

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KEYFİ ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE p -LAPLACIAN TİPİNDE
PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Meltem KAYALI
(161121108)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Doç. Dr. Emrah YILMAZ

HAZİRAN-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KEYFİ ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE p -LAPLACIAN TİPİNDE
PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Meltem KAYALI

(161121108)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Mayıs 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Haziran 2018

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Emrah YILMAZ (Fırat Üniversitesi)

Üye: Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (Fırat Üniversitesi)

Üye: Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU (Ankara Üniversitesi)

HAZİRAN-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgisini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Emrah YILMAZ'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve benden yardımlarımı, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Dr. Tuba GÜLŞEN hocama da teşekkür ederim.

MELTEM KAYALI

ELAZIĞ-2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER	VI
1. GİRİŞ	1
2. Zaman Skalası ve Temel Özellikleri	4
3. p -Laplacian tipinde denklemler ve genelleştirilmiş trigonometrik fonksiyonların özellikleri	18
4. Zaman Skalası üzerinde p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer problemi ..	26
5. Zaman Skalası üzerinde p -Laplacian Difüzyon sınır değer problemi	35
6. Zaman Skalası üzerinde p -Laplacian Dirac sınır değer problemi	44
7. SONUÇ	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ.....	62

ÖZET

Klasik anlamda Sturm-Liouville denklemleri, difüzyon denklemleri ve Dirac sistemleri farklı sınır koşulları altında birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu tezde, Sturm-Liouville ve difüzyon denklemleri ile Dirac sisteminin p -Laplacian hali ele alınarak keyfi zaman skalası üzerinde tanımlanmış ve incelenmiştir. Bunun öncesinde zaman skalası ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, p -Laplacian tipinde denklemler ve genelleştirilmiş trigonometrik fonksiyonlar açıklanmıştır. Buna ilaveten spektral teoride önemli bir bağıntı olan Picone bağıntısı Sturm-Liouville, Difüzyon ve Dirac sınır değer problemleri için elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, p -Laplacian Sturm-Liouville denklemi, p -Laplacian Difüzyon denklemi, p -Laplacian Dirac Sistemi.

SUMMARY

p –Laplacian type problems on arbitrary time scale

In the classical sense, Sturm-Liouville equations, diffusion equations and the Dirac systems were studied by many mathematicians under different boundary conditions and significant results were obtained. In this thesis, p –Laplacian case of the Sturm-Liouville and diffusion equations and the Dirac system are described and investigated on the arbitrary time scale. Before this, basic definitions and theorems related to time scale are given, p –Laplacian type equations and generalized trigonometric functions are explained. In addition, the Picone correlation, which is an important correlation in spectral theory, has been obtained for Sturm-Liouville, Diffusion and Dirac boundary value problems.

Key Words: Time Scales, p –Laplacian Sturm-Liouville equation, p –Laplacian diffusion equation, p –Laplacian Dirac system.

SEMBOLLER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Keyfi Zaman skalası
$\mathbb{T}^\kappa$	: Zaman skalasından türetilmiş kappa kümesi
σ	: İleri sıçrama operatörü
ρ	: Geri sıçrama operatörü
$\mu(t), v(t)$	: İleri ve geri Graininess fonksiyonları
Δ	: Delta türev operatörü
Δf	: İleri fark operatörü
f^Δ	: Hilger (Delta) türev
$f^{\Delta\Delta}$	: İkinci mertebeden Hilger (Delta) türev
$W(f, g)$	: f ve g fonksiyonlarının Wronskian determinantı
λ, μ, v	: Spektral parametreler
$y(x, \lambda)$	: Öz fonksiyon
$C_{rd}(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı rd -süreklili fonksiyonlar uzayı
$C_{rd}^1(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı birinci mertebeden türevi rd -süreklili fonksiyonların uzayı
$C_{rd}^2(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı ikinci mertebeden türevi rd -süreklili fonksiyonların uzayı
S_p	: Genelleştirilmiş sinüs fonksiyonu
S'_p	: Genelleştirilmiş kosinüs fonksiyonu
$T_p(x)$	: Genelleştirilmiş tanjant fonksiyonu
$T'_p(x)$	: Genelleştirilmiş kotanjant fonksiyonu
π_p	: Genelleştirilmiş pi sayısı
q, r	: Potansiyel fonksiyonlar
T	: Transpoz
p	: $p > 1$ şeklinde sabit
$L_2^\Delta[\rho(a), b]$	: $[\rho(a), b]$ aralığında karesel Δ -integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

1 GİRİŞ

Bu tezde ele alınan problemler keyfi zaman skalası üzerinde çalışılmıştır. Bu problemlerin özelliği ise p -Laplacian tipinde denklemler içermesidir. Şimdi, zaman skalası teorisinin gelişim süreci hakkında bazı bilgiler verilecektir.

