

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

**SPEKTRAL VE POTANSİYEL TEORİNİN TERS
PROBLEMLERİ**

Erdal BAŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2006

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

SPEKTRAL VE POTANSİYEL TEORİNİN TERS PROBLEMLERİ

Erdal BAŞ

Bu tez,..... tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye: Prof. Dr. Salih ÖZÇELİK

Üye: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye: Prof. Dr. Fahrettin GÖĞTAŞ *–İZİN Lİ–*

Üye: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun...../...../..... tarih ve..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde, bana yardımcı olan, bilgi ve birikimlerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Etibar PENAHOV'a üzerimdeki emeklerinden dolayı minnet ve şükranlarımı sunarım.

Erdal BAŞ

İÇİNDEKİLER

Teşekkür	
İçindekiler	I
Simgeler Listesi	II
Özet	III
Abstract	IV
GİRİŞ	1
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
2. SİNGÜLER STURM-LIOUVİLLE DENKLEMİ İÇİN SONLU ARALIKTA SINIR DEĞER PROBLEMİ	12
2.1. Sturm-Liouville Denkleminin Özel Çözümleri	12
2.2. Sınır Değer Problemlerinin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları	17
2.3. Singüler Sturm-Liouville Denklemi İçin Asimptotik Formüller	21
2.4. Normlaştırıcı Sayılara Göre Özdeğerler İçin Asimptotik Formüller	28
2.5. Özfonksiyonlara Göre Seriyeye Açılım ve Green Fonksiyonu	39
3. ÖZEL SİNGÜLERLİĞE SAHİP STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TERS PROBLEM	52
3.1. Teklik Teoremi	52
4. TERS PROBLEMİN TEMEL İNTEGRAL DENKLEMİNİN GENEL DEJENERELİĞİ	71
4.1. Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Ters Sturm Liouville Problemi	71
4.2. Gelfand-Levitan-Marchenko Denkleminin Dejenereliği	79
KAYNAKLAR	86

SİMGELER LİSTESİ

H	:	Hilbert Uzayı
$L_2[a, b]$	:	Karesi integrallenbilen fonksiyonlar uzayı
$o(1)$	:	Sonsuz küçük değerler
φ_n	:	Özfonksiyon
λ	:	Özdeğer
$K(x, \xi)$	:	Çekirdek fonksiyonu
$q(x)$	:	Potansiyel fonksiyonu
$\rho(\lambda)$	:	Spektral fonksiyonu
$G(x, \xi)$	:	Green fonksiyonu

ÖZET

SPEKTRAL VE POTANSİYEL TEORİNİN TERS PROBLEMLERİ

Erdal BAŞ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2006, sayfa: 90

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, sonlu aralıkta $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ (burada δ sabit, $1 < p < 2$, $q_0(x) \in L_2[0, \pi]$) şeklinde potansiyele sahip, Sturm-Liouville denklemi için sınır değer problemi tanımlandı. Singüler Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi verildi. Son kısmında ise Parseval eşitliği ispatlandı.

Üçüncü bölümde sıfırda özel tekile sahip, Sturm-Liouville operatörü için iki kısmen çakışmayan spektruma göre ters problemin çözümü yapıldı. Özellikle bu kısımda singüler potansiyellerinin farkı ile ilgili Hochstadt yöntemiyle teklik teoremi ispatlandı.

Dördüncü bölümde, dönüşüm operatörünün çekirdeğinin ve ters problemin esas integral denkleminin genel dejenereliği gösterildi. Ayrıca singüler halde potansiyeller farkıyla ilgili Hochstadt teoreminin farklı bir yöntemle ispatı verildi.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville, Özdeğer, Özfonksiyon, Singüler Problem,

Dönüşüm operatörü, Genel dejenere, Potansiyel, Spektrum, Normlaştırıcı sayılar, Spektral fonksiyon.

ABSTRACT

THE INVERSE PROBLEMS OF SPECTRAL AND POTENTIAL THEORY

Erdal BAŞ

Firat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2006, Page:90

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems are given which will be used in the later chapters.

In the second chapter, the potential function $q(x)$ in a Sturm-Liouville equation is defined on the unit interval having of the singularity type $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ (where δ is a constant, $1 < p < 2$, $q_0(x) \in L_2[0, \pi]$.) Spectral analysis of singular Sturm-Liouville equation is given. At the end of the chapter, the proof of the Parseval equality is attained.

In the third chapter, we give the solution of the inverse problem on two partially non-coinciding spectra for the Sturm-Liouville operators with the peculiarity specially at zero. In particular in this case we obtain Hochstadt's theorem concerning the structure of the difference $q(x) - \tilde{q}(x)$.

In the fourth chapter, we prove the generalized degeneracy of the kernel of translation operator. It is also singular case we prove the generalized degeneracy the main integral equation inverse problem. In addition we obtain a new proof of the Hochstadt's theorem which concerns the structure of the difference $q(x) - \tilde{q}(x)$.

Key Words: Sturm-Liouville, Eigenvalue, Eigenfunction, Singular Problem, Translation Operator, Generalized degeneracy, Potential, Spectrum, Normalized numbers, Spectral function.

GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik, ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları aynı zamanda lineer cebir ve titreşim teorisinin problemleridir. Lineer cebir problemleri ve titreşim problemleri arasındaki benzerliklerin tanımlanması çok eskilere dayanmaktadır. İntegral denklemler teorisiyle ilgili yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden yararlanan ilk bilim adamı Hilbert olmuştur.

Özellikle l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer self adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır ve özellikle XIX.-XX. asırlarda bu konularda çalışan birçok matematikçi tarafından söz konusu teori oldukça geliştirilerek üst seviyelere ulaşmıştır. Bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca spektral teori için önemli yere sahip olan açılım teoremleri ispatlanmıştır.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferensiyel operatör tanımlanmış, bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferensiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz noktaya sahip olan diferensiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G.D.Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde oldukça önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra F. Riesz, J. von Neumann, K.O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi yapılandırılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında E.C. Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan veya artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Singüler diferensiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferensiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B.M.Levitan tarafından yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiği ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M.S. Birman, M.Z. Salamyak, V.P. Maslov, M.V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Diferensiyel operatörler için ters problem şöyle tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak mümkündür.
2. Hangi spektral verilere göre operatör birebir olarak tanımlanmaktadır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç V.A. Ambarstsumyan [1] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada Sturm-Liouville operatörleri için ters probleme ilişkin aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 1. $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (2)$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) = 0$ dır.

Bu sonuçtan sonra ters problemler teorisinde ilk çalışmayı isveç matematikçi G. Borg [2] yapmıştır. Borg, genel durumda Sturm Liouville operatörünün tek spektrumla tanımlanmadığını göstermiştir. Ayrıca farklı sınır şartları sağlanacak şekilde iki spektruma göre Sturm Liouville operatörünün birebir olarak tanımlandığını göstermiş ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ (1) diferensiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy'(0) = 0 \quad (3)$$

$$y'(\pi) + Hy'(\pi) = 0 \quad (4)$$

sınır koşulları ile verilen problemin, $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ ise (1) denklemi ve

$$y'(0) - h_1 y'(0) = 0 \quad (h \neq h_1) \quad (5)$$

$$y'(\pi) + Hy'(\pi) = 0$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsunlar. Bu durumda $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $(n = 0, 1, \dots)$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve sonlu h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirler.

Daha sonra potansiyelin $q(x) = q(\pi - x)$ koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü tanımladığını N. Levinson [3] ispatlamıştır. Ayrıca negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumda, saçılma fazının potansiyeli birebir olarak tanımladığı gösterilmiştir.

Sturm-Liouville denkleminin inceleme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemin çözümünde önemli bir etken olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte [4], J. Lions, [5] ve B.M. Levitan [6] tarafından verilmiştir. Keyfi Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını ilk olarak A.V. Povzner [7] kendi çalışmalarında göstermiştir.

Bu çalışmalardan sonra ikinci mertebeden lineer diferensiyel operatörler için ters problemler teorisinde teklik problemiyle ilgili en önemli çalışmalar A.N. Tichonof [8] ve V.A. Marchenko [9] tarafından yapılmıştır. Marchenko bu çalışmasında teklik teoremini ispatlarken Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1) diferensiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = h \quad (6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu problemin özfonksiyonları olsun. Bu takdirde

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi_n^2(x, \lambda_n) dx$$

verilen operatörün normlaştırıcı sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere Marchenko yukarıda belirtilen çalışmasında Borg'un ispatladığı teoremi $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca sözkonusu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun, Sturm-Liouville tipinde bir diferensiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile eş zamanda M.G. Krein [10], [11] çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferensiyel operatörü $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$, $(n = 0, 1, \dots)$ dizilerine göre belirtmek için oldukça etkili bir yöntem vermiştir. Ancak bu çalışmalarda verilen gerek ve yeter koşul, $\{\lambda_n\}$ ve

$\{\mu_n\}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerden kurulan yardımcı fonksiyonlar kullanılarak verilmiştir.

Spektral analizin ters problemler teorisinde temel çalışma I.M. Gelfand ve B.M. Levitan [12] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul tanımlanmış olup Sturm-Liouville operatörünün tanımlanması için önemli bir yöntem verilmiştir.

Sturm-Liouville operatörleri için ters problemini iki spektruma göre tam çözümü 1964 yılında B.M. Levitan ve M.G. Gasimov [13] tarafından yapılan bir çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşullar tanımlanmıştır.

Sturm-Liouville operatörünü inceleme sürecinde özellikle XX. asrın ikinci yarısında kullanılan yöntemler sürekli artmıştır. Örneğin 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçi ve Matematikçileri G.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura ve P.D. Lax [14] tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlinear evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterdiler. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde hem Matematikçiler hem de Fizikçiler tarafından çalışılmaktadır. Kuantum Saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe detaylı olarak L.D. Faaddeev [15], H. Chadan P. Sabatier [16] [17] çalışmalarında verilmiştir.

$q(x) = q_1(x) + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}$ potansiyeline sahip (1) denklemi için iki spektruma göre ters problem M.G. Gasimov[19] tarafından çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda Bessel tipi tekilliğe sahip potansiyeller için ters problemler farklı yöntemlerle E.S. Penahov [20],[21] ve H. Koyunbakan [22], Hidrojen atomu denklemleri için E.S. Penahov, R. Yılmaz [23], Dirac denklemler sistemi için ise Ü. İç [24] ve Tekile sahip Sturm -Liouville diferensiyel operatörü için Kuantum Saçılma teorisinin ters problemleri E. Baş [18] tarafından incelenmiştir.

(δ - reel sayı, $1 < p < 2$, $q_0(x) \in L_2[0, \pi]$ olacak şekilde $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ potansiyelli (1) denklemi için sınır değer problemi Z.M. Gasimov, G.Sh Guseinov'un [25],[26] çalışmalarında ele alınmıştır. Daha sonraki yıllarda birçok matematikçiler: Rundell, Sacks [27], F. Gesztesy, B. Simon [28], Carlson R. [29],[30],[31]. J. Ralston [32], J.Pöschel, L. Sakhnovich [45] vs. bu tür ters problemleri incelemiş ve farklı metotlarla teoremleri ispatlamışlardır.

Bu tezde $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ şeklinde potansiyele sahip Sturm-Liouville operatör

için kısmen çakışmayan spektruma göre H. Hochstadt [34] yöntemiyle ters problem incelenmiştir. Özel olarak teklik teoremi farklı bir yöntemle ispatlanmıştır.

Ayrıca dördüncü bölümde ters problemin esas integral denklemi, bir başka ifadeyle Gelfand-Levitan-Marchenko denkleminin genel dejenereliği gösterilmiştir.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1. K , $\mathbf{R}$ veya $\mathbf{C}$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun.

$\langle, \rangle: X \times X \longrightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse $\langle, \rangle$ 'ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle, \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

$$\text{I. } \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\text{II. } \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \alpha \in K$$

$$\text{III. } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\text{IV. } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad x, y, z \in X$$

Ayrıca

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

metriğine göre tam iç çarpım uzayına ise Hilbert uzayı denir [35].

Tanım 1.1.2. $a \leq x \leq b$ olmak üzere,

$$L^2[a, b] = \left\{ f(x) : \int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty \right\}.$$

Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlıdır [35].

Tanım 1.1.3. E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayları olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $L : E_x \longrightarrow E_y$ operatörüne lineer operatör denir [36].

$$\text{I. } x_1, x_2 \in E_x, L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2$$

$$\text{II. } L(\lambda x) = \lambda Lx, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

Tanım 1.1.4. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer,

$$\|Lx\| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [37].

Tanım 1.1.5. X ve Y normlu uzaylar $L : X \longrightarrow Y$ bir operatör, $x_0 \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|Lx - Lx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $x_0 \in X$ noktasında L operatörü süreklidir denir [36].

Tanım 1.1.6. H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : H_1 \longrightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer, $L^* : H_2 \longrightarrow H_1$ operatörü

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L 'nin adjointi denir. Eğer $L^* = L$ ise L 'ye self adjoint operatör denir [36].

Tanım 1.1.7. $p(x)$, $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

şeklinde tanımlı L operatörüne Sturm-Liouville operatörü,

$$Ly + \lambda s(x)y = 0$$

şeklinde tanımlı denkleme ise Sturm-Liouville diferensiyel denklemi denir [39].

Sturm-Liouville diferensiyel operatörünün, spektral özellikleri araştırılırken aşağıdaki üç sınır şartları göz önüne alınır.

I. Ayırık sınır şartları:

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

II. Periyodik ve antiperiyodik sınır şartları

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

$$y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b)$$

III. Uçları sabitlenmiş sınır şartları:

$$y(a) = y(b) = 0$$

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

Tanım 1.1.8. $L, D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ 'ya L operatörünün özdeğeri, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ 'ya karşılık gelen özfonksiyon denir [39].

Tanım 1.1.9. (Dönüşüm Operatörü) E bir lineer topolojik uzay, A ve B 'de $A, B : E \longrightarrow E$, şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 , E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 'den E_2 'ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip bir X operatörü,

I. X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

II. $AX = XB$

şartlarını sağlıyorsa, X' e A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [39].

Tanım 1.1.10. $x \longrightarrow \infty$ iken eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$ ise $f(x) = o\{g(x)\}$ ve $x \longrightarrow \infty$ iken $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ ifadesi sınırlı ise $f(x) = O\{g(x)\}$ olarak ifade edilir [39].

Tanım 1.1.11. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyorsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik denir [38].

Tanım 1.1.12. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'ye tam fonksiyon denir [38].

Tanım 1.1.13. (Tam Fonksiyonun Mertebesi) Bir $f(z)$ fonksiyonuna karşılık A ve a pozitif sayıları bulunabiliyorsa, öyle ki $r = |z| \longrightarrow \infty$

$$|f(z)| < Ae^{r^a}$$

ise $f(z)$ fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur, a sayılarının en küçüğüne ρ dersek ρ 'ya tam fonksiyonun mertebesi denir [40].

Tanım 1.1.14. (Mutlak Değerin Maksimum İlkesi) $f(z)$ herhangi bir G bölgesinin tüm noktalarında 1 : 1 ve analitik fonksiyon olsun. Bu takdirde G bölgesinde bulunan hiçbir noktada $f(z)$ maksimum değeri alamaz [40].

Eğer $f(z)$ kapalı G bölgesinde sürekli ve bu bölgenin iç kısmında analitik ise

$$\sup_{z \in G} |f(z)|$$

değerini bu bölgenin γ sınırında alır. Yani,

$$|f(z)| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)|.$$

Tanım 1.1.15. (Hölder Eşitsizliği) Reel p ve q sayıları için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere kompleks ya da reel (a_i) ve (b_i) dizileri için geçerli olan

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right]^{\frac{1}{q}},$$

ve ayrıca verilen bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi, $f \in L_p[\Omega]$ ve $g \in L_q[\Omega]$ reel veya kompleks değerli fonksiyonlar için geçerli olan

$$\int_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

bağıntılarına sırasıyla toplam ve İntegral için Hölder eşitsizliği denir [35].

Tanım 1.1.16.(Genel Dejenerelik) $s \leq x$ olacak şekilde

$$K(x, s) = \sum_{n=0}^N c_n f_n(x) g_n(s)$$

ise $K(x, s)$ fonksiyonu genel dejeneredir [39].

Teorem 1.1.1(Rezidu Teoremi) a_k 'ler bir C bölgesinde kutup noktaları olmak üzere

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}_{z=z_k} s f(z),$$

ve ayrıca

$$\operatorname{Re}_{z=z_0} s f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} f(z) (z - a_i)^k \right]_{z=a_i}$$

dir [38].

Teorem 1.1.2. (Mittag-Leffler Açılımı)

Bir $f(z)$ fonksiyonunun sonlu düzlemdeki ayrık tekil noktaları $a_1, a_2, \dots$

bu noktalardaki rezidüleri $b_1, b_2, \dots$ olsun. Bu durumda

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

dir [57].

İspat. $f(z)$, $z = a_n$, $(n = 1, 2, \dots)$ kutup noktalarına sahip olsun. Kabul edelimki $z = \xi$ 'de $f(z)$ 'in bir kutbu olmasın. Bu takdirde $\frac{f(z)}{z - \xi}$ fonksiyonu $z = a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ve ξ kutuplarına sahip olsun. Buna göre $z = a_n$ 'de $\frac{f(z)}{z - \xi}$ 'nin rezidüsü

$$\lim_{z \rightarrow a_n} (z - a_n) \frac{f(z)}{z - \xi} = \frac{b_n}{a_n - \xi}$$

$z = \xi$ 'de $\frac{f(z)}{z-\xi}$ 'in rezidüsü

$$\lim_{z \rightarrow \xi} (z - \xi) \frac{f(z)}{z - \xi} = f(\xi)$$

rezidü teoremine göre

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z - \xi} dz = f(\xi) + \sum_n \frac{b_n}{a_n - \xi} \quad (1.1.1)$$

olur. Şimdi $z = 0$ 'da $f(z)$ analitik olsun. Bu takdirde (1)'de $\xi = 0$ alarak

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) + \sum_n \frac{b_n}{a_n} \quad (1.1.2)$$

elde ederiz. (1.1.1) ifadesinden (1.1.2)'yi çıkarırsak

$$\begin{aligned} & f(\xi) - f(0) + \sum_n b_n \left(\frac{1}{a_n - \xi} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} f(z) \left\{ \frac{1}{z - \xi} - \frac{1}{z} \right\} dz \\ &= \frac{\xi}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z - \xi)} dz \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Ayrıca C_N 'deki z için $|z - \xi| \geq |z| - |\xi| = R_N - |\xi|$ olduğu için eğer $|f(z)| \leq M$ ise

$$\left| \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z - \xi)} dz \right| \leq \frac{M 2\pi R_N}{R_N (R_N - |\xi|)}$$

$N \rightarrow \infty$ iken $R_N \rightarrow \infty$ olur ki sol tarafta ki integral sifıra yakınsar.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z - \xi)} dz = 0,$$

buna göre (3)'de $N \rightarrow \infty$ iken

$$f(\xi) = f(0) + \sum_n b_n \left(\frac{1}{\xi - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

Teorem 1.1.3. (Rouche Teoremi) Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları kapalı bir G eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ve G 'de $|g(z)| < f(z)$ ise bu takdirde $f(z) + g(z)$ ve $f(z)$ 'in G 'nin içerisindeki sıfırlarının sayıları aynıdır [36].

Teorem 1.1.4. (Hochstadt Teoremi)

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad 0 < x < 1 \quad (1.1.5)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \quad (1.1.5)$$

$$y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0 \quad (1.1.6)$$

probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$, (1.1.6) yerine

$$y(1) \cos \gamma + y'(1) \sin \gamma = 0 \quad (1.1.7)$$

alınmasıyla elde edilen yeni problemin spektrumu ise $\{\lambda'_i\}$ olsun. Diğer yandan

$$\tilde{L}y = -y'' + \tilde{q}(x)y, \quad 0 < x < 1 \quad (1.1.8)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \quad (1.1.9)$$

$$y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0 \quad (1.1.10)$$

probleminin spektrumu $\{\tilde{\lambda}_i\}$, (1.1.8), (1.1.9) ve (1.1.7) probleminin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}'_i\}$ olsun. Ayrıca Λ_0 ile $\tilde{\lambda}_i \neq \lambda_i$ şartını sağlayan sonlu i lerin cümlesi, Λ ise $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ şartını sağlayan sonsuz i 'lerin cümlesi olsun. Bu durumda

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} (\tilde{y}_n w_n)'$$

ayrıca Λ_0 boş ise $q = \tilde{q}$ dir [34].

Teorem 1.1.5. (Levitan) $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ ve $\{\lambda'_n\}_0^\infty$ spektrumları çakışsın. $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ ve $\{\tilde{\lambda}'_n\}_0^\infty$ spektrumları ile sonlu $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\tilde{\lambda}_n \neq \tilde{\lambda}'_n$ ve $n > N$ için $\tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda}'_n$ olsun. Bu takdirde ters problemin temel integral denklemi,

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

genel dejeneredir [6].

2. SİNGÜLER STURM LİOUVILLE DENKLEMİ İÇİN SONLU ARALIKTA SINIR DEĞER PROBLEMİ

2.1. Sturm Liouville Denkleminin Özel Çözümleri

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x) \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (2.1.1)$$

Sturm Liouville denklemini, $q(x)$ reel fonksiyonu için

$$\int_0^\pi x |q(x)| dx < \infty \quad (2.1.2)$$

koşulu sağlanmak üzere gözönüne alalım. $q(x)$ fonksiyonu sonlu $[a, b]$ aralığında integralenebilirse

$$L(y) = -y'' + q(x)y$$

diferensiyel ifadeye regüler, eğer aralık sonlu değilse veya $q(x)$, $[a, b]$ ' de integrallenebilir değilse $L(y)$ diferensiyel ifadeye singülerdir denir. Burada $1 < p < 2$ için $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$, $x = 0$ ' m komşuluğunda tekilliğe sahip olduğundan integrallenebilir değildir, dolayısıyla (2.1.1) denklemi singülerdir. Oldukça önemli olan aşağıdaki teoremi verelim [26]:

Teorem 2.1.1. Her sabit λ için (2.1.1) denklemi $x \rightarrow 0$ iken

$$\varphi(x, \lambda) = x [1 + o(1)], \quad \varphi'(x, \lambda) = 1 + o(1) \quad (2.1.3)$$

$$\psi(x, \lambda) = 1 + o(1) \quad \psi'(x, \lambda) = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2.1.3')$$

şeklinde asimptotik formülleri sağlayan temel $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ çözümler sistemine sahiptir. Her sabit $x \geq 0$ için $\varphi(x, \lambda)$, λ 'nın tam fonksiyonu olmak üzere

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq x e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \exp \left\{ \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \quad (2.1.4)$$

$$\left| \varphi(x, \lambda) - \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \right| \leq x \int_0^x t |q(t)| dt \exp \left\{ |\operatorname{Im} \lambda| x + \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \quad (2.1.5)$$

$$|\lambda \varphi(x, \lambda) - \sin \lambda x| \leq \left[\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \exp \left\{ |\operatorname{Im} \lambda| x + \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \quad (2.1.6)$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada

$$\sigma_1(x) = \int_x^\pi \sigma(t) dt, \quad \sigma(x) = \int_x^\pi |q(t)| dt \quad (2.1.7)$$

dir.

