ iken (3.44) çözüm serisi

$$0\leq t\leq\infty$$

bölgesinin tamamında $V(t)=\tanh(t)$ tam çözümüne yakınsaktır.

Daha önceki tüm analitik tekniklerin aksine $\hbar$'ın uygun bir değerinin seçilmesi ile (3.44) çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi kontrol edilebilir ve ayarlanabilir. Yani HAM ile çözüm serisinin yakınsaklık bölgesinin ayarlanması ve kontrolü güvenli bir yol ile sağlanmış olur.

3.3.2.Kesirli Fonksiyonlarla İfade Edilen Çözüm

(3.44) çözüm ifadesi $\hbar \to 0$ iken $(-2 < \hbar < 0)$

$$0 \leq t \leq \infty$$

bölgesinin tamamında geçerli olan (3.37) temel fonksiyonları ile verilmesine rağmen $\hbar$'ın tam değeri küçük olduğunda daha yakın sonuçlar vermesi çok yüksek bir ihtimaldir.

(3.7) ve (3.8) denklemlerini çözmeye gerek duymadan;

$$V(\infty) = 1$$

olduğunu söyleyebiliriz. (3.39) başlangıç şartı bu özelliği direk olarak sağlamaz. Genellikle kuvvet serisinin sonlu bir bölgede yakınsaklığından polinom fonksiyonlarının (3.37) ile gösterilen kümesi $0 \leq t \leq \infty$ bölgesinin tümünde $V(t)$ için uygun yaklaşımı sağlamaz. Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+t)^m} = 0 \quad , \quad m \geq 1$$

limitini ele alalım. Böylece temel fonksiyonların kurulmasıyla bir fonksiyon

$$\{(1+t)^{-m} \ / \ m = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{3.49}$$

şeklinde yazılır. Bu $t \to \infty$ iken sonlu bir değere sahiptir. Kabul edelim ki $V(t)$ çözümü;

$$V(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(1+t)^m} \tag{3.50}$$

ile ifade edilebilsin ve b_m'de belirlenebilen bir katsayı olsun. Bu ifade bize (3.7) problemi için çözüm ifadesinin kuralını sağlar.

İkinci kural uyarınca (3.8) başlangıç şartı ve (3.a) limiti altında $V_0(t)$

$$V_0(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \tag{3.51}$$

olur.

Buna karşılık yardımcı lineer operatör

$$\mathcal{L}[\Phi(t;q)] = (1+t)\frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \Phi(t;q) \tag{3.52}$$

şeklinde seçilir ve operatör

$$\mathcal{L}(\frac{c_2}{1+t}) = 0 \tag{3.53}$$

özelliğindedir. Burada c_2 integral sabitidir. $\mathcal{L}$'nin (3.52) tanımı ile (3.26) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümü

$$V_m(t) = \chi_m V_{m-1}(t) + \frac{\hbar}{1+t}\int_0^t H(\tau) R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) d\tau + \frac{c_2}{1+t} \quad , \quad m \geq 1$$

şeklinde olur. Burada c_2 integral sabiti (3.27) başlangıç şartı ile tespit edilir. (3.50) ile gösterilen çözüm ifadesinde $H(t)$ yardımcı fonksiyonu,

$$H(t) = \frac{1}{(1+t)^k} \tag{3.54}$$

şeklinde olmalıdır. k bir tamsayıdır. $k \leq 0$ olduğunda (3.26) yüksek mertebeden deformasyon denklemi

$$\frac{\ln(1+t)}{1+t}$$

terimini içerir ki bu durum (3.50) ile gösterilen çözüm ifadesi için ikinci kurala uymayan bir durum olur. $k > 0$ olduğu zaman $(1+t)^{-2}$ teriminin katsayıları sıfır olduğundan $V_m(t)$'nin çözüm ifadesinde $(1+t)^{-2}$ terimi bulunmaz. Bu durum yine ikinci kural olan katsayı ergodikliği kuralına uymaz. Bu iki kuralında sağlanabilmesi için $k = 1$ seçilmek zorundadır. Böylece $H(t)$ yardımcı fonksiyonu

$$H(t) = \frac{1}{1+t} \tag{3.55}$$

şeklinde tek olarak belirlenir.

Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{-\hbar}{1+t} + \frac{2\hbar}{(1+t)^2} - \frac{\hbar}{(1+t)^3} \\ V_2(t) &= -\hbar(1+\frac{7}{12}\hbar)\frac{1}{1+t} + \frac{2\hbar(1+\hbar)}{(1+t)^2} \\ &\quad -\hbar(1+\hbar)\frac{1}{(1+t)^3} + \frac{10\hbar^2}{3(1+t)^4} - \frac{5\hbar^2}{4(1+t)^5} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir.

$V_m(t)$'nin m-inci mertebeden yaklaşımı;

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{2m+1} \frac{\beta_{m,n}(\hbar)}{(1+t)^n} \tag{3.56}$$

ile ifade edilebilir. Burada $\beta_{m,n}$'ler $\hbar$'a bağlı bir katsayıdır.

$\hbar$'ın keyfi seçiminde (3.56) ifadesi göz önüne alınır. Şöyle ki bu çözüm serisinde $\hbar$'ın etkisi incelendiğinde ilk olarak $V'(0), V''(0), V'''(0)$ gibi serilerin yakınsaklığı ile karşılaşırız. Yaklaşımın herhangi bir mertebesindeki bütün sonuçlar için $V'(0) = 1$ elde edilir. Bu durumda $\hbar$'ın keyfi seçimi için güvenli bir yol saglanmayabilir. Bununla birlikte $V''(0)$ ve $V'''(0)$ $\hbar$'a bağlıdır. $V''(0) = 0$ 'a karşılık gelen serilerin yakınsakılığıyla $R_\hbar$, $\hbar$'ın tüm olası değerlerinin kümesini gösterir. Kısaca $R_\hbar$ $V''(0)$ için $\hbar$'ın tanım bölgesidir. Yakınsaklık teoremine göre $\forall \hbar \in R_\hbar$ için $V''(0)$ 'ın serisi benzer sonuçlara yakınsar. $\hbar$'a karşı gelen $V''(0)$ eğrisi $R_\hbar$ tanım bölgesinde yatay bir çizgi parçası içerir. Yani bir çözüm serisinin $R_\hbar$ bölgesinde $\hbar$-eğrisi olarak adlandırılan bir eğri bulunur. (3.56) ile verilen $V''(0)$ ve $V'''(0)$ serilerinin

$$-\frac{3}{2} \leq \hbar \leq -\frac{1}{2}$$

olduğu zaman yakınsak olduğu açıktır. Bu durum şöyle açıklanabilir. $-\frac{3}{2} \leq \hbar \leq -\frac{1}{2}$ bölgesinde $\hbar$'ın beş farklı değeri için (3.56) ile verilen $V''(0)$ ve $V'''(0)$ serileri sırasıyla 0 ve -2 değerlerine yakınsar.

Burada ilginç olan $\hbar$'ın değerlerine bağlı olan serilerin yakınsaklığı ve $\hbar = -1$ için $V''(0)$ ve $V'''(0)$ serilerinin daha hızlı yakınsamasıdır. Böylece $\hbar$ yardımcı parametreli

(3.56) çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi ayarlanabilir. Ayrıca $V''(0)$ ve $V'''(0)$ serilerinin yakınsak olması şartıyla (3.56) serisi $0 \leq t \leq \infty$ bölgenin tümünde yakınsaktır. Tanım bölgesinde $\hbar$'ın uygun bir değerinin seçimi çözüm serisinin yakınsaklığı ile sağlanabilir. Bu yolla yakınsaklık bölgesi ve hızının ayarlanması ve kontrolü yapılabilir. Böylece $\hbar$'ın HAM için çok önemli bir yere sahip olduğu söylenebilir.

Böylece (3.56) çözüm serisi (3.44) çözümünden çok daha iyidir. Buna rağmen teorik olarak her iki çözümde $0 \leq t \leq \infty$ bölgesinin tümünde tam çözüme yakınsayabilir. (3.7) problemi için (3.56) çözüm serisinin daha iyi ve etkili olmasının nedeni (3.49) temel fonksiyonunun (3.37) temel fonksiyonundan daha etkili olmasıdır.

Sonuç olarak (3.56) çözümü ve

$$V_{pert}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} t^{2n+1}$$

perturbasyon çözümü arasındaki ilişki incelenirse $\hbar = -1$ ve

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$$

olmak üzere (3.56)'da $V(t)$'nin onuncu mertebeden yaklaşımı

$$V(t) \approx 1 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \ldots$$

şeklindedir. Bu ifadenin ilk bir kaç terimi

$$V_{pert}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} t^{2n+1}$$

perturbasyon çözümündeki değerlere benzerdir.

3.3.3.Üstel Kuvvet İle İfade Edilen Çözüm

Bilindiği gibi

$$\lim_{t \to \infty} \exp(-nt) = 0 \quad , \quad n \geq 1$$

dir. Yani basit fonksiyon setinin bir temel fonksiyonu $t \to \infty$ iken

$$\{\exp(-nt) \ / \ n \geq 0\} \tag{3.57}$$

şeklinde ifade edilir. (3.a) limiti göz önüne alındığında yukarıdaki temel fonksiyonun (3.37)'den daha iyi sonuç verdiği görülür. Kabul edelim ki $V(t)$

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-nt) \tag{3.58}$$

şeklindedir ve burada c_n'ler katsayılardır. Bu bize çözüm ifadesinin üçüncü kuralına götürür.