Zaman skalası, 1987\88 yılında Alman matematikçi Stephan Hilger [1-2] tarafından ortaya konulmuştur. Stephan Hilger bu konuyu danışmanı B. Aulbach'tan [3] almış ve bu konuda önemli sonuçlar elde etmiştir. Stephan Hilger'in amacı sürekli ve ayrık analizi aynı çatı altında toplayan bir teori oluşturmaktır. Bunun için de her ikisini kapsayan bir küme alınmış ve bu kümeye daha sonraki dönemlerde zaman skalası adı verilmiştir. Bu konu Stephan Hilger'in doktora tezinde ortaya atıldıktan sonra bir süre ilgi çekmemiş ve bu nedenle Hilger başka konular çalışmaya yönelmiştir. Fakat 2000 li yıllarda zaman skalası matematikçiler tarafından çalışılmaya başlanmış ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır [4-10].

Zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çalışılması, diferensiyel ve fark denklemlerinden iki ayrı sonuç elde edilmesini engeller. Zaman skalasında dinamik denklemlerle ilgili de çok sayıda çalışma yapılmıştır [11-15]. İlk olarak teze başlarken zaman skalasında temel tanım ve teoremler verilerek zaman skalası üzerinde Hilger türev ve integral kavramları ifade edilecektir. Fakat asıl amaç zaman skalası üzerinde p -Laplacian tipinde problemleri incelemektir. Bu nedenle p -Laplacian tipinde problemlerin tarihi sürecinden bahsedilecektir.

Laplacian tipinde denklemler teorisi matematiğin: Varyasyon analizi, kısmi diferensiyel denklemler, potensiyel teori ve analitik fonksiyonlar teorisi gibi birçok dalı ile bağlantılıdır. Birçok matematikçi çok boyutlu

$$\begin{aligned} -\Delta_p y + q |y|^{p-2} y &= \lambda |y|^{p-2} y \\ y_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

şeklindeki p -Laplacian tipinde öz değer problemlerini incelemişlerdir. Burada $p > 1, q \in L_2(\Omega)$ şeklindedir. Bu yarı lineer bir kısmi diferensiyel denklemdir. Birçok özelliği $p = 2$ lineer olma durumu ile benzerdir. Fakat oldukça farklı özellikleri de vardır. Burada, bu tip denklemlerin bir boyutlu halleri incelenecektir. Bir boyutlu durumda (1.1) denklemi

$$\begin{aligned} -\left(u^{(p-1)}\right)' &= (p-1)(\lambda - q(x)) u^{(p-1)} \\ u(0) &= u(1) = 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

şekline gelir. p -Laplacian tipinde denklemlerin çözümlerinde genelleştirilmiş trigonometrik fonksiyonlar bulunmaktadır. Bu nedenle p -Laplacian tipinde denklemler incelenirken bu

fonksiyonların özellikleri de verilecektir. Literatürde klasik anlamda p -Laplacian tipinde denklemlerle ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur [16-19]. Bu tip denklemler zaman skalası üzerinde de incelenmiştir. Literatürde p -Laplacian dinamik denklemlerle ilgili de çok sayıda çalışma vardır [20-28].

Sonraki bölümlerde bir boyutlu üç tip p -Laplacian tipinde problemler ele alınacak ve bu problemlerin spektral özellikleri keyfi bir zaman skalası üzerinde incelenecektir. Bu problemlerden birincisi p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer problemidir. Klasik anlamda Sturm-Liouville denklemi oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu denklem bir boyutlu Schrödinger denklemi olarakta bilinir. Temel parçacıkların davranışlarının açıklanması için 1930' larda kuantum mekaniği teorisi ortaya atılmıştır. Kuantum mekaniğinin temel denklemi ise Schrödinger denklemidir. Schrödinger denklemi mikro evrendeki relativistik olmayan sistemleri tasvir eden bir denklemdir. Kısmi diferensiyel denklem olan Schrödinger denklemi çözüldüğünde Sturm-Liouville denklemi ortaya çıkar ve Schrödinger denkleminin incelenmesinde kullanılır. Sınır-değer problemleri arasında Sturm-Liouville probleminin önemli bir yeri vardır. Genel olarak sınır-değer problemi denildiği zaman ilk akla gelen, Sturm-Liouville problemidir. Bu kısımda bu önemin nedenlerinden bahsedilecektir. Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi, fizik alanında bilimsel gelişmelere yol açmıştır. Fizik alanındaki bu bilimsel çalışmalar matematik biliminin gelişmesinde büyük ölçüde etkili olmuştur. Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi diferensiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemleri içermektedir. İlk defa 1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulan ve literatürde Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan sınır değer problemi de bu problemlerden birisidir. Başlangıçta ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm- Liouville teorisi günümüzde birçok fiziksel problemin araştırılmasında en etkin yöntemlerden biri olarak bilinmektedir. Bu problemler Fourier yöntemi (değişkenlerine ayırma) ile incelendiğinde elde edilen denklemin sınır şartlarında da spektral parametre bulunduğu görülür. Sturm-Liouville denklemi daha sonra 20. yüzyılın başlarında D. Birkhoff (1909) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalarda regüler sınır şartları, öz değerler ve bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sistemi verilmiştir. Bu nedenle literatürde sınır şartlarında spektral parametre bulunduran ve bulundurmayan Sturm-Liouville problemleri ile ilgili çok sayıda çalışma vardır. Sturm-Liouville denklemi keyfi zaman skalası üzerinde incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Klasik p -Laplacian Sturm-Liouville denklemi matematikçiler tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu tezde ise keyfi zaman skalası üzerinde p -Laplacian Sturm-Liouville denklemini içeren problem ele alınacaktır.