İspat. $\varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan (2.1.1) denkleminde denk olan

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} q(t) \varphi(t, \lambda) dt \quad (2.1.8)$$

integral denklemini gözönüne alalım. (2.1.8) integral denkleminin çözümü $|\operatorname{Im} \lambda| \geq 0$ olacak şekilde

$$\varphi(x, \lambda) = x e^{-i\lambda x} Z(x, \lambda)$$

şeklinde olsun. Bu takdirde $Z(x, \lambda)$ için

$$Z(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{i\lambda x} + \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} e^{i\lambda(x-t)} q(t) Z(t, \lambda) dt \quad (2.1.9)$$

denklemini elde ederiz. Bunun çözümünü ardışık yaklaşımlar yöntemiyle bulalım. Bu nedenle çözümü

$$Z(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, \lambda) \quad (2.1.10)$$

seri şeklinde ele alalım. Burada

$$Z_0(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{i\lambda x},$$

$$Z_k(x, \lambda) = \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} e^{i\lambda(x-t)} q(t) Z_{k-1}(t, \lambda) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

$\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, ve $0 \leq t \leq x$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} e^{i\lambda x} \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x e^{2i\lambda \xi} d\xi \right| \leq 1 \\ \left| \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda x} e^{i\lambda(x-t)} \right| &\leq 1 - \frac{t}{x} \leq 1 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\xi_0(x) = 1, \xi_k(x) = \int_0^x t |q(t)| \xi_{k-1}(t) dt$ olmak üzere (2.1.10) serisini

$$0 \leq s_k(x) \leq \frac{1}{k!} \left[\int_0^x t |q(t)| dt \right]^k \leq \frac{1}{k!} \left[\int_0^\pi t |q(t)| dt \right]^k$$

eşitsizliği sağlandığından $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(x)$ serisiyle karşılaştırsak, seri $[0, \pi]$ aralığında düzgün yakınsar. Böylece

$$|Z(x, \lambda)| \leq \exp \int_0^x t |q(t)| dt \quad (2.1.12)$$

ve $\text{Im } \lambda > 0$ için $Z(x, \lambda)$ fonksiyonu λ 'ya göre analitiktir, ayrıca $\text{Im } \lambda \geq 0$ kapalı yarı düzleminde süreklidir. Dolayısıyla

$$\varphi(x, \lambda) = xZ(x, \lambda) e^{-i\lambda x}$$

fonksiyonu (2.1.1) ve (2.1.8) denklemlerini ve

$$\left| \varphi(x, \lambda) e^{i\lambda x} \right| \leq x \exp \int_0^x t |q(t)| dt \quad (2.1.13)$$

eşitsizliğini sağlar ve $\text{Im } \lambda > 0$ için λ 'nın analitik fonksiyonudur, $\text{Im } \lambda \geq 0$ yarı düzleminde süreklidir. Ayrıca $\text{Im } \lambda \leq 0$ durumunda ise (2.1.8)'in çözülebilirliğini, $\varphi(x, \lambda) = x e^{i\lambda x} Z(x, \lambda)$ şeklinde ele alarak yapabiliriz. Bu durumda $\varphi(x, \lambda)$ çözümü $\text{Im } \lambda < 0$ için λ 'ya göre analitiktir ve $\text{Im } \lambda \leq 0$ yarı düzleminde ise sürekli olur. Böylece λ 'ya göre tam fonksiyonu olan $\varphi(x, \lambda)$, $\varphi(0, \lambda) = 0$ olmak üzere (2.1.1) denkleminin çözümüdür.

(2.1.13)'den yararlanarak (2.1.8)'i diferensiyellersek

$$\begin{aligned} \left| \varphi(x, \lambda) - \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \right| &\leq x \int_0^x t |q(t)| dt \exp \left\{ |\text{Im } \lambda| x + \int_0^x t |q(t)| dt \right\}, \\ |\varphi'(x, \lambda) - \cos \lambda x| &\leq \int_0^x t |q(t)| dt \exp \left\{ |\text{Im } \lambda| x + \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (2.1.3) ve (2.1.4),(2.1.5) eşitsizliklerini sağlar. $\text{Im } \lambda \geq 0$ için (2.1.8) denkleminde (2.1.13)'ü kullanarak

$$\begin{aligned} \left| [\lambda \varphi(x, \lambda) - \sin \lambda x] e^{i\lambda x} \right| &\leq \int_0^x \left| t \sin \lambda(x-t) \cdot e^{i\lambda(x-t)} q(t) Z(t, \lambda) \right| dt \\ &\leq \int_0^x t |q(t)| \exp \left\{ \int_0^t \xi |q(\xi)| d\xi \right\} dt \\ &= \exp \left\{ \int_0^x t |q(t)| dt \right\} - 1 \end{aligned}$$

elde ederiz, buradan özel olarak

$$\left| [\lambda \varphi(x, \lambda) - \sin \lambda x] e^{i\lambda x} \right| \leq \int_0^x t |q(t)| dt \exp \left\{ \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \quad (2.1.14)$$

$$|\lambda \varphi(x, \lambda)| \leq \exp \left\{ \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \quad (2.1.15)$$

elde edilir.

$\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ için $\frac{1}{|\lambda|} \leq x$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda (2.1.8), (2.1.12) ve (2.1.15)'den dolayı

$$\begin{aligned} \left| [\lambda \varphi(x, \lambda) - \sin \lambda x] e^{i\lambda x} \right| &\leq \int_0^x \left| \sin \lambda(x-t) e^{i\lambda(x-t)} q(t) e^{i\lambda t} \varphi(t, \lambda) \right| dt \\ &\leq \left\{ \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^x |q(t)| dt \right\} \exp \left\{ \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{|\lambda|} \sigma \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) + \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} \sigma(t) dt + \frac{1}{|\lambda|} \left[\sigma \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) - \sigma(x) \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left\{ \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \right\} \\ &\leq \left[\sigma_1(0) - \sigma_1 \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \right] \exp \left\{ \int_0^x t |q(t)| dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir, böylece $x > \frac{1}{|\lambda|}$ için (2.1.6) eşitsizliği sağlanır. $x \leq \frac{1}{|\lambda|}$ için

$$\begin{aligned} \int_0^x t |q(t)| dt &= -x\sigma(x) + \int_0^x \sigma(t) dt \leq \sigma_1(0) - \sigma_1(x) \\ &\leq \sigma_1(0) - \sigma_1 \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \end{aligned}$$

olduğundan (2.1.14)'den bu eşitsizliğin sağlandığı elde edilir. Her çözümü (2.1.1) denkleminin çözümü olmak üzere

$$\psi(x, \lambda) = \cos \lambda x - \cos \lambda x \int_0^x \frac{\sin \lambda t}{\lambda} q(t) \psi(t, \lambda) dt - \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \int_x^h \cos \lambda t \cdot q(t) \psi(t, \lambda) dt \quad (2.1.16)$$

integral denkleminde yararlanarak küçük $x \geq 0$ için $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Eğer

$$e^{2h|\lambda|} \int_0^h t |q(t)| dt = q < 1$$

ise $0 \leq x \leq h$ aralığında ardışık yaklaşımlar yöntemiyle (2.1.16) integral denklemini çözelim. Bu takdirde

$$\psi_0(x, \lambda) = \cos \lambda x$$

$$\psi_k(x, \lambda) = -\cos \lambda x \int_0^x \frac{\sin \lambda t}{\lambda} q(t) \psi_{k-1}(t, \lambda) dt - \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \int_x^h \cos \lambda t \cdot q(t) \psi_{k-1}(t, \lambda) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklinde ele alırsak $0 \leq x \leq h$ için

$$\begin{aligned} |\psi_0(x, \lambda)| &= |\cos \lambda x| \leq e^{x|\lambda|} \leq e^{h|\lambda|} \\ |\psi_1(x, \lambda)| &\leq e^{x|\lambda|} \int_0^x t e^{t|\lambda|} |q(t)| e^{t|\lambda|} dt + x e^{x|\lambda|} \int_x^h e^{t|\lambda|} |q(t)| e^{t|\lambda|} dt \\ &\leq e^{3h|\lambda|} \int_0^h t |q(t)| dt = e^{h|\lambda|} q \end{aligned}$$

buluruz ve tümevarımı uygulayarak

$$|\psi_k(x, \lambda)| \leq e^{h|\lambda|} q^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

elde ederiz. Böylece $0 \leq x \leq h$ aralığında sabit λ 'lar için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x, \lambda)$$

serisinin düzgün yakınsaklığı elde edilir. Bu nedenle serinin toplamı (2.1.16) denkleminin çözümü olur ki, aynı zamanda (2.1.1.) denkleminin de çözümü olur. sabit λ için $0 \leq x \leq h$ aralığında $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonunun sınırlılığı açıktır. (2.1.16)'dan

$$\begin{aligned} |\psi(x, \lambda) - 1| &\leq |\cos \lambda x - 1| + e^{x|\lambda|} \int_0^x t e^{t|\lambda|} |q(t)| |\psi(t, \lambda)| dt \\ &\quad + x e^{x|\lambda|} \int_0^x e^{t|\lambda|} |q(t)| |\psi(t, \lambda)| dt \\ &\leq |\cos \lambda x - 1| + e^{x|\lambda|} \int_0^x t e^{t|\lambda|} |q(t)| |\psi(t, \lambda)| dt \\ &\quad + e^{x|\lambda|} \left\{ \int_x^{\sqrt{x}} t e^{t|\lambda|} |q(t)| |\psi(t, \lambda)| dt + \sqrt{x} \int_{\sqrt{x}}^h t e^{t|\lambda|} |q(t)| |\psi(t, \lambda)| dt \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz ki buradan (2.1.2) koşuluna göre $x \rightarrow 0$ için benzer işlemler yaparak

$$\psi(x, \lambda) = 1 + o(1)$$

elde edilir. (2.1.16)'yı diferensiyellersek

$$\psi'(x, \lambda) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

elde ederiz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

2.2. Sınır Değer Problemlerinin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

$[0, \pi]$ aralığında $q(x)$ reel potansiyeline sahip, μ spektral kompleks bir parametre, h sabit sonlu reel sayı olmak üzere

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \mu y(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.2.1)$$

$$\int_0^\pi x |q(x)| dx < \infty \quad (2.2.2)$$

denklemini ve

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (2.2.3)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) - hy(\pi) = 0 \quad (2.2.4)$$

ayrık sınır koşullarını sağlayan sınır değer problemini gözönüne alalım. Eğer herhangi μ_0 için gözönüne alınan sınır değer problemi $y(x, \mu_0) \neq 0$ aşıkâr olmayan çözüme sahipse, bu takdirde μ_0 sayısına bu problemin özdeğeri, $y(x, \mu_0)$ 'a ise μ 'ye karşılık gelen özfonksiyon diyeceğiz.

Teorem 2.2.1. (2.2.1)-(2.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. μ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu $y_0(x)$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$-y_0''(x) + q(x)y_0(x) = \mu_0 y_0(x) \quad (2.2.5)$$

$$y_0(0) = 0, \quad y_0(\pi) = 0 \quad (2.2.6)$$

(2.2.5)'in kompleks eşleniğini alalım.

$$-\bar{y}_0''(x) + q(x)\bar{y}_0(x) = \bar{\mu}_0 \bar{y}_0(x) \quad (2.2.7)$$

şimdi, (2.2.5)'i $\bar{y}_0(x)$, (2.2.7)'i $y_0(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkararak ve $(\varepsilon > 0)$ 'dan π 'ye integral alırsak

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} [-\bar{y}_0''(x) \bar{y}_0(x) + \bar{y}_0''(x) y_0(x)] dx = (\mu_0 - \bar{\mu}_0) \int_{\varepsilon}^{\pi} |y_0(x)|^2 dx \quad (2.2.8)$$

elde edilir. Sol taraftaki integrale kısmi integrasyonu uygularsak

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi} [-\bar{y}_0''(x) \bar{y}_0(x) + \bar{y}_0''(x) y_0(x)] dx &= -\bar{y}_0(x) y_0'(x) \Big|_{\varepsilon}^{\pi} + \int_{\varepsilon}^{\pi} |y_0'(x)|^2 dx \\ &\quad + y_0(x) \bar{y}_0'(x) \Big|_{\varepsilon}^{\pi} - \int_{\varepsilon}^{\pi} |y_0'(x)|^2 dx \\ &= \bar{y}_0(\varepsilon) y_0'(\varepsilon) - y_0(\varepsilon) \bar{y}_0'(\varepsilon) \\ &\quad - \bar{y}_0(\pi) y_0'(\pi) + y_0(\pi) \bar{y}_0'(\pi) \\ &= \bar{y}_0(\varepsilon) y_0'(\varepsilon) - y_0(\varepsilon) \bar{y}_0'(\varepsilon). \end{aligned}$$

$\mu = \lambda^2$ için (2.2.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturan Teorem 2.1.1'deki tanımlı fonksiyonlar $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ olsunlar, bu takdirde $\mu_0 = \lambda_0^2$ olacak şekilde

$$y_0(x) = c_1 \varphi(x, \lambda_0) + c_2 \psi(x, \lambda_0),$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$ için

$$y_0(\varepsilon) = c_1 \varepsilon [1 + o(1)] + c_2 [1 + o(1)]$$

elde edilir. Bu durumda (2.2.3) sınır koşulundan dolayı $c_2 = 0$ elde edilir, Dolayısıyla $y_0(x) = c_1 \varphi(x, \lambda_0)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} \bar{y}_0(\varepsilon) y_0'(\varepsilon) - y_0(\varepsilon) \bar{y}_0'(\varepsilon) &= \bar{c}_1 \varepsilon [1 + o(1)] c_2 [1 + o(1)] \\ -c_1 \varepsilon [1 + o(1)] \bar{c}_1 [1 + o(1)] &= o(\varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \longrightarrow 0). \end{aligned}$$

Dolayısıyla (2.2.8)' in sol kısmı $\varepsilon \longrightarrow 0$ için 0 dır. $y_0(x)$ özfonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{\pi} |y_0(x)|^2 dx \neq 0$$

olduğu için $\mu = \bar{\mu}_0$ elde edilir ki bu ise μ_0 'ın reel olduğunu gösterir. (2.2.4) sınır koşulunun sağlanması durumunda ispat benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.2.2. (2.2.1)-(2.2.3) Sınır değer probleminin özdeğerleri basittir.

İspat. Özdeğerlerin basitliğini göstermek için her özdeğere sadece bir tek özfonksiyonun karşılık geldiğini gösterelim. μ_0 özdeğerine, $y_0(x)$ ve $\tilde{y}_0(x)$ şeklinde lineer bağımsız

iki özfonksiyonun karşılık geldiğini varsayalım. Buna göre $\mu = \mu_0$ için $y_0(x)$ ve $\tilde{y}_0(x)$ (2.2.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir ve (2.2.3) sınır koşullarını sağlarlar. Burada $\mu = \mu_0$ için keyfi $y(x)$ çözümü, bu çözümlerin lineer kombinasyonu olur. Yani

$$y(x) = c_1 y_0(x) + c_2 \tilde{y}_0(x).$$

$y_0(x)$ ve $\tilde{y}_0(x)$ (2.2.3) sınır koşullarını sağladığından $y(x)$ ' de bu koşulları sağlar, özellikle $y(0) = 0$ koşulu da sağlanır. Böylece $\mu = \mu_0$ için her $y_0(x)$ çözümünden $y(0) = 0$ koşulunun sağlandığını elde ederiz. Bu ise çelişkidir. O halde bir özdeğere tek bir özfonksiyon karşılık gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.3. $\mu_1 \neq \mu_2$ özdeğerlerine karşılık gelen (2.2.1)-(2.2.3) sınır değer probleminin $y_1(x)$ ve $\bar{y}_2(x)$ özfonksiyonları ortogonaldır. Başka bir ifadeyle

$$\int_0^\pi y_1(x) \bar{y}_2(x) dx = 0$$

dir.

İspat. $\mu_1 \neq \mu_2$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları sırasıyla $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ olsunlar. Bu takdirde

$$\begin{aligned} -y_1''(x) + q(x) y_1(x) &= \mu_1 y_1(x) \\ -y_2''(x) + q(x) y_2(x) &= \mu_2 y_2(x) \end{aligned}$$

olup $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ (2.2.3) sınır koşullarını sağlar. Burada birinci denklemi $\bar{y}_2(x)$ ile, ikinci denklemin kompleks eşleniğini $y_1(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkararak ($\varepsilon > 0$)' dan π 'ye kadar integral aldığımızda

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\pi [-\bar{y}_1''(x) \bar{y}_2(x) + \bar{y}_2''(x) y_1(x)] dx &= (\mu_1 - \mu_2) \int_\varepsilon^\pi y_1(x) \bar{y}_2(x) dx \quad (2.2.9) \\ \int_\varepsilon^\pi [-\bar{y}_1''(x) \bar{y}_2(x) + \bar{y}_2''(x) y_1(x)] dx &= \bar{y}_1'(\varepsilon) \bar{y}_2(\varepsilon) - \bar{y}_2'(\varepsilon) y_1(\varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.1.1 deki hesaplamaların benzerlerini yaparak

$$\begin{aligned} y_1(\varepsilon) &= c_1 \varepsilon [1 + o(1)], \quad y_1'(\varepsilon) = c_1 [1 + o(1)] \\ y_2(\varepsilon) &= c_2 \varepsilon [1 + o(1)], \quad y_2'(\varepsilon) = c_2 0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
& y_1'(\varepsilon) \bar{y}_2(\varepsilon) - y_1(\varepsilon) \bar{y}_2'(\varepsilon) \\
&= c_1 [1 + o(1)] \bar{c}_2 \varepsilon [1 + o(1)] - c_1 \varepsilon [1 + o(1)] \bar{c}_2 0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \\
&= o(1) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

böylece $\varepsilon \longrightarrow 0$ için (2.2.9)'un sol yanı sıfırdır, dolayısıyla $\mu_1 \neq \mu_2$ olduğundan

$$\int_0^\pi y_1(x) \bar{y}_2(x) dx = 0$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.4. (2.2.1)-(2.2.3) ve (2.2.1)-(2.2.4) problemlerinin özdeğerleri sırasıyla

$$w_1(\lambda) = \varphi(\pi, \lambda) \quad (2.2.10)$$

$$w_2(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) - h\varphi(\pi, \lambda) \quad (2.2.11)$$

fonksiyonlarının kökleri ile çıkarılır.

İspat. Bu kez ispatı (2.2.1)-(2.2.4) sınır değer problemi için yapalım. Şayet λ , (2.2.11) denkleminin kökü ise λ^2 (2.2.1)-(2.2.4) sınır değer probleminin özdeğeri olup $\varphi(x, \lambda)$ 'nın ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olacağı açıktır. λ^2 , 'ye karşılık gelen özfonksiyon $S(x, \lambda)$ olsun. $S(x, \lambda)$ çözümü $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olmak üzere

$$S(x, \lambda) = c_1 \psi(x, \lambda) + c_2 \varphi(x, \lambda)$$

(2.2.4) sınır koşullarından

$$\varphi(0, \lambda) = c_1 = 0$$

$$S'(\pi, \lambda) - hS(\pi, \lambda) = c_2 [\varphi'(\pi, \lambda) - h\varphi(\pi, \lambda)]$$

elde edilir. $S(x, \lambda)$ aşikar çözüm olmadığı için $c_2 \neq 0$ olur, dolayısıyla

$$\varphi'(\pi, \lambda) - h\varphi(\pi, \lambda) = 0$$

bulunur. $w_1(\lambda)$ ve $w_2(\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla (2.2.1)-(2.2.3) ve (2.2.1)-(2.2.4) problemlerinin karakteristik fonksiyonlarıdır.

2.3. Singüler Sturm-Liouville Denklemi için Asimptotik Formüller

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \mu y(x) \quad (\mu = \lambda^2, \quad 0 \leq x \leq \pi) \quad (2.3.1)$$

Sturm Liouville diferensiyel denklemi verilsin. Burada $q(x)$ reel potansiyel fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\pi x |q(x)| dx < \infty \quad (2.3.2)$$

koşulu sağlansın.

$$R(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^\pi |q(t)| dt \quad (2.3.3)$$

olsun. $|\lambda| \rightarrow \infty$ iken $R(\lambda) \rightarrow 0$. Gerçekten $\varepsilon \rightarrow 0$ için (2.3.2)' den dolayı

$$\int_0^\varepsilon t |q(t)| dt \rightarrow 0 \text{ dir. Buradan}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_\varepsilon^\pi |q(t)| dt &= \varepsilon \left[\int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} |q(t)| dt + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\pi |q(t)| dt \right] \\ &\leq \int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} t |q(t)| dt + \sqrt{\varepsilon} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\pi t |q(t)| dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.3.1. Teorem 2.1.1' de tanımlanmış, diferensiyel denklemin $\varphi(x, \lambda)$ çözümü $\lambda \in C$ için (2.3.1) asimptotik formülleri sağlayan $\lambda \in C$, $|\lambda| \rightarrow 0$ iken $x \in [0, \pi]$ ' e göre düzgün olmak üzere

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O(R(\lambda)) \quad (2.3.4)$$

$$\varphi'(x, \lambda) = \cos \lambda x + e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} O(R(\lambda)) \quad (2.3.5)$$

asimptotik formüllerini sağlar.

İspat. (2.1.6) formülünden

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O\left(\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)$$

elde edilir. $\sigma_1(x)$ ve $\sigma(x)$ ' in tanımlarından dolayı

$$\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) = \int_0^\pi t |q(t)| dt - \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^\pi \left(t - \frac{1}{|\lambda|}\right) |q(t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} t |q(t)| dt - \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q(t)| dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q(t)| dt
\end{aligned}$$

dir. Bu ise (2.3.4)' ün korunduğunu gösterir. (2.1.8) integral denkleminin diferensiyeli alınırsa.

$$\varphi'(x, \lambda) = \cos \lambda x + \int_0^x \cos \lambda (x-t) q(t) \varphi(t, \lambda) dt \quad (2.3.6)$$

bulunur. (2.1.4) ve (2.3.4) ifadelerinden yararlanarak, c bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \cos \lambda (x-t) q(t) \varphi(t, \lambda) dt \right| &\leq \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} |\cos \lambda (x-t) q(t) \varphi(t, \lambda) dt| \\
&\quad + \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^x |\cos \lambda (x-t) q(t) \varphi(t, \lambda) dt| \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} |\cos \lambda (x-t) q(t)| t e^{|\operatorname{Im} \lambda| t} \exp \left(\int_0^t s q(s) ds \right) dt \\
+c \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^x |\cos \lambda (x-t) q(t)| \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| t}}{|\lambda|} dt &\leq c e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \left\{ \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q(t)| dt \right\} \\
&= \varphi'(x, \lambda) = \cos \lambda x + e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} O(R(\lambda))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.2. (2.3.1) Sturm Liouville diferensiyel denkleminin $\varphi(x, \lambda)$ çözümü $\lambda \in C$, $|\lambda| \rightarrow \infty$ iken $x \in [0, \pi]$ ' ye göre düzgün olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot q(t) dt \\
&\quad - \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \sin^2 \lambda t \cdot q(t) dt + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O(R^2(\lambda))
\end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(x, \lambda) &= \cos \lambda x + \frac{\cos \lambda x}{2\lambda} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot q(t) dt \\
&\quad + \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x \sin^2 \lambda t \cdot q(t) dt + e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} O(R^2(\lambda))
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

asimptotik formüllerini sağlar.

İspat.

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \tau(x, \lambda) \tag{2.3.9}$$

şeklinde olsun. (2.1.5), (2.1.6)'dan

$$|\tau(x, \lambda)| \leq c x e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \int_0^x t |q(t)| dt \tag{2.3.10}$$

$$|\tau(x, \lambda)| \leq c e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \frac{\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)}{|\lambda|} \tag{2.3.11}$$

(2.3.9) ve (2.1.8)'den faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} q(t) \left[\frac{\sin \lambda t}{\lambda} + \tau(t, \lambda) \right] dt \\
\varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot q(t) dt - \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \sin^2 \lambda t \cdot q(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{|\lambda|} \int_0^x \sin \lambda(x-t) \cdot q(t) \tau(t, \lambda) dt
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

elde edilir. (2.3.6)'dan ise

$$\begin{aligned}
\varphi'(x, \lambda) &= \cos \lambda x + \frac{\cos \lambda x}{2\lambda} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot q(t) dt + \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x \sin^2 \lambda t \cdot q(t) dt \\
&\quad + \int_0^x \cos \lambda(x-t) \cdot q(t) \tau(t, \lambda) dt
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

bulunur. (2.3.10) ve (2.3.11) eşitsizlikleri yardımıyla (2.3.12) ve (2.3.13)'ün sağ kısımları için

$$\left| \int_0^x \sin \lambda(x-t) \cdot q(t) \tau(t, \lambda) dt \right| \leq \left| \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} e^{|\operatorname{Im} \lambda|(x-t)} q(t) \tau(t, \lambda) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^x e^{|\operatorname{Im} \lambda|(x-t)} q(t) \tau(t, \lambda) dt \right| \\
& \leq c \left\{ \left| \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} e^{|\operatorname{Im} \lambda|(x-t)} q(t) t e^{|\operatorname{Im} \lambda|t} \left(\int_0^t \xi |q(\xi)| d\xi \right) dt \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^x e^{|\operatorname{Im} \lambda|(x-t)} q(t) \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|t}}{|\lambda|} \left(\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) dt \right| \right\} \\
& \leq c e^{|\operatorname{Im} \lambda|x} \left\{ \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} \left[t |q(t)| \int_0^t \xi |q(\xi)| d\xi \right] dt \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{|\lambda|} \left(\sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) \sigma\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} \\
& = c e^{|\operatorname{Im} \lambda|x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt \right]^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{|\lambda|} \left[\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q(t)| dt \right] \cdot \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q(t)| dt \right\} \\
& \leq c e^{|\operatorname{Im} \lambda|x} \left[\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q(t)| dt \right]^2
\end{aligned}$$

bağıntılarını buluruz. Ayrıca aynı eşitsizlik $\int_0^x \cos \lambda(x-t) \cdot q(t) \tau(t, \lambda) dt$ için de sağlanır.

Yani,

$$\left| \int_0^x \cos \lambda(x-t) \cdot q(t) \tau(t, \lambda) dt \right| \leq c e^{|\operatorname{Im} \lambda|x} \left[\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q(t)| dt \right]^2$$

elde ettiğimiz son eşitsizlikleri (2.3.12) ve (2.3.13)' de yerine yazarsak (2.3.7) ve (2.3.8) formülleri bulunur.

