

**KİRİŞ – KOLON TEORİSİNDE ORTAYA ÇIKAN
DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER
PROBLEMİNİN ADOMİAN AYRIŞIM YÖNTEMİYLE
ÇÖZÜMÜ**

Şaile ÖZTÜRK

**Yüksek Lisans Tezi
Yapı Eğitimi Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ömer KELEŞOĞLU
OCAK-2013**

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KİRİŞ – KOLON TEORİSİNDE ORTAYA ÇIKAN
DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
ADOMİAN AYRIŞIM YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şaile ÖZTÜRK
(101125104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Ocak 2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 31 Ocak 2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ömer KELEŞOĞLU (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Cevdet Emin EKİNCİ (F.Ü)

OCAK-2013

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimde bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her konuda benden desteğini ve ilgisini esirgemeyen saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Ömer KELEŞOĞLU'na sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Tezimin hazırlanmasında bana yol gösteren saygı değer hocam Doç. Dr. Mustafa İNÇ'e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim süresince beni bursuyla destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Biricik aileme ve sevgili eşime teşekkür ederim.

Şaile ÖZTÜRK

Elazığ - 2013

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET	III
SUMMARY.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	V
TABLolar LİSTESİ.....	VI
KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ.....	VII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
3. ADOMİAN AYRIŞIM METODU	9
4. ADOMİAN AYRIŞIM YÖNTEMİNİN KİRİŞ-KOLON TEORİSİNDE ORTAYA ÇIKAN SINIR ŞARTLI LİNEER PROBLEME UYGULANMASI	14
4.1. Problemin Tanımı.....	14
4.2. Adomian Yönteminin Probleme Uygulanması.....	16
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	28
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ.....	33

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölüm olarak düzenlenmiştir. Birinci bölümde, konunun önemi ve Adomian ayrışım yöntemiyle ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, problemin çözümü için kullanılacak olan Adomian ayrışım yönteminin temel yapısı verilmiş ve lineer olmayan bir örnek sunulmuştur. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde sunulan Adomian ayrışım yöntemi giriş-kolon teorisinden doğan lineer homojen ve homojen olmayan üç sınır değer problemine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle ifade edilmiştir. Beşinci bölümde, elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrışım Metodu, Giriş-Kolon Teorisi, Lineer Diferansiyel Denklemler, Sınır Değer Problemleri

SUMMARY

THE SOLUTION OF FOURTH ORDER BAUNDARY VALUE PROBLEM ARISING OUT OF THE BEAM COLUMN THEORY BY ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

This thesis is arranged in five chapters. In the first chapter, we give information about the important of subject and Adomian decomposition method. In the second chapter, some basic definitions and theorems about the subject are outlined. In the third chapter, we give general structure of Adomian decomposition method to be used for the solution of problem and a non-linear sample is provided. In the fourth chapter, the Adomian decomposition method which is presented in the third chapter is applied linear homogeneous and non-homogeneous three baundary value problems arising from the beam - column theory. The obtained results are expressed in tables and graphs. In the fifth chapter, we remark the obtained results.

Keywords: Adomian Decomposition Method, Beam – Column Theory, Linear Differential Equations, Baundary Value Problems

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. Kolon – Kiriş Elemanının Kesit Analizi	14
Şekil 4.2. Ayrışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Yaklaşık ve Analitik Çözümü Gösteren Grafik.....	19
Şekil 4.3. Ayrışım Serisinin Sekiz Terimi Kullanılarak Elde Edilen Yaklaşık ve Analitik Çözümü Gösteren Grafik.....	23
Şekil 4.4. Ayrışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Yaklaşık ve Analitik Çözümü Gösteren Grafik.....	27

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 4.1. Ayrışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Sayısal Sonuçlar	18
Tablo 4.2. Spline Metodu (SM) ve Adomian Yöntemiyle Elde Edilen Mutlak Hatanın Karşılaştırılması.....	18
Tablo 4.3. Ayrışım Serisinin Sekiz Terimi Kullanılarak Elde Edilen Sayısal Sonuçlar	23
Tablo 4.4. Ayrışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Sayısal Sonuçlar	26
Tablo 4.5. Spline Metodu (SM) ve Adomian Yöntemiyle Elde Edilen Mutlak Hatanın Karşılaştırılması.....	27

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
L	: Diferansiyel operatör
L⁻¹	: İntegral operatörü
A_n	: Adomian polinomları
u(x,t)	: Çözüm fonksiyonu
ADM	: Adomian ayrışım metodu
SM	: Spline metodu

1. GİRİŞ

Doğadaki pek çok fiziksel olayı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerle modellemek mümkündür. Bu modelleme olayı daha iyi anlamamızı ve yorumlamamızı sağlar. Başlangıç ve sınır şartlı böyle modellerin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmak bu nedenle önem kazanır. Diferansiyel denklemler yıllardır mühendislikte önemli bir yer tutmaktadır. Bilim adamları ve mühendisler genellikle değişime uğrayan sistemleri incelerler.

Başlangıç ve sınır şartlı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmak için son yıllarda pek çok yöntem geliştirilmiş olup, bunlar arasından ;

- Adomian ayrışım yöntemi [1-6] ,
- Homotopi pertürbasyon yöntemi [7-11] ,
- Varyasyonel iterasyon yöntemi [12-19] ,
- Homotopi analiz yöntemi [20-25]

gibi yöntemler sayılabilir. Bu yöntemler kullanılırken sıkıcı cebirsel işlemlerden kurtulmak için Mathematica, Maple, Matlab gibi paket programlar kullanılmaktadır. Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerinin bulunması inşaat mühendisliğinde önemli bir konudur. Çünkü bu denklemler mühendislikte ortaya çıkan karmaşık olayların matematiksel modelleridir.

Bu çalışmada, giriş-kolon teorisinde ortaya çıkan dördüncü mertebeden başlangıç ve sınır şartlı lineer homojen ve homojen olmayan diferansiyel denklemin Adomian ayrışım yöntemiyle yaklaşık çözümü bulunup literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

Adomian ayrışım yöntemi ilk olarak Amerikalı bilim adamı George Adomian tarafından 1980'li yıllarda ortaya konulmuş bir yöntemdir. Bu yöntemin esası bilinmeyen fonksiyonun ayrıştırılmasına dayanır. Bu yöntem yardımıyla lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak mümkündür. Adomian yöntemi özellikle 1990 ve 2007 yılları arasında araştırmacılar tarafından diferansiyel ve

integral denklemlerin çözümü için etkili olarak kullanılmıştır [26-31]. Bu yöntemle lineer olmayan bir problem, kesikleme ve lineerleştirme yapmadan direkt probleme uygulanmaktadır. Bu nedenle araştırmacılar tarafından tercih edilen bir metottur.

Yapılan çalışmada Adomian ayrışım metodundan yola çıkılarak dördüncü mertebeden lineer sınır değer problemlerinin analitik ve yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır. Aynı zamanda giriş-kolon teorisinde kullanılan dördüncü mertebeden lineer adi diferansiyel denklem takımı belirli sınır şartları altında sayısal olarak çözülmüştür. Kullanılan Adomian ayrışım metodu lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklem modelini değiştirmeden gerçekçi çözümler sağlar. Sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın nümerik sonuçlar bulunabilir. Bu tekniği kullanarak bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü indismeye gerek duymadan sembolik hesaplama yardımıyla bulmak mümkündür.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.