Diğer bir problem ise p -Laplacian difüzyon sınır değer problemidir. Bu denklemin klasik

hali de matematiksel fizikte önemli bir uygulama alanına sahiptir. Bu denklem kısmi bir diferensiyel denklem olan Klein-Gordon denkleminin çözümü sırasında ortaya çıkan bir denklemdir. Klein-Gordon denklemi, kuantum alan teorisindeki matematiksel modellerin en önemlilerinden birisi olarak kabul edilmektedir. Denklem genel olarak dispersive dalga olayını tasvir etmek için kullanılır ve relativistik fizik, plazma fiziği ve lineer olmayan optikte ortaya çıkar. Klein-Gordon denklemi fizikte lineer veya lineer olmayan şekillerde karşımıza çıkabilir. Klein-Gordon diferensiyel denkleminin özelliklerini anlamak için difüzyon denklemi spektral teoride incelenir. Bu açıdan bu denklem oldukça önemlidir ve literatürde bu denklem ile ilgili çok sayıda çalışma vardır [29-46]. Difüzyon denkleminin p -Laplacian hali detaylı olarak Koyunbakan [47] ve Gulsen [48] tarafından incelenmiştir. Bu denklemin $p = 2$ klasik hali keyfi bir zaman skalasında incelenmiştir [49]. Bu tezde ise keyfi bir zaman skalası üzerinde p -Laplacian difüzyon denkleminin özellikleri incelenecektir.

Tez içerisinde ele alınan son problem p -Laplacian Dirac sınır değer problemidir. Schrödinger teorisi görelili olmayan kuantum mekaniğinin geçerli olduğu bir teoridir. Kuantum mekaniğindeki Schrödinger teorisinin görelili genellemelerinden biri ile verilen Klein-Gordon denklemdir. Ancak, hem Schrödinger denklemi hem de Klein-Gordon denklemi spin bilgisi içermez. Gerçekten, Klein-Gordon denklemi spin sıfır parçacıkları için uygun bir denklemdir. Bununla birlikte, bilinen birçok parçacığın spinleri sıfır değildir. Bu bakımdan, Dirac denklemi gibi bir denklemin gerekliliği büyük önem taşır. Literatürde Dirac denklem sistemi ile ilgili çok sayıda çalışma vardır [50-67]. p -Laplacian Dirac sınır değer problemi klasik anlamda Gulsen [68] tarafından çalışılmıştır. Klasik Dirac sistemi keyfi bir zaman skalası üzerinde ise $p = 2$ için Gulsen ve Yilmaz [69-70] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada ise p -Laplacian Dirac sınır değer problemi keyfi zaman skalası üzerinde ele alınacak ve bazı önemli sonuçlar elde edilecektir.

İncelediğimiz kadarı ile ele alacağımız p -Laplacian tipinde denklemleri içeren problemler keyfi zaman skalasında incelenmemiştir. Bu nedenle bu tip problemleri inceleyip bu alandaki önemli bir boşluğu kapatmak istiyoruz. Ayrıca osilasyon teorisi için çok önemli olan Picone bağıntısı ele aldığımız üç problem için de ispatlanacaktır. Literatürde Picone bağıntısı ile ilgili çok sayıda çalışma vardır [71-72]. 1998 yılında, Allegretto ve Xi [73] p -Laplace operatörü için Picone bağıntısını elde ettiler, Bal [74] p -Laplacian operatörü için genelleştirilmiş Picone bağıntısını verdi ve Sturm karşılaştırma teoremi ile bir Liouville tipinde teoremi ispat etti.