Şimdi tezimizin orijinal kısmında sıkça kullanacağımız potansiyel için özfonksiyonun asimptotik formülüne ilişkin aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.3.3. $\delta = \text{sabit}$, $q_0(x) \in L_2[0, \pi]$, $1 < p < 2$, $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ şeklinde

potansiyel için (2.3.1) Sturm Liouville diferensiyel denkleminin $\varphi(x, \lambda)$ çözümü

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\delta \sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt \\ &\quad - \frac{\delta \cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt - \frac{\cos \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x q_0(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^x \cos \lambda(x-2t) \cdot q_0(t) dt + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|^{5-2p}}\right)\end{aligned}\quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned}\varphi'(x, \lambda) &= \cos \lambda x + \frac{\delta \cos \lambda x}{2\lambda} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt \\ &\quad + \frac{\delta \sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x q_0(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x \sin \lambda(x-2t) q_0(t) dt + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|^{4-2p}}\right)\end{aligned}\quad (2.3.15)$$

asimptotik formüllerini sağlar. $p = 1$ durumu için (2.3.14)'ün kalan terimi

$$O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \ln^2 |\lambda|}{|\lambda|^3}\right)$$

ve (2.3.15)'ün kalan terimi

$$O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \ln^2 |\lambda|}{|\lambda|^2}\right)$$

olur.

İspat. $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ potansiyel fonksiyonunu (2.3.7)' de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot \left[\frac{\delta}{t^p} + q_0(t)\right] dt \\ &\quad - \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \sin^2 \lambda t \cdot \left[\frac{\delta}{t^p} + q_0(t)\right] dt + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O(R^2(\lambda)) \\ &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\delta \sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt - \frac{\delta \cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot q_0(t) dt - \frac{\cos \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x [1 - \cos 2\lambda t] \cdot q_0(t) dt \\
& + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O(R^2(\lambda)) \\
= & \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\delta \sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt - \frac{\delta \cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt \\
& + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot q_0(t) dt - \frac{\cos \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x q_0(t) dt + \frac{\cos \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \cos 2\lambda t \cdot q_0(t) dt \\
& + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O(R^2(\lambda)) \\
= & \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\delta \sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt - \frac{\delta \cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt - \frac{\cos \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x q_0(t) dt \\
& + \frac{1}{2\lambda^2} \left[\int_0^x \cos \lambda x \cos 2\lambda t + \sin \lambda x \sin 2\lambda t \right] q_0(t) dt + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O(R^2(\lambda)) \\
= & \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \frac{\delta \sin \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt - \frac{\delta \cos \lambda x}{\lambda^2} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt - \frac{\cos \lambda x}{2\lambda^2} \int_0^x q_0(t) dt \\
& + \frac{1}{2\lambda^2} \int_0^x \cos \lambda (x - 2t) q_0(t) dt + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|} O(R^2(\lambda)).
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
R^2(\lambda) &= \left[\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t \left[\frac{\delta}{t^p} + q_0(t) \right] dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} \left[\frac{\delta}{t^p} + q_0(t) \right] dt \right]^2 \\
&= O \left(\left[\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} \frac{dt}{t^{p-1}} + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} \frac{dt}{t^p} + \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q_0(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q_0(t)| dt \right]^2 \right)
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} \frac{1}{t^{p-1}} dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} \frac{1}{t^p} dt &= \frac{t^{2-p}}{2-p} \Big|_0^{\frac{1}{|\lambda|}} + \frac{1}{|\lambda|} \frac{t^{1-p}}{1-p} \Big|_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} \\
&\Rightarrow O \left(\frac{1}{|\lambda|^{2-p}} + \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{|\lambda|^{1-p}} \right) = O \left(\frac{1}{|\lambda|^{2-p}} \right)
\end{aligned}$$

dir.

İntegral için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t |q_0(t)| dt + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi} |q_0(t)| dt &\leq \sqrt{\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} q_0^2(t) dt} + \frac{c}{|\lambda|} \\ &\Rightarrow O\left(\frac{1}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{|\lambda|}\right) = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$R^2(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{4-2p}}\right)$$

elde edilir. $p = 1$ için

$$\begin{aligned} O(R(\lambda)) &= O\left(\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} dt + \frac{1}{|\lambda|} |\ln t| \Big|_{\frac{1}{|\lambda|}}^{\pi}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{|\lambda|} + \frac{\ln |\lambda|}{|\lambda|}\right) = O\left(\frac{\ln |\lambda|}{|\lambda|}\right) \end{aligned}$$

olur. (2.3.8)' den faydalanarak $\varphi'(x, \lambda)$ için

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda) &= \cos \lambda x + \frac{\cos \lambda x}{2\lambda} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot \left[\frac{\delta}{t^p} + q_0(t)\right] dt \\ &\quad + \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x \sin^2 \lambda t \cdot \left[\frac{\delta}{t^p} + q_0(t)\right] dt + e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} O(R^2(\lambda)) \\ &= \cos \lambda x + \frac{\delta \cos \lambda x}{2\lambda} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt + \frac{\delta \sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt \\ &\quad + \frac{\cos \lambda x}{2\lambda} \int_0^x \sin 2\lambda t \cdot q_0(t) dt + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x [1 - \cos 2\lambda t] q_0(t) dt \\ &\quad + e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} O(R^2(\lambda)) \\ &= \cos \lambda x + \frac{\delta \cos \lambda x}{2\lambda} \int_0^x \frac{\sin 2\lambda t}{t^p} dt + \frac{\delta \sin \lambda x}{\lambda} \int_0^x \frac{\sin^2 \lambda t}{t^p} dt \\ &\quad + \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x q_0(t) dt - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x \sin \lambda (x - 2t) \cdot q_0(t) dt \\ &\quad + e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} O(R^2(\lambda)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (2.3.15)' de sağlanmış olur.

2.4. Normlaştırıcı Sayılar ve Özdeğerler İçin Asimptotik Formüller

$$q(x)$$

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \mu y(x) \quad (\mu = \lambda^2, \quad 0 \leq x \leq \pi) \quad (2.4.1)$$

denkleminde

$$\int_0^\pi x |q(x)| dx < \infty \quad (2.4.2)$$

koşulu sağlanacak şekilde, reel potansiyel fonksiyon olsun.

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (2.4.3)$$

veya

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) - hy(\pi) = 0 \quad (2.4.4)$$

ayrık sınır koşulları sağlanmak üzere (2.4.1)-(2.4.3) ve (2.4.1)-(2.4.4) Sturm-Liouville problemlerini gözönüne alalım. Teorem 2.2.4' den dolayı (2.3.4) ve (2.3.5) asimptotik formüllerinden

$$w_1(\lambda) = \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|} O(R(\lambda)) \quad (2.4.5)$$

$$w_2(\lambda) = \cos \lambda \pi + e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} O\left(\frac{1}{|\lambda|} + R(\lambda)\right) \quad (2.4.6)$$

elde edilir. Herhangi $M > 0$ için $|\sin \lambda \pi| \geq M e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}$, $|\cos \lambda \pi| \geq M e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}$ bağıntıları sağlandığında sınırsız olarak genişletilen $k_n(1)$ ve $k_n(2)$ mümkün çevreler dizisine değineceğiz. (2.4.1)-(2.4.3) ve (2.4.1)-(2.4.4) problemlerinin karakteristik fonksiyonları herhangi n 'den başlayarak mümkün çevreler dizisi üzerinde

$$|w_1(\lambda)| \geq M_1 \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{\lambda}, \quad |w_2(\lambda)| \geq M_1 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}$$

eşitsizliklerini sağladığı (2.4.5)-(2.4.6)'dan elde edilir. Buna göre şimdi mümkün çevrelerin varlığını ispatlayalım. Merkezleri sırasıyla $\sin \lambda \pi$ ve $\cos \lambda \pi$ fonksiyonlarının sıfırları olan yani $0, +1, +2, \dots$ ve $\frac{1}{2}, +1, +\frac{1}{2}, +2, +\frac{1}{2}, \dots$ noktalarında bulunan yeteri kadar küçük ρ yarıçaplı daireleri kompleks düzlemde çıkardığımızda kalan bölgeleri sırasıyla $Z_\rho^{(1)}$ ve $Z_\rho^{(2)}$ ile gösterelim. Bunun için

$$\sup_{\lambda \in Z_\rho^{(1)}} \left| \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{\sin \lambda \pi} \right| = C_\rho^{(1)} < \infty,$$

$$\sup_{\lambda \in Z_\rho^{(2)}} \left| \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{\cos \lambda \pi} \right| = C_\rho^{(2)} < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\Pi^+ = \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} \lambda < 2 \\ \operatorname{Im} \lambda > 0 \end{cases}$$

olmak üzere $|\sin \lambda \pi|^{-1} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}$ ve $|\cos \lambda \pi|^{-1} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}$ çift ve 2-periyotlu fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} C_\rho^{(1)} &= \sup_{\lambda \in Z_\rho^{(1)}} |\sin \lambda \pi|^{-1} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} = \sup_{\lambda \in Z_\rho^{(1)} \cap \Pi^+} |\sin \lambda \pi|^{-1} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \\ &= \sup_{\lambda \in Z_\rho^{(1)} \cap \Pi^+} \left| (\sin \lambda \pi)^{-1} e^{-i \lambda \pi} \right|, \end{aligned}$$

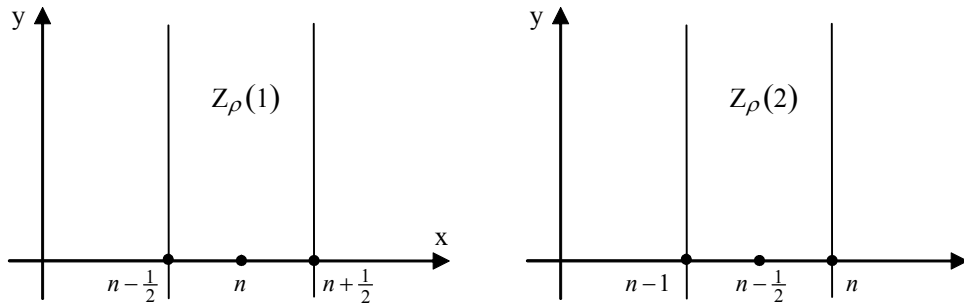
dir. Benzer şekilde

$$C_\rho^{(2)} = \sup_{\lambda \in Z_\rho^{(2)} \cap \Pi^+} \left| (\cos \lambda \pi)^{-1} e^{-i \lambda \pi} \right|$$

olduğu kolayca bulunur. $(\sin \lambda \pi) e^{-i \lambda \pi}$ ve $(\cos \lambda \pi) e^{-i \lambda \pi}$ sırasıyla $Z_\rho^{(1)} \cap \Pi^+$ ve $Z_\rho^{(2)} \cap \Pi^+$ bölgelerinde analitik (holomorf) fonksiyonlardır ve $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \infty$ iken $(-2i)^{-1}$ 'e yakınsar, ayrıca bu bölgelerin sınırları üzerinde süreklidirler. Buna göre analitik fonksiyonların mutlak değerinin maksimumuna ilişkin teoremden dolayı fonksiyonun mutlak değeri üstten sınırlıdır. Bu nedenle $C_\rho^{(1)}$ ve $C_\rho^{(2)} < \infty$ olup ve sırasıyla bu bölgelerde

$$|\sin \lambda \pi| \geq \frac{1}{C_\rho^{(1)}} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}, \quad |\cos \lambda \pi| \geq \frac{1}{C_\rho^{(2)}} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}$$

eşitsizlikleri sağlanır.



Şekil 2.4.1

Teorem 2.4.1. (2.4.1)-(2.4.3) ve (2.4.1)-(2.4.4) sınır değeri problemleri sayılabilir sayıda özdeğerlere sahip olmak üzere, $\mu_n = \lambda_n^2$ ve $\nu_n = s_n^2$ için

$$\lambda_n = n + O(\tau_n), \quad (2.4.7)$$

$$s_n = n - \frac{1}{2} + O(\tilde{\tau}_n) \quad (2.4.8)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$\tau_n = \int_0^{\frac{2}{n}} t |q(t)| dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^{\pi} |q(t)| dt, \quad \tilde{\tau}_n = \frac{1}{n} + \tau_n \quad (2.4.9)$$

dir.

İspat. $w_1(\lambda)$, $w_2(\lambda)$ çift ve tam fonksiyonlar olduğundan $i \geq 0$ için $|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|$ ve

$|s_i| \leq |s_{i+1}|$; $i \geq 0$ için $\text{Re} \lambda_i \geq 0$ ve $\text{Res}_i 0$ olacak şekilde bu fonksiyonların sıfırlarını gözönüne alarak

$$\dots - \lambda_n, -\lambda_{n-1}, \dots, -\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$$

$$\dots - s_n, -s_{n-1}, \dots, -s_1, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, \dots$$

şeklinde sıralamak mümkündür.

$$\Gamma_n(1) = \left\{ \begin{array}{l} |\text{Re } \lambda| \leq n + \frac{1}{2} \\ |\text{Im } \lambda| \leq n + \frac{1}{2} \end{array} \right., \quad \Gamma_n(2) = \left\{ \begin{array}{l} |\text{Re } \lambda| \leq n \\ |\text{Im } \lambda| \leq n \end{array} \right.$$

olmak üzere $w_1(\lambda)$ ve $w_2(\lambda)$ fonksiyonlarının $\Gamma_n(1)$ ve $\Gamma_n(2)$ karelerinde kapsanan sıfırlarını hesaplayalım. $\lambda_n = \bar{\tau} \left(n + \frac{1}{2} \right) + iy$ ise bu takdirde $\Gamma_n(1)$ 'in sınırı üzerinde

$$|\sin \lambda \pi| = \left| \sin \left[\bar{\tau} \left(n + \frac{1}{2} \right) + iy \right] \pi \right| = |\cos iy \pi| = \frac{e^{-y\pi} + e^{y\pi}}{2} \geq \frac{1}{2} e^{|\text{Im } \lambda| \pi},$$

eğer $\lambda_n = x + i \left(n + \frac{1}{2} \right)$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} |\sin \lambda \pi| &= \left| \sin \left[x + i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \pi \right| = \left| \frac{e^{ix\pi} \cdot e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} - e^{-ix\pi} \cdot e^{(n+\frac{1}{2})\pi}}{2i} \right| \\ &\geq \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\pi} - e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}}{2} = e^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{1 - e^{-2(n+\frac{1}{2})\pi}}{2} \geq \frac{1}{4} e^{(n+\frac{1}{2})\pi} = \frac{1}{4} e^{|\text{Im } \lambda| \pi} \end{aligned}$$

ve sonuçta $\lambda_n = x - i \left(n - \frac{1}{2} \right)$ iken

$$\begin{aligned} |\sin \lambda \pi| &= \left| \sin \left[x - i \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \pi \right| = \left| \frac{e^{ix\pi} \cdot e^{(n-\frac{1}{2})\pi} - e^{-ix\pi} \cdot e^{-(n-\frac{1}{2})\pi}}{2i} \right| \\ &\geq \frac{e^{(n-\frac{1}{2})\pi} - e^{-(n-\frac{1}{2})\pi}}{2} \geq \frac{1}{4} e^{|\text{Im } \lambda| \pi} \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\Gamma_n(1)$ için yaptığımız değerlendirmeleri $\Gamma_n(2)$ 'nin sınırı üzerinde yapalım.

Eğer $\lambda = x + in$ ise

$$\begin{aligned} |\cos \lambda \pi| &= |\cos [x + in] \pi| = \left| \frac{e^{ix\pi} \cdot e^{-n\pi} + e^{-ix\pi} \cdot e^{n\pi}}{2} \right| \\ &\geq \frac{e^{n\pi} + e^{-n\pi}}{2} = e^{n\pi} \frac{1 + e^{-2n\pi}}{2} \geq \frac{1}{4} e^{n\pi} = \frac{1}{4} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}, \end{aligned}$$

$\lambda = x - in$ ise

$$\begin{aligned} |\cos \lambda \pi| &= |\cos [x + in] \pi| = \left| \frac{e^{ix\pi} \cdot e^{n\pi} + e^{-ix\pi} \cdot e^{-n\pi}}{2} \right| \\ &\geq \frac{e^{n\pi} + e^{-n\pi}}{2} \geq \frac{1}{4} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \end{aligned}$$

olur. λ' nin her iki durumu için

$$|\cos \lambda \pi| \geq \frac{1}{4} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \quad (2.4.10)$$

elde edilir. Buna göre (2.4.5) ve (2.4.6)'dan yararlanarak

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda}, \quad g_1(\lambda) = \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|} O(R(\lambda)), \\ f_2(\lambda) &= \cos \lambda \pi, \quad g_2(\lambda) = e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} O\left(\frac{1}{|\lambda|} + R(\lambda)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\Gamma_n(1)$ ve $\Gamma_n(2)$ sınırları üzerinde

$$|f_1(\lambda)|_{\Gamma_n(1)} \geq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{4|\lambda|}, \quad |g_1(\lambda)|_{\Gamma_n(1)} \leq c \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|} R(\lambda)$$

ve

$$|f_2(\lambda)|_{\Gamma_n(2)} \geq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{4}, \quad |g_2(\lambda)|_{\Gamma_n(2)} \leq c e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \left(\frac{1}{|\lambda|} + R(\lambda) \right)$$

eşitsizlikleri sağlar. Böylece

$$|f_1(\lambda)|_{\Gamma_n(1)} \geq \frac{1}{4cR(\lambda)} |g_1(\lambda)|_{\Gamma_n(1)}, \quad |f_2(\lambda)|_{\Gamma_n(2)} \geq \frac{1}{4c\left(\frac{1}{|\lambda|} + R(\lambda)\right)} |g_2(\lambda)|_{\Gamma_n(2)} \quad (2.4.11)$$

olup yeterince büyük n 'ler için

$$\frac{1}{4cR(\lambda)} > 1, \quad (2.4.12)$$

$$\frac{1}{4c\left(\frac{1}{|\lambda|} + R(\lambda)\right)} > 1 \quad (2.4.13)$$

bulunur. Rouché teoremi gereği $\Gamma_n(1)$ ve $\Gamma_n(2)$ çevreleri içinde sırasıyla $w_1(\lambda)$ ile $\frac{\sin \lambda \pi}{\lambda}$ ve $w_2(\lambda)$ ile $\cos \lambda \pi$ fonksiyonları eşit sayıda sıfırlara sahiptirler. Bu ise sayılabilir sayıda sıfırların varlığını ispatlar. Öyle ki yeterince büyük n 'ler için λ_n 'ninci sıfırı

$|\operatorname{Re} \lambda - n| \leq \frac{1}{2}$ şeritinde, s_n 'nin sıfırı ise $|\operatorname{Re} \lambda - n + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ şeritinde bulunur.

Teorem 2.4.2. (2.4.1)-(2.4.3) ve (2.4.1)-(2.4.4) sınır değer problemlerinin özdeğerleri $\mu_n = \lambda_n^2$, $\nu_n = s_n^2$ olmak üzere

$$\lambda_n = n + \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \sin^2 nt \cdot q(t) dt + O(\tau_n^2) \quad (2.4.14)$$

$$s_n = n - \frac{1}{2} - \frac{h}{\pi(n - \frac{1}{2})} + \frac{1}{\pi(n - \frac{1}{2})} \int_0^\pi \sin^2 \left(n - \frac{1}{2}\right) t \cdot q(t) dt + O(\tilde{\tau}_n^2) \quad (2.4.15)$$

dir. Burada τ_n ve $\tilde{\tau}_n$, (2.4.9) şeklindedir.

İspat. (2.3.7)-(2.3.8)'den faydalananarak (2.2.10)-(2.2.11)'den

$$w_1(\lambda) = \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} + \frac{\sin \lambda \pi}{2\lambda^2} \int_0^\pi \sin 2\lambda t \cdot q(t) dt - \frac{\cos \lambda \pi}{\lambda^2} \int_0^\pi \sin^2 \lambda t \cdot q(t) dt + \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|} O(R^2(\lambda)) \quad (2.4.16)$$

$$\begin{aligned} w_2(\pi, \lambda) &= \cos \lambda \pi + \frac{\cos \lambda \pi}{2\lambda} \int_0^\pi \sin 2\lambda t \cdot q(t) dt + \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} \int_0^\pi \sin^2 \lambda t \cdot q(t) dt \\ &\quad - h \left[\frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} + \frac{\sin \lambda \pi}{2\lambda^2} \int_0^\pi \sin 2\lambda t \cdot q(t) dt - \frac{\cos \lambda \pi}{\lambda^2} \int_0^\pi \sin^2 \lambda t \cdot q(t) dt \right] \\ &\quad + e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} O(R^2(\lambda)) \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

elde edilir.

$$\varepsilon_n = \lambda_n - n, \quad \tilde{\varepsilon}_n = s_n - \left(n - \frac{1}{2}\right) \quad (2.4.18)$$

olduğu gözönüne alınırsa (2.4.7)-(2.4.8)'den $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n = O(\tau_n) \rightarrow 0$, $\tilde{\varepsilon}_n = O(\tilde{\tau}_n) \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\lambda_n = n + \varepsilon_n, \quad s_n = n - \frac{1}{2} + \tilde{\varepsilon}_n \quad (2.4.19)$$

bulunur. Şimdi Aşağıdaki bağıntıları ele alalım:

$$\sin \lambda_n \pi = \sin(n + \varepsilon_n) \pi = (-1)^n \varepsilon_n \pi + O(\varepsilon_n^3) \quad (2.4.20)$$

$$\frac{\sin \lambda_n \pi}{\lambda_n} = \frac{(-1)^n \varepsilon_n \pi + O(\varepsilon_n^3)}{n + \varepsilon_n} = \frac{(-1)^n \varepsilon_n \pi}{n} + O\left(\frac{\varepsilon_n^2}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^3}{n}\right) \quad (2.4.21)$$

$$\cos \lambda_n \pi = \cos(n + \varepsilon_n) \pi = (-1)^n + O(\varepsilon_n^2) \quad (2.4.22)$$

$$\frac{\cos \lambda_n \pi}{\lambda_n} = \frac{(-1)^n + O(\varepsilon_n^2)}{n + \varepsilon_n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\varepsilon_n}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^3}{n}\right) \quad (2.4.23)$$

$$\begin{aligned}
\sin 2\lambda_n t &= \sin (2n + 2\varepsilon_n) t = \sin 2nt \cdot [1 + O(\varepsilon_n^2 t^2)] \\
+ \cos 2nt [2\varepsilon_n t + O(\varepsilon_n^3 t^3)] &= \sin 2nt + O(\varepsilon_n t),
\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2 \lambda_n t &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2\lambda_n t] = \frac{1}{2} [1 - \cos (2n + 2\varepsilon_n) t] \\
&= \frac{1}{2} \{1 - \cos 2nt [1 + O(\varepsilon_n^2 t^2)] + \sin 2nt [2\varepsilon_n t + O(\varepsilon_n^3 t^3)]\} \\
&= \frac{1}{2} [1 - \cos 2nt + O(\varepsilon_n t)] = \sin^2 nt + O(\varepsilon_n t),
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \lambda_n \pi}{2\lambda_n} \int_0^\pi \sin 2\lambda_n t \cdot q(t) dt &= \left[\frac{(-1)^n \varepsilon_n}{n} \pi + O\left(\frac{\varepsilon_n^2}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^3}{n}\right) \right] \cdot \int_0^\pi [\sin 2nt + O(\varepsilon_n t)] q(t) dt, \\
\left| \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin 2nt \cdot q(t) dt \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \int_0^{\frac{1}{2n}} \sin 2nt \cdot q(t) dt \right| + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi |q(t)| dt \\
&\leq 2 \int_0^{\frac{1}{2n}} \left| \frac{\sin 2nt}{2nt} \right| t |q(t)| dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi |q(t)| dt = O(\varepsilon_n).
\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

buradan

$$\frac{\sin \lambda_n \pi}{2\lambda_n} \int_0^\pi \sin 2\lambda_n t \cdot q(t) dt = O(\varepsilon_n^2) \tag{2.4.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \lambda_n \pi}{\lambda_n} \int_0^\pi \sin^2 \lambda_n t \cdot q(t) dt &= \left[\frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{\varepsilon_n}{n^2} + \frac{\varepsilon_n^3}{n}\right) \right] \cdot \int_0^\pi [\sin^2 nt + O(\varepsilon_n t)] \cdot q(t) dt, \\
\left| \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nt \cdot q(t) dt \right| &\leq \frac{1}{n} \left| \int_0^{\frac{1}{2n}} \sin^2 nt \cdot q(t) dt \right| + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi |q(t)| dt \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2n}} \left| \frac{\sin nt}{nt} \right| t |q(t)| dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi |q(t)| dt = O(\varepsilon_n)
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