X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [32].

$$1) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$2) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$4) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

(X, d) bir uzay metrik olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X bir tam metrik uzay adını alır.

Tanım 2.2.

Bilinmeyen bir fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağlantıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

veya genel olarak

$$f\left(x, y, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklemler, adi diferansiyel denklem olarak isimlendirilir [32].

Tanım 2.3.

A,B,C birer sabit sayı olmak üzere, x ve y serileri arasında kesin olan türden çeşitli fonksiyonel ilişkilere deterministik ilişki denir. Örneğin;

$$y = Ax + B \quad (\text{Doğrusal ilişki})$$

$$\log y = \log(Ax + B) \quad (\text{Tam logaritmik ilişki})$$

ifadeleri birer deterministik ilişkidirler. Bunlardan başka daha pek çok deterministik ilişki tipleri yazılabilir. Çünkü serilerden birinin aldığı değer bilindiğinde, diğer serinin alabileceği değer kesin olarak hesaplanabilir. Örneğin; Bir gazın hacmi ile basıncı arasındaki ters yönlü ilişki, elektrik akımı ile direnç arasındaki ters yönlü ilişkiler birer deterministik ilişkidir [33].

Tanım 2.4.

Bir a büyüklüğünün yaklaşık değeri a^* ve gerçek değeri a ise a^* değerindeki e_a mutlak hata

$$e_a = a^* - a ,$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

a^* değerindeki e_b bağıl hata ise

$$e_b = \left(\frac{a^* - a}{a} \right) = \frac{e_a}{a} \quad a \neq 0 ,$$

ile verilir [34].

Tanım 2.5.

Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [35].

Tanım 2.6.

E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x 'de, değer kümesi E_y 'de bulunan $y = A_x$ operatörünü ele alalım. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa verilen bu A operatörüne lineer operatör denir [36].

$$L1) A(x + y) = Ax + Ay$$

$$L2) A(\partial x) = \partial Ax$$

Tanım 2.7.

Elemanlarını nokta olarak adlandıracağımız bir X kümesini kendi içine dönüştüren bir $f: X \rightarrow X$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir $x^* \in X$ noktası $f(x^*) = x^*$ bağıntısını sağlıyorsa f fonksiyonunun bir sabit noktası adını alır [36].

Tanım 2.8.

(X, d) bir metrik uzay olsun ve $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine dönüştürsün. Her $x, y \in X$ nokta çifti ve $0 < k < 1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için;

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa f bir büzülme dönüşümü ya da sadece bir büzülme adını alır [37].

Tanım 2.9.

Bilinmeyen fonksiyon bir değişkenli ise denkleme adi diferansiyel (ordinary differential equation-ODE) denklem denir, eğer fonksiyon çok değişkenli ise kısmi diferansiyel (partial differential equation-PDE) denklem denir [38].

Tanım 2.10.

n tane bilinmeyen fonksiyonu içeren m adet diferansiyel denkleme kısaca diferansiyel denklem sistemi denir. Burada m ile n eşit olmak zorunda değildir [38].

Tanım 2.11.

Denklemin mertebesi, denklemdeki en yüksek mertebedeki türevdir. Benzer şekilde sistemin mertebesi, sistemdeki en yüksek mertebeli türevdir [38].

Tanım 2.12.

Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin üssüne, bu diferansiyel denklemin derecesi denir [38].

Tanım 2.13.

Bir bağımlı değişkendeki bağımlı değişken ve türevlerinin kuvveti birinci dereceden, katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenin bir fonksiyonu ise bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. y bağımlı, x bağımsız değişken olmak üzere n . mertebeden lineer bir adi diferansiyel denklem;

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + any = f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır. Bu denklemde $f(x)=0$ ise denkleme lineer homojen, $f(x) \neq 0$ ise lineer homojen olmayan diferansiyel denklem adı verilir [38].

Tanım 2.14.

Bir diferansiyel denklemi sağlayan her $f(x)$ fonksiyonuna çözüm adı verilir. Diferansiyel denklemin mertebesi kadar keyfi sabit bulunduran ve denklemi özdeş olarak sağlayan çözüme genel çözüm adı verilir [38].

Tanım 2.15.

$y'' = f(x, y, y')$ denklemiyle birlikte bağımsız değişkenin aynı değerleri söz konusu ise $(y(a) = \alpha, y(b) = \beta)$ probleme başlangıç değer problemi, bağımsız değişkenin farklı değerleri söz konusu ise $(y(c) = \delta, y'(d) = \delta)$ probleme sınır değer problemi adı verilir. Böyle problemlerin çözümüne de özel çözüm adı verilir [38].

Teorem 2.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay ve f bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır [39].

Teorem 2.2.

N bir büzülme dönüşümü ve

$$\|N_n - N\| = \varepsilon_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

olmak üzere, S_n serisi $N(y_0 + S) = S$ ifadesinin çözümü olan S için ;

$$S_{n+1} = N_n(y_0 + S_n), S_0$$

şeklindeki yakınsaklığı verir [40].

Teorem 2.3.

H, bir Hilbert uzay ve N, H’da bir operatör ve y’de,

$$y - Ny = f$$

denkleminin bir çözümü olsun.

$$\begin{cases} y_0 = f \\ y_{n+1} = A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

ifadesinden oluşan $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ serisi; $\exists 0 < \alpha < 1, \|y_{k+1}\| \leq \alpha \|y_k\|, \forall k \in N \cup \{0\}$ şartları altında y’ye yakınsar [41].

Teorem 2.4. (Sınır Değer Problemleri için Varlık ve Teklik Teoremi)

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin teorisi başlangıç değer problemine dayalıdır. Sınır değer problemini çözmek için kullanılan bazı nümerik metotlar başlangıç değer probleminin çözümünden yararlanarak elde edilir. Her n. mertebeden bir diferansiyel denklem ona eş olan n tane birinci mertebeden denklemlerle ifade edilebildiğinden;

$$(y(c) = \delta, y'(d) = \delta) \quad (2.1)$$

göz önüne alındığında $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ n-boyutlu bir sütun vektörünü ve y(x)’ler de bağımlı değişkenleri gösterir. Kabul edelim ki; y(x) vektör değerli bir fonksiyon ve f(x,y) ise bileşenleri $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ olan vektör değerli bir fonksiyon olmak üzere, (2.1) ile $x = a$ noktasında

$$y(a) = \alpha \quad (2.2)$$

şartları bir başlangıç değer problemi tanımlar. Bu tür problemlerin varlık ve tekliği f ’nin bir $(a; \alpha)$ komşuluğunda sürekliliği ve türevlenebilirliği şartlarına bağlıdır .

Fonksiyon $f(x, y)$ şeklinde verilsin.

$R : a \leq x \leq b, \quad |y| < \infty$ bölgesinde sürekli ve her (x, y_1) ve $(x, y_2) \in R$ için $|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$ ($K : sabit$) Lipschitz şartını sağlasın.

i) Başlangıç değer probleminin;

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha \quad (2.3)$$

$[a, b] \equiv \{x | a \leq x \leq b\}$ aralığında tanımlı $y = y(x, \alpha)$ şeklinde bir tek çözümü vardır.

ii) Bu çözüm α 'da Lipschitz sürekli ve her $(x; \alpha)$ ve $(x; \beta) \in R$ için $|y(x; \alpha) - y(x; \beta)| \leq e^{K(x-a)} |\alpha - \beta|$ şartını sağlar [42].