(3.8) ve (3.a) denklemlerinden çözüm ifadesinin üçüncü kuralından;

$$V_0(t) = 1 - \exp(-t) \tag{3.59}$$

olduğu açıkça görülür. Bu ifade $V(t)$'nin başlangıç şartıdır ve yardımcı lineer operatör

$$\mathcal{L}[\Phi(t;q)] = \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \Phi(t;q) \tag{3.60}$$

şeklindedir ve bu operatör

$$\mathcal{L}[c_3 \exp(-t)] = 0$$

özelliğine sahiptir. Burada c_3 integral sabitidir. Bu durumda (3.26) m-inci mertebeden deformasyon denklemi;

$$V_m(t) = \chi_m V_{m-1}(t) + \hbar \exp(-t) \int_0^t H(\tau) R_m(\overrightarrow{V}_{m-1}) d\tau + c_3 \exp(-t) \quad , \quad m \geq 1$$

olur. Burada integral sabiti c_3, (3.27) ile belirlenir. (3.26) ve (3.58) ile gösterilen çözüm ifadesinin üçüncü kuralından $H(t)$ yardımcı fonksiyonu

$$H(t) = \exp(-k) \tag{3.62}$$

şeklindedir ve burada k tamsayıdır.

$k \leq 0$ olduğu zaman (3.26) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümü

$$t \exp(-t)$$

terimini içerir. Bu durum (3.58) ile gösterilen eşitlik çözüm ifadesinin ikinci kuralına uymaz. $k \geq 2$ olduğu zaman $\exp(-2t)$ teriminin katsayısı (3.26) denkleminde daima

sıfır olur ki bu durum katsayıların ergodikliği kuralına uymaz. Böylece her iki kuralında sağlanabilmesi için $k = 1$ olmalıdır. $k = 1$ olduğunda yardımcı fonksiyon;

$$H(t) = \exp(-t) \tag{3.63}$$

olacak şekilde tek olarak belirlenir. Bu nedenle çözüm serisi,

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{-\hbar}{2}e^{-t} + \hbar e^{-2t} - \frac{\hbar}{2}e^{-3t} \\ V_2(t) &= \frac{-\hbar}{2}(1+\frac{\hbar}{2})e^{-t} + \hbar(1+\frac{\hbar}{2})e^{-2t} \\ &\quad -\frac{\hbar}{2}(1+\hbar)e^{-3t} + \frac{\hbar^2}{2}e^{-4t} - \frac{\hbar^2}{4}e^{-5t} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

olur. $V(t)$'nin m-inci mertebeden yaklaşımı

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{2m+1} \gamma_{m,n}(\hbar)\exp(-nt) \tag{3.64}$$

şeklinde genel olarak verilebilir. $\gamma_{m,n}(\hbar)$ terimi $\hbar$'a bağlı bir katsayıdır.

(3.64) denkleminde $\hbar$ parametresine bağlı çözüm ifadelerinin bir ailesi olarak adlandırılabilir. Bu serinin yakınsaklığında $\hbar$'ın etkisi incelendiğinde $V''(0)$ ve $V'''(0)$ 'ın $\hbar$ eğrileri olarak adlandırıldığını söyleyebiliriz. Böylece $\hbar$-eğrilerine göre yatay eksene paralel olan $\hbar$'ın tanım bölgesi belirlenir. Böylece $\hbar$'ın tanım bölgesinde (3.64) ile verilen $V''(0)$ ve $V'''(0)$ serileri yakınsaktır. Yakınsaklık teoremine göre sırasıyla $V''(0)$ ve $V'''(0)$ tam değere yakınsar. $\hbar = -1$ olduğunda serilerin daha hızlı yakınsadığı görülür. $V''(0)$ ve $V'''(0)$ serilerinin yakınsak olması şartıyla $V(t)$'nin (3.64) ifadesine tekabül eden çözüm serisi $0 \leq t < \infty$ bölgesinin tamamında (3.b) tam çözümüne yakınsar. Genellikle $\hbar$ eğrileri çözüm serisinin yakınsaklığını araştırmak için uygundur.

(3.64) çözüm serisi $0 \leq t < \infty$ bölgesinin tamamında geçerlidir. $\hbar = -1$ olduğunda (3.64)'ün onuncu mertebeden yaklaşımı bile tam çözüme yakınsar. Yani (3.64) serisinin (3.56)'dan daha etkili olduğu ve (3.56) ifadesinin 3.44)'den daha etkili olduğu söylenebilir. Böylece verilen bir lineer olmayan problemin homotopi analiz metodu ile çözümünde temel fonksiyonun iyi seçilmesinin çok önemli olduğu görülmektedir.

$V(t)$'nin (3.64) ile verilen m-inci mertebeden yaklaşımı açık olarak

$$V(t) \approx 1 + 2\sum_{n=1}^{m}[(-1)^n \exp(-nt)]\mu_0^{m,n}(\frac{\hbar}{2}) - \exp(-t)[(1+\frac{\hbar}{2}) + \frac{\hbar}{2}\exp(-2t)]^m \quad (3.65)$$

şeklinde ifade edilir ve burada $\mu_0^{m,n}(x)$ fonksiyonu (3.45) ile belirlenir. $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonunun yeniden oluşması oldukça ilginçtir. (3.46) ifadesinden dolayı $\hbar = -2$ olduğunda

$$V(t) \approx 1 + 2\sum_{n=1}^{m}(-1)^n \exp(-nt) + (-1)^{m+1}\exp[-(2m+1)t] \quad (3.66)$$

elde edilir. (3.b) tam çözümü

$$V(t) \approx 1 + 2\sum_{n=1}^{m}(-1)^n \exp(-nt) \quad (3.67)$$

şeklindeki bir seriye açılabilir. Bu seri $0 < t < \infty$ bölgesinde tam çözüme yakınsar fakat $t = 0$ noktasında ya 1 ya da -1 verildiğinde yakınsaktır.

Bununla birlikte

$$(-1)^{m+1}\exp[-(2m+1)t]$$

şeklindeki ilave bir terim ile (3.66) ifadesi $t = 0$ noktasında $0 \leq t < \infty$ bölgesinin tamamında tam çözüme yakınsar. (3.66) ile verilen $V(t)$'nin

$$V(t) \approx 1 - 2\exp(-2t) + 2\exp(-4t) - 2\exp(-6t) + \exp(-7t) \quad (3.68)$$

şeklindeki üçüncü mertebeden yaklaşımı bile tam çözüme çok yakındır.

Burada yaklaşımı genişletmeyen

$$\frac{\ln(1+t)}{(1+t)} \quad , \quad t\exp(-t)$$

gibi terimlerin oluşmasından kaçınılır. Bazı perturbasyon teknikleri perturbasyon çözümlerinde;

$$t\sin t \quad , \quad t\cos t$$

gibi seküler terim olarak adlandırılan terimlerin oluşmasından kaçınılacak şekilde geliştirilmiştir. Bununla birlikte $t \to \infty$ iken $\frac{\ln(1+t)}{(1+t)}$ ve $t\exp(-t)$ terimleri oluşur. Bu terimler perturbasyon tekniklerindeki seküler terim olarak adlandırılmazlar. Böylece; çözüm ifadesinin kuralı bu düşüncenin genelleştirilmiş hali gibi görülebilir.

$V(t)$ ifadesi

$$\{t^m \exp(-nt) / \quad m \geq 0 \quad , \quad n \geq 1\} \tag{3.69}$$

temel fonksiyonları ile ifade edilebilir. (3.59)'da ki gibi benzer başlangıç şartı kullanılır. Yardımcı lineer operatör de (3.60) ile benzerdir fakat yardımcı fonksiyon

$$H(t) = 1 \tag{3.70}$$

(3.63)'den farklıdır. Benzer $V(t)$'nin m-inci mertebeden yaklaşımını elde edebilirirz ve bu yaklaşımı açık olarak;

$$V(t) \approx 1 + 2\sum_{n=1}^{m+1} \sum_{k=0}^{m+1-n} \sigma_0^{m,n,k}(\hbar)[(-1)^n \frac{(-nt)^k}{k!} \exp(-nt)] \tag{3.71}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$\sigma_0^{m,n,k}(\hbar) = \frac{1}{2}[\mu_0^{m,n+k}(\hbar) + \mu_0^{m,n+k-1}(\hbar)] \tag{3.72}$$

dır. Burada; $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonunun tekrar oluşması ilginçtir.

Sonuç olarak söyleyebiliriz ki; Homotopi Analiz metodunda $V(t)$ dört farklı temel fonksiyon ile ifade edilebilir. Buna rağmen örnek problemin yalnzca bir çözümü elde edilir. Sonuçta (3.44), (3.56), (3.65) ve (3.71) çözüm ifadelerinin ailesi elde edildi. Teorik olarak bu çözümlerin hepsi $0 \leq t < \infty$ bölgesinde $V(t) = \tanh(t)$ tam çözümüne yakınsaktır. Ancak (3.44) çözümü diğer çözümü diğer çözümlerden daha az etkilidir. Çünkü $-2 < t < 0$'ın verilen bir değeri için sonlu bir bölgede yakınsaktır. Üstel kuvvetlere dayanan (3.65) çözümünün kesirli fonksiyonlara dayanan (3.56) çözümünden daha etkili olduğu ve hatta polinom ve üstel fonksiyonların birleştirilmesiyle elde edilen (3.71) çözümünün (3.56) ve (3.65) çözümüne göre daha etkili olduğu görülür.

Böylece homotopi analiz metodu ile çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi ve hızı $\hbar$'ın geçerlilik bölgesinde uygun bir seçimiyle kontrol edilebileceği görülür. Bu metod ile yakınsaklık bölgesinin genişletilmesine gerek duyulmadan $\hbar$'ın uygun seçimiyle etkili bir çözüm elde edilebilir.