(2.4.28)'den

$$\frac{\cos \lambda_n \pi}{\lambda_n} \int_0^\pi \sin^2 \lambda_n t \cdot q(t) dt = \frac{(-1)^n}{n} \int_0^\pi \sin^2 \lambda_n t \cdot q(t) dt + O\left(\frac{\varepsilon_n^2}{n}\right) \tag{2.4.29}$$

elde edilir. (2.4.16)'da λ_n 'nin değerini yerine yazarsak (2.4.20), (2.4.27) ve (2.4.29) 'dan faydalanarak

$$0 = (-1)^n \varepsilon_n \pi - \frac{(-1)^n}{n} \int_0^\pi \sin^2 nt \cdot q(t) dt + O(\varepsilon_n^2) \tag{2.4.30}$$

elde ederiz. Bu takdir de

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin^2 nt \cdot q(t) dt + O(\varepsilon_n^2)$$

olur. Böylece (2.4.14) formülünün sağlandığı ispatlanmıştır. Ayrıca aşağıdaki bağıntıların sağlandığı açıktır:

$$\cos s_n \pi = \cos \left(n - \frac{1}{2} + \tilde{\varepsilon}_n \right) \pi = (-1)^n \tilde{\varepsilon}_n \pi + O(\tilde{\varepsilon}_n^3) \quad (2.4.31)$$

$$\frac{\cos s_n \pi}{s_n} = \frac{(-1)^n \tilde{\varepsilon}_n \pi + O(\tilde{\varepsilon}_n^3)}{n - \frac{1}{2} + \tilde{\varepsilon}_n} = \frac{(-1)^n \tilde{\varepsilon}_n \pi}{n - \frac{1}{2}} + O\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_n^2}{n^2} + \frac{\tilde{\varepsilon}_n^3}{n}\right) \quad (2.4.32)$$

$$\begin{aligned} \sin 2s_n t &= \sin(2n - 1 + 2\tilde{\varepsilon}_n)t \\ &= \sin(2n - 1)t \cdot [1 + O(\tilde{\varepsilon}_n^2 t^2)] + 2\tilde{\varepsilon}_n t \cos(2n - 1)t \\ &= \sin(2n - 1)t + O(\tilde{\varepsilon}_n t) \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos s_n \pi}{s_n} \int_0^\pi \sin 2s_n t \cdot q(t) dt &= \left[\frac{(-1)^n \varepsilon_n \pi}{n - \frac{1}{2}} + O\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_n^2}{n^2} + \frac{\tilde{\varepsilon}_n^3}{n}\right) \right] \\ &\cdot \int_0^\pi [\sin(2n - 1)t + O(\tilde{\varepsilon}_n t)] q(t) dt, \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \int_0^\pi [\sin(2n - 1)t \cdot q(t) dt] \right| &\leq 2 \int_0^{\frac{1}{2n}} \left| \frac{\sin(2n - 1)t}{(2n - 1)t} \right| t |q(t)| dt \\ &+ \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi |q(t)| dt = O(\tilde{\varepsilon}_n) \end{aligned}$$

son eşitsizlikten ve (2.4.33)'den

$$\frac{\cos s_n \pi}{s_n} \int_0^\pi \sin 2s_n t \cdot q(t) dt = O(\tilde{\varepsilon}_n^2) \quad (2.4.35)$$

$$\sin 2s_n \pi = \sin \left(n - \frac{1}{2} + \tilde{\varepsilon}_n \right) \pi = (-1)^{n-1} + O(\tilde{\varepsilon}_n^3) \quad (2.4.36)$$

$$\frac{\sin s_n \pi}{s_n} = \frac{(-1)^{n-1} + O(\tilde{\varepsilon}_n^2)}{n - \frac{1}{2} + \tilde{\varepsilon}_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n - \frac{1}{2}} + O\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{n^2} + \frac{\tilde{\varepsilon}_n^2}{n}\right) \quad (2.4.37)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 s_n t &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2s_n t] = \frac{1}{2} [1 - \cos(2n - 1 + 2\tilde{\varepsilon}_n)t] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos(2n - 1)t \cdot [1 + O(\tilde{\varepsilon}_n^2 t^2)] + \sin(2n - 1)t \cdot O(\tilde{\varepsilon}_n t) \right\} \\ &= \sin^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) t + O(\tilde{\varepsilon}_n t) \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

$$\frac{\sin s_n \pi}{s_n} \int_0^\pi \sin^2 s_n t \cdot q(t) dt = \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n - \frac{1}{2}} + O\left(\tilde{\varepsilon}_n^2\right) \right] \cdot \int_0^\pi \left[\sin^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) t + O(\tilde{\varepsilon}_n t) \right] q(t) dt \quad (2.4.39)$$

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) t \cdot q(t) dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2n}} \left| \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2} \right) t}{\left(n - \frac{1}{2} \right) t} \right| t |q(t)| dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi |q(t)| dt = O(\tilde{\varepsilon}_n)$$

elde edilir. Yukarıdakilerine ek olarak ve (2.4.39)'dan

$$\frac{\sin s_n \pi}{s_n} \int_0^\pi \sin^2 s_n t \cdot q(t) dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n - \frac{1}{2}} \int_0^\pi \sin^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) t \cdot q(t) dt + O(\tilde{\varepsilon}_n^3) \quad (2.4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n^2} \left| \int_0^\pi \sin 2s_n t \cdot q(t) dt \right| &\leq \frac{1}{s_n^2} \left[\left| \int_0^{\frac{1}{|s_n|}} \sin 2s_n t \cdot q(t) dt \right| + \left| \int_{\frac{1}{|s_n|}}^\pi \sin 2s_n t \cdot q(t) dt \right| \right] \\ &\leq \frac{2}{|s_n|} \left[\int_0^{\frac{1}{|s_n|}} \left| \frac{\sin 2s_n t}{2s_n t} \right| \cdot t |q(t)| dt + \frac{1}{|s_n|} \int_{\frac{1}{|s_n|}}^\pi |q(t)| dt \right] \\ &= O(\tilde{\varepsilon}_n^2) \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

$$\frac{1}{s_n^2} \left| \int_0^\pi \sin^2 s_n t \cdot q(t) dt \right| \leq \frac{1}{|s_n|} \left[\int_0^{\frac{1}{|s_n|}} t |q(t)| dt + \frac{1}{|s_n|} \int_{\frac{1}{|s_n|}}^\pi |q(t)| dt = O(\tilde{\varepsilon}_n^2) \right] \quad (2.4.42)$$

bulunur. (2.4.17), (2.4.31), (2.4.36), (2.4.37), (2.4.40), (2.4.41) (2.4.42) ifadelerini kullanarak

$$0 = (-1)^n \tilde{\varepsilon}_n \pi - \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} \int_0^\pi \sin^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) t \cdot q(t) dt + h \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} + O(\tilde{\varepsilon}_n^2),$$

buradan ise

$$\tilde{\varepsilon}_n = -\frac{h}{\pi \left(n - \frac{1}{2} \right)} + \frac{1}{\pi \left(n - \frac{1}{2} \right)} \int_0^\pi \sin^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) t \cdot q(t) dt + O(\tilde{\varepsilon}_n^2) \quad (2.4.43)$$

bulunur.

(2.4.43)'ü (2.4.19)'da yerine yazarak

$$s_n = n - \frac{1}{2} - \frac{h}{\pi \left(n - \frac{1}{2} \right)} + \frac{1}{\pi \left(n - \frac{1}{2} \right)} \int_0^\pi \sin^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) t \cdot q(t) dt + O(\tilde{\varepsilon}_n^2)$$

dolayısıyla (2.4.15) formülünü buluruz. Böylece teoremin tamamı ispatlanmış olur.

Şimdi özel potansiyel durumunda özdeğerler için asimptotik formüllerini hesaplayalım:

$\delta = \text{sabit}$ $1 < p < 2$, ve $q_0(x) \in L_2[0, \pi]$ olmak üzere $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ şeklinde potansiyel için s_n ve λ_n özdeğerler için asimptotik formülleri bulalım. (2.4.14)'den

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= n + \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin^2 nt \cdot \left(\frac{\delta}{t^p} + q_0(t) \right) dt \\
&\quad + O \left\{ \left[\int_0^{\frac{2}{n}} t \left(\frac{\delta}{t^p} + q_0(t) \right) dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi \left(\frac{\delta}{t^p} + q_0(t) \right) dt \right]^2 \right\} \\
&= n + \frac{\delta}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 nt}{t^p} dt + \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin^2 nt \cdot q_0(t) dt \\
&\quad + O \left\{ \left[\int_0^{\frac{2}{n}} \frac{\delta}{t^{p-1}} dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi \frac{\delta}{t^p} dt + \int_0^{\frac{2}{n}} t |q_0(t)| dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^\pi |q_0(t)| dt \right]^2 \right\} \\
&= n + \frac{\delta}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 nt}{t^p} dt + \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [1 - \cos 2nt] \cdot q_0(t) dt \\
&\quad + O \left\{ \left[\frac{1}{n^{2-p}} + \sqrt{\int_0^{\frac{2}{n}} t^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^{\frac{2}{n}} q_0^2(t) dt} \right]^2 \right\} \\
&= n + \frac{\delta}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 nt}{t^p} dt + \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi q_0(t) dt \\
&\quad - \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \cos 2nt \cdot q_0(t) dt + O \left(\frac{1}{n^{4-2p}} \right). \tag{2.4.44}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$nt=\xi$ olarak ele alırsak

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin^2 nt}{t^p} dt &= \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} n^p \frac{d\xi}{n} \\
&= n^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} d\xi - \int_{n\pi}^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} d\xi \right] \\
&= n^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} d\xi - \int_{n\pi}^\infty \frac{1 - \cos 2\xi}{2\xi^p} d\xi \right] \\
&= n^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\xi^{-p+1}}{p-1} \Big|_{n\pi}^\infty + O\left(\frac{1}{n^p}\right) \right] \\
&= n^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} d\xi - \frac{1}{2(p-1)\pi^{p-1}n^{p-1}} \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.4.45}
\end{aligned}$$

elde ederiz [47].

$$c_p = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} d\xi = \frac{2^{p-3}\pi}{(p-1)\Gamma(p-1)\sin\left[\frac{\pi(p-1)}{2}\right]} \tag{2.4.46}$$

(2.4.45), (2.4.46)' dan yararlanarak (2.4.44)'den

$$\lambda_n = n + \frac{\delta c_p}{\pi n^{2-p}} - \frac{1}{2\pi n} \left[\frac{\delta}{(p-1)\pi^{p-1}} + \int_0^\pi [1 - \cos 2nt] \cdot q_0(t) dt \right] + O\left(\frac{1}{n^{4-2p}}\right) \tag{2.4.47}$$

bulunur. Gözönüne aldığımız özel potansiyel durumunda (2.4.15)'den

$$\begin{aligned}
s_n &= n - \frac{1}{2} - \frac{h}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)t \cdot \left(\frac{\delta}{t^p} + q_0(t)\right) dt + O\left(\frac{1}{n^{4-2p}}\right) \\
&= n - \frac{1}{2} - \frac{h}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)} \\
&\quad + \frac{\delta}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)t}{t^p} dt + \frac{1}{2\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi q_0(t) dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(2n-1)t \cdot q_0(t) dt + O\left(\frac{1}{n^{4-2p}}\right) \tag{2.4.48}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\xi = (n - \frac{1}{2}) t$ şeklinde ele alırsak

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin^2 (n - \frac{1}{2}) t}{t^p} dt &= \left(n - \frac{1}{2} \right)^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi^p} d\xi - \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^\infty \frac{1 - \cos 2\tau}{2\xi^p} d\xi \right] \\
&= \left(n - \frac{1}{2} \right)^{p-1} \left[C_p + \frac{1}{2} \frac{\xi^{-p+1}}{p-1} \Big|_{(n-\frac{1}{2})\pi}^\infty + O\left(\frac{1}{n^p}\right) \right] \\
&= \left(n - \frac{1}{2} \right)^{p-1} C_p - \frac{1}{2(p-1)\pi^{p-1}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.4.49)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdiyse (2.4.49)'u (2.4.48)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
s_n &= n - \frac{1}{2} - \frac{\delta C_p}{\pi (n - \frac{1}{2})^{2-p}} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi (n - \frac{1}{2})} \left[2h + \frac{\delta}{(p-1)\pi^{p-1}} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\pi [1 - \cos(2n-1)t] \cdot q_0(t) dt \right] + O\left(\frac{1}{n^{4-2p}}\right) \quad (2.4.50)
\end{aligned}$$

olur.

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.51)$$

$$\beta_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, s_n) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.52)$$

sayılarına sırasıyla (2.4.1)-(2.4.3) ve (2.4.1)-(2.4.4) problemlerinin normlaştırıcı sayıları denir. $n \rightarrow \infty$ iken α_n ve β_n 'ler için asimptotik formülleri bulalım. (2.3.4) ve (2.4.7)'den (2.4.51)

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \int_0^\pi \left[\frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n} + O\left(\frac{\tau_n}{|\lambda_n|}\right) \right]^2 dx = \int_0^\pi \left[\frac{\sin^2 \lambda_n x}{\lambda_n^2} + O\left(\frac{\tau_n}{\lambda_n^2}\right) \right] dx \\
&= \int_0^\pi \frac{1 - \cos [2n + O(\tau_n)]}{2[n + O(\tau_n)]} dx + O\left(\frac{\tau_n}{\lambda_n^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2n^2} - \int_0^\pi \left\{ \frac{\cos 2nx \cdot [1 + O(\tau_n^2 x^2)]}{n^2} - \frac{\sin 2nx \cdot O(\tau_n x)}{n^2} \right\} dx + O\left(\frac{\tau_n}{n^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2n^2} + O\left(\frac{\tau_n}{n^2}\right) \quad (2.4.53)
\end{aligned}$$

olur. (2.3.4) ve (2.4.8)'den (2.4.52)

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \int_0^\pi \varphi^2(x, s_n) dx = \int_0^\pi \left[\frac{\sin(n - \frac{1}{2} + O(\tilde{\tau}_n))x}{n - \frac{1}{2} + O(\tilde{\tau}_n)} + O\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{n}\right) \right]^2 dx \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin(n - \frac{1}{2} + O(\tilde{\tau}_n))x}{(n - \frac{1}{2} + O(\tilde{\tau}_n))^2} dx + O\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{n^2}\right) = \int_0^\pi \frac{1 - \cos[2n - 1 + O(\tilde{\tau}_n)]}{2(n - \frac{1}{2})^2} + O\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{n^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2(n - \frac{1}{2})^2} - \int_0^\pi \frac{\cos(2n - 1)x [1 + O(\tilde{\tau}_n^2 x^2)] - \sin(2n - 1)x \cdot O(\tilde{\tau}_n x)}{2(n - \frac{1}{2})^2} + O\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{n^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2(n - \frac{1}{2})^2} + O\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{n^2}\right) \tag{2.4.54}
\end{aligned}$$

olur.

2.5. Özfonksiyonlara Göre Seriyeye Açılım ve Green Fonksiyonu

h reel bir sayı ve $q(x)$ reel bir fonksiyon olmak üzere

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{2.5.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) - hy(\pi) = 0 \tag{2.5.2}$$

problemini gözönüne alalım. Ayrıca

$$\int_0^\pi x |q(x)| dx < \infty \tag{2.5.3}$$

olsun.

φ ve ψ ile

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1 \tag{2.5.4}$$

$$\psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = h \tag{2.5.5}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri gösterelim. $w_2(\lambda)$, bir önceki kısımlarda olduğu gibi (2.2.11) formülü ile tanımlanıyor, dolayısıyla

$$\begin{aligned}
W[\psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)] &= \psi(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda) - \psi'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) \\
&= \varphi'(\pi, \lambda) - h\varphi(\pi, \lambda) = w_2(\lambda)
\end{aligned}$$

$$W[\psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)] = w_2(\lambda) \quad (2.5.6)$$

dir. s_n , (2.5.1)-(2.5.3) sınır değer probleminin özdeğerleri olacak şekilde $w_2(s_n) = 0$ olduğu

için (2.5.6)'dan $\varphi(x, s_n)$ ve $\psi(x, s_n)$ lineer bağımlılığı yani

$$\psi(x, s_n) = c_n \varphi(x, s_n), \quad c_n \neq 0 \quad (2.5.7)$$

elde edilir.

Lemma 2.5.1.

$$\beta_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, s_n) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlı β_n 'ler normlaştırmacı sayılar olmak üzere $w_2(\lambda)$ fonksiyonun sıfırları basittirler ve

$$\dot{w}_2(s_n) = -c_n \beta_n \quad (2.5.8)$$

formülü sağlanır.

İspat. Fonksiyon üzerindeki $(\cdot)$ λ 'ya göre diferensiyellenmeyi göstermek üzere

$$\begin{aligned} -\varphi''(x, \lambda) + q(x) \varphi(x, \lambda) &= \lambda \varphi(x, \lambda) \\ -\dot{\varphi}''(x, \lambda) + q(x) \dot{\varphi}(x, \lambda) &= \lambda \dot{\varphi}(x, \lambda) + \varphi(x, \lambda) \end{aligned}$$

yazılabilir. Birinci eşitlik $\dot{\varphi}(x, \lambda)$ ile ikinci eşitlik $\varphi(x, \lambda)$ ile çarpılıp ikinci eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa

$$\begin{aligned} -\varphi''(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) + \dot{\varphi}''(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) &= -\varphi^2(x, \lambda), \\ \frac{d}{dx} \{ \varphi'(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) - \dot{\varphi}'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) \} &= -\varphi^2(x, \lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra sıfırdan π 'ye integral alınırsa

$$[\varphi'(x, \lambda) \dot{\varphi}(x, \lambda) - \dot{\varphi}'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda)]_0^\pi = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda) dx$$

elde edilir. Son eşitliğin sol tarafı

$$\varphi'(\pi, \lambda) \dot{\varphi}(\pi, \lambda) - \dot{\varphi}'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \lambda) - \varphi'(0, \lambda) \dot{\varphi}(0, \lambda) - \dot{\varphi}'(0, \lambda) \varphi(0, \lambda)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\varphi'(\pi, \lambda) \dot{\varphi}(\pi, \lambda) - \dot{\varphi}'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \lambda) = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda) dx \quad (2.5.9)$$

olur. (2.5.6)'da $\lambda = s_n$ olacak şekilde, $w_2(s_n) = 0$ dolayısıyla $\varphi'(\pi, s_n) = h\varphi(\pi, s_n)$ olduğundan

$$[h\dot{\varphi}(\pi, s_n) - \dot{\varphi}'(\pi, s_n)] \varphi(\pi, s_n) = \int_0^\pi \varphi^2(x, s_n) dx \quad (2.5.10)$$

elde edilir. (2.2.11) eşitliği λ 'ya göre diferensiyellenirse

$$\dot{w}_2(\lambda) = \dot{\varphi}'(\pi, \lambda) - h\dot{\varphi}(\pi, \lambda)$$

bulunur. Böylece (2.5.10)'dan

$$w_2(s_n) \varphi(\pi, s_n) = \int_0^\pi \varphi^2(x, s_n) dx \quad (2.5.11)$$

elde edilir. $\int_0^\pi \varphi^2(x, s_n) dx > 0$ olduğundan $\dot{w}_2(s_n) \neq 0$ olur. Böylece $w_2(s_n)$ fonksiyonunun sıfırlarının basitliği ispatlanmış olur. (2.5.5)'den dolayı (2.5.7)'de $x = \pi$ alınır

$$\varphi(\pi, s_n) = \frac{1}{c_n} \psi(\pi, s_n) = \frac{1}{c_n} \quad (2.5.12)$$

bulunur. (2.5.11)'den

$$\dot{w}_2(s_n) = -c_n \int_0^\pi \varphi^2(x, s_n) dx,$$

böylece (2.5.8) sağlanır.

Green fonksiyonu (2.5.1)-(2.5.2) sınır değer probleminin rezolventinin çekirdeğine

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{\varphi(x, \lambda) \psi(\xi, \lambda)}{w(\lambda)}, & x \leq \xi \\ \frac{\varphi(\xi, \lambda) \psi(x, \lambda)}{w(\lambda)}, & \xi \leq x \end{cases} \quad (2.5.13)$$

şeklinde tanımlı Green fonksiyonu diyeceğiz.

Lemma 2.5.2. $f(x) \in L_2[0, \pi]$ olsun. Bu takdirde

$$y(x, \lambda) = \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \quad (2.5.14)$$

fonksiyonu

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) + f(x) \quad (2.5.15)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) - hy(\pi) = 0 \quad (2.5.16)$$

probleminin çözümtüdür.

İspat.

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{w_2(\lambda)} \left\{ \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} \quad (2.5.17)$$

ifadesinin iki kez türevini alırsak

$$y'(x, \lambda) = \frac{1}{w_2(\lambda)} \left\{ \psi'(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi'(x, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} \quad (2.5.18)$$

(2.5.6) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} y''(x, \lambda) &= \frac{1}{w_2(\lambda)} \left\{ \psi''(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi''(x, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + [\psi'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - \varphi'(x, \lambda) \psi(x, \lambda)] f(x) \right\} \\ \frac{1}{w_2(\lambda)} \left\{ [q(x) - \lambda] \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + [q(x) - \lambda] \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} \\ -f(x) &= [q(x) - \lambda] \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi - f(x) = [q(x) - \lambda] y(x) - f(x), \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$y''(x, \lambda) = [q(x) - \lambda] y(x) - f(x)$$

veya

$$y''(x, \lambda) + q(x) y(x) = \lambda y(x) + f(x)$$

(2.5.16) sınır koşullarının sağlandığı açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.5.3. β_n 'ler (2.5.1), (2.5.2) sınır değer probleminin normlaştırmacı sayıları, $G(x, \xi, \lambda)$ ise $\lambda = s_n$ noktasının komşuluğunda regüler olmak üzere

$$G(x, \zeta, \lambda) = -\frac{1}{\lambda - s_n} \frac{\varphi(x, s_n) \varphi(y, s_n)}{\beta_n} + G_1(x, y, \lambda) \quad (2.5.19)$$

formülü sağlanır.

İspat. $G(x, \xi, \lambda)$, s_n noktalarında basit kutuplara sahip olduğundan $\lambda = s_n$ noktasının komşuluğunda regüler olacak şekilde

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\operatorname{Re} s G(x, \xi, \lambda)}{\lambda - s_n} + G_1(x, \xi, \lambda) \quad (2.5.20)$$

dir. Şimdi $\operatorname{Re} s G(x, \xi, \lambda)$ 'yi hesaplayalım. (2.5.13)'den dolayı $x \leq \xi$ için

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s G(x, \xi, \lambda) &= \frac{\varphi(x, s_n) \psi(\xi, s_n)}{w_2(s_n)} = \frac{c_n \varphi(x, s_n) \varphi(\xi, s_n)}{-c_n \beta_n} \\ &= -\frac{\varphi(x, s_n) \varphi(\xi, s_n)}{\beta_n} \end{aligned}$$

son ifadeyi (2.5.20)'de yerine yazarsak (2.5.19)'u elde ederiz. Benzer sonuç $x \geq \xi$ içinde bulunur, bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi $|\lambda| \rightarrow \infty$ için $G(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını inceleyelim. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ olsun.

$$\Gamma_n(2) = \begin{cases} |\operatorname{Re} \lambda| \leq n \\ |\operatorname{Im} \lambda| \leq n \end{cases}$$

bölgesini ele alalım.