Picone bağıntısının önemli uygulamaları vardır. Diferensiyel denklemlerin çözüm fonksiyonları için verilen osilasyon kriterlerinin elde edilmesinde Picone bağıntısı önemli bir yere sahiptir. Ayrıca Sturm karşılaştırma teoreminin ispatında da Picone bağıntısı kullanılmaktadır.

2 ZAMAN SKALASI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1. (Zaman Skalası) $([9, 10])$ Reel sayılar kümesinin keyfi, kapalı ve boş olmayan bir alt kümesine zaman skalası denir. Zaman skalası genel olarak $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilir. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ kümeleri birer zaman skalasıdır. $[0, 1]$, $[1, 2] \cup [3, 4]$ kapalı aralıkları ve Cantor kümesi de birer zaman skalasıdır. Bunlar dışında zaman skalaları da mevcuttur. Örneğin, $h > 0$ olmak üzere

$$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\},$$

bir zaman skalasıdır. $a, b > 0$ olacak şekilde

$$P = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [k(a+b), k(a+b)+a],$$

bir zaman skalasıdır. $q > 1$ olmak üzere $q^{\mathbb{Z}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ bir zaman skalasıdır. Bu zaman skalasına kuantum zaman skalası denir. Fakat $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ ve $(0, 1)$ açık aralığı zaman skalası olma koşullarını sağlamadıkları için zaman skalası değildir. Aşağıda bir kümenin zaman skalası olma şartlarını sağlaması ile ilgili bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 2.1. Doğal sayılar kümesi bir zaman skalasıdır. Çünkü

i) $\mathbb{N} \neq \emptyset$

ii) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

iii) $\mathbb{N}$ kapalıdır. Kapalı olması için $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ olmalıdır (Kümenin kapanışı kümeye, yığılma noktalarının ilave edilmesiyle oluşan kümedir. Doğal sayılar kümesinin yığılma noktası olmadığından, $\mathbb{N}' = \emptyset$ olur). Yani $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \emptyset = \mathbb{N}$ olup $\mathbb{N}$ kapalılık şartını sağlar. Bu yüzden doğal sayılar kümesi kapalıdır ve bir zaman skalasıdır.

Örnek 2.2. Rasyonel sayılar kümesi bir zaman skalası değildir.

i) $\mathbb{Q} \neq \emptyset$

ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

iii) Fakat $\mathbb{Q}$ kapalı değildir. Kapalılık için $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ olmalıdır. Rasyonel sayılar kümesinin yığılma noktalarının kümesi $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ şeklindedir. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ olup, $\mathbb{Q}$ kapalı değildir. Bu nedenle rasyonel sayılar kümesi bir zaman skalası değildir.

Tanım 2.2. (İleri Sıçrama Operatörü) $([9, 10])$ $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ şeklindeki ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3. (Geri Sıçrama Operatörü) $([9, 10])$ $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ için $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ şeklindeki geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4. (Graininess Fonksiyonu) $([9, 10])$ $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

ile tanımlanan $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna ileri graininess fonksiyonu, $v(t) = t - \rho(t)$ ile tanımlanan $v : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna ise geri graininess fonksiyonu adı verilir.

Tanım 2.5. (Zaman Skalasında Noktaların Sınıflandırılması) $([9, 10])$ $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t ye sağ saçılmış, $\rho(t) < t$ ise t ye sol saçılmış nokta denir. Hem sağ saçılmış hem sol saçılmış noktalara izole noktalar denir. $\sigma(t) = t$ ise t ye sağ yoğun, $\rho(t) = t$ ise t ye sol yoğun nokta denir. Hem sağ, hem de sol yoğun olan noktalara ise yoğun noktalar denir. Özel durumlarda eğer $t = \max \mathbb{T}$ ise $\sigma(t) = t$; $t = \min \mathbb{T}$ ise $\rho(t) = t$ şeklindedir.

Tanım 2.6. $([9, 10])$ $\mathbb{T}$ zaman skalası verilmiş olsun.

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{m\}, & \text{eğer } \sup \mathbb{T} = m \text{ ve } m \text{ sol saçılımlı ise} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklindedir. Bu kavram delta türev tanımlanırken kullanılacaktır. Eğer $\mathbb{T}$ nin maksimum elemanı varsa $\inf \phi = \max \mathbb{T}$, minimum elemanı varsa $\sup \phi = \min \mathbb{T}$ olur.

Örnek 2.3. $\mathbb{T} = [0, 1] \cup \{2, 3\}$ zaman skalası için $\sup \mathbb{T} = 3$ olmak üzere

$$\mathbb{T}^\kappa = [0, 1] \cup \{2, 3\} - \{3\} = [0, 1] \cup \{2\}$$

şeklindedir.