3.4. $\hbar$ Yardımcı Parametresinin Rolü

Daha önce de belirtildiği gibi Homotopi analiz metodu topolojinin temel kavramı olan homotopi'ye dayanmaktadır. Sıfırdan farklı $\hbar$ yardımcı parametresi klasik bir homotopiden daha genel bir homotopi ile verilen sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminde tanıtılmıştı. Daha önceden bilinen analitik yöntemlerin aksine homotopi analiz metodu $\hbar$ yardımcı parametresi ile çözüm ifadelerinin bir ailesini oluşturur. Bunun sonucu olarak çözümün yakınsaklık bölgesi ve hızı $\hbar$ yardımcı parametresine bağlıdır ve $\hbar$ yardımcı parametresinin uygun bir şekilde seçilmesiyle yakınsaklık bölgesi genişletilebilir. Böylece Homotopi analiz metodu ile verilen çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi ve hızının ayarlanmasında ve kontrolünde uygun ve güvenilir bir yol sağlanmış olur. Bu alt bölümde bir yardımcı parametre ile serilerin yakınsaklık bölgesinin gerçekten ayarlanabilir ve kontrol edilebilir olduğunu tamamen farklı bir şekilde ispatlayacağız. Bu ispat bize homotopi analiz metodunun geçerliliği için rasyonel bir temel sağlayabilir.

İlk olarak (3.44), (3.65) ve (3.71) çözüm ifadesinde oluşan $\mu_0^{m,n}(\hbar)$, (3.45) tanımı homotopi analiz metodu ile elde edilir. Burada ilginç olan aynı tanımın Newton'un binom teoreminden direkt olarak elde edilebilmesidir. Bunu göstermek için

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n t^n \quad , \quad |t| < 1 \tag{3.73}$$

serisini göz önüne alalım.

$$x = 1 + \hbar + \hbar t$$

eşitliği

$$\frac{1}{1+t} = -\frac{\hbar}{(1-x)}$$

ifadesini verecek şekilde tanımlansın. $|x| = |1 + \hbar + \hbar t| < 1$ ve $|1 + \hbar| < 1$ olduğunda

$$-1 < t < \frac{2}{|\hbar|} - 1 \quad , \quad -2 < \hbar < 0$$

olur. Böylece

$$\frac{1}{1+t} = -\frac{\hbar}{(1-x)} = -\hbar(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = -\hbar \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \hbar + \hbar t)^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{1+t} = \lim_{m\to\infty}[-\hbar\sum_{n=0}^{m}(1+\hbar+\hbar t)^n]$$

ifadesi

$$-1 < t < \frac{2}{|\hbar|} - 1 \qquad (-2 < \hbar < 0)$$

bölgesinde geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}
-\hbar\sum_{n=0}^{m}(1+\hbar+\hbar t)^n &= -\hbar\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+\hbar)^{n-k}(\hbar t)^k \\
&= -\hbar\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=k}^{m}\binom{n}{k}(1+\hbar)^{n-k}\hbar^k t^k \\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k t^k(-\hbar)^{k+1}\sum_{i=0}^{m-k}\binom{k+i}{k}(1+\hbar)^i \\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k t^k[(-\hbar)^{k+1}\sum_{i=0}^{m-k}\binom{k+i}{i}(1+\hbar)^i] \\
&= \sum_{n=0}^{m}(-1)^n t^n \mu_{-1}^{m,n}(\hbar)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\mu_{-1}^{m,n}(\hbar) = (-\hbar)^{n+1}\sum_{j=0}^{m-n}\binom{n+j}{j}(1+\hbar)^j \tag{3.74}$$

dir. (3.45) ifadesi ile karşılaştırılırsa;

$$\mu_{-1}^{m,n}(\hbar) = \mu_0^{m+1,n+1}(\hbar) \tag{3.75}$$

şeklinde bir ilişki bulunur. Böylece

$$\frac{1}{1+t} = \lim\sum_{n=0}^{m}\mu_0^{m+1,n+1}(\hbar)[(-1)^n t^n] \tag{3.76}$$

ifadesi

$$-1 < t < \frac{2}{|\hbar|} - 1 \qquad (-2 < \hbar < 0)$$

bölgesinde elde edilir.

Açık olarak sırasıyla $\hbar = -1$ olduğunda $-1 < t < 1$ bölgesinin, $\hbar = -\frac{1}{2}$ olduğunda $-1 < t < 3$ bölgesinin ve $\hbar = -\frac{1}{50}$ olduğunda $-1 < t < 99$ bölgesinin yakınsaklık bölgesi olduğu görülür. Özellikle $\hbar \to 0$ iken

$$-1 < t < \infty$$

yakınsaklık bölgesi olur. Böylece (3.76) serisinin yakınsaklık bölgesi $\hbar$ yardımcı parametresi ile ayarlanabilir ve kontrol edilebilir.

4. BÖLÜM

4.1. Kompaktonlar

1993 yılının başında Rosenau ve Hyman [4], kompakton olarak adlandırılan kompakt destekli solitary dalgaların bir sınıfını verdi. Kompaktonlar, sonlu dalga uzunluğuna sahip veya üst üste gelmeyen solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir deyişle kompaktonlar, uçları sonsuza gitmeyen solitonlar olarak ifade edilir ve solitonların aksine bir kompaktonun genişliği, genlikten bağımsızdır. Rosenau ve Hyman doğa olaylarında, solitary dalgalarının; nitelik olarak büyük değişikliklere neden olabilen lineer olmayan bir saçılmanın etkisi altında kompaktlaşabileceğini ispatladı. Kompaktonların esnek bir şekilde çarpıştığı ve daha sonra benzer bir şekilde tekrar ortaya çıktığı ispatlanmıştır. Sonlu bir merkez bölgenin dışında ortadan kaybolan solitary dalga çözümleri;

$$u_t + (u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \qquad n > 1$$

olarak verilen lineer olmayan K(n,n) saçılma denklemlerinin iki parametreye sahip ailesinin çözümleridir.

Solitonlar zayıf nonlineerlik ile saçılma arasındaki dengenin bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bununla birlikte, dalga saçılması tamamen lineer olmayan olduğu zaman bazı orjinal özellikler gözlenebilir. Lineer olmayan saçılmanın en ilgi çekici özelliği, sonlu dalga uzunluğuna sahip ve üst üste gelmeyen solitonlar olan kompaktonların varlığıdır.

Kompaktonlar, solitonların olağanüstü bir özelliği olan, diğer kompaktonlarla çarpışmadan sonra aynı şekille ortaya çıkma özellikli, solitary dalgaları olarak tanımlanır. Dalga saçılması tamamen lineer olmayan ise, bazı orjinal özelliklerin gözlemlenebildiği ve bu olağanüstü özelliklerden en kayda değer olanının kompaktonların varlığı olduğu [4]'de verilmiştir. Şu ana kadar verilen kompakton tanımları aşağıdaki gibidir:

(i) Kompaktonlar, sonlu dalga uzunluğuna sahip solitonlardır.

(ii) Kompaktonlar, kompakt destekli solitary dalgalardır.

(iii) Kompaktonlar, üst üste gelmeyen solitonlardır.

(iv) Kompaktonlar, solitonlara benzer dirençli solitonlardır.

Lineer olmayan ZK(n,n,n) saçılma denklemleri, $a > 0$ için kompakt solitary yapıya sahip ve

$$u_t + a\,(u^n)_x + b\,(u^n)_{xxx} + k\,(u^n)_{yyx} = 0, \qquad a > 0, \quad n > 1,\ b > 0,\ k > 0 \tag{4.1}$$

formunda bir lineer olmayan KdV denklemi ailesidir. Kompakt yapıların kararlılığı ve varlığı [5] de incelenmiştir.

Kompaktonların bu önemli keşfi, son yıllardaki birçok önemli çalışmaya öncülük etmiştir. Kompakton çalışması Hidrodinamik modellerdeki demetlerin performasyonu, akışkan damlaların fizyonu ve eylemsiz füzyon gibi birçok bilimsel yöntemi anlayabilme imkanı verir.

Kompaktonlar hakkında daha fazla bilgi için [5]-[10] daki, ayrıca farklı denklemlerin soliton, kompakton, solitary pattern, periodic dalga çözümleri için [11]-[15] deki referanslara bakılabilir.

4.2. Homotopi Analiz Metodunun ZK(2,2,2) ve ZK(3,3,3) Denklemlerine Uygulanması

(4.1) denkleminde sırasıyla $n = 2$ ve $n = 3$ alınmasıyla ZK(2,2,2) ve ZK(3,3,3) denklemleri elde edilir. Başlangıç şartlı bu denklemlerin 3.Bölümde izah edilen HAM yöntemiyle kompakton çözümlerinin nasıl elde edileceği verilecektir.

Örnek 4.1:

$$u(x,0) = \frac{4c}{3a}\sin^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right), \tag{4.2}$$

başlangıç şartlı,

$$u_t + a(u^2)_x + b(u^2)_{xxx} + k(u^2)_{yyx} = 0, \tag{4.3}$$

ZK(2,2,2) denklemini göz önüne alalım. (4.2) ve (4.3) ile verilen probleme HAM yöntemini uygulayalım.

$$\mathcal{L}[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t}, \tag{4.4}$$

operatörü

$$\mathcal{L}[c] = 0, \tag{4.5}$$

özelliğine sahip lineer operatör olsun. Lineer olmayan operatör ise

$$N[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t} + a\frac{\partial [\Phi(x,t;p)]^2}{\partial x} + b\frac{\partial^3 [\Phi(x,t;p)]^2}{\partial x^3} + k\frac{\partial^3 [\Phi(x,t;p)]^2}{\partial y^2 \partial x}, \tag{4.6}$$

olsun. Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi;

$$(1-p)\mathcal{L}[\Phi(x,t;p) - u_0(x,t)] = p\hbar H(x) N[\Phi(x,t;p)], \tag{4.7}$$

şeklindedir. $p = 0$ ve $p = 1$ için sırasıyla

$$\begin{cases} \Phi(x,t;0) = u_0(x,t), \\ \Phi(x,t;1) = u(x,t), \end{cases} \tag{4.8}$$

olur. m-inci mertebeden deformasyon denklemi ise

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)), \\ u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)], \end{cases} \tag{4.9}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t) &= \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{m-1} u_n(x,t) u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{m-1} u_n(x,t) u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad + k\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}(\sum_{n=0}^{m-1} u_n(x,t) u_{m-1-n}(x,t)), \end{aligned} \tag{4.10}$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & , \quad m \leq 1 \\ 1 & , \quad m > 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

dir. Buna göre (4.10) ifadesinde m'nin çeşitli değerleri için (4.9) deformasyon formülünü kullanarak aşağıdaki çözüm serisinin terimleri elde edilir.