Lemma 2.5.4. $\Gamma_n(2)$ 'in çevresi üzerinde M, x, ξ ve n den bağımsız pozitif sabit olmak üzere

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq M \frac{e^{-|\operatorname{Im} s||x-\xi|}}{|s|} \quad (2.5.21)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|s|$ için (2.1.4) ve (2.1.6)'dan dolayı

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq M_1 \frac{e^{|\operatorname{Im} s|x}}{|s|}, \quad (2.5.22)$$

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq \tilde{M}_1 x e^{|\operatorname{Im} s|x} \quad (2.5.23)$$

eşitsizlikleri sağlanır. $\psi(x, \lambda)$, (2.5.1) denkleminin (2.5.5) koşulunu sağlayan çözümü olmak üzere

$$-\psi''(x, \lambda) + q(x) \psi(x, \lambda) = \lambda \psi(x, \lambda), \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

dir. x 'in yerine $\pi - x$ alınırsa

$$-\psi''(\pi - x, \lambda) + q(\pi - x) \psi(\pi - x, \lambda) = \lambda \psi(\pi - x, \lambda)$$

elde edilir.

$$\theta(x, \lambda) = \psi(\pi - x, \lambda) \quad (2.5.24)$$

olsun. Bu takdirde

$$\theta'(x, \lambda) = -\psi'(\pi - x, \lambda) \quad (2.5.25)$$

$$\theta''(x, \lambda) = \psi''(\pi - x, \lambda), \quad (2.5.26)$$

dolayısıyla $q_1(x) = q(\pi - x)$ olacak şekilde

$$-\theta''(x, \lambda) + q_1(x) \theta(x, \lambda) = \lambda \theta(x, \lambda)$$

dir. Şimdi $q_1(x)$ potansiyel fonksiyonu $x = \pi$ noktasında tekilliğe sahiptir ve $(x - \pi) q_1(x) \in L_1(0, \pi)$ daha sonra (2.5.5)'den

$$\theta(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = -h$$

elde edilir. Buradan (2.5.1) denkleminin $\theta(x, \lambda)$ çözümü için

$$\theta(x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|x}}{|s|}\right)$$

görüntüsü bulunur. (2.5.24) eşitliğini kullanarak buradan

$$\psi(\pi - x, \lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|x}}{|s|}\right)$$

elde edilir. $\pi - x$ yerine x koyarak

$$\psi(x, \lambda) = \cos s(\pi - x) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|(\pi - x)}}{|s|}\right) \quad (2.5.27)$$

bulunur. Sonuçta büyük $|s|$ 'ler için (2.5.27)'den

$$|\psi(x, \lambda)| \leq M_2 e^{|\operatorname{Im} s|(\pi - x)} \quad (2.5.28)$$

elde edilir.

$$w_2(\lambda) = \cos s\pi + O\left(e^{|\operatorname{Im} s|\pi}\right)$$

olduğundan $\Gamma_n(2)$ çevreleri üzerinde (2.4.10)'dan dolayı

$$|\cos s\pi| \geq ce^{|\operatorname{Im} s|\pi} \quad (2.5.29)$$

eşitsizliğini elde edilir. Bu takdirde $w(\lambda)$

$$w_2(\lambda) = \cos s\pi [1 + o(1)] \quad (2.5.30)$$

şeklinde yazılabilir. Büyük $|s|$ 'lar için $[1 + o(1)] > \frac{1}{2}$ olduğundan (2.5.30)'da (2.5.29) gözönüne alındığında büyük n 'ler için ve her $s \in \Gamma_n$ için

$$|w_2(\lambda)| \geq M_3 e^{|\operatorname{Im} s|\pi} \quad (2.5.31)$$

bağıntısı bulunur. Şimdi $s \in \Gamma_n$ 'ler için $x \leq \xi$ için

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) &\leq \frac{1}{w_2(\lambda)} |\varphi(x, \lambda)| |\psi(x, \lambda)| \leq \frac{M_1 e^{|\operatorname{Im} s| \pi}}{|s|} \cdot \frac{M_2 e^{|\operatorname{Im} s|(\pi - \xi)}}{M_3 e^{|\operatorname{Im} s| \pi}} \\ &= \frac{M_1 M_2}{M_3} \frac{e^{|\operatorname{Im} s|(\pi - \xi)}}{|s|} = M \frac{e^{|\operatorname{Im} s|(\pi - \xi)}}{|s|} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $M = \frac{M_1 M_2}{M_3}$ ve x, ξ ve n 'den bağımsız sabittir. Ayrıca $\xi \leq x$ için

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) &\leq \frac{1}{|w_2(\lambda)|} |\varphi(x, \lambda)| |\psi(x, \lambda)| \leq \frac{M_1 e^{|\operatorname{Im} s| \xi}}{|s|} \cdot \frac{M_2 e^{|\operatorname{Im} s|(\pi - x)}}{M_3 e^{|\operatorname{Im} s| \pi}} \\ &= \frac{M_1 M_2}{M_3} \frac{e^{|\operatorname{Im} s|(\xi - x)}}{|s|} = M \frac{e^{|\operatorname{Im} s||x - \xi|}}{|s|}. \end{aligned}$$

böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 2.5.5 İkinci mertebeden integrallenebilir türeve sahip $f(x)$ fonksiyonu ($f''(x) \in L_1(0, \pi)$)

$$f(0) = 0, \quad f'(\pi) - hf(\pi) = 0 \quad (2.5.32)$$

sınır koşullarını sağlasın. Bu takdirde

$$\int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi = -\frac{f(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) [-f''(\xi) + q(\xi) f(\xi)] d\xi \quad (2.5.33)$$

dir.

İspat. (2.5.13)'den dolayı

$$\begin{aligned} \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi &= \frac{1}{w_2(\lambda)} \left\{ \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{w_2(\lambda)} \left\{ \psi(x, \lambda) \int_0^x \frac{1}{\lambda} [-\varphi''(\xi, \lambda) + q(\xi) \varphi(\xi, \lambda)] f(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi \frac{1}{\lambda} [-\psi''(\xi, \lambda) + q(\xi) \psi(\xi, \lambda)] f(\xi) d\xi \right\} \\ &= -\frac{1}{\lambda w_2(\lambda)} \left\{ \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi''(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi \psi''(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) q(\xi) f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.5.34)$$

dir. (2.5.34)' ün sağ tarafındaki integrallere kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^x \varphi''(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi &= \varphi'(\xi, \lambda) f(\xi) \Big|_0^x - \int_0^x \varphi'(\xi, \lambda) f'(\xi) d\xi \\
&= \varphi'(x, \lambda) f(x) - \varphi'(0, \lambda) f(0) - \varphi(\xi, \lambda) f'(\xi) \Big|_0^x \\
&\quad + \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f''(\xi) d\xi \\
&= \varphi'(x, \lambda) f(x) - \varphi(x, \lambda) f'(x) + \varphi(0, \lambda) f'(0) \quad (2.5.35) \\
&\quad + \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f''(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_x^\pi \psi''(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi &= \psi'(\xi, \lambda) f(\xi) \Big|_x^\pi - \int_x^\pi \psi'(\xi, \lambda) f'(\xi) d\xi \\
&= \psi'(\pi, \lambda) f(\pi) - \psi'(x, \lambda) f(x) - \psi(\xi, \lambda) f'(\xi) \Big|_x^\pi \\
&\quad + \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f''(\xi) d\xi \\
&= hf(\pi) - \psi'(x, \lambda) f(x) - f'(\pi) + \psi(x, \lambda) f'(x) \\
&\quad + \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f''(\xi) d\xi \\
&= -\psi'(x, \lambda) f(x) - \psi'(x, \lambda) f(x) \\
&\quad + \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f''(\xi) d\xi \quad (2.5.36)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.5.35) ve (2.5.36)'dan

$$\begin{aligned}
&\psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi''(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi(\xi, \lambda) \int_x^\pi \psi''(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \\
&= \psi(x, \lambda) \varphi'(x, \lambda) f(x) - \psi(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) f'(x) \\
&\quad - \psi'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) f(x) + \psi(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) f'(x) \\
&\quad + \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f''(\xi) d\xi + \varphi(\xi, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f''(\xi) d\xi \\
&= w_2(\lambda) f(x) + w_2(\lambda) \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f''(\xi) d\xi \quad (2.5.37)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.5.37)'nin (2.5.34)'de yerine yazılmasıyla (2.5.33) eşitliğini bulunur. (2.5.23)'den dolayı $\xi \rightarrow 0$ için $\varphi(\xi, \lambda) = O(\xi)$ ve

$$\int_0^\pi \xi |q(\xi)| d\xi < \infty, \quad v_k(x) = \frac{\varphi(x, s_k)}{\sqrt{\beta_k}} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.5.38)$$

olduğundan (2.5.33)'deki integral ifadesindeki $G(x, \xi, \lambda)$ yakınsaktır. Böylece $\{V_k(x)\}_0^\infty$ (2.5.1), (2.5.2) sınır değer probleminin özdeğerleri ortonormalleşmiş sistem oluşturur. Yani

$$\int_0^\pi v_k(x) v_m(x) dx = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

dir.

Teorem 2.5.1 $f(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında ikinci mertebeden diferensiyeli integrelenebilir olsun. Ayrıca $f(x)$ fonksiyonu

$$f(0) = 0, \quad f'(\pi) - hf(\pi) = 0$$

koşullarını ve ayrıca $x = 0$ noktasının komşuluğunda

$$|f(x)| \leq cx \quad (2.5.39)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu c sabiti $x \in [0, \pi]$ ve n 'den bağımsız ve

$$c_k = \int_0^\pi f(x) v_k(x) dx \quad (2.5.40)$$

olmak üzere

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k v_k(x) \right| \leq \frac{c}{n}, \quad \forall x \in [0, \pi] \quad (2.5.41)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada (2.5.40)'dan özfonksiyonlara göre açılım formülü

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k v_k(x) \quad (2.5.42)$$

bulunur.

İspat. (2.5.42) serisi $f(x)$ fonksiyonuna $x \in [0, \pi]$ 'ye göre düzgün yakınsar. L_n, λ düzleminde kapalı çevre, $\lambda = s^2$ olmak üzere Γ_n çevresinin $\text{Im } s \geq 0$ yarı düzleminde bulunan kısmı Γ_n^+ olsun. L_n ile $\lambda = s^2$ dönüşümü yapıldığında Γ_n^+ çevresinin görüntüsünü gösterelim. (2.5.33) formülünü

$$\tau(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) [-f''(\xi) + q(\xi) f(\xi)] d\xi$$

olmak üzere

$$\int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi = -\frac{f(x)}{\lambda} + \tau(x, \xi, \lambda) \quad (2.5.43)$$

şeklinde yazalım. Lemma 2.5.4 ve (2.5.39) koşulundan dolayı $\tau(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonu için M_0 sabiti x ve ξ den bağımsız olacak şekilde

$$|\tau(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{M_0}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}}, \quad \forall \lambda \in L_n, \quad (2.5.44)$$

(2.5.43)'ün her iki yanını $\frac{1}{2\pi i}$ ile çarparsak λ 'ya göre L_n 'nin çevresi üzerine integral alırsak:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} d\lambda = -\frac{f(x)}{2\pi i} \oint_{L_n} \frac{1}{\lambda} d\lambda + \oint_{L_n} \frac{1}{2\pi i} \tau(x, \xi, \lambda) d\lambda \quad (2.5.45)$$

$G(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun L_n çevresi içerisinde sadece $s_1, s_2, \dots, s_n$ kutupları vardır. Lemma 2.5.3'deki (2.5.19) formülünü kullanarak rezidü formülü gereği

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} d\lambda &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} s \left\{ \int_0^\pi G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \operatorname{Re} s \{ G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \} = -\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{\varphi(x, s_k) \varphi(\xi, s_k)}{\beta_k} f(\xi) d\xi \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(x, s_k)}{\beta_k} \int_0^\pi \varphi(\xi, s_k) f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.5.46)$$

bulunur. Daha sonra $\lambda = s^2$ olduğu gerçeğinden hareketle

$$-\frac{f(x)}{2\pi i} \oint_{L_n} \frac{1}{\lambda} d\lambda = -f(x) \quad (2.5.47)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} \tau(x, \xi, \lambda) d\lambda \right| &\leq \frac{M_0}{2\pi} \oint_{L_n} \frac{1}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} d\lambda = \frac{M_0}{2\pi} \int_{\Gamma_n^+} \frac{2|s|}{|s|^3} ds \\ &= \frac{M_0}{\pi} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{|s|^2} ds \leq \frac{4nM_0}{\pi n(n-1)} \\ &\leq \frac{4M_0}{\pi(n-1)} \leq \frac{c}{n-1} \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

(2.5.46), (2.5.47) ve (2.5.48)'den dolayı (2.5.45)'den

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(x, s_k)}{\beta_k} \int_0^\pi \varphi(\xi, s_k) f(\xi) d\xi \right| \leq \frac{c}{n-1}, \quad \forall x \in [0, \pi]$$

elde ederiz. Buradan ise teoremin ispatı çıkar.

$f(x)$ fonksiyonu Teorem 2.5.1 deki koşulları sağladığında (2.5.42) serisi düzgün yakınsak olacak şekilde aynı zamanda mutlak da yakınsak. Ayrıca, $f(x) \in L_2(0, \pi)$ için

$$\left| \int_0^\pi |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \right| \leq \frac{c}{n^2}. \quad (2.5.48')$$

Teorem 2.5.2. Keyfi $f(x) \in L_2(0, \pi)$ için

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^\infty |c_k|^2 \quad (2.5.49)$$

Parseval eşitliği ve

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k v_k(x) \quad (2.5.50)$$

açılım formülü sağlanır. Burada

$$c_k = \int_0^\pi f(x) v_k(x) dx,$$

olup (2.5.49) açılım formülündeki seri $f(x)$ fonksiyonuna $L_2(0, \pi)$ uzayında metrik anlamında yakınsaktır.

İspat. $f(x) \in L_2(0, \pi)$ keyfi bir fonksiyon olsun. $x = 0$ ve $x = \pi$ noktalarının komşuluğunda 0'a eşit olan sonsuz diferensiyellenebilen fonksiyonlar $L_2(0, \pi)$ 'de her yerde yoğundur. Bu nedenle Teorem 2.5.1'in koşullarını sağlayan ve $f(x)$ fonksiyonuna ortalama yakınsak olan $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisini göstermek mümkündür.

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L_2(0, \pi)} = \sqrt{\int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \longrightarrow 0 \quad n \longrightarrow \infty$$

$f_n(x)$ fonksiyonlarının herbiri için sağlandığından (2.5.48') den dolayı $c_k^{(n)} = \int_0^\pi f_n(x) v_k(x) dx$, $(k = 1, 2, \dots)$ olacak şekilde

$$\int_0^\pi |f_n(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^\infty |c_k^{(n)}|^2 \quad (2.5.51)$$

Parseval eşitliği sağlanır.

$$\|\vec{s}\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |s_k|^2} < \infty$$

olmak üzere lineer normlu $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots)$ vektörler uzayını l_2 ile gösterelim. $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots)$, $\vec{c}^{(n)} = (c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \dots)$ olsun. (2.5.51) eşitliğine göre $\vec{c}^{(n)} \in l_2$ dir. (2.5.51) eşitliğini

$$\|f_n\|_{L_2(0,\pi)}^2 = \|\vec{c}^{(n)}\|_{l_2}^2$$

olarak yazılabilir. $f_n(x) - f_m(x)$ fonksiyonuna (2.5.51) Parseval eşitliğini uygularsak

$$\int_0^\pi |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^\infty |c_k^{(n)} - c_k^{(m)}|^2,$$

elde edilir. Yani

$$\|f_n - f_m\|_{L_2(0,\pi)}^2 = \|\vec{c}^{(n)} - \vec{c}^{(m)}\|_{l_2}^2.$$

Böylece $n, m \rightarrow \infty$ için $\|\vec{c}^{(n)} - \vec{c}^{(m)}\| \rightarrow 0$ olup $\{\vec{c}^{(n)}\}$ vektörler dizisi l_2 uzayında Cauchy dizisidir. l_2 tam uzay olduğu için $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|\vec{c}^{(n)} - \vec{b}\|_{l_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.5.53)$$

olmak üzere $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots) \in l_2$ mevcuttur. (2.5.52)'de $n \rightarrow \infty$ iken limit alınır ve normun sürekliliği kullanılırsa

$$\|f\|_{L_2(0,\pi)}^2 = \|\vec{b}\|_{l_2}^2 \quad (2.5.54)$$

olduğu görülür. Şimdi $\vec{b} = \vec{c}$ olduğunu gösterelim. Bu takdirde (2.5.54) eşitliği ile çakışacak (2.5.53)'den her k için $n \rightarrow \infty$ iken

$$c_k^{(n)} \rightarrow b_k, \quad (2.5.55)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |\vec{c}_k^{(n)} - c_k| &= \left| \int_0^\pi [f_n(x) - f(x)] v_k(x) dx \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^\pi v_k^2(x) dx} \\ &= \sqrt{\int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \\ c_k^{(n)} &\rightarrow c_k, \quad n \rightarrow \infty \quad iken \end{aligned} \quad (2.5.56)$$

limitinin tek olmasından dolayı (2.5.55)-(2.5.56)'den $b_k = c_k$ elde edilir. Dolayısıyla $\vec{b} = \vec{c}$ olur. Böylece (2.5.48) Parseval eşitliği ispatlanır. Şimdide (2.5.49) açılım formülünü

ispatlayalım. $\forall n$ için

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k v_k(x) \right|^2 dx &= \int_0^\pi \left[f(x) - \sum_{k=0}^n c_k v_k(x) \right] \left[\overline{f(x)} - \sum_{k=0}^n \bar{c}_k v_k(x) \right] dx \\
&= \int_0^\pi |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n \bar{c}_k \int_0^\pi f(x) v_k(x) dx \\
&\quad - \sum_{k=0}^n c_k \int_0^\pi \overline{f(x)} v_k(x) dx + \sum_{m,k=0}^n c_k \bar{c}_m \cdot \int_0^\pi v_k(x) v_m(x) dx \\
&= \int_0^\pi |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \\
&= \int_0^\pi |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n |c_k|^2
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\int_0^\pi \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k v_k(x) \right|^2 dx = \int_0^\pi |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^n |c_k|^2.$$

(2.5.48) Parseval eşitliğinden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k v_k(x) \right|^2 dx = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

3. ÖZEL SİNGÜLERLİĞE SAHİP STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİ İÇİN KISMEN ÇAKIŞMAYAN İKİ SPEKTRUMA GÖRE

TERS PROBLEM:

3.1. Bu bölümde $q_1(x), q_2(x)$ ($q_1(x) \neq q_2(x)$) reel potansiyellerini içeren iki özel singüler Sturm-Liouville problemleri gözönüne alınarak kısmen çakışmayan spektrumlara göre ters problem incelenecektir. Ayrıca teklik teoreminin ispatı verilecektir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için benzer problemi ilk olarak Amerikan matematikçi H. Hochstadt [34] çözmüştür. Ayrıca regüler Sturm-Liouville operatörleri için farklı yöntemle B.M. Levitan [6] elde etmiştir. Daha sonraki yıllarda birçok matematikçi tarafından benzer problemler incelenmiş ve farklı yöntemlerle teklik teoremleri ispatlanmıştır. Şimdi H. Hochstadt [34] yöntemini kullanarak aşağıdaki teklik teoremini ispatlayalım:

Teorem 3.1.1.(Teklik Teoremi) $\delta = \text{sabit}$, $q_0(x) \in L_2[0, \pi]$, $1 < p < 2$, $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ şeklinde potansiyel için $\int_0^\pi x |q(x)| dx < \infty$ olmak üzere

$$Ly = -y'' + \left[\frac{\delta}{x^p} + q_0(x) \right] y = \mu y \quad (\mu = \lambda^2; 0 \leq x \leq \pi) \quad (3.1.1)$$

$$y(0, \lambda) = 0 \quad (3.1.2)$$

$$y(\pi, \lambda) \cos \alpha + y'(\pi, \lambda) \sin \alpha = 0 \quad (3.1.3)$$

(3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.3) probleminin spektrumu $\{\lambda_i\}$, (3.1.3) yerine

$$y(\pi, \lambda) \cos \gamma + y'(\pi, \lambda) \sin \gamma = 0 \quad (3.1.4)$$

koşulunun alınmasıyla elde edilen yeni (3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.4) probleminin spektrumu ise $\{\lambda'_i\}$ olsun. Burada $\alpha \neq \gamma$.

Diğer taraftan $\tilde{q}(x) = \frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x)$ $q(x)$ $\tilde{q}_0(x) \in L_2[0, \pi]$ ile aynı şartları taşımak üzere ikinci bir

$$\tilde{L}y = -y'' + \left[\frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x) \right] y = \mu y \quad (\mu = \lambda^2, 0 \leq x \leq \pi) \quad (3.1.5)$$

$$y(\pi, \lambda) \cos \alpha + y'(\pi, \lambda) \sin \alpha = 0 \quad (3.1.6)$$

(3.1.5) (3.1.2) (3.1.6) probleminin spektrumunu $\{\tilde{\lambda}_i\}$, (3.1.6) yerine (3.1.4) alarak (3.1.5) (3.1.2) (3.1.4) probleminin spektrumunu ise $\{\tilde{\lambda}'_i\}$ ile gösterelim.

$\Lambda_0, \lambda_i \neq \tilde{\lambda}_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ şartını sağlayan sonlu i 'lerin cümlesi, Λ ise $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i$ olan sonsuz indislerin cümlesi olacak şekilde, $\tilde{\psi}_n$ ve φ_n sırasıyla

$$\tilde{\psi}'' + \left[\lambda - \frac{\delta}{x^p} - \tilde{q}_0(x) \right] \tilde{\psi} = 0$$

$$\varphi_n'' + \left[\lambda - \frac{\delta}{x^p} - q_0(x) \right] \varphi_n = 0$$

denklemlerinin çözümleri olmak üzere hemen hemen her yerde

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} \left(\tilde{\psi}_n \varphi_n \right)' \quad (3.1.7)$$

olur.

Eğer özellikle Λ_0 boş ise hemen hemen her yerde $q = \tilde{q}$ dir.

Bilinen sonuçlara [26] göre teoremin ifadesindeki operatörler ayrık spektrumlara sahip self adjoint operatörlerdir.

İspat. (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) ile verilen problemin özfonksiyonlarının cümlesi $\{\varphi_n\}$ ve (3.1.5), (3.1.2) ve (3.1.6) ile verilen problemin özfonksiyonlarının cümlesi $\{\tilde{\varphi}_n\}$ olsun. $L_2[0, \pi]$ uzayının

$$H = \{f \in L_2[0, \pi] : \langle f, \varphi_i \rangle = 0, i \in \Lambda_0\}$$

$$\tilde{H} = \{f \in L_2[0, \pi] : \langle f, \tilde{\varphi}_i \rangle = 0, i \in \Lambda_0\}$$

şeklinde iki alt uzayını tanımlayalım. Şimdi H dan $\tilde{H}$ ya $(T : H \rightarrow \tilde{H})$

$$T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n, n \in \Lambda \quad (3.1.8)$$

şeklinde bir T operatörünü alalım. $f \in H$ olmak üzere f ' nin $\{\varphi_n\}$ özfonksiyonları cinsinden seri açılımı

$$f = \sum_{\Lambda} f_n \varphi_n \quad (3.1.9)$$

olsun. Eğer λ tüm özdeğerlerden farklı kompleks düzlemde bir elaman ise $(\lambda - L)^{-1}$ operatörü mevcut ve sınırlıdır, dolayısıyla bir kompakt operatördür. $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ olduğu için (3.1.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \lambda_n) f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\
&= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \varphi_n - \lambda_n f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\
&= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \varphi_n - L f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\
&= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - L) f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra son eşitliğin her iki tarafı $(\lambda - L)^{-1}$ ile işleme tabi tutulursa

$$(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)}$$

bulunur. Son eşitlikte her iki tarafa T operatörü uygulanır ve (3.1.8) kullanılırsa

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.10)$$

elde edilir. (3.1.10)'nın sağ ve sol taraflarına $(\lambda - \tilde{L})$ yi uygulanır ve $\tilde{L}\tilde{\varphi}_n = \lambda_n\tilde{\varphi}_n$ bağıntısı kullanılırsa $(\lambda_n = \tilde{\lambda}_n)$

$$\begin{aligned}
(\lambda - \tilde{L}) T(\lambda - L)^{-1} f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \tilde{L}) f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\
&= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \tilde{\varphi}_n - \tilde{L} f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\
&= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \tilde{\varphi}_n - \lambda_n f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \\
&= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \lambda_n) f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.1.8)'den dolayı

$$(\lambda - \tilde{L}) T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} f_n \tilde{\varphi}_n = T f$$

olur. Bu eşitlik her f için sağlandığından $L, \tilde{L}$ ve T operatörleri arasında

$$(\lambda - \tilde{L}) T(\lambda - L)^{-1} = T \quad (3.1.11)$$

bağıntısı elde edilir. Buraya kadar sadece $(\lambda_n = \tilde{\lambda}_n)$ spektrumunu kullandık, şimdi ise ikinci spektrum yardımıyla T 'nin yapısını bulalım. T 'nin yapısı bulunduğunda teoremin ispatı daha kolay elde edebiliriz. Bunun için

$$\varphi'' + \left[\lambda - \frac{\delta}{x^p} - q_0(x) \right] \varphi = 0 \quad (3.1.12)$$

$$\varphi(0, \lambda) = 0 \quad \varphi'(0, \lambda) = 1 \quad (3.1.13)$$

problemini gözönüne alalım. Bu problemin çözümü $\varphi(x, \lambda)$ olsun. φ için verilen asimptotik ifadeleri daha sade şekilde ,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|^{2-p}}\right) \\ \varphi'(x, \lambda) &= \cos \lambda x + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|^{2-p}}\right) \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

olarak yazılabilir. (3.1.3)-(3.1.4) sınır şartları yardımıyla λ 'nın

$$w(\lambda) = \sin \alpha \cdot \varphi'(\pi, \lambda) + \cos \alpha \cdot \varphi(\pi, \lambda) \quad (3.1.15)$$

$$v(\lambda) = \sin \gamma \cdot \varphi'(\pi, \lambda) + \cos \gamma \cdot \varphi(\pi, \lambda) \quad (3.1.16)$$