Örnek 2.4. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}}$ zaman skalalarının nokta sınıflandırmaları ve graininess fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ iken her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf \{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf \{t, t+1, t+2, \dots\} = t \\ \rho(t) &= \sup \{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup \{t, t-1, t-2, \dots\} = t \\ \mu(t) &= \sigma(t) - t = t - t = 0 \end{aligned}$$

olup her nokta yoğun noktadır. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ iken her $t \in h\mathbb{Z}$ ve $h > 0$ için

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf \{s \in h\mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t + h, t + 2h, \dots\} = t + h \\ \rho(t) &= \sup \{s \in h\mathbb{Z} : s < t\} = \sup \{t - h, t - 2h, \dots\} = t - h \\ \mu(t) &= \sigma(t) - t = t + h - t = h\end{aligned}$$

olup, her nokta izole noktadır. Özel halde, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olmak üzere her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t + 1, t + 2, \dots\} = t + 1 \\ \rho(t) &= \sup \{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup \{t - 1, t - 2, \dots\} = t - 1 \\ \mu(t) &= \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1 \\ \rho(t) &< t < \sigma(t)\end{aligned}$$

olacak şekilde her nokta izole noktadır. $\mathbb{T} = \mathbb{K}_q = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, $q > 1$ olmak üzere, her $t \in \mathbb{K}_q$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf \{s \in \mathbb{K}_q : s > t\} = \inf \{qt, q^2t, \dots\} = qt \\ \rho(t) &= \sup \{s \in \mathbb{K}_q : s < t\} = \sup \{q^{-1}t, q^{-2}t, \dots\} = \frac{t}{q} \\ \mu(t) &= \sigma(t) - t = qt - t = (q - 1)t \\ \rho(t) &< t < \sigma(t)\end{aligned}$$

olur ve her nokta izole noktadır. Genel olarak bazı zaman skalaları için ileri, geri sıçrama operatörleri ve graininess fonksiyonları aşağıdaki şekildedir.

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t + 1$	$t - 1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t + h$	$t - h$
$q^{\mathbb{Z}}$	$(q - 1)t$	qt	$\frac{t}{q}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t} + 1$	$(\sqrt{t} + 1)^2$	$(\sqrt{t} - 1)^2$

Bazı zaman skalalarının graininess fonksiyonları ve ileri, geri sıçrama operatörleri

Tanım 2.7. (Zaman Skalasında Delta Hilger Türev) $([9, 10])$ $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \forall s \in U_t$$

olacak şekilde t nin bir U_t komşuluğu varsa, f fonksiyonuna t noktasında Δ -türevlenebilir bir fonksiyon, f^Δ ya f fonksiyonunun t noktasındaki Hilger türevi ya da Δ -türevi denir. Bu türev

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s},$$

şeklinde tanımlanır. Zaman skalası değiştikçe bir fonksiyonun delta türevi farklı şekilde tanımlanır. Örneğin:

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t),$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t+1) - f(s)}{t+1 - s} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t),$$

şeklindedir. Delta türevi anlamak için bazı somut örnekler verelim.

Örnek 2.5. $f(t) = t^2$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $f^\Delta(t)$ yi $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $\mathbb{T} = q\mathbb{Z}$ zaman skalaları için hesaplayalım.

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t) - s)(\sigma(t) + s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} (\sigma(t) + s) = \sigma(t) + t, \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \implies \sigma(t) = t, f^\Delta(t) = \sigma(t) + t = t + t = 2t$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} \implies \sigma(t) = t + 1, f^\Delta(t) = \sigma(t) + t = t + 1 + t = 2t + 1$$

$$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} \implies \sigma(t) = t + h, f^\Delta(t) = \sigma(t) + t = t + h + t = 2t + h$$

$$\mathbb{T} = q\mathbb{Z} \implies \sigma(t) = qt, f^\Delta(t) = \sigma(t) + t = qt + t = (q+1)t$$

bulunur.

Örnek 2.6. $[9, 10]$ $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f(t) = \alpha$, $t \in \mathbb{T}$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\alpha - \alpha}{\sigma(t) - s} = 0,$$

yazılır. O halde sabit bir fonksiyonun zaman skalası üzerinde türevi 0 dır. $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f(t) = t$, $t \in \mathbb{T}$ ise

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1,$$

olur. $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ ve $f(t) = t^2$ ise

$$t = \sqrt{n} \implies n = t^2$$

$$\sigma(t) = \sigma(\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} = \sqrt{t^2+1} \implies (t^2)^\Delta = t + \sqrt{t^2+1},$$

$\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ ve $f(t) = t^2$ olacak şekilde,

$$t = \frac{n}{2} \implies n = 2t$$

$$\sigma(t) = \sigma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n+1}{2} = t + \frac{1}{2} \implies (t^2)^\Delta = 2t + \frac{1}{2},$$

ve $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{3}} = \{\sqrt[3]{n} : n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ ve $f(t) = t^2$ olmak üzere

$$t = \sqrt[3]{n} \implies n = t^3$$

$$\sigma(t) = \sigma(\sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{t^3+1} \implies (t^2)^\Delta = t + \sqrt[3]{t^3+1},$$

elde edilir. $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f(t) = \sqrt{t}$, $t \in \mathbb{T}$ olsun.