$m = 1$ için

$$\begin{aligned} R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t)) &= \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{0} u_n(x,t)u_{-n}(x,t)) \\ &\quad + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{0} u_n(x,t)u_{-n}(x,t)) \\ &\quad + k\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}(\sum_{n=0}^{0} u_n(x,t)u_{-n}(x,t)) \\ &= a\frac{\partial}{\partial x}(u_0^2) + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_0^2) + k\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}(u_0^2) \\ &= \frac{c^2\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{3a}, \end{aligned}$$

ve

$$u_1(x,t) = \hbar\int_o^t R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t))dt = \frac{c^2\hbar\sqrt{\frac{a}{b+k}}t\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{3a}, \tag{4.12}$$

elde edilir.

$m = 2$ için

$$\begin{aligned} R_2(\overrightarrow{u}_1(x,t)) &= \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{1} u_n(x,t)u_{1-n}(x,t)) \\ &\quad + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{1} u_n(x,t)u_{1-n}(x,t)) \\ &\quad + k\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}(\sum_{n=0}^{1} u_n(x,t)u_{1-n}(x,t)) \\ &= \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(2u_0u_1) + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(2u_0u_1) + k\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x}(2u_0u_1) \\ &= \frac{c^2\hbar(act\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) + \frac{2a\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}}}{6a(b+k)}, \end{aligned}$$

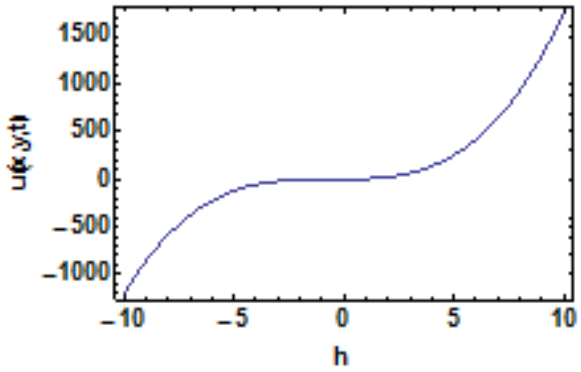
ve

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= u_1(x,t) + \hbar\int_o^t R_2(\overrightarrow{u}_1(x,t))dt \qquad (4.13) \\ &= \frac{c^2\hbar t(ac\hbar t\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) + \frac{4a(1+\hbar)\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}}}{12a(b+k)}, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.12)-(4.13) terimlerini (3.25) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki çözüm serisi elde edilir.

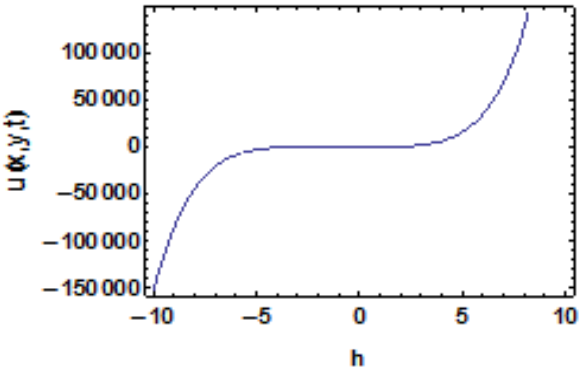
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} u_i(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \\
&= \frac{4c}{3a}\sin^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) + \frac{c^2\hbar\sqrt{\frac{a}{b+k}}t\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}{3a} \\
&\quad + \frac{c^2\hbar t\left(ac\hbar t\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) + \frac{4a(1+\hbar)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}}\right)}{12a(b+k)} \qquad (4.14) \\
&= \frac{c}{12a(b+k)}\{ac^2\hbar^2t^2\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) \\
&\quad + 8(b+k)\sin\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)[c\hbar(2+\hbar)t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\cos\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) \\
&\quad + 2\sin\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)]\}
\end{aligned}$$

$\hbar$'ın hangi değerleri için çözüm serisinin yakınsak sonuçlar verdiği aşağıdaki grafiklerle görülebilir.



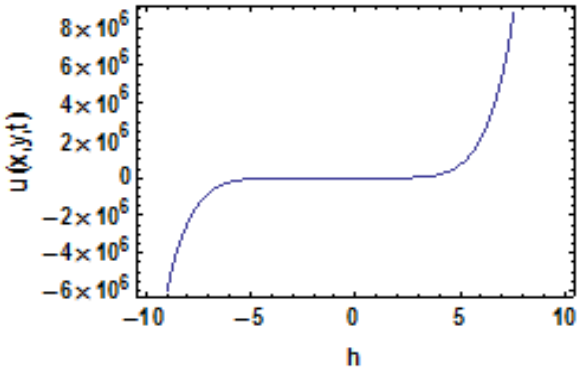
Şekil 1. HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

$$c = t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$



Şekil 2. HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

$$c = t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$



Şekil 3. HAM ile çözüm serisinin yedi terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

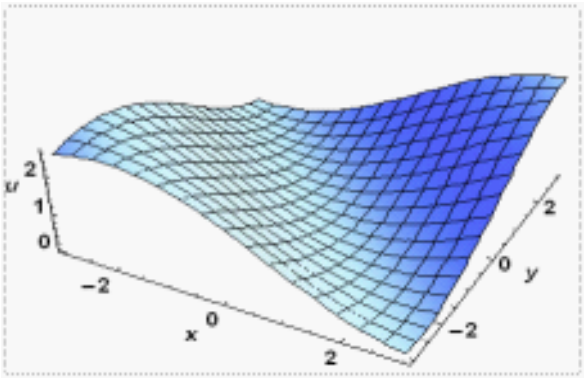
$$c = t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$

Grafiklerden de görüldüğü gibi $-5 \leq \hbar \leq 5$ değerleri için yaklaşık çözüm analitik çözüme yakınsayan değerler vermektedir.

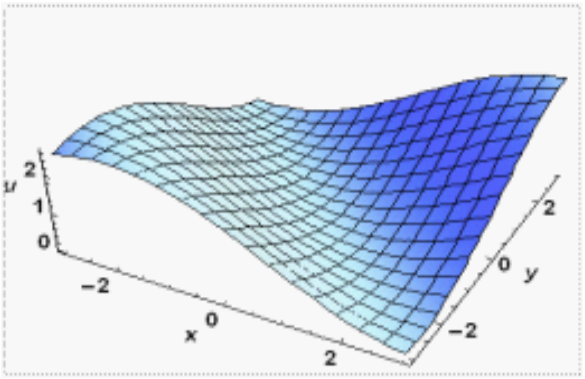
Tablo 1. HAM yöntemiyle elde edilen çözüm serisinin yedi terimi alınarak bulunan mutlak hata,

$$c = x = 0.1, y = 0.1, \hbar = -0.99, a = b = 2, k = 1.$$

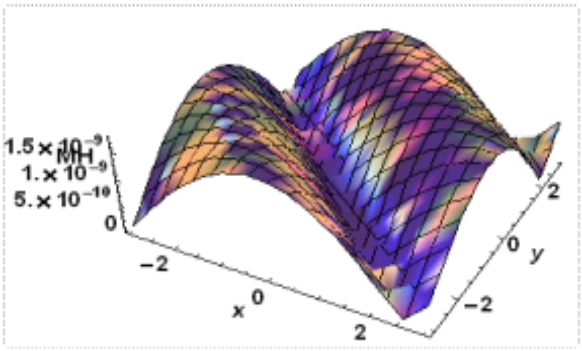
x	Analitik Çözüm	HAM	Mutlak Hata
0.1	0.000100228	0.000100228	$1.70762E-18$
0.2	0.0000899595	0.0000899595	$5.86824E-18$
0.3	0.0000802456	0.0000802456	$8.13152E-18$
0.4	0.0000710858	0.0000710858	$1.6263E-18$
0.5	0.0000624805	0.0000624805	$-2.25785E-17$
0.6	0.0000544296	0.0000544296	$-7.44847E-17$
0.7	0.0000469334	0.0000469334	$-1.63647E-16$
0.8	0.000039992	0.000039992	$-2.97939E-16$
0.9	0.0000336055	0.0000336055	$-4.81454E-16$
1.0	0.0000277739	0.0000277739	$-7.1187E-16$



Şekil 4. (4.14) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen analitik çözümün $3-$boyutlu resmi



Şekil 5. (4.14) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen yaklaşık çözümün $3-$boyutlu resmi



Şekil 6. (4.14) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen mutlak hatanın $3-$boyutlu resmi

Örnek 4.2.:

$$u(x,0) = \frac{4c}{3a}\sinh^2(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)), \tag{4.15}$$

başlangıç şartlı,

$$u_t + a(u^2)_x + b(u^2)_{xxx} + k(u^2)_{yyx} = 0 \tag{4.16}$$

ZK(2,2,2) denklemini göz önüne alalım. (4.15) ve (4.16) ile verilen probleme HAM yöntemini uygulayalım.