şeklinde iki fonksiyonunu tanımlayalım. (3.1.14) eşitliğinde verilen asimptotik formüller gözönüne alındığında φ ve φ' çözümleri λ 'nın tam fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla $w(\lambda)$ ve $v(\lambda)$ birer tam fonksiyondurlar. Ayrıca $w(\lambda)$ 'nın sıfırları (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) ile verilen sınır değer probleminin özdeğerleridir. Mertebesi 1'den küçük olan bir tam fonksiyon, sıfırlarının bir sabit çarpan ile çarpılması ile

$$w(\lambda) = a \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) \quad (3.1.17)$$

$$v(\lambda) = b \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_i}\right) \quad (3.1.18)$$

elde edilir [40]. Benzer şekilde

$$\tilde{w}(\lambda) = \sin \alpha \tilde{\varphi}'(\pi, \lambda) + \cos \alpha \tilde{\varphi}(\pi, \lambda)$$

$$\tilde{v}(\lambda) = \sin \gamma \tilde{\varphi}'(\pi, \lambda) + \cos \gamma \tilde{\varphi}(\pi, \lambda)$$

fonksiyonları için

$$\tilde{w}(\lambda) = \tilde{a} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i}\right) \quad (3.1.19)$$

$$\tilde{v}(\lambda) = \tilde{b} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i}\right) \quad (3.1.20)$$

şeklinde olur. Hipotez nedeniyle ikinci spektrumların tamamı çakışık, birinci spektrumların ise ilk N tanesi farklı olup geriye kalanları aynı olduğu için

$$\frac{v(\lambda)}{\tilde{v}(\lambda)} = \frac{b \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)}{\tilde{b} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i}\right)}$$

ve

$$\frac{w(\lambda)}{\tilde{w}(\lambda)} = \frac{a \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)}{\tilde{a} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}_i}\right)}$$

dir. Burada $\frac{v(\lambda)}{\tilde{v}(\lambda)}$ sabit, $\frac{w(\lambda)}{\tilde{w}(\lambda)}$ ise rasyonel fonksiyondur. Şimdi H 'da

$$T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$$

şeklinde T operatörünü tanımlayalım ve T 'nin sınırlı tersinin mevcut olduğunu gösterelim. α ve β 'nin aynı zamanda sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Asimptotik formüllerden faydalanarak pozitif yeterince büyük λ 'lar için

$$\tau_n = \int_0^{\frac{2}{n}} t |q(t)| dt + \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{2n}}^{\pi} |q(t)| dt$$

$$w(\lambda) = \sin \alpha \cdot \cos \lambda \pi + \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} \cos \alpha + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|^{2-p}}\right) \quad (3.1.21)$$

elde edilir. $\tilde{\tau}_n = \frac{1}{n} + \tau_n$ için

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

normlaştırmacı sayıları için

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} + O\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{n^2}\right) \quad (3.1.22)$$

olduğu biliniyor [26]. Buna göre

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|^2 &= \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx = \frac{\pi}{2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} + O\left(\frac{\tau_n}{n^2}\right) \\ \|\tilde{\varphi}_n\|^2 &= \int_0^\pi \tilde{\varphi}_n^2(x) dx = \frac{\pi}{2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} + O\left(\frac{\tilde{\tau}_n}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

olduğundan (3.1.21) ve (3.1.22)'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_n\|}{\|\tilde{\varphi}_n\|} = 1$$

sonucuna ulaşılır. $n \in \Lambda$ için $T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$ ifadesi kullanılırsa

$$\frac{\|T\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} = 1$$

bulunur. O halde T operatörünün düzgün sınırlı terse sahip olduğu elde edilir. Benzer sonuç α veya β 'nın sıfır olacağı durumda da söz konusudur.

f , H uzayında keyfi bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f = \sum_{\Lambda} f_n \varphi_n$$

dir. Eşitliğin her iki tarafı φ_n ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$f_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} \quad (3.1.24)$$

elde edilir. Tüm n 'ler için $\lambda \neq \lambda_n$ olmak üzere toplam ifadesinden

$$(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \varphi_n}{(\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.25)$$

bulunur. $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ bağıntısını ve $(\lambda - L)^{-1}$ bir kompakt operatör olduğunu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} L\varphi_n - \lambda\varphi_n &= \lambda_n \varphi_n - \lambda\varphi_n \\ \Rightarrow -(\lambda - L)\varphi_n &= -(\lambda - \lambda_n)\varphi_n \\ (\lambda - L)^{-1}(\lambda - L)\varphi_n &= (\lambda - L)^{-1}(\lambda - \lambda_n)\varphi_n \\ (\lambda - L)^{-1}\varphi_n &= (\lambda - \lambda_n)^{-1}\varphi_n \end{aligned}$$

dir.

(3.1.25) eşitliğinin her iki yanına T operatörünü uygular ve $T\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$ bağıntısı dikkate alınır

$$T(\lambda - L)^{-1}f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.26)$$

elde edilir. Son eşitliğin sağında bulunan toplam sınırlı olmayan $\tilde{L}$ operatörünün tanım bölgesindedir. $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \tilde{\varphi}_n$ elamanının $\tilde{L}$ operatörünün tanım bölgesinde olması için $\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\lambda}_n g_n| < \infty$ şartının sağlanması gerek ve yeterdir [34]. Dolayısıyla $\lambda_n = O(n^{4-2p})$ olduğundan

$$\sum_{\Lambda} \left| \frac{\lambda_n f_n}{(\lambda - \lambda_n)} \right|^2 \leq \frac{1}{\min_n \left| \frac{\lambda}{\lambda_n} - 1 \right|^2} \sum |f_n|^2 < \infty.$$

(3.1.25)'in her iki yanını $(\lambda - \tilde{L})$ ile işleme tabi tutar ve $\tilde{L}\tilde{\varphi}_n = \lambda_n \tilde{\varphi}_n$ olduğu göz önüne alınır

$$\begin{aligned} (\lambda - \tilde{L}) \tilde{\varphi}_n &= (\lambda - \lambda_n) \tilde{\varphi}_n, \\ (\lambda - \tilde{L}) T(\lambda - L)^{-1}f &= \sum_{\Lambda} \frac{(\lambda - \tilde{L}) f_n \tilde{\varphi}_n}{\lambda - \lambda_n} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \tilde{\varphi}_n - \tilde{L} f_n \tilde{\varphi}_n}{\lambda - \lambda_n} \\ &= \sum_{\Lambda} \frac{\lambda f_n \tilde{\varphi}_n - f_n \lambda_n \tilde{\varphi}_n}{\lambda - \lambda_n} = \sum_{\Lambda} f_n \tilde{\varphi}_n = Tf \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik keyfi bir $f \in H$ için sağlandığından

$$(\lambda - \tilde{L}) T(\lambda - L)^{-1} = T \quad (3.1.27)$$

elde edilir.

Şimdi T operatörünün farklı bir gösterimini bulmaya çalışalım. Bunun için diferensiyel denklemlerin çözümünde önemli yere sahip Green fonksiyonundan yararlanalım.

$$\psi'' + \left[\lambda - \frac{\delta}{x^p} - q_0(x) \right] \psi = 0 \quad (3.1.28)$$

$$\psi(\pi, \lambda) = -\sin \alpha \quad \psi'(\pi, \lambda) = \cos \alpha \quad (3.1.28')$$

probleminin çözümü $\psi(x)$, $\varphi(x)$ ise (3.1.28)-(3.1.28') probleminin $\varphi(0, \lambda) = 0$, $\varphi'(0, \lambda) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olmak üzere

$$y'' + \left[\lambda - \frac{\delta}{x^p} - q_0(x) \right] y = f(x) \quad (3.1.29)$$

denklemin çözümü ise $y(x)$ olsun. Burada $y(x)$ 'in

$$y(x) = v_1(x) \varphi(x) + v_2(x) \psi(x) \quad (3.1.30)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Her iki tarafın x 'e göre türevini alırsak

$$y'(x) = v_1'(x) \varphi(x) + v_1(x) \varphi'(x) + v_2'(x) \psi(x) + v_2(x) \psi'(x) \quad (3.1.31)$$

olur.

$$v_1'(x) \varphi(x) + v_2'(x) \psi(x) = 0 \quad (3.1.32)$$

olsun.

$$y''(x) = v_1'(x) \varphi'(x) + v_1(x) \varphi''(x) + v_2'(x) \psi'(x) + v_2(x) \psi''(x) \quad (3.1.33)$$

eşitliğini (3.1.29) denklemini ve $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ olduğunu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} y''(x) &= v_1(x) \varphi''(x) + v_2(x) \psi''(x) + v_1'(x) \varphi'(x) + v_2'(x) \psi'(x) \\ &\quad + \lambda v_1(x) \varphi(x) + \lambda v_2(x) \psi(x) - q(x) v_1(x) \varphi(x) - q(x) v_2(x) \psi(x) \\ &= v_1(x) [\varphi''(x) + (\lambda - q(x)) \varphi(x)] + v_2(x) [\psi''(x) + (\lambda - q(x)) \psi(x)] \\ &\quad + v_1'(x) \varphi'(x) + v_2'(x) \psi'(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$y''(x) = v_1'(x) \varphi'(x) + v_2'(x) \psi'(x)$$

diğer yandan

$$y''(x) = v_1'(x) \varphi'(x) + v_2'(x) \psi'(x) = f(x) \quad (3.1.34)$$

dir. Bu nedenle (3.1.32) kullanılarak

$$v_1'(x) = \frac{v_2'(x) \psi(x)}{\varphi(x)}$$

eşitliği, (3.1.34) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{v_2'(x) \psi(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} + v_2'(x) \psi'(x) &= f(x) \\ -v_2'(x) (\psi(x) \varphi'(x) - \psi'(x) \varphi(x)) &= f(x) \varphi(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}v_2'(x) &= \frac{f(x) \varphi(x)}{w(\lambda)} \\ v_2(x) &= \int_0^x \frac{f(s) \varphi(\xi, \lambda)}{w(\lambda)} d\xi\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $v_1(x)$ fonksiyonu

$$v_1(x) = \int_x^\pi \frac{f(\xi) \psi(\xi, \lambda)}{w(\lambda)} d\xi$$

olarak elde edilir. Buna göre $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ 'in (3.1.30)'da yerine yazılırsa $y(x)$ fonksiyonu

$$y(x) = \psi(x, \lambda) \int_0^x \frac{f(\xi) \varphi(\xi, \lambda)}{w(\lambda)} d\xi + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi \frac{f(\xi) \psi(\xi, \lambda)}{w(\lambda)} d\xi$$

veya

$$y(x) = \frac{1}{w(\lambda)} \left\{ \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi(x, \lambda) \int_x^\pi f(\xi) \psi(\xi, \lambda) d\xi \right\}$$

bulunur. Böylece $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\psi(\xi, \lambda) \varphi(x, \lambda)}{w(\lambda)}, & x \leq \xi \\ \frac{\psi(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda)}{w(\lambda)}, & \xi \leq x \end{cases} \quad (3.1.35)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$y(x) = \int_0^\pi G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.1.36)$$

olur.

$$y'' - \left[\frac{\delta}{x^p} + q_0(x) \right] y = f(x) - \lambda y$$

denkleminde

$$Ly = -y'' + \left[\frac{\delta}{x^p} + q_0(x) \right] y$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} -Ly + \lambda y &= f(x) \\ (\lambda - L)y &= f(x) \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

elde edilir.

$$(\lambda - L) \int_0^\pi G(x, \xi) f(\xi) d\xi = f(x) \quad (3.1.38)$$

denklemini gözönüne alalım. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_{<} &= \min(x, \xi) \\ x_{>} &= \max(x, \xi) \end{aligned}$$

olmak üzere $G(x, \xi)$ Green fonksiyonunu

$$G(x, \xi) = \frac{\varphi(x_{<}) \psi(x_{>})}{w(\lambda)} \quad (3.1.39)$$

şeklinde gösterelim. $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ için asimptotik formlar gözönüne alındığında $G(x, \xi)$ 'nin pay ve paydası λ 'nın tam fonksiyonları olup, bu fonksiyonlar sınırlıdır.

$\lambda = \tau^2$ ve $\tau = \sigma + it$ olmak üzere

$$\Gamma_n(2) = \begin{cases} |\operatorname{Re} \lambda| \leq n \\ |\operatorname{Im} \lambda| \leq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir bölge olmak üzere Γ_n üzerinde $\frac{G(x, \xi)}{\lambda - \mu}$ analitik olduğundan Cauchy integral formülü gereği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} \frac{G(x, \xi)}{\lambda - \mu} d\mu = 0.$$

Rezidü integrasyonu yardımıyla Mittag Leffler açılımı, (3.1.39) kullanılarak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{G(x, \xi)}{\lambda - \mu} d\mu = -G + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x_{<}) \psi_n(x_{>})}{w'(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.41)$$

$$0 = -G + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x_{<}) \psi_n(x_{>})}{w'(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)},$$

buradan

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x_{<}) \psi_n(x_{>})}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.42)$$

şeklinde elde edilir. Diğer yandan $\varphi_n(x)$ ve $\psi_n(x)$ çözümlerinin her ikisinde basit özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olduklarından lineer bağımlıdır. Böylece

$$k_n \varphi_n(x) = \psi_n(x) \quad (3.1.43)$$

olup $x = \pi$ için

$$k_n = \frac{\psi_n(\pi)}{\varphi_n(\pi)} \quad (3.1.44)$$

olur. $\psi_n(\pi) = -\sin \alpha$ olduğundan

$$k_n = -\frac{\sin \alpha}{\varphi_n(\pi)}$$

dir.

(3.1.43)'ün her iki yanının türevi alınırsa $\alpha \neq 0$, olacak biçimde $x = \pi$ için

$$\begin{aligned} k_n \varphi_n'(\pi) &= \psi_n'(\pi) \\ k_n &= \frac{\psi_n'(\pi)}{\varphi_n'(\pi)} = \frac{\cos \alpha}{\varphi_n'(\pi)} \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

$$k_n = \begin{cases} -\frac{\sin \alpha}{\varphi_n(\pi)}, & \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{\varphi_n'(\pi)}, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (3.1.46)$$

bulunur. (3.1.38)'de, (3.1.42) ve (3.1.43)'ü kullanarak

$$(\lambda - L)^{-1} f = \int_0^{\pi} G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \sum_{\Lambda} \frac{k_n \varphi_n(x) \int_0^{\pi} \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}. \quad (3.1.47)$$

buluruz. Ayrıca (3.1.24) bağıntısından

$$f_n = \frac{\int_0^{\pi} \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{\|\varphi_n\|^2} \quad (3.1.48)$$

eşitliğini (3.1.25)'de yerine yazılırsa

$$(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{\varphi_n(x) \int_0^{\pi} \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{\|\varphi_n\|^2 (\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.49)$$

olarak bulunur. (3.1.47) ve (3.1.49)' bağıntılarından

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{w'(\lambda_n)}{k_n} \quad (3.1.50)$$

eşitliği elde edilir. (3.1.38) eşitliğinin her iki yanı $(\lambda - L)^{-1}$ ile işleme tabi tutulur ve (3.1.39) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\lambda - L)^{-1} f &= \int_0^{\pi} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{w(\lambda)} \left\{ \psi(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \varphi(x, \lambda) \int_x^{\pi} \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

bulunur.

Şimdi amacımız

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^{\pi} \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.52)$$

olduğunu göstermektir. Bunun için (3.1.26) eşitliği ile (3.1.52) eşitliğinin sağ yanlarının eşit olduğunu göstermemiz gerekir. Burada $\tilde{\psi}_n$ ve $\tilde{\varphi}_n$, sırasıyla q yerine $\tilde{q}$ yazılmasıyla elde edilen (3.1.12) ve (3.1.28) denklemlerin çözümleri olsunlar. Buna göre (3.1.43) $\tilde{k}_n \tilde{\varphi}_n(x) = \tilde{\psi}_n(x)$ bağıntısı kullanılarak (3.1.52)'nin sağ tarafı

$$\sum_{\Lambda} \frac{\tilde{k}_n \tilde{\varphi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + k_n \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^{\pi} \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.53)$$

olarak yazılabilir. Eğer $\tilde{k}_n = k_n$ ise (3.1.53) ifadesini (3.1.50)' yi kullanarak

$$\sum_{\Lambda} \frac{\tilde{k}_n \tilde{\varphi}_n(x) \int_0^{\pi} \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)} = \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{\varphi}_n(x) \int_0^{\pi} \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{\|\varphi_n\|^2 (\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.54)$$

şeklinde alabiliriz.

$$f_n = \frac{\int_0^\pi \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{\|\varphi_n\|^2}$$

olduğundan

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{f_n \tilde{\varphi}_n}{(\lambda - \lambda_n)} = \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{\varphi}_n(x) \int_0^\pi \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{\|\varphi_n\|^2 (\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.55)$$

olur. (3.1.54) eşitliği göz önüne alınırsa

$$T(\lambda - L)^{-1} f = \sum_{\Lambda} \frac{k_n \tilde{\varphi}_n(x) \int_0^\pi \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.56)$$

eşitliği elde edilir ki bu da (3.1.52) eşitliğidir. Buraya kadar sadece ikinci spektrumlar kullanılmıştır.

Şimdi $k_n = \tilde{k}_n$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\lambda = \lambda_n$ alalım. $w(\lambda_n) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_n'(\pi) \sin \alpha + \varphi_n(\pi) \cos \alpha \\ \nu(\lambda_n) &= \varphi_n'(\pi) \sin \gamma + \varphi_n(\pi) \cos \gamma \end{aligned}$$

birinci eşitliği $\sin \gamma$ ile ikinciye $\sin \alpha$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\varphi_n(\pi) (\sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha) + \varphi_n'(\pi) (\sin \gamma \sin \alpha - \sin \alpha \sin \gamma) = \sin \alpha \cdot \nu(\lambda_n)$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_n(\pi) = -\frac{\nu(\lambda_n) \sin \alpha}{\sin(\alpha - \gamma)}$$

bulunur. (3.1.46)'da $\alpha \neq 0$ için

$$\begin{aligned} k_n &= -\frac{\sin \alpha}{\varphi_n(\pi)} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\nu(\lambda_n)} \\ \tilde{k}_n &= \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\tilde{\nu}(\lambda_n)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\nu(\lambda)$ ve $\tilde{\nu}(\lambda)$ fonksiyonları (3.1.18) ve (3.1.20) gözönüne alındığında bu iki fonksiyon aynı sıfırlara sahip tam fonksiyonlar olup, sadece sabit çarpanları farklı olduğundan asimptotik yapıları denktirler. Böylece $\forall n \in N$ için $\tilde{k}_n = k_n$ olur.

$$(\lambda - \tilde{L}) T(\lambda - L)^{-1} = T f$$

olduğundan bunun (3.1.52)'de yerine yazılmasıyla

$$(\lambda - \tilde{L}) \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^{\pi} \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} = Tf \quad (3.1.57)$$

elde edilir. Şimdi ise

$$g(x) = \frac{\tilde{\psi}(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}(x, \lambda) \int_x^{\pi} \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi}{w(\lambda)} \quad (3.1.58)$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu ele alalım. (3.1.41) ve (3.1.42)'dekilerine benzer şekilde $g(x)$ fonksiyonun Mittag-Leffler açılımı

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{z}_n(x) \int_x^{\pi} \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \\ &\quad + \sum_{\Lambda} \frac{\tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}_n(x) \int_x^{\pi} \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

olup (3.1.52)'nin sağ taraftaki ikinci toplam $(\lambda - \tilde{L})^{-1} Tf$ dir. İlk toplamda ki $\tilde{u}_n(x)$ ve $\tilde{z}_n(x)$ ise sırasıyla $\tilde{\psi}(x)$ ve $\tilde{\varphi}(x)$ 'nin $\lambda = \lambda_n$ noktasındaki değerlerine karşılık gelen özfonksiyonlardır. $n \in \Lambda_0$ için λ_n (3.1.2), (3.1.6) sınır koşulları ile tanımlı $\tilde{L}$ operatörünün özdeğeri değildir. $\tilde{u}_n(x)$, $\tilde{u}_n'' + [\lambda - \tilde{q}(x)] \tilde{u}_n = 0$ denkleminin çözümü olmasına rağmen denklemin verilen şartlarını sağlamaz. Benzer yorum $\tilde{z}_n(x)$ içinde geçerlidir. Böylece

$$(\lambda - \tilde{L})^{-1} Tf = g(x) - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{z}_n(x) \int_x^{\pi} \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \quad (3.1.60)$$

elde edilir. (3.1.60) eşitliğindeki $g(x)$ yerine (3.1.58) ile verilen değer yazıldığında

$$\begin{aligned} (\lambda - \tilde{L})^{-1} Tf &= \frac{\tilde{\psi}(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}(x, \lambda) \int_x^{\pi} \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi}{w(\lambda)} \\ &\quad - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{z}_n(x) \int_x^{\pi} \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

bulunur.

(3.1.61) eşitliğinin sağ tarafını x 'e göre diferensiyeli alınır ve her iki taraf $(\lambda - \tilde{L})$ operatörü ile işleme tabi tutulursa

$$\begin{aligned}
(Tf)' &= \left\{ \frac{\tilde{\psi}'(x) \int_0^x \varphi(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}'(x) \int_x^\pi \psi(\xi) f(\xi) d\xi}{w(\lambda)} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}'_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{z}'_n(x) \int_x^\pi \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{\tilde{\psi}(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - \tilde{\varphi}(x, \lambda) \psi(x, \lambda)}{w(\lambda)} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \varphi(x, \lambda) - \tilde{z}_n(x) \psi_n(x)}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right\} f(x) \quad (3.1.62)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her λ_n 'de rezidü sıfır olduğu için ikinci parantez içindeki ifade özdeş olarak sıfır olur. Kalan ifadenin tekrar x 'e göre diferensiyeli alınırsa

$$\begin{aligned}
(Tf)'' &= \frac{\tilde{\psi}''(x) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}''(x) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi}{w(\lambda)} \\
&\quad - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}''_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{z}''_n(x) \int_x^\pi \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \\
&\quad + \left\{ \frac{\tilde{\psi}'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - \tilde{\varphi}'(x, \lambda) \psi(x, \lambda)}{w(\lambda)} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}'_n(x) \varphi(x, \lambda) - \tilde{z}'_n(x) \psi_n(x)}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} f(x) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tilde{L}Tf &= - \left\{ \frac{\tilde{\psi}''(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}''(x, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi}{w(\lambda)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}''_n(x, \lambda) \int_0^x \varphi_n(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \tilde{z}''_n(x, \lambda) \int_x^\pi \psi_n(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x) \right) \left\{ \frac{\tilde{\psi}(x, \lambda) \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \tilde{\varphi}(x, \lambda) \int_x^\pi \psi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi}{w(\lambda)} \right. \\
& \left. - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right\}
\end{aligned}$$

sağlanır. Bu ifade, (3.1.60) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
Tf &= \left\{ \frac{\tilde{\psi}'(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) - \tilde{\varphi}'(x, \lambda) \psi(x, \lambda)}{w(\lambda)} \right. \\
& \left. - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n'(x) \varphi(x, \lambda) - \tilde{z}_n'(x) \lambda \psi_n(x)}{w'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)} \right\} f(x) \\
& - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \psi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)}
\end{aligned} \tag{3.1.63}$$

olur. φ ve ψ fonksiyonların asimptotik formülleri kullanılırsa $\lambda \rightarrow \infty$ için parantez içerisindeki ifade özdeş olarak sıfır olur. İkinci toplam altındaki ifadeyi sadeleştirmek için

$$\begin{aligned}
\psi_n &= k_n \varphi_n \\
\int_0^\pi \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi &= 0 \quad n \in \Lambda_0
\end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned}
Tf &= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi + k_n \tilde{z}_n(x) \int_x^\pi \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi}{w'(\lambda_n)} \\
&= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi - k_n \tilde{z}_n(x) \left(\int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi - \int_0^\pi \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi \right)}{w'(\lambda_n)} \\
Tf &= f - \sum_{\Lambda_0} \frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{w'(\lambda_n)} \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.1.64}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\tilde{u}_n(x) - k_n \tilde{z}_n(x)}{w'(\lambda_n)} = \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n(x)$$

alırsa

$$Tf = f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.1.65)$$

sonucu elde edilir. (3.1.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (\lambda - \tilde{L})T &= T(\lambda - L) \\ \tilde{L}T &= TL \end{aligned}$$

olup bu eşitlik her f için sağlandığından

$$\tilde{L}Tf = TLf$$

bulunur. Buna göre $\tilde{q}(x) = \frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{L}Tf &= (-Tf)'' + \tilde{q}(x)Tf \\ &= - \left[f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi \right]'' \\ &\quad + \tilde{q}(x) \left[f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x, \lambda) \int_0^x \varphi_n(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \\ &\Rightarrow - \left[f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi \right]'' \\ &= -f'' + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n''(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n'(x) \varphi_n(x) f(x) \end{aligned} \quad (3.1.66)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}'_n(x) \varphi_n(x) f(x) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \varphi'_n(x) f(x) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \varphi_n(x) f'(x)
\end{aligned}$$

eşitliği ve denklemi gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}
& -f'' + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{q}(x) \tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}'_n(x) \varphi_n(x) f(x) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}'_n(x) \varphi_n(x) f(x) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \varphi'_n(x) f(x) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \varphi_n(x) f'(x) + \tilde{q}(x) f \\
& - \frac{1}{2} \tilde{q}(x) \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.1.67}$$

olur. Şimdi $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ potansiyeli için

$$\begin{aligned}
TLf &= T \{-f'' + q(x) f\} \\
&= -f'' + q(x) f - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \int_0^x \varphi_n(\xi) (-f'' + qf) d\xi
\end{aligned} \tag{3.1.68}$$

(3.1.68) eşitliğinde integral ifadesine iki kez kısmi integrasyon uygulanır ve gerekli sadeleş-tirmeler yaptıktan sonra kalan terim

$$-f'' + q(x) f + \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \varphi_n(x) f'(x) - \frac{1}{2} \sum_{\Lambda_0} \tilde{\psi}_n(x) \varphi'_n(x) f(x) \tag{3.1.69}$$

olur. (3.1.67) ile (3.1.69)' ifadeleri birbirine eşitlenir ve gerekli sadeleş-tirmeler yapılırsa

$$(q(x) - \tilde{q}(x)) f = \sum_{\Lambda_0} \left(\tilde{\psi}'_n(x) \varphi_n(x) + \tilde{\psi}_n(x) \varphi'_n(x) \right) f(x)$$

bulunur. Bu eşitlik her $f \in H$ için sağlandığından

$$q - \tilde{q} = \sum_{\Lambda_0} \left(\tilde{\psi}_n \varphi_n \right)' \quad (3.1.70)$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. Diğer yandan eğer Λ_0 cümlesi boş ise yani spektrumların tamamı çakışık ise hemen hemen her yerde $q = \tilde{q}$ olur.