3. ADOMIAN AYRIŞIM METODU

Adomian ayrışım metodu ilk olarak Amerikalı matematikçi G. Adomian [43-44] tarafından ortaya konulmuştur. Bu yöntem yardımıyla lineer ve lineer olmayan homojen veya homojen olmayan diferansiyel denklemleri çözmek mümkündür. Adomian yöntemi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere [45], lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere ve integral denklemlere [46], integral diferansiyel denklemlere [47], kesirli diferansiyel denklemlere [48] ve diferansiyel denklem sistemlerine [49] uygulanmış ve iyi sonuçlar alınmıştır.

Yöntemin sonlu farklar, sonlu elemanlar ve galerkin yöntemleri gibi geleneksel yöntemlere göre birçok avantajı vardır. Adomian yönteminde indisleme, kesikleme ve lineerleştirmeye gerek yoktur. Yöntem problemlere adapte olmuş yakınsak sonuçlar vermektedir. Yöntemin dezavantajı ise lineer olmayan problemlerde ortaya çıkan Adomian polinomlarının hesaplanması ve probleme göre yakınsaklık aralığının küçük olmasıdır.

Bu metotla lineer ve homojen olmayan problemlerin analitik çözümü bir birini yok eden (noise terms) terimler sayesinde bulunabilir.

Adomian yöntemi ikinci mertebeden lineer olmayan başlangıç şartlı bir adi diferansiyel denkleme aşağıdaki şekilde uygulanabilir.

F hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(t) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilen (3.1) denkleminde L; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, R; lineer operatörün kalan kısmını ve N ise lineer olmayan terimi göstermek üzere (3.1) denklemi;

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (3.2)$$

şeklinde ayrıştırarak yazılır. L tersi de mevcut olan bir lineer operatördür. Yukarıdaki (3.2) eşitliği;

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğu kabul edilir ve (3.4) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa;

$$u = u(0) + tu'(0)L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. Eşitlik (3.5) ile ifade edilen Nu lineer olmayan terim

$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır.

Yukarıdaki (3.5) eşitliğinde u ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonunun integrali olmak üzere $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \quad (3.6)$$

yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (3.5) eşitliği tekrar yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.7)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (3.7) eşitliği açık şekilde;

$$\begin{cases} u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, n \geq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 sadece u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0, u_1, u_2 'ye bağlı ve benzer şekilde (3.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomlarının ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0), \\
A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0), \\
A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0), \\
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0), \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, n > 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ile verilmektedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (3.9) genel formülünün kullanılması, (3.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x, t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerinin elde edilmesi için;

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x, t) \quad n \geq 0 \tag{3.10}$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x, t) \tag{3.11}$$

ifadesi (3.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak hesaplanabilir. Buna ilaveten (3.11) şeklindeki ayrışımın seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde bir çok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Y. Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir [50]. Bu çalışmalara ilaveten yakın zamanda Abbaoui ve arkadaşları çalışmalarında ayrışım serisinin yakınsaklığını bulmada yeni bir yaklaşım önermişlerdir [51]. Bu yazarlar ayrışım seri metodunun yakınsaklığını elde etmek için yeni şart vererek bulmuşlardır.

Örnek 3.1.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.12)$$

şeklindeki lineer olmayan başlangıç şartlı Duffing denklemi yukarıda tanımlanan Adomian ayrışım yöntemi ile çözülürse;

Denklem operatör formunda yazılırsa

$$L_o y + y + \varepsilon y^3 = 0 \quad (3.13)$$

denklem (3.13) elde edilir. Denklemin her iki tarafına soldan L^{-1} integral operatörü uygulanırsa;

$$y(t) = y(0) + ty'(0) - L^{-1}y - \varepsilon L^{-1}y^3 \quad (3.14)$$

bulunur. Denklem (3.14) te başlangıç şartları ve ayrışım çözüm serisi kullanılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = 1 - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \right) - \varepsilon L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (3.15)$$

elde edilir. Burada A_n 'ler (3.9) ile tanımlanan Adomian polinomlarıdır. Böylece (3.15) ifadesinden aşağıdaki indirgeme formülü bulunur.

$$\begin{cases} y_0(t) = 1, \\ y_{k+1}(t) = -L^{-1}(y_k) - \varepsilon L^{-1}(A_k), k \geq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

İndirgeme formülünden;

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1, \\ y_1(t) &= -\frac{1}{2!}(1 + \varepsilon)t^2, \\ y_2(t) &= \frac{1}{4!}(1 + 4\varepsilon + 3\varepsilon^2)t^4, \\ y_3(t) &= -\frac{1}{6!}(1 + 25\varepsilon + 51\varepsilon^2 + 27\varepsilon^3)t^6, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.17)$$

terimleri bulunur. Bu terimler (3.10) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\varnothing_4 &= \sum_{n=0}^3 y_n(t) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6\right) - \varepsilon \left(\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^4 + \frac{25}{6!}t^6\right) + 0(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

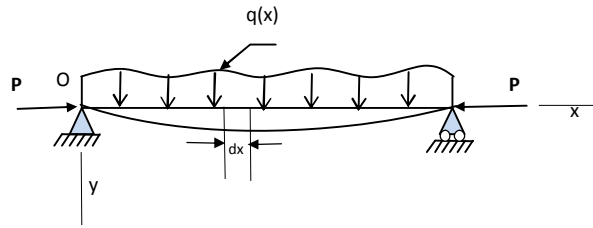
şeklinde yaklaşık serisi bulunur.

Böylece Adomian ayrışım yöntemi kullanılarak (3.12) ile verilen Duffing denkleminin (3.18) formundaki yaklaşık çözümü bulunur [52].

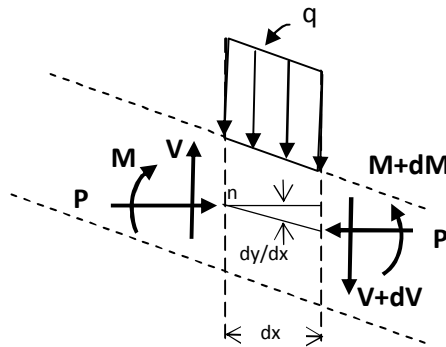
4. ADOMİAN AYRIŞIM YÖNTEMİNİN KİRİŞ-KOLON TEORİSİNDE ORTAYA ÇIKAN SINIR ŞARTLI LİNEER PROBLEME UYGULANMASI

4.1. Problemin Tanımı

Dördüncü mertebeden diferansiyel denklemler, elastik stabilite teorisiyle ilgili belli olayları içeren çeşitli fiziksel problemlerden oluşur. Kiriş-kolon problemlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için çeşitli kesit tesirleri arasındaki diferansiyel bağıntıların kurulması gerekir.



(a)



(b)

Şekil 4.1. Kolon – Kiriş Elemanının Kesit Analizi

Şekil 4.1a'daki gibi hem P eksenel yüküne hem de eksene dik doğrultuda q yayıllı yüküne maruz bir kiriş-kolondan, Şekil 4.1b'deki gibi dx mesafesi kadar kesit alındığında ortaya çıkan elemanda kesit tesirleri oluşur. y yönündeki denge denklemi yazıldığında;

$$q = -\frac{dV}{dx} \quad (4.1)$$

olmak üzere

$$-V + qdx + (V + dV) = 0 \quad (4.2)$$

adi diferansiyel denklemi bulunur.