$$\mathcal{L}[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial\Phi(x,t;p)}{\partial t} \tag{4.17}$$

operatörü

$$\mathcal{L}[c] = 0 \tag{4.18}$$

özelliğine sahip lineer operatör olsun. Lineer olmayan operatör ise

$$N[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial\Phi(x,t;p)}{\partial t} + a\frac{\partial[\Phi(x,t;p)]^2}{\partial x} + b\frac{\partial^3[\Phi(x,t;p)]^2}{\partial x^3} + k\frac{\partial^3[\Phi(x,t;p)]^2}{\partial y^2\partial x} \tag{4.19}$$

olsun. Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi;

$$(1-p)\mathcal{L}[\Phi(x,t;p) - u_0(x,t)] = p\hbar H(x)N[\Phi(x,t;p)] \tag{4.20}$$

şeklindedir. $p=0$ ve $p=1$ için sırasıyla

$$\begin{cases} \Phi(x,t;0)=u_0(x,t), \\ \Phi(x,t;1)=u(x,t) \end{cases} \tag{4.21}$$

olur. m-inci mertebeden deformasyon denklemi

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u_m(x,t)-\chi_m u_{m-1}(x,t)]=\hbar R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)), \\ u_m(x,t)=\chi_m u_{m-1}(x,t)+\hbar\mathcal{L}^{-1}[R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)] \end{cases} \tag{4.22}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t) &= \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{m-1}u_n(x,t)u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad +b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{m-1}u_n(x,t)u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad +k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{m-1}u_n(x,t)u_{m-1-n}(x,t)), \end{aligned} \tag{4.23}$$

ve

$$\chi_m=\begin{cases} 0 & , \quad m\leq 1 \\ 1 & , \quad m>1 \end{cases} \tag{4.24}$$

dir. Buna göre (4.23) ifadesinde m'nin çeşitli değerleri için (4.22) deformasyon formülünü kullanarak aşağıdaki çözüm serisinin terimleri elde edilir.

$m=1$ için

$$\begin{aligned} R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t)) &= \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{0}u_n(x,t)u_{-n}(x,t)) \\ &\quad +b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{0}u_n(x,t)u_{-n}(x,t)) \\ &\quad +k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{0}u_n(x,t)u_{-n}(x,t)) \\ &= a\frac{\partial}{\partial x}(u_0^2)+b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_0^2)+k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(u_0^2) \\ &= \frac{c^2\sqrt{\frac{a}{b+k}}[-5+8\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))]\sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{9a}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \hbar \int_0^t R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t))dt \qquad (4.25)\\
&= \frac{c^2\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}[-5+8\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))]\sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{9a}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$m=2$ için

$$
\begin{aligned}
R_2(\overrightarrow{u}_0(x,t)) &= \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{1} u_n(x,t)u_{1-n}(x,t))\\
&\quad + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{1} u_n(x,t)u_{1-n}(x,t))\\
&\quad + k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{1} u_n(x,t)u_{1-n}(x,t))\\
&= a\frac{\partial}{\partial x}(2u_0u_1) + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(2u_0u_1) + k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(2u_0u_1)\\
&= \frac{c^2\hbar}{54a(b+k)}\{35act\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) - 104act\cosh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))\\
&\quad +6[13act\cosh(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))\\
&\quad +\frac{a}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}}(-5\sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) + 4\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)))]\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x,t) &= u_1(x,t) + \hbar\int_0^t R_2(\overrightarrow{u}_1(x,t))dt\\
&= \frac{c^2\hbar t}{108a(b+k)}\{35ac\hbar t\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) - 104ac\hbar t\cosh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \qquad (4.26)\\
&\quad +6[13ac\hbar t\cosh(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))\\
&\quad +\frac{2a(1+\hbar)}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}}(-5\sinh(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) + 4\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)))]\},
\end{aligned}
$$

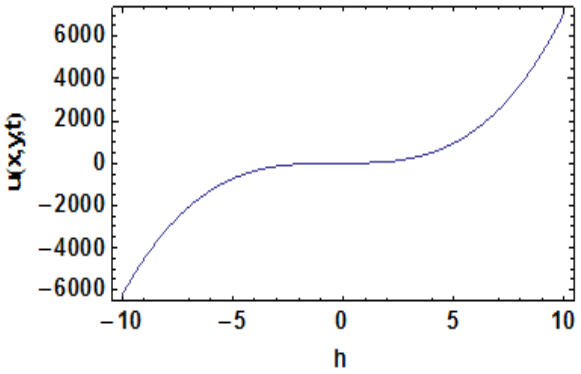
elde edilir.

Böylece (4.25)-(4.26) terimlerini (3.25) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki çözüm

serisi elde edilir.

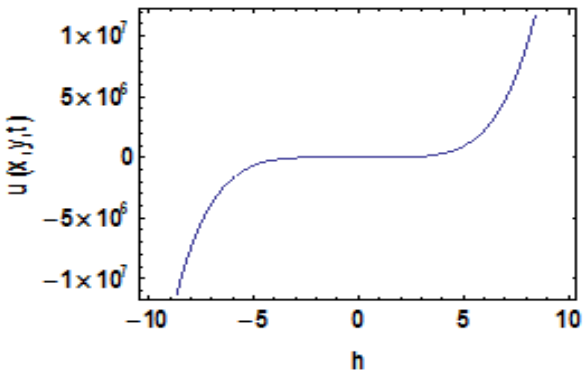
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} u_i(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \\
&= \frac{4c}{3a}\sinh^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) \\
&\quad + \frac{c^2\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\left[-5+8\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)\right]\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}{9a} \\
&\quad + \frac{c^2\hbar t}{108a(b+k)}\{35ac\hbar t\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) - 104ac\hbar t\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) \\
&\quad + 6[13ac\hbar t\cosh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) \\
&\quad + \frac{2a(1+\hbar)}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}}\left(-5\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right) + 4\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)\right)]\},
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$\hbar$'ın hangi değerleri için çözüm serisinin yakınsak sonuçlar verdiği aşağıdaki grafiklerle görülebilir.



Şekil 7. HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

$$c = t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$



Şekil 8. HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

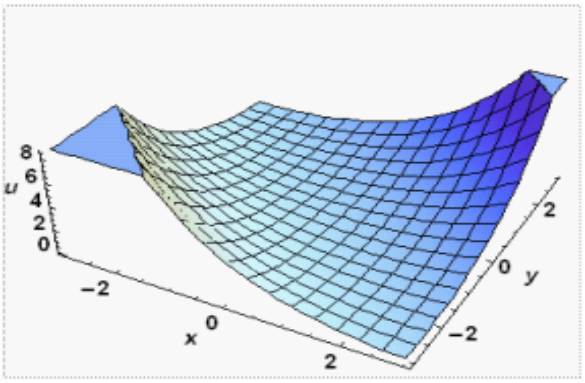
$$c = t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$

Grafiklerden de görüldüğü gibi $-5 \leq \hbar \leq 5$ değerleri için yaklaşık çözüm analitik çözüme yakınsayan değerler vermektedir.

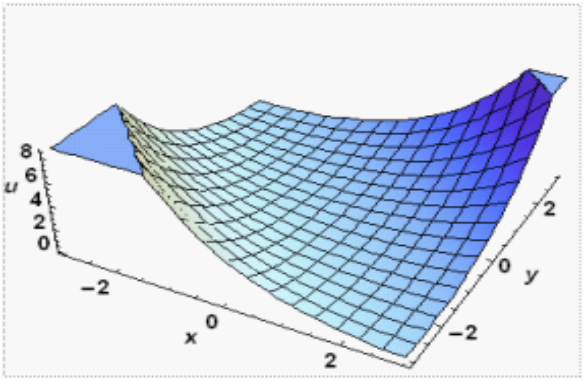
Tablo 2. HAM yöntemiyle elde edilen çözüm serisinin beş terimi alınarak bulunan mutlak hata,

$$c = x = 0.1, y = 0.1, \hbar = -0.99, a = b = 2, k = 1, .$$

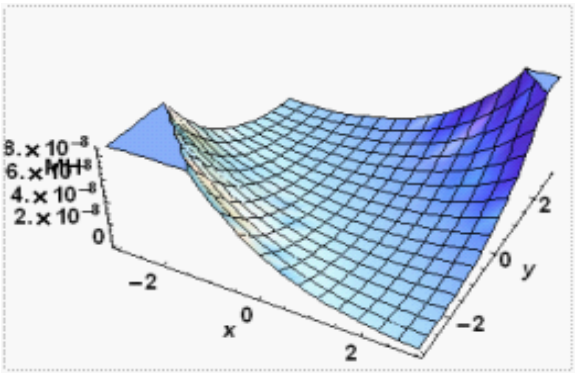
x	*Analitik Cözüm*	*HAM*	*Mutlak Hata*
0.1	0.000100258	0.000100328	$6.96339E-8$
0.2	0.0000899484	0.0000900405	$9.21239E-8$
0.3	0.0000802271	0.00008031	$8.28774E-8$
0.4	0.0000710813	0.0000711364	$5.51458E-8$
0.5	0.0000624993	0.0000625195	$2.02711E-8$
0.6	0.0000544713	0.0000544593	$-1.20666E-8$
0.7	0.0000469891	0.0000469555	$-3.36028E-8$
0.8	0.0000400452	0.000040008	$-3.72409E-8$
0.9	0.0000336336	0.0000336168	$-1.68059E-8$
1.0	0.0000277484	0.0000277816	$3.32033E-8$



Şekil 9. (4.27) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen analitik çözümün 3−boyutlu resmi