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s})(\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{s})}{(\sigma(t) - s)(\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{s})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{t}}, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu örnekler arttırılabilir.

Teorem 2.1. ([9, 10]) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun.

i) f fonksiyonu t noktasında Hilger türevli ise, bu noktada süreklidir.

ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılmış ise, t noktasında Hilger türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s},$$

şeklindedir.

iii) t sağ yoğun nokta ise, f nin t de Hilger türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

limitinin var olmasıdır. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

bulunur.

Teorem 2.2. ([9, 10]) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun.

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t),$$

şeklindedir.

Teorem 2.3. ([9, 10]) $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Bu durumda

- i) $(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$,
- ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$,
- iii) $(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g^\sigma(t)$,
- iv) $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ için $(\frac{f}{g})^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$, şeklindedir.

Teorem 2.4. ([9, 10]) α bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun.

- i) $f(t) = (t - \alpha)^m$ alınırsa

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} [\sigma(t) - \alpha]^v (t - \alpha)^{m-1-v},$$

olur.

- ii) $g(t) = \frac{1}{(t - \alpha)^m}$ iken

$$g^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{[\sigma(t) - \alpha]^{m-v} (t - \alpha)^{v+1}},$$

olur. Burada $(t - \alpha)[\sigma(t) - \alpha] \neq 0$ dir.

Tanım 2.8. (İkinci Mertebeden Delta Hilger Türev) ([9, 10]) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : \mathbb{T}^{\kappa^2} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki türeye f fonksiyonunun ikinci mertebeden delta türevi denir. Genel olarak $(f^\Delta)^n : \mathbb{T}^{\kappa^n} \rightarrow \mathbb{R}$ türevine ise f fonksiyonunun n . mertebeden delta türevi denir. Bu durumda $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ biçimindedir. Ayrıca $f^{\Delta^0} = f$ ve $\mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}$ dir.

Örnek 2.7. $f(t) = 1$, $f(t) = t$, $f(t) = t^2$ fonksiyonlarının keyfi zaman skalaları üzerinde ikinci mertebeden Hilger delta türevleri sırası ile

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{1 - 1}{\sigma(t) - s} = 0 \implies g(t) = 0 \\ (f^\Delta)^\Delta &= g^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{g(\sigma(t)) - g(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{0 - 0}{\sigma(t) - s} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1 \implies g(t) = 1 \\
(f^\Delta)^\Delta &= g^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{g(\sigma(t)) - g(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{1 - 1}{\sigma(t) - s} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t) - s)(\sigma(t) + s)}{\sigma(t) - s} \\
&= \lim_{s \rightarrow t} (\sigma(t) + s) = \sigma(t) + t \\
\implies g(t) &= \sigma(t) + t \\
(f^\Delta)^\Delta &= g^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{g(\sigma(t)) - g(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(\sigma(t)) + \sigma(t) - \sigma(s) - s}{\sigma(t) - s} = \frac{\sigma(\sigma(t)) - t}{\sigma(t) - t}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 2.8. ([9, 10]) $(fg)^{\Delta\Delta}$ türevi için genel olarak

$$\begin{aligned}
(fg)^\Delta &= f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta \\
(fg)^{\Delta\Delta} &= (f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta)^\Delta = (f^\Delta g)^\Delta + (f^\sigma g^\Delta)^\Delta = (f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta\sigma} g^\Delta) + (f^{\sigma\Delta} g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta}) \\
&= f^{\Delta\Delta} g + g^\Delta (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}) + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta}
\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Aşağıdaki kısımda zaman skalasında delta integral tanımlanacaktır. Fakat delta integrali tanımlamadan önce bazı kavramları vermek gerekir.

Tanım 2.9. (Regüler Fonksiyon) ([9, 10]) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun regüler olması için gerek ve yeter şart bu fonksiyonun zaman skalasının tüm sağ yoğun noktalarında sağ taraflı limiti, tüm sol yoğun noktalarında sol taraflı limitinin olmasıdır.