Kesit elemanın her iki yüzeyine etki eden kuvvetlerin cebirsel toplamı dengeden dolayı eşit olacağından;

$$M + qdx \frac{dx}{2} + (V + dV)dx - (M + dM) + P \frac{dy}{dx} = 0 \quad (4.3)$$

denklemi yazılabilir. Burada elemanın yüzeyine etkiyen kuvvet V kesme kuvveti, kesit elemanını eğmeye çalışan kuvvet ise M eğilme momentidir.

Dönmelerin küçük olduğu varsayılır ve dx cinsinden ikinci mertebe terimler ihmal edilirse (4.3) denklemi;

$$V = \frac{dM}{dx} - P \frac{dy}{dx} \quad (4.4)$$

formuna dönüşür. Dönmelerin küçük olduğu kabul edildiğinden ; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ biçiminde alınabilir ve (4.4) denklemi;

$$-V = EI \frac{d^3y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx} \quad (4.5)$$

şekline dönüşür. Burada EI eğilme rijitliğini ifade eder. Bu denklemin her iki tarafının x ' e göre türevi alınırsa elastik eğriye ait dördüncü mertebeden

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + P \frac{d^2y}{dx^2} = q(x) \quad (4.6)$$

lineer diferansiyel denklemi bulunur [53].

4.2. Adomian Yönteminin Probleme Uygulanması

Bu kısımda (4.6) ile tanımlanan dördüncü mertebedeki lineer probleme Adomian ayrışım yönteminin uygulanması ile ilgili aşağıdaki lineer homojen ve homojen olmayan problemler verildi.

Örnek 4.1.

$$y(0) = y''(0) = 1, y(1) = y''(1) = 0 \quad (4.7)$$

sınır şartları ile verilen

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0, x \in [0, 1] \quad (4.8)$$

dördüncü mertebeden lineer homojen denklemini ADM ile çözünüz. [54].

Denklem (4.8) operatör formunda yazılırsa;

$$L_y - y = 0 \quad (4.9)$$

bulunur, burada

$$L = \frac{d^4}{dx^4}, L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx dx dx \quad (4.10)$$

türev ve integral operatörleridir. L^{-1} invers operatörü (4.9) denkleminde uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa;

$$y(x) = 1 + Ax + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}Bx^3 + L^{-1}(y) \quad (4.11)$$

elde edilir, burada $A = y'(0)$ ve $B = y'''(0)$ dir. Bu ifadede

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \text{ çözüm serisi yazılırsa;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 1 + Ax + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}Bx^3 + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\right) \quad (4.12)$$

ifadesi bulunur. Bağntı (4.12) den ise aşağıdaki indirgeme formülü yazılır.

$$\begin{cases} y_0(x) = 1 + Ax + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}Bx^3, \\ y_{n+1}(x) = L^{-1}(y_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

İndirgeme formülü (4.13) deki A ve B sabitleri Adomian çözüm serisini bulduktan sonra (4.7) sınır şartları kullanılarak belirlenecektir.

Yukarıdaki (4.13) indirgeme bağıntısından;

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 + Ax + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}Bx^3; \\ y_1(x) &= \frac{x^4(210 + 42Ax + 7x^2 + Bx^3)}{5040}; \\ y_2(x) &= \frac{x^8(2730 + 210Ax + 15x^2 + Bx^3)}{39916800}; \\ y_3(x) &= \frac{x^{12}(2730 + 210Ax + 15x^2 + Bx^3)}{1307674368000}; \\ y_4(x) &= \frac{x^{16}(5814 + 342Ax + 19x^2 + Bx^3)}{121645100408832000}; \end{aligned} \quad (4.14)$$

ayrışım serisinin çözüm elemanları bulunur. Bu terimler (4.11) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\varnothing_5(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) \quad (4.15)$$

ayrışım serisi bulunur. Denklem (4.7) deki sınır şartları ve (4.15) çözüm serisinden

$$A = B = -1.3313035,$$

olarak bulunur. Böylece (4.7) - (4.8) probleminin beş terim kullanılarak Adomian ayrışım yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{3}{2} + (-1.3313035) + \frac{(-1.3313035)}{6} + \frac{217 + 42 \times (-1.3313035) + (-1.3313035)}{5040} + \\ &\quad \frac{1001 + 110 + (-1.3313035)}{39916800} + \frac{2745 + 210 \times (-1.3313035) + (-1.3313035)}{1307674368000} + \\ &\quad \frac{5833 + 342 \times (-1.3313035) + (-1.3313035)}{121645100408832000} \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklindedir.

Problem (4.8)'in analitik çözümü ise [54] ;

$$y(x) = \frac{1}{2 \sinh 1} (e^{1-x} - e^{x-1}) \quad (4.17)$$

şeklindedir.

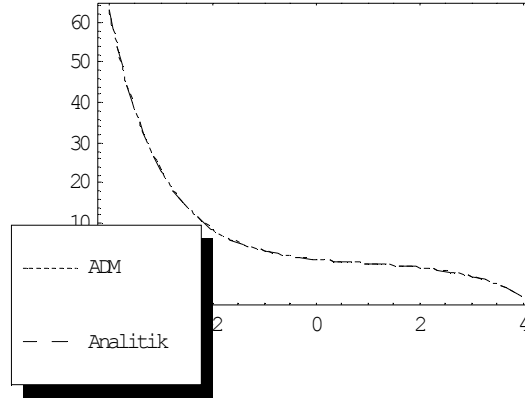
Denklem (4.16)'nın çözüm serisi kullanılarak beş terim için elde edilen sayısal sonuçları ve grafikleri aşağıdaki gibidir.

Tablo 4.1. Ayrışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

X	Analitik Çözüm y(x)	Yaklaşık Çözüm $\emptyset_5$	Hata y(x) - $\emptyset_5$
0	1.	1.	0.
0.1	0.873482	0.873482	-2.85975x10 ⁻⁸
0.2	0.755705	0.755706	-5.74813x10 ⁻⁸
0.3	0.645493	0.645493	-8.69403x10 ⁻⁸
0.4	0.541740	0.541740	-1.17270x10 ⁻⁷
0.5	0.443409	0.443410	-1.48772x10 ⁻⁷
0.6	0.349517	0.349517	-1.81764x10 ⁻⁷
0.7	0.259122	0.259122	-2.16575x10 ⁻⁷
0.8	0.171320	0.171321	-2.53554x10 ⁻⁷
0.9	0.085233	0.085234	-2.9307x10 ⁻⁷
1.0	0.	3.35519x10 ⁻⁷	3.35519x10 ⁻⁷

Tablo 4.2. Spline Metodu (SM) ve Adomian Yöntemiyle Elde Edilen Mutlak Hatanın Karşılaştırılması

X	SM h=1/5	SM h=1/10	ADM $\emptyset_5$
0	0	0	0
0.2	2.723E-7	1.704E-8	-5.748E-8
0.4	3.531E-7	2.209E-8	-1.172E-7
0.6	3.027E-7	1.894E-8	-1.817E-7
0.8	1.709E-7	1.069E-8	-2.535E-7
1	0	0	3.335E-7



Şekil 4.2. Ayrışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Yaklaşık ve Analitik Çözümü Gösteren Grafik

Örnek 4.2.

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = -e \quad (4.18)$$

sınır şartları ile verilen

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + xy = -(8 + 7x + x^3)e^x, \quad x \in [0, 1] \quad (4.19)$$

dördüncü mertebeden lineer homojen olmayan denklemi ADM ile çözünüz. [55].