Şekil 10. (4.27) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen yaklaşık çözümün 3−boyutlu resmi



Şekil 11. (4.27) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen mutlak hatanın $3-$boyutlu resmi

Örnek 4.3.:

$$u(x,0) = \sqrt{\frac{3c}{2a}\cos^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}, \tag{4.28}$$

başlangıç şartlı,

$$u_t + a(u^3)_x + b(u^3)_{xxx} + k(u^3)_{yyx} = 0 \tag{4.29}$$

ZK(3,3,3) denklemini göz önüne alalım. (4.28) ve (4.29) ile verilen probleme HAM yöntemini uygulayalım.

$$\mathcal{L}[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t} \tag{4.30}$$

operatörü

$$\mathcal{L}[c] = 0 \tag{4.31}$$

özelliğine sahip lineer operatör olsun. Lineer olmayan operatör ise

$$N[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t} + a\frac{\partial [\Phi(x,t;p)]^3}{\partial x} + b\frac{\partial^3 [\Phi(x,t;p)]^3}{\partial x^3} + k\frac{\partial^3 [\Phi(x,t;p)]^3}{\partial y^2 \partial x} \tag{4.32}$$

olsun. Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi;

$$(1-p)\mathcal{L}[\Phi(x,t;p) - u_0(x,t)] = p\hbar H(x) N[\Phi(x,t;p)] \tag{4.33}$$

şeklindedir. $p=0$ ve $p=1$ için sırasıyla

$$\begin{cases} \Phi(x,t;0)=u_0(x,t), \\ \Phi(x,t;1)=u(x,t) \end{cases} \tag{4.34}$$

olur. m-inci mertebeden deformasyon denklemi

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u_m(x,t)-\chi_m u_{m-1}(x,t)]=\hbar R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)), \\ u_m(x,t)=\chi_m u_{m-1}(x,t)+\hbar\mathcal{L}^{-1}[R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)] \end{cases} \tag{4.35}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t) &= \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{m-1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad +b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{m-1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad +k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{m-1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{m-1-n}(x,t)), \end{aligned} \tag{4.36}$$

ve

$$\chi_m=\begin{cases} 0 & , \quad m\leq 1 \\ 1 & , \quad m>1 \end{cases} \tag{4.37}$$

dir. Buna göre (4.36) ifadesinde m'nin çeşitli değerleri için (4.35) deformasyon formülünü kullanarak aşağıdaki çözüm serisinin terimleri elde edilir.

$m=1$ için

$$\begin{aligned} R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t)) &= \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{0}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{-n}(x,t)) \\ &\quad +b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{0}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{-n}(x,t)) \\ &\quad +k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{0}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{-n}(x,t)) \\ &= a\frac{\partial}{\partial x}(u_0^3)+b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_0^3)+k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(u_0^3) \\ &= -\frac{c\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{c\cos^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{a}}\tan(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{\sqrt{6}}, \end{aligned}$$

$$u_1(x,t) = \hbar\int_0^t R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t))dt \tag{4.38}$$
$$= \frac{c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{c\cos^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{a}}\tan(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{\sqrt{6}}$$

elde edilir.

$m = 2$ için

$$\begin{aligned}
R_2(\overrightarrow{u}_0(x,t)) &= \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{1-n}(x,t)) \\
&\quad + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{1-n}(x,t)) \\
&\quad + k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{1-n}(x,t)) \\
&= a\frac{\partial}{\partial x}(3u_1u_0^2) + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(3u_1u_0^2) + k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(3u_1u_0^2) \\
&= \frac{c\hbar}{3\sqrt{6}(b+k)}\sqrt{\frac{c\cos^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{a}}(act \\
&\quad + \frac{3a\tan(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= u_1(x,t) + \hbar\int_0^t R_2(\overrightarrow{u}_1(x,t))dt \\
&= \frac{c\hbar t}{6\sqrt{6}(b+k)}\sqrt{\frac{c\cos^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{a}}(ac\hbar t \\
&\quad + \frac{6a(1+\hbar)\tan(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}})
\end{aligned} \tag{4.39}$$

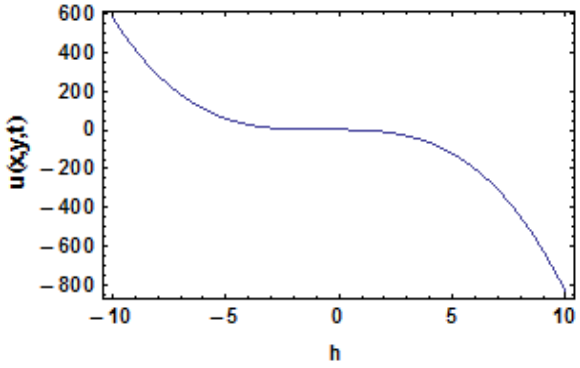
elde edilir.

Böylece (4.38)-(4.39) terimlerini (3.25) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki çözüm

serisi elde edilir.

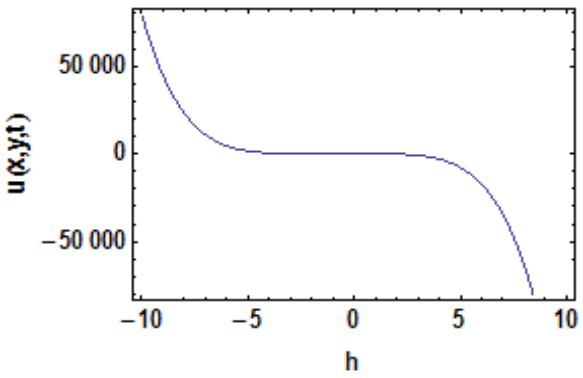
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2} u_i(x,t) &= u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)\\ &= \sqrt{\frac{3c}{2a}\cos^2\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}\\ &\quad+\frac{c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{c\cos^2\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}{a}}\tan\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}{\sqrt{6}}\\ &\quad+\frac{c\hbar t}{6\sqrt{6}(b+k)}\sqrt{\frac{c\cos^2\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}{a}}\left(ac\hbar t\right.\\ &\quad\left.+\frac{6a(1+\hbar)\tan\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)\right)}{\sqrt{\frac{a}{b+k}}}\right)\end{aligned} \tag{4.40}$$

$\hbar$'ın hangi değerleri için çözüm serisinin yakınsak sonuçlar verdiği aşağıdaki grafiklerle görülebilir.



Şekil 12. HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

$$c = t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$



Şekil 13. HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

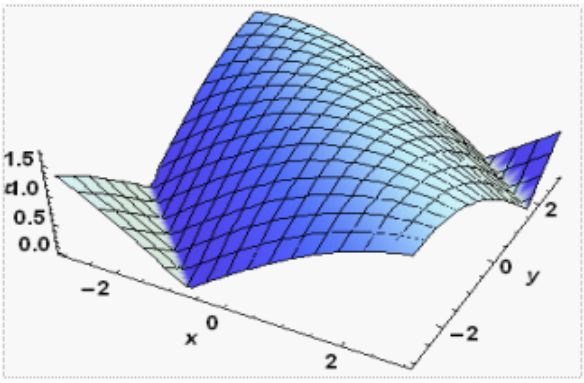
$$c = t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$

Grafiklerden de görüldüğü gibi $-5 \leq \hbar \leq 5$ değerleri için yaklaşık çözüm analitik çözüme yakınsayan değerler vermektedir.

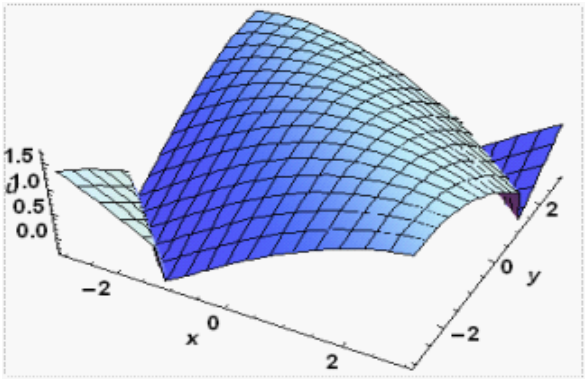
Tablo 3. HAM yöntemiyle elde edilen çözüm serisinin beş terimi alınarak bulunan mutlak hata,

$$c = x = 0.1, y = 0.1, \hbar = -0.99, a = b = 2, k = 1.$$

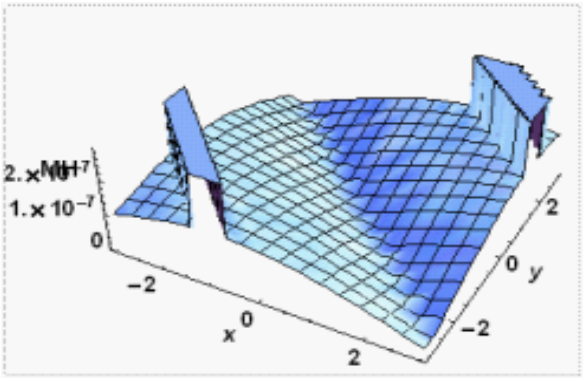
x	*Analitik Çözüm*	*HAM*	*Mutlak Hata*
0.1	0.273495	0.273495	$-4.60187E-14$
0.2	0.273533	0.273533	$-1.87017E-13$
0.3	0.273568	0.273568	$-4.03511E-13$
0.4	0.273602	0.273602	$-6.61915E-13$
0.5	0.273633	0.273633	$-9.1388E-13$
0.6	0.273662	0.273662	$-1.09662E-12$
0.7	0.27369	0.27369	$-1.13382E-12$
0.8	0.273715	0.273715	$-9.35751E-13$
0.9	0.273739	0.273739	$-4.00069E-13$
1.0	0.27376	0.27376	$5.88141E-13$