Sonuç 3.1.1. Verilen bir problemde iki özdeğerle bir başka problemin özdeğerlerinin tamamı çakışırsa potansiyeller farkı sıfıra eşittir. Eğer sonlu sayıdakiler farklı fakat kalanın tamamı çakışıyorsa potansiyeller farkı (3.1.69) kadar olur. Dolayısıyla farklı bir yöntemle teklik teoremi ispat edilmiş olur.

4. TERS PROBLEMİN TEMEL İNTEGRAL DENKLEMİNİN GENEL DEJENERELİĞİ

4.1. Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Ters Sturm Liouville Problemi

$\delta = \text{sabit}$, $1 < p < 2$, $q_0(x) \in L_2[0, \pi]$, için $q(x) = \frac{\delta}{x^p} + q_0(x)$ olacak şekilde

$$\int_0^{\pi} x |q(x)| dx < \infty$$

koşulu sağlanmak üzere

$$-y'' + \left[\frac{\delta}{x^p} + q_0(x) \right] y = \mu y \quad (\mu = \lambda^2, 0 \leq x \leq \pi) \quad (4.1.1)$$

denklemini ve

$$y(0, \lambda) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$y'(\pi, \lambda) - hy(\pi, \lambda) = 0 \quad (4.1.3)$$

sınır koşullarını göz önüne alalım. (4.1.1)- (4.1.3) probleminin spektrumu $\{\lambda_n\}_0^\infty$ olsun.

Aynı zamanda $\tilde{q}_0(x) \in L_2[0, \pi]$ olacak şekilde ikinci bir

$$-y'' + \left[\frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x) \right] y = \mu y \quad (\mu = \lambda^2, 0 \leq x \leq \pi) \quad (4.1.4)$$

$$\int_0^{\pi} x |\tilde{q}(x)| dx < \infty$$

$$y(0, \lambda) = 0 \quad (4.1.5)$$

$$y'(\pi, \lambda) - \tilde{h}y(\pi, \lambda) = 0 \quad (4.1.6)$$

problemi de ele alalım. (4.1.4)-(4.1.6) şeklinde tanımlı problemin spektrumu ise $\{\tilde{\lambda}_n\}_0^\infty$ olsun. $\varphi(x, \lambda)$, (4.1.1) denkleminin $\varphi(0, \lambda) = 0$, $\varphi'(0, \lambda) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ ise (4.1.4) denkleminin $\tilde{\varphi}(0, \lambda) = 0$, $\tilde{\varphi}'(0, \lambda) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Ayrıca (4.1.1)- (4.1.3) problemiyle (4.1.4)-(4.1.6) problemi arasındaki dönüşüm operatörü

$$X[\varphi(x, \lambda)] = \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, \xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi \quad (4.1.7)$$

şeklindedir.

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{q}(x) \quad (4.1.8)$$

$$B = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta}{x^p} + q_0(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (4.1.9)$$

olsun. (4.1.7)'nin x 'e göre diferensiyeli alınır

$$(X\tilde{\varphi})' = \tilde{\varphi}'(x, \lambda) = \varphi'(x, \lambda) + K(x, x)\varphi(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \varphi(\xi, \lambda) d\xi \quad (4.1.10)$$

$$\begin{aligned} (X\tilde{\varphi})'' &= \tilde{\varphi}''(x, \lambda) = \varphi''(x, \lambda) + K'(x, x)\varphi(x, \lambda) + K(x, x)\varphi'(x, \lambda) \\ &+ \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{\xi=x} \varphi(\xi, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} \varphi(\xi, \lambda) d\xi \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

bulunur.

$$A(X\varphi) = A\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \tilde{\varphi}''(x, \lambda) - \tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x, \lambda) \quad (4.1.12)$$

olduğu için (4.1.11) eşitliği (4.1.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} AX(\varphi) &= \varphi''(x, \lambda) + K'(x, x)\varphi(x, \lambda) + K(x, x)\varphi'(x, \lambda) + \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{\xi=x} \varphi(x, \lambda) \\ &+ \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} \varphi(\xi, \lambda) d\xi - \tilde{q}(x)\varphi(x, \lambda) \\ &- \tilde{q}(x) \int_0^x K(x, \xi)\varphi(\xi, \lambda) d\xi \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

olur. Şimdi $X(B\varphi)$ 'yi hesaplayalım.

$$B\varphi = -\varphi'' + q(x)\varphi$$

olduğundan

$$\begin{aligned} X(B\varphi) &= XB(\varphi) = -\varphi''(x, \lambda) + q(x)\varphi(x, \lambda) \\ &- \int_0^x K(x, \xi) [\varphi''(\xi, \lambda) - q(\xi)\varphi(\xi, \lambda)] d\xi \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

ifadesinde $\int_0^x K(x, \xi)\varphi''(\xi, \lambda) d\xi$ integraline iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^x K(x, \xi) \varphi''(\xi, \lambda) d\xi &= K(x, \xi) \varphi'(\xi, \lambda) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \varphi'(\xi, \lambda) d\xi \\
&= K(x, \xi) \varphi'(\xi, \lambda) \Big|_0^x \\
&\quad - \left[\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi, \lambda) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial \xi^2} \varphi(\xi, \lambda) d\xi \right] \\
&= K(x, x) \varphi'(x, \lambda) - K(x, 0) \varphi'(0, \lambda) \\
&\quad - \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} \varphi(x, \lambda) + \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \varphi(0, \lambda) \\
&\quad + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial \xi^2} \varphi(\xi, \lambda) d\xi \tag{4.1.15}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.1.15)'ü (4.1.14)'de yerine yazar ve dönüşüm operatörünün $A(X\varphi) = X(B\varphi)$ özelliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
&\varphi''(x, \lambda) - K'(x, x) \varphi(x, \lambda) + K(x, x) \varphi'(x, \lambda) + \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{\xi=x} \varphi(x, \lambda) \\
&+ \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} \varphi(\xi, \lambda) d\xi - \tilde{q}(x) \varphi(x, \lambda) - \tilde{q}(x) \int_0^x \tilde{q}(x) K(x, \xi) \varphi(x, \lambda) d\xi \\
&= \varphi''(x, \lambda) - q(x) \varphi(x, \lambda) + K(x, x) \varphi'(x, \lambda) - \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} \varphi(x, \lambda) - K(x, 0) \varphi'(0, \lambda) \\
&+ \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial \xi^2} \varphi(\xi, \lambda) d\xi - \int_0^x q(\xi) K(x, \xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntıdan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} - \tilde{q}(x) K(x, \xi) &= \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial \xi^2} - q(\xi) K(x, \xi) \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial x^2} - \left(\frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x) \right) K(x, \xi) &= \frac{\partial^2 K(x, \xi)}{\partial \xi^2} \\
&\quad - \left(\frac{\delta}{\xi^p} + q_0(\xi) \right) K(x, \xi) \tag{4.1.16}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left[K'(x, x) + \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{\xi=x} - \tilde{q}(x) \right] \varphi(x, \lambda) \\
&= \left[-\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} - q(x) \right] \varphi(x, \lambda) \\
&\Rightarrow K'(x, x) + \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} \Big|_{\xi=x} + \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=x} \\
&= \tilde{q}(x) - q(x)
\end{aligned}$$

olur. İki değişkenli fonksiyonlar için tam diferensiyel tanımını kullanılır ve 0'dan x 'e integral alınırsa

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (\tilde{q}(\xi) - q(\xi)) d\xi \quad (4.1.17)$$

yani

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (\tilde{q}_0(\xi) - q_0(\xi)) d\xi$$

bulunur. $\varphi'(0, \lambda) \neq 0$ olduğundan

$$K(x, 0) = 0 \quad (4.1.18)$$

elde edilir. Dolayısıyla $K(x, \xi)$ fonksiyonu (4.1.16) denkleminin (4.1.17) ve (4.1.18) şartlarını sağlayan çözümünü olur. (4.1.7)-(4.1.18) probleminin çözümünün varlığı Riemann yöntemi kullanılarak gösterilebilir [64].

$$c_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx \quad \tilde{c}_n = \int_0^\pi \tilde{\varphi}^2(x, \lambda_n) dx \quad (4.1.19)$$

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{c_n} \quad \tilde{\rho}(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\tilde{c}_n} \quad (4.1.20)$$

olsun. Burada c_n , $\tilde{c}_n$ sabitleri ve $\rho(\lambda)$, $\tilde{\rho}(\lambda)$ fonksiyonları (4.1.1)- (4.1.3) ve (4.1.4)- (4.1.6) problemlerinin sırasıyla normlaştırmacı sayıları ve spektral fonksiyonlarıdır.

Şimdi (4.1.1)- (4.1.3) probleminin $\{\lambda_n\}_0^\infty$ spektrumundan başka

$$\begin{aligned}
-y'' + \left[\frac{\delta}{x^p} + q_0(x) \right] y &= \mu y \quad (\mu = \lambda^2, 0 < x \leq \pi) \\
\int_0^\pi x |q(x)| dx &< \infty
\end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$y(0, \lambda) = 0 \quad (4.1.22)$$

$$y'(\pi, \lambda) - h_1 y(\pi, \lambda) = 0 \quad (h \neq h_1) \quad (4.1.23)$$

şeklinde tanımlı problemin spektrumu $\{\mu_n\}_0^\infty$ olsun.

$$-y'' + \left[\frac{\delta}{x^p} + \tilde{q}_0(x) \right] y = \mu y \quad (\mu = \lambda^2, 0 \leq x \leq \pi) \quad (4.1.24)$$

$$\int_0^\pi x |\tilde{q}(x)| dx < \infty$$

$$y(0, \lambda) = 0 \quad (4.1.25)$$

$$y'(\pi, \lambda) - \tilde{h}_1 y(\pi, \lambda) = 0 \quad (\tilde{h} \neq \tilde{h}_1) \quad (4.1.26)$$

problemin spektrumunda $\{\tilde{\mu}_n\}_0^\infty$ olsun.

Teorem 4.1.1. (4.1.1)- (4.1.3) ve (4.1.4)- (4.1.6) problemlerinin spektrumlarının tamamı çakışsın. (4.1.21)- (4.1.23) ve (4.1.24)- (4.1.26) problemlerinin spektrumları ise sadece sonlu sayısı için farklı olsun. Yani $\forall n$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $n = 1, 2, \dots, N$ için $\mu_n \neq \tilde{\mu}_n$, $n > N$ için ise $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ olsun. Bu takdirde (4.1.7) denkleminin $K(x, \xi)$ çekirdeği genel dejeneredir. Dolayısıyla $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ (4.1.1) denkleminin $\tilde{\varphi}(\xi, \lambda_n) = \tilde{\varphi}_n(\xi)$ ise (4.1.4) denkleminin, çözümleri olmak üzere, $\xi \leq x$ için

$$K(x, \xi) = \sum_{n=0}^N k_n \varphi_n(x) \tilde{\varphi}_n(\xi) \quad (4.1.27)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

(4.1.7)'nin x 'e göre diferensiyeli alınırsa

$$\tilde{\varphi}'(x, \lambda) = \varphi'(x, \lambda) + K(x, x) \varphi(x, \lambda) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} \varphi(\xi, \lambda) d\xi \quad (4.1.28)$$

olur. (4.1.7) eşitliği $\tilde{h}$ ile çarpılırsa

$$\tilde{h} \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \tilde{h} \varphi(x, \lambda) + \tilde{h} \int_0^x K(x, \xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi \quad (4.1.29)$$

elde edilir. (4.1.28)'den (4.1.29) taraf tarafa çıkartılır, $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ alınırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}'(\pi, \lambda_n) - \tilde{h}\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) &= \varphi'(\pi, \lambda_n) - \tilde{h}\varphi(\pi, \lambda_n) + K(\pi, \pi)\varphi(\pi, \lambda_n) \\ &+ \int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \lambda_n) d\xi\end{aligned}\quad (4.1.30)$$

bulunur. (4.1.6) sınır şartını ve $\forall n$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ olduğu kullanılırsa (4.1.29) eşitliği

$$\begin{aligned}\tilde{h}\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) - \tilde{h}\tilde{\varphi}(\pi, \lambda_n) &= h\varphi(\pi, \lambda_n) - \tilde{h}\varphi(\pi, \lambda_n) + K(\pi, \pi)\varphi(\pi, \lambda_n) \\ &+ \int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \lambda_n) d\xi\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}0 &= (h - \tilde{h})\varphi(\pi, \lambda_n) + K(\pi, \pi)\varphi(\pi, \lambda_n) \\ &+ \int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \lambda_n) d\xi\end{aligned}\quad (4.1.31)$$

bulunur. (2.3.15)'de $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ alınırsa $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lambda_n \varphi(\pi, \lambda_n) \rightarrow (-1)^n$$

olur ki (4.1.31)'den

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \lambda_n) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1.32)$$

ve

$$K(\pi, \pi) = h - \tilde{h} \quad (4.1.33)$$

elde edilir. Burada özfonksiyonlar tam sistem oluştururlar. O halde (4.1.32)'de bulunan integral içerisindeki ifade sıfıra eşit olur. Yani

$$\left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}K \right]_{|x=\pi} = 0 \quad 0 \leq \xi \leq \pi \quad (4.1.34)$$

dir. Şimdi ise ikinci spektrumlar için verilen koşulları kullanalım. Bunun için (4.1.7)'yi $\tilde{h}_1$ ile çarpıp (4.1.29) ifadesinden çıkartırsak

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}'(x, \lambda) - \tilde{h}_1\tilde{\varphi}(x, \lambda) &= \varphi'(x, \lambda) - \tilde{h}_1\varphi(x, \lambda) + K(x, x)\varphi(x, \lambda) \\ &+ \int_0^x \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}_1K \right] \varphi(\xi, \lambda) d\xi\end{aligned}\quad (4.1.35)$$

bulunur. $x = \pi$, $\lambda = \mu_n$ alınırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n) &= \varphi'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \varphi(\pi, \mu_n) + K(\pi, \pi) \varphi(\pi, \mu_n) \\ &+ \int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}_1 K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \mu_n) d\xi \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

olur. Ayrıca sınır şartları gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(h_1 - \tilde{h}_1 \right) \varphi(\pi, \mu_n) + K(\pi, \pi) \varphi(\pi, \mu_n) \\ & + \int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}_1 K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \mu_n) d\xi \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi(\pi, \mu_n) \rightarrow (-1)^n$ olduğundan

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}_1 K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \mu_n) d\xi = 0 \quad n > N \quad (4.1.38)$$

$$K(\pi, \pi) = h_1 - \tilde{h}_1 \quad (4.1.39)$$

yazılabilir. (4.1.33)-(4.1.39)'den

$$h_1 - \tilde{h}_1 = h - \tilde{h} \quad (4.1.40)$$

bulunur. $n = 1, 2, 3, \dots, N$ değerleri için $x = \pi$, $\lambda = \mu_n$ için

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}_1 K \right]_{|x=\pi} \varphi(\xi, \mu_n) d\xi = \tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n) \quad (4.1.41)$$

bu ifade tam sistem oluşturduğundan integral içerisindeki ifadeyi seriye açılım şeklinde yazılabilir.

$$\left[\frac{\partial K}{\partial x} - \tilde{h}_1 K \right]_{|x=\pi} = \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \varphi(\xi, \mu_n) \quad (4.1.42)$$

(4.1.34)'den

$$\frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = \tilde{h} K$$

şeklinde alınır. Böylece (4.1.42)'in sol tarafı

$$\left(\tilde{h} K - \tilde{h}_1 K \right)_{|x=\pi} = K(\pi, \xi) \left(\tilde{h} - \tilde{h}_1 \right)$$

olur. Bu nedenle

$$K(\pi, \xi) = \frac{1}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \varphi(\xi, \mu_n) \quad (4.1.43)$$

(4.1.43) ifadesi (4.1.34)'de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\tilde{h}}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \varphi(\xi, \mu_n) \quad (4.1.44)$$

eşitliği elde edilir.

$K(x, \xi)$ fonksiyonu (4.1.16) denklemini sağlayacak biçimde, şekil 4.1.1'de gösterilen bölgede

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \left(\tilde{c}(x, \mu_n) - \tilde{h} \tilde{s}(x, \mu_n) \right) \varphi(\xi, \mu_n) \quad (4.1.44')$$

olur [6]. (Burada $\tilde{c}(x, \mu_n)$ ve $\tilde{s}(x, \mu_n)$ sırasıyla (4.1.1)-(4.1.3) ve (4.1.4)-(4.1.6) problemlerinin $\tilde{c}(\pi, \lambda) = s'(\pi, \lambda) = 1$, $\tilde{c}'(\pi, \lambda) = s(\pi, \lambda) = 0$ koşullarını sağlayan çözümleridir.

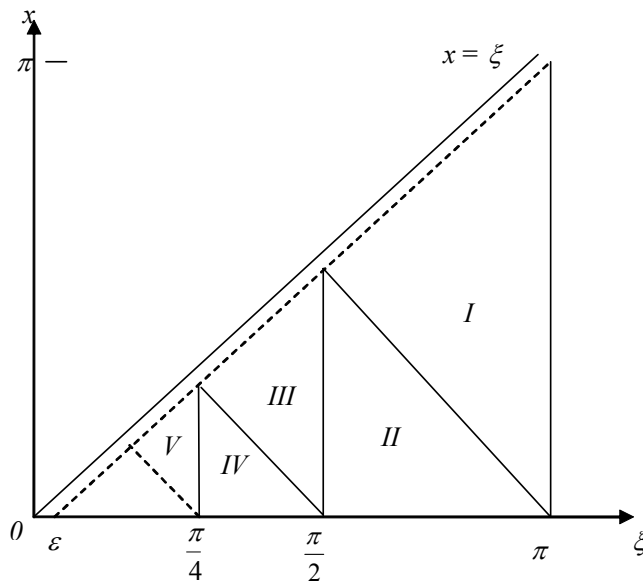
Böylece

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{1}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \\ \tilde{\varphi}_n(x) &= \tilde{c}(x, \mu_n) - \tilde{h} s(x, \mu_n) \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$K(x, \xi) = \sum_{n=0}^N k_n \varphi_n(x) \tilde{\varphi}_n(\xi) \quad (4.1.45)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Şimdi bu sonuçtan faydalananarak farklı yöntemle Hochstadt teoremini [34] kolayca ispatlayabiliriz.



Şekil 4.1.1

Teorem 4.1.2. $\psi_n(x)$ ve $\varphi_n(x)$ sırasıyla (4.1.1) ve (4.1.4) denklemlerinin çözümleri olsun. Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için λ_n ve $\tilde{\lambda}_n$ spektrumlarının tamamı çakışsın. μ_n ve $\tilde{\mu}_n$ spektrumlarının ise sonlu n 'ler için farklı olacak şekilde yani $n > N$ için $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ ve $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\mu_n \neq \tilde{\mu}_n$ olduğundan

$$\tilde{q}(x) - q(x) = \sum_{n=0}^N k_n [\varphi_n(x) \psi_n(x)]' \quad (4.1.46)$$

dir.

İspat. (4.1.17)'den

$$\tilde{q}(x) - q(x) = 2 \frac{dK}{dx} \quad (4.1.47)$$

şimdi (4.1.44') eşitliğinde $\xi = x$ alınıp diferensiyellenirse

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \left(\tilde{c}(x, \mu_n) - \tilde{h}s(x, \mu_n) \right) \varphi(x, \mu_n) \right\} \quad (4.1.48)$$

elde edilir. Son eşitlik (4.1.47)'de yerine yazılırsa

$$\tilde{q}(x) - q(x) = \frac{2}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \left(\tilde{c}(x, \mu_n) - \tilde{h}s(x, \mu_n) \right) \varphi(x, \mu_n) \right\}$$

bulunur. Burada $\tilde{c}(x, \mu_n) - \tilde{h}s(x, \mu_n) = \psi_n(x)$, toplam ifadeside k_n sabitine karşılık gelmek üzere

$$\tilde{q}(x) - q(x) = \sum_{n=0}^N k_n [\varphi_n(x) \psi_n(x)]'$$

elde edilir ki, böylece Hochstadt'ın sonucu ilginç bir şekilde kısa ve farklı bir yöntemle elde edilmiş olur.

4.2. Gelfand-Levitan-Marchenko Denkleminin Dejenereliği

Teorem 4.2.1. Her $n = 0, 1, 2, \dots$ için λ_n ve $\tilde{\lambda}_n$ spektrumlarının tamamı çakışsın. μ_n ve $\tilde{\mu}_n$ spektrumlarının ise sonlu n 'ler için farklı olacak şekilde yani $n > N$ için $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ ve $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\mu_n \neq \tilde{\mu}_n$

$$\begin{aligned} F(x, \xi) &= \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) \varphi(\xi, \lambda) d\{\tilde{\rho}(\lambda) - \rho(\lambda)\} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{1}{\tilde{c}_n} \varphi(x, \tilde{\lambda}_n) \varphi(\xi, \tilde{\lambda}_n) - \frac{1}{c_n} \varphi(x, \lambda_n) \varphi(\xi, \lambda_n) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

olmak üzere

$$F(x, \xi) + K(x, \xi) + \int_0^x K(x, t) F(t, \xi) dt = 0 \quad (4.2.2)$$

ters problemin esas integral (Gelfand-Levitan-Marcehenko) denklemi genel dejeneredir.