Denklem (4.19) operatör formunda yazılırsa;

$$L_y = -xy - (8 + 7x + x^3)e^x \quad (4.20)$$

bulunur, burada;

$$L = \frac{d^4}{dx^4}, \quad L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx dx dx \quad (4.21)$$

şeklindeki türev ve integral operatörleridir.

L^{-1} invers operatörü (4.20) denkleminde uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa

$$y(x) = x + \frac{1}{2!}Ax^2 + \frac{1}{3!}Bx^3 - L^{-1}(xy) - L^{-1}\left((8 + 7x + x^3)e^x\right) \quad (4.22)$$

elde edilir. Burada $A = y'(0)$ ve $B = y'''(0)$ dır. Yukarıdaki (4.22) ifadesinde

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ çözüm serisi kullanılırsa

$$\sum y_n(x) = 1 + \frac{1}{2!}Ax^2 + \frac{1}{3!}Bx^3 - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} xy_n(x)\right) - L^{-1}\left((8+7x+x^3)e^x\right) \quad (4.23)$$

bulunur. Bağntı (4.23) den ise aşağıdaki indirgeme formülü yazılır.

$$\begin{aligned} y_0(x) &= x + \frac{1}{2!}Ax^2 + \frac{1}{3!}Bx^3 - L^{-1}\left((8+7x+x^3)e^x\right), \\ y_{n+1}(x) &= -L^{-1}(xy_n), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

Denklem (4.24) deki A ve B sabitleri Adomian çözüm serisini bulduktan sonra (4.18) sınır şartları kullanılarak belirlenecektir.

Yukarıdaki (4.24) indirgeme bağıntısından

$$y_0(x) = \frac{1}{6}\left(-840 - 432x + 3(-29 + A)x^2 + (-5 + B)x^3 - 6e^x(-140 + 67x - 12x^2 + x^3)\right)$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -4180 - 2404x - 545x^2 - \frac{185x^3}{3} + \frac{7x^5}{6} + \frac{x^6}{5} - \frac{(-29 + A)x^7}{1680} - \frac{(-5 + B)x^8}{10080} \\ &\quad + e^x(4180 - 1876x + 331x^2 - 28x^3 + x^4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= -124200 - 67512x - 15820x^2 - 1785x^3 + \frac{209x^5}{6} + \frac{32x^6}{5} + \frac{109x^7}{168} + \frac{37x^8}{1008} - \frac{x^{10}}{4320} - \frac{x^{11}}{39600} \\ &\quad + \frac{(-29 + A)x^{12}}{19958400} + \frac{(-5 + B)x^{13}}{172972800} - e^x(-124200 + 56688x - 10408x^2 + 979x^3 - 48x^4 + x^5); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= -4084920 - 2170896x - 497700x^2 - 55000x^3 + 1035x^5 + \frac{2813x^6}{15} + \frac{113x^7}{6} + \frac{17x^8}{16} \\ &\quad - \frac{209x^{10}}{30240} - \frac{2x^{11}}{2475} - \frac{109x^{12}}{1995840} - \frac{37x^{13}}{17297280} + \frac{x^{15}}{141523200} + \frac{x^{16}}{1729728000} - \frac{(-29 + A)x^{17}}{1140023808000} \\ &\quad + \frac{(-5 + B)x^{18}}{12703122432000} + e^x(4084920 - 1914024x + 369264x^2 - 38072x^3 + 2239x^4 - 72x^5 + x^6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_4(x) = & -4084920 - 2170896x - 497700x^2 - 55000x^3 + 1035x^5 + \frac{2813x^6}{15} + \frac{113x^7}{6} + \frac{17x^8}{16} \\
& + \frac{209x^{10}}{30240} - \frac{2x^{11}}{2475} - \frac{109x^{12}}{1995840} - \frac{37x^{13}}{17297280} + \frac{x^{15}}{141523200} + \frac{x^{16}}{1729728000} - \frac{(-29+A)x^{17}}{1140023808000} \\
& - \frac{(-5+B)x^{18}}{12703122432000} + e^x (4084920 - 1914024x + 369264x^2 - 38072x^3 + 2239x^4 - 72x^5 + x^6);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_5(x) = & -4084920 - 2170896x - 497700x^2 - 55000x^3 + 1035x^5 + \frac{2813x^6}{15} + \frac{113x^7}{6} + \frac{17x^8}{16} \\
& - \frac{209x^{10}}{30240} - \frac{2x^{11}}{2475} - \frac{109x^{12}}{1995840} - \frac{37x^{13}}{17297280} + \frac{x^{15}}{141523200} + \frac{x^{16}}{1729728000} - \frac{(-29+A)x^{17}}{1140023808000} \\
& - \frac{(-5+B)x^{18}}{12703122432000} + e^x (4084920 - 1914024x + 369264x^2 - 38072x^3 + 2239x^4 - 72x^5 + x^6);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_6(x) = & -150917760 - 78360048x - 17550120x^2 - 1894640x^3 + 34041x^5 + \frac{90454x^6}{15} + \frac{1185x^7}{2} \\
& + \frac{1375x^8}{42} - \frac{23x^{10}}{112} - \frac{2813x^{11}}{118800} - \frac{113x^{12}}{71280} - \frac{17x^{13}}{274560} + \frac{209x^{15}}{99066240} + \frac{x^{16}}{54054000} + \frac{109x^{17}}{114002380800} \\
& + \frac{37x^{18}}{12703122432000} - \frac{x^{20}}{16456317696000} - \frac{x^{21}}{248458129920000} + \frac{(-29+A)x^{22}}{200142579732480000} \\
& + \frac{(-5+B)x^{23}}{2699667579248640000} - e^x (-150917760 + 72557712x - 14648952x^2 + 1628416x^3 \\
& - 108652x^4 + 4387x^5 - 100x^6 + x^7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_7(x) = & -6243168960 - 3170816064x - 694450680x^2 - 73291680x^3 + 1257648x^5 \\
& + \frac{1088334x^6}{5} + 20893x^7 + \frac{23683x^8}{21} - \frac{1621x^{10}}{240} - \frac{45227x^{11}}{59400} - \frac{79x^{12}}{1584} - \frac{25x^{13}}{13104} \\
& + \frac{23x^{15}}{3669120} + \frac{2813x^{16}}{5189184000} + \frac{113x^{17}}{4071513600} + \frac{x^{18}}{1186099200} - \frac{11x^{20}}{6062853888000} \\
& - \frac{x^{21}}{7764316560000} - \frac{109x^{22}}{200142579732480000} - \frac{37x^{23}}{2699667579248640000} \\
& + \frac{x^{25}}{4996138052505600000} + \frac{x^{26}}{891467770152296000000} - \frac{(-29+A)x^{27}}{84300054583320576000000} \\
& - \frac{(-5+B)x^{28}}{13266166484427816960000000} + e^x (6243168960 - 3072352896x + 645219096x^2 \\
& - 76279128x^3 + 5596356x^4 - 262660x^5 + 7747x^6 - 132x^7 + x^8);
\end{aligned}$$