Tanım 2.10. (rd -süreklî Fonksiyon) ([9, 10]) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun rd -süreklî olması için gerek ve yeter şart bu fonksiyonun zaman skalasının sağ yoğun noktalarında süreklî ve sol yoğun noktalarında sol taraflı limitinin olmasıdır. Tüm rd -süreklî fonksiyonlarının uzayı $C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklindedir. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde Δ -türevli ve türevi rd -süreklî olan tüm fonksiyonların uzayı $C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.5. ([9, 10]) $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

- i) f fonksiyonu süreklî ise, rd -süreklîdir.
- ii) f fonksiyonu rd -süreklî ise, regülerdir.
- iii) σ ileri sıçrama operatörü rd -süreklîdir.
- iv) f fonksiyonu regüler veya rd -süreklî ise, f^σ fonksiyonu regüler veya rd -süreklîdir.

v) f sürekli bir fonksiyon olsun. $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı regüler veya rd -sürekli bir fonksiyon ise, $f \circ g$ fonksiyonu regüler veya rd -sürekli dir.

Teorem 2.6. ([9, 10]) f regüler bir fonksiyon olsun. Bir $\mathbb{D}$ bölgesinde türevlenebilen öyle bir F fonksiyonu vardır ki $\forall t \in \mathbb{D}$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ dir.

Tanım 2.11. (Belirsiz Delta İntegral) ([9, 10]) f regüler bir fonksiyon olsun. $F^\Delta(t) = f(t)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu mevcut ise, f fonksiyonunun Δ -belirsiz integrali

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C,$$

şeklinde tanımlanır. Burada C keyfi bir sabittir. Benzer şekilde; $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonunun Δ -belirli integrali (Cauchy integrali)

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r),$$

şeklindedir.

Teorem 2.7. ([9, 10]) $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ ise, $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t)f(t)$ dir.

İspat: $F^\sigma(t) = F(t) + \mu(t) F^\Delta(t)$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau &= F(\sigma(t)) - F(t) = F^\sigma(t) - F(t) \\ &= F(t) + \mu(t)F^\Delta(t) - F(t) \\ &= \mu(t)F^\Delta(t) \\ &= \mu(t)f(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.8. ([9, 10]) $f^\Delta \geq 0$ ise, f azalmayandır.

İspat: $[a, b]$ aralığı üzerinde $f^\Delta \geq 0$ olsun. $a \leq s \leq t \leq b$ olmak üzere $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned} \int_s^t f^\Delta(t) \Delta t &= f(t) - f(s) \implies f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(t) \Delta t \\ \implies f(t) - f(s) &\geq 0 \implies f(t) \geq f(s), \end{aligned}$$

olur. $s \leq t \implies f(s) \leq f(t)$ olup, f azalmayandır.

Örnek 2.9. $([9, 10]) \int (t + \alpha)^k \Delta t = \frac{(t + \alpha)^{k+1}}{k + 1} + C$, integrali $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ zaman skalası için hesaplanacaktır. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $f(t + 1) - f(t) = \Delta f(t)$ eşitliğinden

$$\Delta \left(\frac{(t + \alpha)^{k+1}}{k + 1} \right) = \frac{(t + 1 + \alpha)^{k+1}}{k + 1} - \frac{(t + \alpha)^{k+1}}{k + 1},$$

$t + \alpha = x$ denirse

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} &= (x + y)^n \\ &= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{n} y^n, \end{aligned}$$

şeklindeki binom teoremi yardımıyla

$$\frac{\left[\binom{k+1}{0} x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k + \dots + \binom{k+1}{k+1} \right] - x^{k+1}}{k + 1} = x^k$$

olup,

$$\int x^k = \int (t + \alpha)^k \Delta t = \frac{(t + \alpha)^{k+1}}{k + 1} + C$$

elde edilir.

Teorem 2.9. $([9, 10])$ $a, b, c \in \mathbb{T}$ ve $f, g \in C_{rd}$ olsun. Aşağıdaki özellikler mevcuttur.

- i) $\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$
- ii) $\int_a^b \alpha f(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t$ (α =sabit)
- iii) $\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$
- iv) $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t, c \in [a, b]$
- v) $\int_a^a f(t) \Delta t = 0$
- vi) $[a, b)$ aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$,
- vii) $\forall t \in [a, b)$ için $f(t) \geq 0 \implies \int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$,
- viii) $\int_a^b f^\sigma(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t$

$$ix) \int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g^\sigma(t)\Delta t$$

(*viii*) ve (*ix*) formüllerine zaman skalasında kısmi integrasyon formülleri denir.