Şekil 14. (4.40) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen analitik çözümün 3−boyutlu resmi



Şekil 15. (4.40) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen yaklaşık çözümün 3−boyutlu resmi



Şekil 16. (4.40) çözüm serisinde $c = 1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen mutlak hatanın 3−boyutlu resmi

Örnek 4.4.:

$$u(x,0) = \sqrt{-\frac{3c}{2a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}, \tag{4.41}$$

başlangıç şartlı,

$$u_t + a(u^3)_x + b(u^3)_{xxx} + k(u^3)_{yyx} = 0 \tag{4.42}$$

ZK(3,3,3) denklemini göz önüne alalım. (4.41) ve (4.42) ile verilen probleme HAM yöntemini uygulayalım.

$$\mathcal{L}[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t} \tag{4.43}$$

operatörü

$$\mathcal{L}[c] = 0 \tag{4.44}$$

özelliğine sahip lineer operatör olsun. Lineer olmayan operatör ise

$$N[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial t} + a\frac{\partial[\Phi(x,t;p)]^3}{\partial x} + b\frac{\partial^3[\Phi(x,t;p)]^3}{\partial x^3} + k\frac{\partial^3[\Phi(x,t;p)]^3}{\partial y^2 \partial x} \tag{4.45}$$

olsun. Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi;

$$(1-p)\mathcal{L}[\Phi(x,t;p)-u_0(x,t)]=p\hbar H(x)N[\Phi(x,t;p)] \tag{4.46}$$

şeklindedir. $p=0$ ve $p=1$ için sırasıyla

$$\begin{cases} \Phi(x,t;0)=u_0(x,t), \\ \Phi(x,t;1)=u(x,t) \end{cases} \tag{4.47}$$

olur. m-inci mertebeden deformasyon denklemi

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u_m(x,t)-\chi_m u_{m-1}(x,t)]=\hbar R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)), \\ u_m(x,t)=\chi_m u_{m-1}(x,t)+\hbar\mathcal{L}^{-1}[R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)] \end{cases} \tag{4.48}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} R_m(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t) &= \frac{\partial u_{m-1}(x,t)}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{m-1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad +b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{m-1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{m-1-n}(x,t)) \\ &\quad +k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{m-1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{m-1-n}(x,t)), \end{aligned} \tag{4.49}$$

ve

$$\chi_m=\begin{cases} 0 & , \quad m\leq 1 \\ 1 & , \quad m>1 \end{cases} \tag{4.50}$$

dir. Buna göre (4.49) ifadesinde m'nin çeşitli değerleri için (4.48) deformasyon formülünü kullanırsak aşağıdaki çözüm serisinin terimleri elde edilir.

$m = 1$ için

$$\begin{aligned}
R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t)) &= \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{0}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{-n}(x,t)) \\
&\quad +b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{0}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{-n}(x,t)) \\
&\quad +k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{0}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{-n}(x,t)) \\
&= a\frac{\partial}{\partial x}(u_0^3) + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_0^3) + k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(u_0^3) \\
&= -\frac{c\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{-c}{a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}}{4\sqrt{6}\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}[5\sinh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad +9\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \hbar\int_0^t R_1(\overrightarrow{u}_0(x,t))dt \\
&= -\frac{c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{-c}{a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}}{4\sqrt{6}\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}[5\sinh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \quad (4.51) \\
&\quad +9\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))],
\end{aligned}$$

elde edilir.

$m = 2$ için

$$
\begin{aligned}
R_2(\overrightarrow{u}_0(x,t)) &= \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{n=0}^{1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{1-n}(x,t)) \\
&\quad +b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sum_{n=0}^{1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{1-n}(x,t)) \\
&\quad +k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(\sum_{n=0}^{1}(\sum_{i=0}^{n}u_i(x,t)u_{n-i}(x,t))u_{1-n}(x,t)) \\
&= a\frac{\partial}{\partial x}(3u_1u_0^2) + b\frac{\partial^3}{\partial x^3}(3u_1u_0^2) + k\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x}(3u_1u_0^2) \\
&= -\frac{c\hbar\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{-c}{a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}}{48\sqrt{6}(b+k)\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}[70act\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad +621\cosh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) + 765act\cosh(\frac{5}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad -60b\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sinh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) - 60k\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sinh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad -108b\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) - 108k\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x,t) &= u_1(x,t) + \hbar\int_0^t R_2(\overrightarrow{u}_1(x,t))dt \\
&= -\frac{c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{-c}{a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}}{96\sqrt{6}(b+k)\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))} \\
&\quad \{70c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad +3[207c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\cosh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad +225c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\cosh(\frac{5}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad -8(1+\hbar)(5\sinh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) + 9\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)))]\}
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

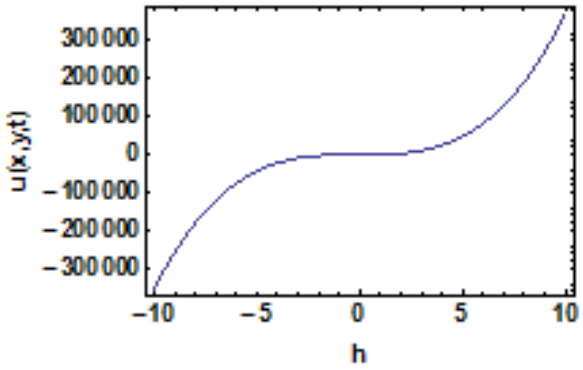
elde edilir.

Böylece (4.51)-(4.52) terimlerini (3.25) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki çözüm

serisi elde edilir.

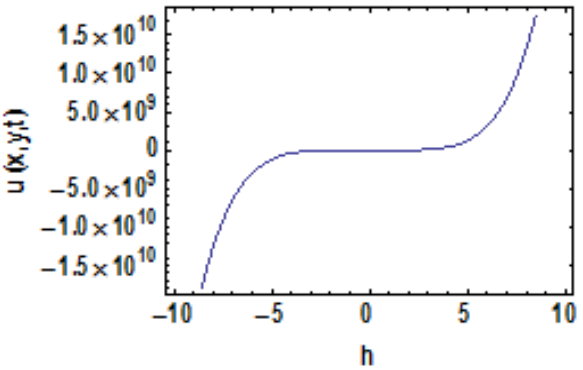
$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} u_i(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \\
&= \sqrt{-\frac{3c}{2a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))} \\
&\quad + - \frac{c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{-c}{a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}}{4\sqrt{6}\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}[5\sinh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad + 9\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))] \qquad (4.53) \\
&\quad + - \frac{c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\sqrt{\frac{-c}{a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))}}{96\sqrt{6}(b+k)\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y))} \\
&\quad \{70c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\cosh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad + 3[207c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\cosh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad + 225c\hbar t\sqrt{\frac{a}{b+k}}\cosh(\frac{5}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) \\
&\quad - 8(1+\hbar)(5\sinh(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)) + 9\sinh(\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y)))]\}
\end{aligned}
$$

$\hbar$'ın hangi değerleri için çözüm serisinin yakınsak sonuçlar verdiği aşağıdaki grafiklerle görülebilir.



Şekil 17. HAM ile çözüm serisinin üç terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

$$c = -1.5, t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$



Şekil 18. HAM ile çözüm serisinin beş terimi kullanılarak elde edilen $\hbar$'ın yakınsaklık aralığı,

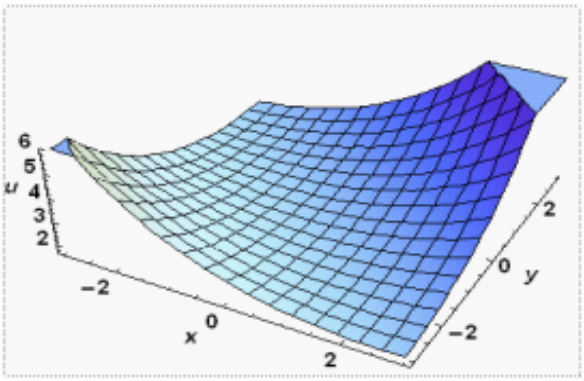
$$c = -1.5, t = 1.5, x = 0.1, y = a = 0.5, b = 0.05, k = 1.$$

Grafiklerden de görüldüğü gibi $-5 \leq \hbar \leq 5$ değerleri için yaklaşık çözüm analitik çözüme yakınsayan değerler vermektedir.