(4.25)

ayrışım serisinin çözüm elemanları bulunur. Bu terimler (4.22) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\emptyset_8(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + y_5(x) + y_6(x) + y_7(x) \quad (4.26)$$

ayrışım serisi bulunur. Denklem (4.18) deki sınır şartları ve (4.26) çözüm serisinden

$$A = -0.9999338395027568$$

$$B = -3.000213370060558$$

bulunur. Böylece (4.18) - (4.19) probleminin sekiz terim kullanılarak Adomian ayrışım yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned} y(x) = & -\frac{43922277348290053870422789715439}{4546485627780096000000} + \frac{29 - (-0,9999338395027568)}{84300054583320576000000} \\ & + \frac{10939 - (-0,9999338395027568)}{380007936000} + \frac{36191679 - (-0,9999338395027568)}{1680} \\ & + \frac{1}{2}(-1427020559 + (-0,9999338395027568)) + \frac{-1030339 + (-0,9999338395027568)}{19958400} \\ & + \frac{-1119 + (-0,9999338395027568)}{200142579732480000} + \frac{11095 - (3 \times (-3,000213370060558))}{12703122432000} \\ & + \frac{5 - (-3,000213370060558)}{1326616648442781696000000} + \frac{11730345 - (-3,000213370060558)}{10080} \\ & + \frac{1}{6}(-452119005 + (-3,000213370060558)) + \frac{-341825 + (-3,000213370060558)}{172972800} \\ & + \frac{-375 + (-3,000213370060558)}{2699667579248640000} + 3844174740 \times 2,71828182845 \end{aligned} \quad (4.27)$$

olur. Denklem (4.18)-(4.19) probleminin analitik çözümü ise [55]

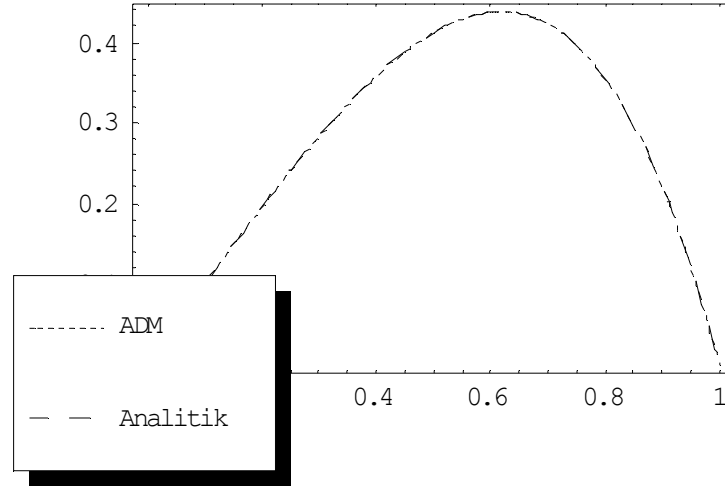
$$y(x) = x(1-x)e^x \quad (4.28)$$

şeklindedir.

Çözüm serisi kullanılarak sekiz terim için elde edilen sayısal sonuçlar ve grafikler aşağıdaki gibidir.

Tablo 4.3. Ayrışım Serisinin Sekiz Terimi Kullanılarak Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

X	Analitik Çözüm y(x)	Yaklaşık Çözüm ϕ_8	Hata $y(x) - \phi_8$
0	0.	0.	0.
0.1	0.099465	0.099465	1.24486×10^{-8}
0.2	0.195424	0.195427	-2.49961×10^{-6}
0.3	0.283470	0.283473	-2.66524×10^{-6}
0.4	0.358038	0.358043	-4.78955×10^{-6}
0.5	0.412180	0.412185	-4.39760×10^{-6}
0.6	0.437309	0.437317	-8.38244×10^{-6}
0.7	0.422888	0.422890	-1.64090×10^{-6}
0.8	0.356087	0.356089	-2.08975×10^{-6}
0.9	0.221364	0.221367	-2.60232×10^{-6}
1.0	0.	-5.72205×10^{-6}	5.72205×10^{-6}

**Şekil 4.3.** Ayrışım Serisinin Sekiz Terimi Kullanılarak Elde Edilen Yaklaşık ve Analitik Çözümü Gösteren Grafik**Örnek 4.3.**

$$y(0) = y''(0) = 1, \quad y'(1) = y''(1) = -e \quad (4.29)$$

sınır şartları ile verilen

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = -8e^x, \quad x \in [0,1] \quad (4.30)$$

şeklinde tanımlanan dördüncü mertebeden lineer homojen olmayan denklemi ADM ile çözüyoruz [56].

(4.30) denklemi operatör formunda yazılırsa

$$L_y = 2y'' - y - 8e^x, \quad (4.31)$$

bulunur. Burada

$$L = \frac{d^4}{dx^4}, \quad L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx dx dx \quad (4.32)$$

şeklindeki türev ve integral operatörleridir. L^{-1} invers operatörü (4.31) denkleminde uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa

$$y(x) = Ax + \frac{1}{3!} Bx^3 - 8L^{-1}(e^x) + 2L^{-1}(y'') - L^{-1}(y) \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada $A = y'(0)$ ve $B = y'''(0)$ dır. Denklem (4.33) de;

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

çözüm serisi yazılırsa

$$\sum y_n(x) = Ax + \frac{1}{3!} Bx^3 - 8L^{-1}(e^x) + 2L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} y_n''(x)) - L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)) \quad (4.34)$$

ifadesi bulunur. Bağntı (4.34) den ise aşağıdaki indirgeme formülü yazılır.

$$\begin{cases} y_0(x) = Ax + \frac{1}{3!} Bx^3 - 8L^{-1}(e^x) \\ y_{n+1}(x) = 2L^{-1}(y_n'') - L^{-1}(y_n), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

İndirgeme formülündeki A ve B sabitleri Adomian çözüm serisini bulduktan sonra (4.29) sınır şartları kullanılarak belirlenecektir.

Yukarıdaki (4.35) indirgeme bağıntısından

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 8 - 8e^x + (8 + A)x + 4x^2 + \frac{1}{6}(8 + B)x^3; \\
y_1(x) &= 8 - 8e^x + 8x + 4x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \frac{1}{120}(-8 + A - 2B)x^5 - \frac{x^6}{90} - \frac{(8 + B)x^7}{5040} \\
y_2(x) &= 8 - 8e^x + 8x + 4x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{90} - \frac{(A - 2(2 + B))x^7}{2520} - \frac{x^8}{1680} \\
&\quad + \frac{(A - 4(6 + B))x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{453600} + \frac{(8 + B)x^{11}}{39916800}; \\
y_3(x) &= 8 - 8e^x + 8x + 4x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^7}{630} + \frac{x^8}{5040} \\
&\quad - \frac{(-2 + A - 2B)x^9}{90720} - \frac{x^{10}}{64800} + \frac{(-14 + A - 3B)x^{11}}{9979200} + \frac{x^{12}}{11975040} \\
&\quad - \frac{(-40 + A - 6B)x^{13}}{6227020800} - \frac{x^{14}}{10897286400} - \frac{(8 + B)x^{15}}{1307674368000}; \\
y_4(x) &= 8 - 8e^x + 8x + 4x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^7}{630} + \frac{x^8}{5040} \\
&\quad + \frac{x^9}{45360} + \frac{x^{10}}{453600} - \frac{(-1 + A - 2B)x^{11}}{4989600} - \frac{x^{12}}{3991680} \\
&\quad + \frac{(-30 + 3A - 8B)x^{13}}{1556755200} - \frac{17x^{14}}{800296713216000} - \frac{(8 + B)x^{15}}{121645100408832000};
\end{aligned} \tag{4.36}$$

ayrışım serisinin çözüm elemanları bulunur. Bu terimler (4.33) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\varnothing_5(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) \tag{4.37}$$

ayrışım serisi bulunur. Denklem (4.29) deki sınır şartları ve (4.37) çözüm serisinden

$$A = 1$$

$$B = -3$$

olarak bulunur. Böylece (4.29)-(4.30) probleminin beş terim kullanılarak Adomian ayrışım yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
y(x) = & \frac{891366486089689}{8794469376000} + 1 + \frac{-80 + 11 \times 1 - 26 \times (-3)}{6227020800} + \frac{8 + (-3)}{121645100408832000} \\
& \frac{40 + (-3)}{6} + \frac{16 - (2 \times 1) + (3 \times (-3))}{5040} + \frac{-8 + (3 \times 1) + (4 \times (-3))}{362880} \\
& + \frac{-40 - (4 \times 1) + (5 \times (-3))}{39916800} + \frac{128 - (6 \times 1) + (23 \times (-3))}{1307674368000} \\
& + \frac{1 - 8(7 + (-3))}{355687428096000} + \frac{1}{120}(-1 + 2(16 + (-3))) - 40 \times 2,71828182845;
\end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklindedir. Denklem (4.29)-(4.30) probleminin analitik çözümü ise

$$y(x) = x(1 - x)e^x \tag{4.39}$$

şeklindedir [55].