İspat. (4.2.2) integral denkleminde $x = \pi$ alırsak

$$F(\pi, \xi) = -K(\pi, \xi) - \int_0^\pi K(\pi, t) F(t, \xi) dt \quad (4.2.3)$$

olur. (4.2.3) denkleminde $K(\pi, \xi)$ yerine (4.1.43) eşitliğini F yerine (4.2.1) açılımını λ_n ve $\tilde{\lambda}_n$ yerine sırasıyla μ_n ve $\tilde{\mu}_n$ alalım. Bu takdirde

$$a_n = \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{(\tilde{h} - \tilde{h}_1) c_n}, \quad c_n = \|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2 \quad (4.2.4)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F(\pi, \xi) = & - \left\{ \frac{1}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \varphi(\xi, \mu_n) + \frac{1}{\tilde{h} - \tilde{h}_1} \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(t, \mu_n)\|^2} \varphi(t, \mu_n) \right. \\ & \cdot \left[\sum_{n=0}^\infty \left\{ \frac{1}{c_n} \varphi(t, \tilde{\mu}_n) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) - \frac{1}{c_n} \varphi(t, \mu_n) \varphi(\xi, \mu_n) \right\} \right] dt \Big\} = \\ & - \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) + \int_0^\pi \sum_{n=0}^N a_n \varphi(t, \mu_n) \cdot \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{c_n} \varphi(t, \tilde{\mu}_n) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) dt \right. \\ & \left. - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N a_n \varphi(t, \mu_n) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{c_n} \varphi(t, \mu_n) \varphi(\xi, \mu_n) dt \right\} \quad (4.2.5) \end{aligned}$$

elde edilir. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonalliğinden

$$\begin{aligned} = & - \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) + \int_0^\pi [a_1 \varphi(t, \mu_1) + a_2 \varphi(t, \mu_2) + \dots + a_N \varphi(t, \mu_N)] \right. \\ & \cdot \left[\frac{1}{c_1} \varphi(t, \tilde{\mu}_1) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_1) + \frac{1}{c_2} \varphi(t, \tilde{\mu}_2) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_2) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{c_N} \varphi(t, \tilde{\mu}_N) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_N) + \frac{1}{c_{N+1}} \varphi(t, \tilde{\mu}_{N+1}) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_{N+1}) + \dots \right] dt \\ & - \int_0^\pi [a_1 \varphi(t, \mu_1) + a_2 \varphi(t, \mu_2) + \dots + a_N \varphi(t, \mu_N)] \\ & \cdot \left[\frac{1}{c_1} \varphi(t, \mu_1) \varphi(\xi, \mu_1) + \frac{1}{c_2} \varphi(t, \mu_2) \varphi(\xi, \mu_2) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{c_N} \varphi(t, \mu_N) \varphi(\xi, \mu_N) + \frac{1}{c_{N+1}} \varphi(t, \mu_{N+1}) \varphi(\xi, \mu_{N+1}) + \dots \right] dt \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) - \int_0^\pi \left\{ a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{\tilde{c}_1} \varphi(t, \tilde{\mu}_1) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_1) \right. \\
&\quad + a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{\tilde{c}_2} \varphi(t, \tilde{\mu}_2) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_2) + \dots \\
&\quad + a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{\tilde{c}_N} \varphi(t, \tilde{\mu}_N) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_N) + a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{\tilde{c}_{N+1}} \varphi(t, \tilde{\mu}_{N+1}) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_{N+1}) \\
&\quad + \dots + a_2 \varphi(t, \mu_2) \frac{1}{\tilde{c}_1} \varphi(t, \tilde{\mu}_1) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_1) + a_2 \varphi(t, \mu_2) \frac{1}{\tilde{c}_2} \varphi(t, \tilde{\mu}_2) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_2) + \dots \\
&\quad + a_2 \varphi(t, \mu_2) \frac{1}{\tilde{c}_N} \varphi(t, \tilde{\mu}_N) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_N) + a_2 \varphi(t, \mu_2) \frac{1}{\tilde{c}_{N+1}} \varphi(t, \tilde{\mu}_{N+1}) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_{N+1}) + \dots \\
&\quad + \dots + a_N \varphi(t, \mu_N) \frac{1}{\tilde{c}_1} \varphi(t, \tilde{\mu}_1) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_1) + a_N \varphi(t, \mu_N) \frac{1}{\tilde{c}_2} \varphi(t, \tilde{\mu}_2) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_2) + \dots \\
&\quad + a_N \varphi(t, \mu_N) \frac{1}{\tilde{c}_N} \varphi(t, \tilde{\mu}_N) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_N) + a_N \varphi(t, \mu_N) \frac{1}{\tilde{c}} \varphi(t, \tilde{\mu}_{N+1}) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_{N+1}) + \dots \Big\} dt \\
&\quad + \int_0^\pi \left\{ a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{c_1} \varphi(t, \mu_1) \varphi(\xi, \mu_1) + a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{c_2} \varphi(t, \mu_2) \varphi(\xi, \mu_2) + \dots \right. \\
&\quad + a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{c_N} \varphi(t, \mu_N) \varphi(\xi, \mu_N) + a_1 \varphi(t, \mu_1) \frac{1}{c_{N+1}} \varphi(t, \mu_{N+1}) \varphi(\xi, \mu_{N+1}) + \dots \\
&\quad + a_2 \varphi(t, \mu_2) \frac{1}{c_1} \varphi(t, \mu_1) \varphi(\xi, \mu_1) + a_2 \varphi(t, \mu_2) \frac{1}{c_2} \varphi(t, \mu_2) \varphi(\xi, \mu_2) + \dots \\
&\quad + a_2 \varphi(t, \mu_2) \frac{1}{c_{N+1}} \varphi(t, \mu_{N+1}) \varphi(\xi, \mu_{N+1}) + \dots + a_N \varphi(t, \mu_N) \frac{1}{c_N} \varphi(t, \mu_N) \varphi(\xi, \mu_N) \\
&\quad \left. + a_N \varphi(t, \mu_N) \frac{1}{c_{N+1}} \varphi(t, \mu_{N+1}) \varphi(\xi, \mu_{N+1}) + \dots \right\} dt
\end{aligned}$$

ortoganellik özelliği gereği farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların integrali sıfıra gider. Kalan ifadeleri yazalım.

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) - \int_0^\pi \left\{ a_1 \frac{1}{\tilde{c}_1} \varphi(t, \mu_1) \varphi(t, \tilde{\mu}_1) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_1) \right. \\
&\quad + a_2 \frac{1}{\tilde{c}_2} \varphi(t, \mu_2) \varphi(t, \tilde{\mu}_2) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_2) + \dots \\
&\quad + a_N \frac{1}{\tilde{c}_N} \varphi(t, \tilde{\mu}_N) \varphi(t, \tilde{\mu}_N) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_N) + \int_0^\pi \left\{ a_1 \frac{1}{c_1} \varphi(t, \mu_1) \varphi(t, \mu_1) \varphi(\xi, \mu_1) \right. \\
&\quad \left. + a_2 \frac{1}{c_2} \varphi(t, \mu_2) \varphi(t, \mu_2) \varphi(\xi, \mu_2) + \dots + a_N \frac{1}{c_N} \varphi(t, \mu_N) \varphi(t, \mu_N) \varphi(\xi, \mu_N) \right\} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N a_n \varphi(t, \mu_n) \sum_{k=0}^N \frac{1}{\tilde{c}_k} \varphi(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt \\
&\quad + \int_0^\pi \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \varphi(t, \mu_n) \varphi(t, \mu_n) \right\} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N a_n \varphi(t, \mu_n) \sum_{k=0}^N \frac{1}{\tilde{c}_k} \varphi(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt \\
&\quad + \sum_{n=0}^N a_n \frac{1}{c_n} \varphi(\xi, \mu_n) \int_0^\pi |\varphi(t, \mu_n)|^2 dt
\end{aligned}$$

$\int_0^\pi |\varphi(t, \mu_n)|^2 dt = \|\varphi(t, \mu_n)\|^2 = c_n$ olduğunu gözönüne alırsak

$$= - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N a_n \varphi(t, \mu_n) \sum_{k=0}^N \frac{1}{\tilde{c}_k} \varphi(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt \quad (4.2.6)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2. (4.1.1) denkleminin çözümleri $\varphi(t, \mu_n)$ ve $\varphi(t, \tilde{\mu}_n)$ olmak üzere $k \leq N$ için $\mu_n \neq \tilde{\mu}_n$ olmak üzere

$$\int_0^\pi \varphi(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt = \frac{\varphi(\pi, \mu_n) \varphi'(\pi, \tilde{\mu}_k) - \varphi'(\pi, \mu_n) \varphi(\pi, \tilde{\mu}_k)}{\mu_n - \tilde{\mu}_k} \quad (4.2.7)$$

İspat. Farklı μ_n ve $\tilde{\mu}_k$ 'lara karşılık gelen $\varphi(t, \mu_n)$ ve $\varphi(t, \tilde{\mu}_k)$, (4.1.1) denkleminin çözümleri olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left[-\varphi''(t, \mu_n) + \left(\frac{\delta}{x^p} + q_0(x) \right) \varphi(t, \mu_n) = \mu_n \varphi(t, \mu_n) \right] \\
&\left[-\varphi''(t, \tilde{\mu}_k) + \left(\frac{\delta}{x^p} + q_0(x) \right) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) = \tilde{\mu}_k \varphi(t, \tilde{\mu}_k) \right]
\end{aligned}$$

olur. Birinci denklemi $\varphi(t, \tilde{\mu}_k)$ ile ikinci denklemi ise $\varphi(t, \mu_n)$ ile çarparak taraf tarafa çıkarılırsa

$$(\mu_n - \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) = [\varphi''(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \mu_n) - \varphi''(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k)]$$

elde edilir.

$$[\varphi''(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \mu_n) - \varphi''(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k)] = [\varphi'(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \mu_n) - \varphi'(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k)]'$$

Son eşitliğin her iki yanını 0'dan π 'ye integrallenirse

$$\begin{aligned}
(\mu_n - \tilde{\mu}_k) \int_0^\pi \varphi(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt &= [\varphi'(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(t, \mu_n) - \varphi'(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k)] \Big|_0^\pi \\
\int_0^\pi \varphi(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt &= \frac{\varphi'(\pi, \tilde{\mu}_k) \varphi(\pi, \mu_n) - \varphi'(\pi, \mu_n) \varphi(\pi, \tilde{\mu}_k)}{\mu_n - \tilde{\mu}_k}
\end{aligned}$$

bulunur. $F(\pi, \xi)$ için

$$\alpha_n = \frac{1}{\tilde{c}_n} \left\{ -\varphi(\pi, \mu_n) \sum_{k=0}^N a_k \frac{\varphi'(\pi, \tilde{\mu}_k)}{\mu_n - \tilde{\mu}_k} + \varphi'(\pi, \mu_n) \sum_{k=0}^N a_k \frac{\varphi(\pi, \tilde{\mu}_k)}{\mu_n - \tilde{\mu}_k} \right\} \quad (4.2.8)$$

olacak şekilde

$$F(\pi, \xi) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{a_n}{\tilde{c}_k} \varphi(\xi, \tilde{\mu}_k) \left[- \int_0^\pi \varphi(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt \right]$$

(4.2.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{a_n}{\tilde{c}_k} \varphi(\xi, \tilde{\mu}_k) \left(- \frac{\varphi'(\pi, \tilde{\mu}_k) \varphi(\pi, \mu_n) - \varphi'(\pi, \mu_n) \varphi(\pi, \tilde{\mu}_k)}{\mu_n - \tilde{\mu}_k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left\{ - \frac{\varphi(\pi, \mu_n)}{\tilde{c}_n} \sum_{k=0}^N a_k \frac{\varphi'(\pi, \tilde{\mu}_k)}{\mu_n - \tilde{\mu}_k} + \frac{\varphi'(\pi, \mu_n)}{\tilde{c}_n} \sum_{k=0}^N a_k \frac{\varphi(\pi, \tilde{\mu}_k)}{\mu_n - \tilde{\mu}_k} \right\} \varphi(\xi, \tilde{\mu}_k) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (4.2.8) göz önüne alındığında

$$F(\pi, \xi) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) \quad (4.2.9)$$

olur. (4.2.2) denklemini x 'e göre diferensiyellenirse

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} + K(x, x) F(x, \xi) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} F(t, \xi) dt = 0$$

veya

$$\frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial K}{\partial x} - K(x, x) F(x, \xi) - \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x} F(t, \xi) dt$$

bulunur. Bu son eşitlikte $x = \pi$, $K(\pi, \pi)$ yerine (4.1.39) $\frac{\partial K}{\partial x}$ yerine (4.1.44) ve F yerine ise (4.2.1) ile verilen eşitlikler yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= - \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_1 - \tilde{h}} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \varphi(\xi, \mu_n) \\ &\quad - \left(h_1 - \tilde{h}_1 \right) \sum_{n=0}^N \alpha_n \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) \\ &\quad - \int_0^\pi \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}_1 - \tilde{h}} \sum_{n=0}^N \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) - \tilde{h}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\|\varphi(\xi, \mu_n)\|^2} \varphi(\xi, \mu_n) \\ &\quad \cdot \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1}{\tilde{c}_k} \varphi(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_k) - \frac{1}{c_k} \varphi(t, \mu_k) \varphi(\xi, \mu_k) \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= - \sum_{n=0}^N \tilde{h} a_n \varphi(\xi, \mu_n) - \left(h_1 - \tilde{h}_1 \right) \sum_{n=0}^N \alpha_n \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) \\
&\quad - \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \tilde{h} a_n \varphi(\xi, \mu_n) \left[\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{\tilde{c}_k} \varphi(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_k) - \frac{1}{c_k} \varphi(t, \mu_k) \varphi(\xi, \mu_k) \right) \right] dt \\
&= \sum_{n=0}^N \left(\left(h_1 - \tilde{h}_1 \right) \alpha_n - \tilde{h} a_n \right) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) \\
&\quad - \int_0^\pi \left\{ \tilde{h} \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) \frac{1}{\tilde{c}_k} \sum_{k=0}^\infty \varphi(t, \tilde{\mu}_k) \varphi(\xi, \tilde{\mu}_k) \right\} dt \\
&\quad + \int_0^\pi \left\{ \tilde{h} \sum_{n=0}^N a_n \varphi(\xi, \mu_n) \frac{1}{c_k} \sum_{k=0}^\infty \varphi(t, \mu_k) \varphi(\xi, \mu_k) \right\} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Özfonksiyonların ortogonallığı ve (4.2.5) eşitliği kullanılır, (4.2.4) için yapılan işlemlerin benzeri tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= \sum_{n=0}^N \left[\left(h_1 - \tilde{h}_1 \right) \alpha_n - \tilde{h} a_n \right] \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) \\
&\quad - \tilde{h} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{a_n}{\tilde{c}_k} \varphi(\xi, \tilde{\mu}_k) \cdot \int_0^\pi \varphi(t, \mu_n) \varphi(t, \tilde{\mu}_k) dt \\
\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} &= \sum_{n=0}^N \left[\left(h_1 - \tilde{h}_1 - \tilde{h} \right) \alpha_n - \tilde{h} a_n \right] \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\beta_n = \left(h_1 - \tilde{h}_1 - \tilde{h} \right) \alpha_n - \tilde{h} a_n$$

olmak üzere

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = \sum_{n=0}^N \beta_n \varphi(\xi, \tilde{\mu}_n) \quad (4.2.10)$$

(4.2.1) ile tanımlı $F(x, \xi)$ 'nin

$$\frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial x^2} - \tilde{q}(x) F(x, \xi) = \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial \xi^2} - q(\xi) F(x, \xi) \quad (4.2.11)$$

denklemini sağladığını göstermek mümkündür. şekil 4.1.1 deki üçgen de (4.2.9) (4.2.10) sağlanacak şekilde, $c(x, \lambda)$ ve $s(x, \lambda)$ $c(\pi, \lambda) = s'(\pi, \lambda) = 1$ $c'(\pi, \lambda) = s(\pi, \lambda) = 0$ koşullarını sağlayan (4.1.1) denkleminin çözümleri iken

$$F(x, \xi) = \sum_{n=0}^N [\alpha_n c(x, \tilde{\mu}_n) + \beta_n s(x, \tilde{\mu}_n)] \varphi(\xi, \mu_n) \quad (4.2.14)$$

olur. Ayrıca (4.2.1) açılımında $F(x, \xi)$ fonksiyonunun ve (3.2.7) açılımının

$$F(x, \xi)|_{\xi=0} = 0 \quad (4.2.15)$$

başlangıç koşulunu sağladığı açıktır. Dolayısıyla $F(x, \xi)$ genel dejeneredir. $\square$

KAYNAKLAR

1. W.A. Ambarzumjan, Über eine Erage der Eigenwerttheorie, Zeits. für Physik 53 (1920), 690-695
2. G. Borg, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78, No: 2 (1945), 1-96.
3. N. Levinson. The inverse Sturm-Liouville problem, Math. Tidsskr B., (1949), 25-30.
4. J. Delsarte, 1938 b. Sur Certaines Transformations Fonctionnelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre. C.R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182.
5. J. Delsarte, and J. Lions, 1957. Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe. Comm. Math. Helv., 32 (2), 113-128.
6. B.M. Levitan. On the determination of the Sturm-Liouville operator from one and two spectra. Izv. AN SSSR, Ser. Mathem. v.42, No:1 (1978) 185-199.
7. A.Y. Povzner, (1948) On differential equations of Sturm-Liouville type on the half axis math shornik 23 (1) 3-52.
8. A.N. Tichknof, 1949. Jeofizik Problemleri için Teklik Teoremleri. Dokl. Akad.Nauk, SSSR Vol.69, No:4, 797-800.
9. V.A. Marchenko, Some problems in the theory of one-dimensional linear differential operators of second order, 1. Trudy Mosk. Mat. Obshch. 1 (1952), 327-420.
10. G. Krein Solution of the inverse Sturm-Liouville problem. Dokl. Akad. Navk SSSR, 76 (1)
11. M.G. Krein On a method of efficient solution of an inverse boundary-value problem. Dokl. Akad. Navk SSSR 105 (3), (1954), 433-436. (Russian)
12. M. Gelfand and B.M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spaectral function. [Amer. Math. Soc. Trans. 1 (1951), 253-304] Izv. AN SSSR, Ser. Mathem. 15 (1951), 309-360.
13. B.M. Levitan and M.G. Gasymov. The determination of a differential equation from two spectra. Uspek Math. Nauk 19 (2), (1954), 3-63.
14. P.D. Lax (1968): Integrals of nonlinear equations of evolution and soliraty waves, Comm, Pure and Appl. Math 21, 467-490
15. L.D. Faddeev Inverse problems in quantum scattering theory. Uspekth Math. Nauk V.XIV, VİP. (88), (1959), 57-119.

16. K.Chadan, P.C.Sabatier 'Inverse Problems in quantum scattering theory. 1977, Springer-Verlag New York, Heidelberg Berlin.
17. K. Chadan, D.Colton, L.Paivarinta and W.Rundell, An Introduction to İnverse scattering and Inverse Spectral Problems. 1977, Siam Philadelphia.
18. E. Baş Tekillige Sahip Sturm-Liouville Diferensiyel Operatörü İçin Kuantum Teorisinin Ters Saçılma Problemi. Yüksek Lisans Tezi 2001 Elazığ.
19. M.G. Gasymov, the determination the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra. DAN SSSR, v.161, No:2 (1965), 274-276.
20. E.S. Panakhov. On the determination the differential operator peculiarity in zero. DEP VINITI AN SSSR, NO: 4407-80, (1980), 1-16.
21. E.S. Panakhov. H. Koyubakan Inverse Problem For Singüler Sturm-Liouville Operator. Proc.of IMM of NASA 2003 vol.18. pp113-126
22. H.Koyunbakan " Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektarl Teorisi". Doktora Tezi, 2002 Elazığ.
23. E.S.Panakhov, R.Yılmaz " On Inverse Problem for Singular Sturm-Liouville Operator from two Spectra, Ukrainian Mathemtical Journal, Vol. 58,2006 pp.147-154.
24. Ü.İç " Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters Problem". 2003 Elazığ.
25. G.Sh. Guseinov, Z.M. Gasimov, Singüler Sturm-Liouville probleminin normlaştırmacı sayılarının, özdeğerlerinin asimptotik davranışları ve özfonksiyonlara göre açılımı. Temel bilimlerin güncel problemleri, 1992, Sank Peterburg.
26. Z.M Gasimov İki spektruma göre singüler Sturm-Liouville denklemi için ters problemin çözümü Ph. Doktora tezi Bakü, 1992.
27. W.Rundell, P.E. Sacks, Reconstruction of a radially symmetric potential from two spectral sequences, J.Math.Anal. Appl. 264 (2001) 354-381.
28. F. Gesztesy, B.Simon, Inverse spectral analysis with partial information on the potential. II: The casa of discrete spectrum, Trans,Amer. Math. Soc. 352 (6) (2000) 2765-2787.
29. R.Carlson, Inverse spectral theory for some singular Sturm-Liouville problems, j. Differential Equations 106 (1993) 121-140.
30. R.Carlson C.Shubin, Spectral rigidity for radial Schrödinger operators, J.Differential Equations 113 (1994) 338-354.
31. R.Carlson, A Borg-Levinson theorem for Bessel operator Pasific J.Math. 177(1),

1997,pp.1-26.

32. J.Roltson, E. Trubowitz, Isospectral sets for value problems on the interval, Ergodic Theory Dynam (1988)

301-358.

33. E. Pöschel, Trubowitz, Inverse Spectral Theory, Acedemic Press, Orlando, 1987.

34. H. Hochstadt. The inverse Sturm-Liouville problem, Comm. Pure and Appl. Math., 26 (1973), 715-729.

35. E.,Kreyszing, 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, Newyork

36. M.A. Naimark. Linear differential operators. NAUKA, 1969

37. Şuhubi, E.S., 2001, Fonksiyonel Analiz, İ.T.Ü. İstanbul.

38. R. Ocak Kompleks Analiz, Atatürk Üni.1993 Erzurum.

39. B.M. Levitan and I.S. Sargsjan, 1975 Introduction to spectral Theory. Rhode Island.

40. B.J. Levin, 1964, Distribution of Zeros of Entire Functions, Amer. Math.Soc.

41. B.M. Levitan. On the determination of the Sturm-Liouville differential equation from two spectra. Izv. Akad. Navk SSSR, Ser. Mat. Nauk. 28 (1), 63-78.

42. M.G. Gasymov. Eigenfunction expansions associated with nonself-adjoint differential operator with singularity in zero. Trudi Let. Shk. Spectr. Theory Oper. Theory predstav. grupp. ELM, Baku, 1975, 20-45..

43. R.Yılmaz " Singtiller Katsayılı Hiperbolik Denklemler İçin Cauchy,Gaursat Problemleri ve Spektral Teoride Uygulamaları" 2003 Elazığ.

44. F.Gesztesy, B.Simon,A new approach to inverse spectral theory. II. General real Potentials and the connection to the spectral measure, Ann.of Math. 2 (152) (2000) 593-643.

45. L.Sakhnovich, Half inverse problems on the finite, Inverse problems 17 (2001) 527-532.

46. L.A. Liusternik, and V.J. Sobolev, 1961, Elements of Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York.

47. I.S.Gradshtein, and I.M Rizhik, Toplam Seriler ve çarpımlar için integral şemaları, Moskova, 1962.

48. Z.S. Agranovich and V.A. Marchenko. Inverse problem in scattering theory. Publish. Harkov University, 1960.

49. B.M. Levitan Inverse quantum scattering theory problem in fixed energy. Mekanik

and Mathematics-Physics problems. Publish. Nauka, 1976, 166-207.

50. V.F. Korop. The Inverse problem in scattering for the singular equation. Sibir. Mat. V.II, No:5 (1961), 672-693.

51. A.S. Sokhin. On the transformation operators. Truoli Fiz-Tekh. Ins. Low Tepme AN USSR, Math. Phys. Functional Anal. vip. I (1969).

52. V.V. Stashevskaya. On inverse problems of spectral analysis for a class of the differential equations. Dokl. AN SSSR. v.93 (1953), 409-411.

53. V.V. Stashevskaya. On inverse problem spectral analysis for the differential operator having singularity in zero. Zapiski. Mat. otdelenie fiz-math. fak. HDU, Harkov Mat. obsh. V.XXV, Ser. 4 (1957), 49-86.

54. V.Y. Volk. On the transformation operators for the differential equations with a singularity at $x = 0$. Usp. Math. Nauk v. 8 (56), (1953), 141-151.

55. M.M. Crum. Ossociated Sturm-Liouville systems, Quart. y. Math., Oxford (2), v.6, No.2 (1955), 121-123.

56. M.G. Krein. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary problem in the interval $(0, \infty)$. Izv. AN. SSSR Ser. Mat. 16 (1959), 283-324.

57. A. I. Markushevich, 1977, Introduction to Analytic Functions Theory, I., II., Moskow.

58. B.M. Levitan. The expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspehi. Mat. Nauk, v.6 No:2 (1951), 102-143.

59. G. Watson. Treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge Univ. Press. 1962.

60. E. Whittaker and G. Watson, A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press. 1962.

61. B.M. Levitan. Generalized Translation Operators and Some of its Applications. Jerusolim, 1964 (and FM Moskow 1962).

62. N.I. Akhiezer and I.M. Glazman. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Publish. Kharkov Univ. "VISHA SHKOLA", v.1, (1977), v.II, (1978).

63. V.A. Marchenko. Sturm-Liouville Operators and Their Applications. Nawkava Dumka, Kiev 1977.

64. R. Courant and D, Hilbert., The methods of the Mathematics Physics, V.II, Gostekhizdat, 1945.

65. E. Titchmarsh. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. v.I, II 1960.

66. M.M. Smirnov. The deenerated elliptic and hyperbolic equations. "NAUKA". Moskow 1966.
67. M.Kayalar "Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singular Sturm-Liouville Operatörü için Ters Problem". 2003 Erzurum.
68. C.S., Gardner, J.M., Greene, M.D Kruskal, and R.M., Miura (1974) Kortewegda Vries equation, Pyhs. Rew. Lett.19, 1095-1097.

ÖZGEÇMİŞ

1975' yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ' da tamamladıktan sonra 1995 yılında kazandığım F.Ü. Matematik bölümünü 1999' da bitirdim. Aynı yıl F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansa girdim. 2002'de yüksek lisansı bitirerek doktora başladım. Çeşitli Milli Eğitim Kurumlarında üç yıl matematik öğretmenisi olarak görev yaptıktan sonra F.Ü. Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım. Halen aynı görevi yürütmekteyim.

Erdal BAŞ