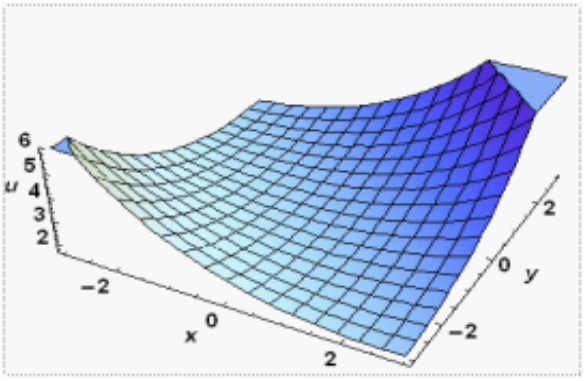
Tablo 4. HAM yöntemiyle elde edilen çözüm serisinin beş terimi alınarak bulunan mutlak hata,

$c = -0.01, x = 0.05, y = 0.01, \hbar = -0.02, a = b = 2, k = 1, .$

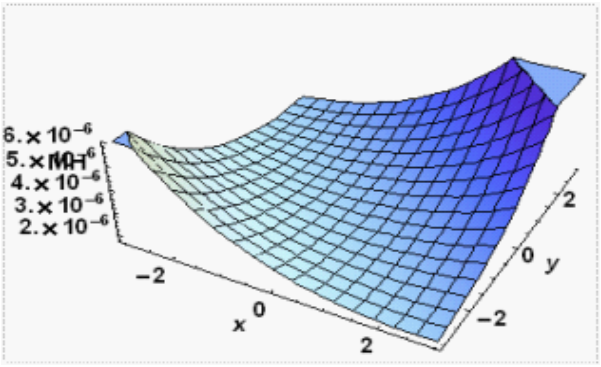
x	*Analitik Cözüm*	HAM	*Mutlak Hata*
0.1	0.0866138	0.0866145	$6.8295E-7$
0.2	0.0866135	0.0866149	$1.37007E-6$
0.3	0.0866132	0.0866153	$2.06135E-6$
0.4	0.0866129	0.0866157	$2.75681E-6$
0.5	0.0866126	0.0866161	$3.45643E-6$
0.6	0.0866124	0.0866165	$4.16022E-6$
0.7	0.0866121	0.0866169	$4.86818E-6$
0.8	0.0866118	0.0866174	$5.58031E-6$
0.9	0.0866115	0.0866178	$6.2966E-6$
1.0	0.0866112	0.0866183	$7.01707E-6$



Şekil 19. (4.53) çözüm serisinde $c = -1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen analitik çözümün 3−boyutlu resmi



Şekil 20. (4.53) çözüm serisinde $c = -1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen yaklaşık çözümün 3−boyutlu resmi



Şekil 21. (4.53) çözüm serisinde $c = -1, \hbar = -0.9, t = a = 0.5, b = 0.1$ ve $k = 0.3$. alınarak elde edilen mutlak hatanın 3−boyutlu resmi

SONUÇ

Bu tezde Çinli matematikçi Liao [17] tarafından sunulan HAM kullanılarak başlangıç şartlı ZK(2,2,2) ve ZK(3,3,3) denklemlerinin yaklaşık çözümleri elde edildi. Bu elde edilen çözümler ZK(2,2,2) denklemi için Tablo 1-2 ve Şekil 1-11 ile verildi. ZK(3,3,3) denklemi için elde edilen sonuçlar ise Tablo 3-4 ve Şekil 12-21 ile verildi. Bu tablo ve şekillller oluşturulurken çözüm serisinin on terimi kullanıldı. Ayrıca Şekil 1-2-3-7-8 ile $\hbar$ için ZK(2,2,2) denkleminin yakınsaklık aralığı, Şekil 12-13-17-18 ile de $\hbar$'ın ZK(3,3,3) denklemi için yakınsaklık aralığı verilmiştir.

Her iki örnek için de $\hbar$ değerinin -1'e yakın olması durumunda iyi sonuçlar elde edilmiş hatta $\hbar = -1$ olması durumunda aşağıdaki sırasıyla ZK(2,2,2) ve ZK(3,3,3) denklemleri için genel çözümleri bulunmuştur. $\mu = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}$ olmak üzere sırasıyla kompakton ve solitary pattern çözümleri bulunmuştur.

$$ZK(2,2,2) : u(x,y,t) = \begin{cases} \frac{4c}{3a}\sin^2(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y-ct), & |x-ct| \leq \frac{\pi}{\mu} \\ 0, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$ZK(2,2,2) : u(x,y,t) = \frac{4c}{3a}\sinh^2(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y-ct)$$

ve $\mu = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}$ olmak üzere;

$$ZK(3,3,3) : \ u(x,y,t) = \begin{cases} [\frac{3c}{2a}\cos^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y-ct)]^{\frac{1}{2}}, & |x-ct| \leq \frac{\pi}{2\mu} \\ 0, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$ZK(3,3,3) : u(x,y,t) = [-\frac{3c}{2a}\cosh^2(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{b+k}}(x+y-ct)]^{\frac{1}{2}}$$

Tablo ve şekillerden de görüldüğü gibi çözüm serisinin yakınsaklığı kompaktonun c hızına ve $\hbar$ yardımcı parametresinin uygun seçimine bağlıdır. Böylece HAM'nun lineer olmayan saçılma terimli bu tip denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için uygun ve güvenilir bir yöntem olduğunu söyleyenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Yaşar, İ., B.,** 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.

[2] **Koca, K.,** 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.

[3] **Pala, Y.,** 2006. Modern Fizik Uygulamaları, Nobel Yayıncılık, Ankara.

[4] **Rosenau, P., Hyman J.M.,** 1993. Compactons: Solitons with finite wave-lengths, Phys. Rev. Lett., **70(5),** 564-567.

[5] **Dusuel, S., Michaux P., Remoissenet M.,** 1998, From kinks to compacton like kinks, Physical Review E, **57(2)**, 2320-2326.

[6] **Wazwaz, A.M.,** 1995. On the solution of the fourth order parabolic equation by the decomposition method, Intern, J, Computer Math., **57,** 213-217.

[7] **Dinda, P.T., Remoissenet M.,** 1999, Breather compactons in nonlinear Klein-Gordon systems, Physical Review E, **60 (3)**, 6218-6221.

[8] **Kivshar, S.,** 1999. Compactons in discrete lattices, Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, **329,** 255-258.

[9] **Ludu, A., Draayer, J.P.,** 1998. Patterns on liquid surfaces: cnoidal waves, compactons and scaling, Physica D, **123**, 82-91.

[10] **Ludu, A., Stitcheva, G., Drayer, J.P.,** 2000. Similarity analysis of nonlinear equations and bases of finite wavelength solutions, International J. of Modern Physics E, **9(3),** 263-278.

[11] **Inc, M.,** 2004. A study for obtaining more compacton solutions of the modified form of fifth-order KdV equations, Z. Naturforsch A, **59**a, 359-367.

[12] **Inc, M.,** 2006.New exact solitary pattern solutions of the nonlinearly dispersive R(m,n) equations, Chaos, Solitons and Fractals **29,** 499-505.

[13] **Inc, M.,** 2006. New compacton solutions of nonlinearly dispersive R(m,n) equations, Commun. Theor. Phys. **45**, 389-394.

[14] **Inc, M.,** 2007. Exact and numerical solitons with compact support for nonlinear dispersive K(m,p) equations by the variational iteration method. Physica A **375**, 447-456.

[15] **Inc, M.,** 2007. Compacton and periodic wave solutions of the nonlinear dispersive Zakharov-Kuznetsov equation, Central European Journal of phys. **5**, 351-366.

[16] **Domairry G., Ahangari M., JamshidinM.,** 2007, Exact and analytical solution for nonlinear dispersive K(m,p) equations using homotopy perturbation method, Phys. Lett. A **368**, 266-270.

[17] **Liao S. J.,** 2000. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, Chapman & Hall/CRC, London.

[18] **Wazwaz A. M.,** 2009. Partial Differantial Equations and Solitary Waves Theory, Higher Educations Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[19] **Liao S. J.,** 2012. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differantial Equations, Higher Education Press, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[20] **Lyapunov, A. M.,** 1992. General Problem on Stabilitiy of Motion, Taylor & Francis.

[21] **Karmishin, A. V.,** 1990. Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin-Walled Structures, Mashinostroyenia.

[22] **Adomian, G.,** 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press.

[23] **Molliq, Y. R., Noorani, M. S. M., Hashim, I., Ahmad, R. R.,** 2009. Approximate solutions of fractional Zakharov - Kuznetsov equations by VIM, Journal of computational and Applied Mathematics, **233**, 2, 103-108.

[24] **Inc, M.,** 2009. Korteweg-de Vries (KdV) Equation, Some Numerical Methods for Solving the, Encylopedia of Complexity and Systems Science, 469-485.

[25] **Inc, M.,** 2008. On numerical solution of Burger's equation by homotopy analysis method, Physics Letters A, **372**, 356-360.

[26] **Inc, M.,** 2007. On exact solution of Laplace equaiton with Dirichlet and Neumann boundary conditions by the homotopy analysis method, Physics Letters A, **365,** 5-6, 412-415.

[27] **Chowdhury, M. S. H., Hashim, I., Abdulaziz, O.,** 2009. Comparison of homotopy analysis method ond homotopy perturbation method for purely nonlinear fin-type problems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **14,** 371-378.

[28] **Tan, Y., Xu, H., Liao, S.,** 2007. Explicit series solution of travelling waves withe a front of Fisher equation, Chaos Solutions and Fractals, **31,** 462-472.

[29] **Abbasbandy, S.,** 2007. Soliton solutions for the Fitzhugh - Nagumo equation with the homotopy analysis method, Applied Mathematical Modelling, **32,** 12, 2706-2714.

[30] **Abbasbandy, S., Shivanian, E.,** 2009. Series solution of the system of integro-differantial equaitons, Verlag der Zeitschrift für Naturforschung A, **64a,** 811-818.

[31] **Yinping, L., Zhibin, L.,** 2007. The homotopy analysis method for approximating the solution of the modified Korteweg-de Vries equation, Chaos Solitons and Fractals, **39,** 1, 1-8.

[32] **Abbasbandy, S.,** 2008. Solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky equation by means of the homotopy analysis method, Nonlinear Dynamics, **52,** 35-40.

[33] **Abbasbandy, S., Zakaria, F. S.,** 2008. Soliton solutions for the fifth-order KdV equation with the homotopy analysis method, Nonlinear Dynamics, **51,** 83-87.

[34] **Abbasbandy, S.,** 2007. Homotopy analysis method for heat radiation equations, International Communications in Heat and Mass Transfer, **34,** 2, 308-387.

[**35**] **Abbasbandy, S.,** 2008. Homotopy analysis method for generalized Benjamin-Bona-Mahony equation, Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Physic, **59,** 51-62.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Antalya'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Antalya'da tamamladıktan sonra 2007 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2011 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.