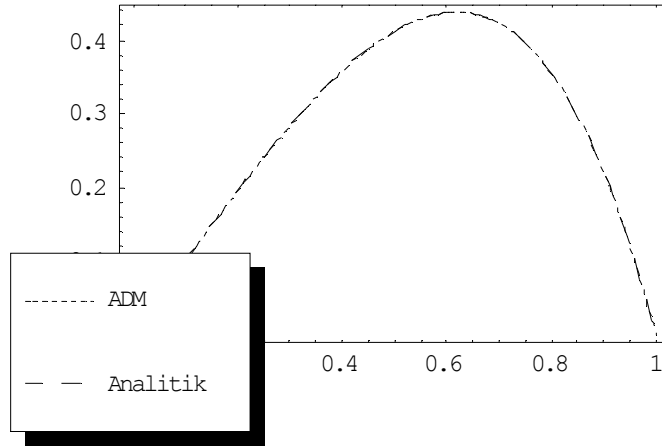
Denklem (4.38)' in çözüm serisi kullanılarak beş terim için elde edilen sayısal sonuçları ve grafikleri aşağıdaki gibidir.

Tablo 4.4. Ayırışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

X	Analitik Çözüm y(x)	Yaklaşık Çözüm Ø₅	Hata y(x) - Ø₅
0	0.	0.	0.
0.1	0.099465	0.099465	2.92821x10 ⁻¹⁵
0.2	0.195424	0.195424	-2.16493x10 ⁻¹⁵
0.3	0.283470	0.283470	6.10623x10 ⁻¹⁶
0.4	0.358038	0.358038	-1.30451x10 ⁻¹³
0.5	0.412180	0.412180	-2.37055x10 ⁻¹²
0.6	0.437309	0.437309	-2.58711x10 ⁻¹¹
0.7	0.422888	0.422888	-1.94957x10 ⁻¹⁰
0.8	0.356087	0.356087	-1.12373x10 ⁻⁹
0.9	0.221364	0.221364	-5.27758x10 ⁻⁹
1.0	0.	2.10884x10 ⁻⁸	-2.10884x10 ⁻⁸

Tablo 4.5. Spline Metodu (SM) ve Adomian Yöntemiyle Elde Edilen Mutlak Hatanın Karşılaştırılması

X	SM h=1/5	SM h=1/10	ADM $\emptyset_5$
0	0	0	0
0.2	1.960E-5	1.228E-6	-2.164E-15
0.4	3.211E-5	2.012E-6	-1.304E-13
0.6	3.568E-5	2.235E-6	-2.587E-11
0.8	2.683E-5	1.681E-6	-1.123E-9
1	0	0	-2.108E-8

**Şekil 4.4.** Ayrışım Serisinin Beş Terimi Kullanılarak Elde Edilen Yaklaşık ve Analitik Çözümü Gösteren Grafik

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kiriş-kolon teorisinde ortaya çıkan dördüncü mertebeden sınır-değer probleminin Adomian ayrışım yöntemiyle yaklaşık çözümü bulunmuştur. Bu yöntem herhangi bir kesiklemeye, indislemeye ve lineerleştirmeye ihtiyaç duyulmadan diferansiyel denkleme uygulanabilmektedir.

Konuyla ilgili üç tane lineer homojen ve homojen olmayan problem göz önüne alınmış olup, elde edilen sonuçlar Tablo 4.1, 4.3, 4.4 ve Şekil 4.2, 4.3, 4.4 ile verilmiştir. Tablolarda ve şekillerde de görüldüğü gibi kullanılan yöntem çözüm serisinin birkaç teriminin alınmasıyla analitik çözüme hızlı yakınsayan sonuçlar vermiştir. Bu durum metodun bu tür problemler için uygun ve güvenilir olduğunu gösterir. Ayrıca ele alınan örnekler Taiwo ile Ogunlaran [56] tarafından non-polynomial spline yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Tablo 4.2 ve 4.5’de görüldüğü gibi ‘h’ adım ölçüsünün çok küçük olması durumunda ancak bu çalışmada elde edilen sonuçlara yakın değerler bulunmuştur. Ayrışım metodunun çözüm serisine yeni terimler ilave edilerek spline yönteminden çok daha iyi sonuçlar bulunabilir.

Şekil 4.2, 4.3, 4.4’de analitik çözüm ve ayrışım serisinin Örnek 4.1 ve 4.3 için beş terim, Örnek 4.2 için sekiz terim alınarak iki boyutlu grafikleri çizilmiştir. Bu grafiklerde görüldüğü gibi analitik ve yaklaşık çözüm ayırt edilmemektedir.

Sonuç olarak; Adomian ayrışım yöntemi inşaat mühendisliğinde ortaya çıkan kiriş-kolon teorisindeki lineer homojen ve homojen olmayan sınır değer problemlerine uygulanabilir kanısına varılmıştır. Fiziksel olayın doğasını değiştirmeden analitik çözüme hızlı yakınsayan sonuçlar bulunabilir. Ayrıca bu yöntemin Mathematica, Maple, Matlab gibi programlar yardımıyla hesaplamaları kolaylıkla yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Adomian, G., 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
2. Adomian, G., 1990. A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations, Mathematical and Computer Modelling, 13, 17-43.
3. Adomian, G. and Rach, R., 1990. Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations , Computers & Mathematics with Applications, 19, 9-12.
4. İnç, M., 2004. On Numerical solutions of PDEs by the decomposition method, Kragujevac J. Mathematics, 26, 153-164.
5. İnç, M., 2005. The Decomposition Method for Solving Parabolic Equations in Finite Domains, Journal of Zhejiang University, 1058-1064.
6. İnç, M., Cherruault, Y. and Abbaoui, K., 2004. A Computational Approach to the Wave Equations : An Application of the Decomposition Method, Kybernetes, 33(1), 80-97.
7. Odibat, Z.M., 2007. A New Modification of the Homotopy Perturbation Method for Linear and Nonlinear Operators, Applied Mathematics and Computation, 189, 746–753.
8. Alizadeh, S.R.S., Domairry, G.G. and Karimpour, K., 2008. An Approximation of the Analytical Solution of the Linear and Nonlinear Integro-Differential Equations by Homotopy Perturbation Method, Acta. Appl. Math., 104, 355–366.
9. Wang, Y.G., Song, H.F. and Li, D., 2009. Solving Two-point Boundary Value Problems Using Combined Homotopy Perturbation Method and Green's Function Method. Applied Mathematics and Computation, 212, 366–376.
10. Biazar, J. and Ghazvini, H., 2009. Convergence of the Homotopy Perturbation Method for Partial Differential Equations, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10, 2633-2640.
11. Liu, C.S., 2010. The Essence of the Homotopy Analysis Method, Applied Mathematics and Computation, 216, 1299–1303.
12. Momani, S. and Abuasad, S., 2006. Application of He's Variational Iteration Method to Helmholtz Equation, Chaos, Solitons and Fractals, 27(5), 1119-1123.
13. Abulwafa, E.M., Abdou, M.A. and Mahmoud, A.A., 2007. Nonlinear Fluid Flows in Pipe-like Domain Problem Using Variational Iteration Method, Chaos, Solitons and Fractals, 32(4), 1384-1397.

14. Sweilan, N.H. and Khader, M.M., 2007. Variational Iteration Method for one Dimensional Nonlinear thermoelasticity, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(1), 145-149.
15. Xu, L., 2007. Variational Iteration Method for Solving Integral Equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 54, 1071-1078.
16. He, J.H., Wazwaz, A.M. and Xu, L., 2007. The Variational Iteration Method: reliable, efficient and promising, *Computers and Mathematics with Applications*, 54(7-8), 879-880.
17. Xu, L., He, J.H. and Wazwaz, A.M., 2007. Variational Iteration Method – reality, potential and challenges, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1), 1-2.
18. Coşkun, S.B. and Atay M.T., 2007. Analysis of Convective Straight and Radial fins with Temperature-dependent Thermal Conductivity Using Variational Iteration Method with Comparison with Respect to Finite Element Analysis. *Mathematical Problems in Engineering*, 2007, Article ID: 42072.
19. Atay M.T., Coşkun, S.B., 2008. Effects of Nonlinearity on the Variational Iteration Solutions of Nonlinear Two-point Boundary Value Problems with Comparison with Respect to Finite Element Analysis. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008, Article ID: 857296.
20. İnç, M. and Ugurlu, Y., 2007. Numerical Simulation of the Regularized Long Wave Equation by He's Homotopy Perturbation Method, *Physics Letters A*, 369, 173–179.
21. Bataineh A.S. and Noorani, M.S.M., Hashim, I., 2009. Homotopy Analysis Method for Singular IVPs of Emden–Fowler Type, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 1121–1131.
22. Abbasbandy, S., Babolian, E. and Ashtiani, M., 2009. Numerical Solution of the Generalized Zakharov Equation by Homotopy Analysis Method, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14, 4114–4121.
23. Rashidi, M.M. and Dinarvand, S., 2009. Purely Analytic Approximate Solutions for Steady Three-Dimensional Problem of Condensation film on Inclined Rotating disk by Homotopy Analysis Method, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10, 2346–2356.
24. Song, L. and Zhang, H., 2009. Solving the Fractional BBM–Burgers Equation Using the Homotopy Analysis Method, *Chaos Solitons and Fractals*, 40, 1616–1622.
25. Liao, S.J., 2009. On the Relationship Between The Homotopy Analysis Method and Euler Transform, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Article In Press.
26. İnç, M. and Işık, M., 2003. Adomian Decomposition Method for Three-dimensional Parabolic Equation with Non-classic Boundary Conditions, *J. Analysis*, 11, 43-51.

27. Abdelwahid, F., 2003. A Mathematical Model of Adomian Polynomials , Appl. Math. Comput.141,447-453.
28. Babolian, E. and Javadi S., 2004. New Method for Calculating Adomian Polynomials, Appl.Math.Comput.153, 253-259.
29. İnç, M., Cherruault, Y. and Abbaoui, K., 2002. On the Solution of the Nonlinear KdV Equation by the Decomposition Method, Kybernetes, 31(5), 766-772.
30. El-Sayed, A.M.A. and Gaber, M., 2006, The Adomian Decomposition Method, Physics Letters A, 359, 175-182 p.
31. Momoniat, E., Selway and Jina, 2007, T.A. K., Analysis of Adomian Decomposition Applied to a Third-Order Ordinary Differential Equation from Thin Film Flow, Physics Letters A., 66, 2315-2324 p.
32. Kreyszig, E., 1978. Intruductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and sons, New York.
33. Yaşar, İ. B., 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
34. Koca, K., 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
35. Adomian, G., 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego.
36. Karagöz, M., 1998. İstatistik Yöntemler, Malatya.
37. Kincaid, D., Cheney, W., 1990. Numerical Analysis, Cole Publishing Company, California.
38. Ross, S. L. Çevirmen : Can M., 2004. Diferansiyel Denklemler.
39. Cherruault, Y., 1998. Modèles et Méthodes Mathématiques pour les Sciences du Vivant, Presses Universitaires de France, Paris.
40. Şuhubi, S. and Erdoğan, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ VakfıYayınları, 38, İstanbul.
41. Cherruault, Y., 1988. Convergence of Adomian's Method, Kybernetes 18(2), 31-38.
42. Gümüş, G., 2008. Bazı Özel Tipte Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemlerinin Maple ve Nümerik Yöntemler Yardımıyla Sayısal Çözümleri, Gazi Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
43. Adomian, G., 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego.
44. Adomian, G., 1994. Solving Frontier Problems of Physics , The Decomposition Method, Kluwer Academic Publisher, Boston.

45. Narlı, M., 2007. Adomian Ayrışım Metodu ile Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
46. Kırmızıtoprak, D., 2008. Lineer Olmayan Denklemlerin Analitik ve Yaklaşık Çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
47. Servi, S., 2008. Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri Üzerine Farklı Yaklaşımlar, Selçuk Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
48. Soytaş, C., 2006. Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri, Selçuk Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
49. Gazıkarakoç, S.B., 2006. Cebirsel Denklemlerin Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü, İnönü Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.
50. Cherruault, Y., 1988. Convergence of Adomian's Method, Kybernetes 18(2), 31-38.
51. Abbaui, K. and Cherruault, Y., 1995. New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Method, Comput. Math. Appl.
52. Wazwaz, A.M., 2002. Partial Differential Equations : Methods and Applications, Balkema, Lisse, The netherlands.
53. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1985. Theory of Elastic Stability, Mc.Graw Hill International Book Company, p. 1-9.
54. Taiwo, O.A. and Ogunlaran, O. M., 2011. A Non-polynomial Spline Method for Solving Linear Fourth-order Boundary Value Problems, International Journal of the Physical Sciences, Vol.(6)13, pp.3246-3254.
55. Siddiqui, S.S. and Akram, G., 2008. Quintic Spline Solutions of Fourth Order Boundary Value Problems, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Vol.5, Number 1, p.101-111.
56. Taiwo, O.A. and Ogunlaran, O.M., 2011. A Non-polynomial Spline Method for Solving Linear Fourth-order Boundary Value Problems, International Journal of the Physical Sciences, Vol.(6)13, pp.3246-3254.

ÖZGEÇMİŞ

Şaile Öztürk 1986 yılında Elazığ'da doğdu. 2004 yılında Malatya Süper Lisesi'nden mezun oldu. 2006 yılında Fırat Üniversitesi Yapı Öğretmenliği bölümüne girmeye hak kazandı. 2010 yılında Teknik Eğitim Fakültesi'ni birincilikle bitirdi. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Eğitimi Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2010 yılında TÜBİTAK Yurt İçi Yüksek Lisans bursiyeri olmaya hak kazandı. 2012 yılında evlendi.