Teorem 2.10. ([9, 10]) $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ verilsin. Bu durumda

i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integral Riemann integralidir.

ii) $[a, b]$ aralığı sadece izole noktalardan oluşuyorsa

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t)f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t \in [b, a)} \mu(t)f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

iii) $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}, h > 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

iv) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=a}^{b-1} f(k), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{k=b}^{a-1} f(k), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

Örnek 2.10. [75] Burada, delta integral ile ilgili bazı örnekler verilecektir.

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \text{ için } \int_a^t s\Delta s = \int_a^t sds = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} \text{ için } \int_a^t s \Delta s = \sum_{s \in [a, t)} s = \sum_{s=a}^{t-1} s,$$

$\mathbb{T} = [0, 3] \cup \{4, 5, 6, 7, 8\}$ için $\int_0^t s \Delta s$ integralinin değeri t nin durumlarına göre aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$t \leq 3 \text{ ise } \int_0^t s \Delta s = \frac{t^2}{2},$$

$$t = 4 \text{ ise } \int_0^4 s \Delta s = \int_0^3 s \Delta s + \int_3^4 s \Delta s = \frac{15}{2}$$

$$t > 4 \text{ ise } \int_0^t s \Delta s = \int_0^3 s \Delta s + \int_3^4 s \Delta s + \int_4^8 s \Delta s = \frac{15}{2} + \sum_{k=4}^7 k = \frac{59}{2}$$

Örnek 2.11. [75] $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}$ zaman skalası için $\int_1^t (s+1)^2 \Delta s$ integrali aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} \int_1^t (s+1)^2 \Delta s &= \sum_{n=1}^{\sqrt{t}-1} \int_{n^2}^{\sigma(n^2)} (s+1)^2 \Delta s \\ &= \int_1^{\sigma(1)} (s+1)^2 \Delta s + \int_{2^2}^{\sigma(2^2)} (s+1)^2 \Delta s + \dots + \int_{(\sqrt{t}-1)^2}^{\sigma(\sqrt{t}-1)^2} (s+1)^2 \Delta s \\ &= (\sigma(1) - 1)2^2 + (\sigma(2^2) - 2^2) 5^2 + \dots + \left(\sigma((\sqrt{t}-1)^2) - (\sqrt{t}-1)^2 \right) (t+2-2\sqrt{t})^2 \end{aligned}$$

Örnek 2.12. $\mathbb{T} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olsun. $f(t) = \frac{8}{7}s(1-s)$ için

$$\int_0^1 f(s) \Delta s$$

integralinin değerini bulunacaktır.

$$\int_0^1 f(s) \Delta s = \int_0^{1/3} f(s) \Delta s + \int_{1/3}^{1/2} f(s) \Delta s + \int_{1/2}^1 f(s) \Delta s,$$

olduğundan integralleri ayrı ayrı hesaplanacaktır. $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ reel sayıların kapalı bir alt kümesi olduğundan,

$$\int_0^{1/3} f(s) \Delta s = \int_0^{1/3} f(s) ds = \frac{8}{7} \int_0^{1/3} s(1-s) ds = \frac{8}{162},$$

olur. $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ aralığını göz önüne alınırsa, $\sigma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ olduğundan $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$ yardımıyla,

$$\int_{1/3}^{1/2} f(s)\Delta s = f\left(\frac{1}{3}\right)\mu\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{189},$$

bulunur. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığı için hesaplama yapılırsa,

$$\int_{1/2}^1 f(s)\Delta s = \int_{1/2}^1 f(s)ds = \frac{8}{7} \int_{1/2}^1 s(1-s)ds = \frac{2}{21},$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^1 f(s)\Delta s = \int_0^{1/3} f(s)\Delta s + \int_{1/3}^{1/2} f(s)\Delta s + \int_{1/2}^1 f(s)\Delta s = \frac{106}{567},$$

olur.

Tanım 2.12. (Zaman Skalasında Zincir Kuralı) $([9, 10])$ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı iki fonksiyon olsun. g fonksiyonu $t \in \mathbb{R}$ noktasında, f ise $g(t)$ noktasında türevli ise $(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t)$ eşitliği sağlanır.

Örnek 2.13. $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(t) = t^2$, $g(t) = 2t$ fonksiyonları verilsin. $\mathbb{Z}$ zaman skalasında klasik zincir kuralının sağlanmadığını gösterilecektir.

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f^\Delta(g(t))g^\Delta(t) \quad (2.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(g(t)) = 4t^2 \\ (f \circ g)^\Delta(t) &= 4(t+1)^2 - 4t^2 = 4t^2 + 8t + 4 - 4t^2 = 8t + 4 \end{aligned}$$

olur. (2.1) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanırsa,

$$g^\Delta(t) = 2(t+1) - 2t = 2 \quad (2.2)$$

$$f^\Delta(t) = (t+1)^2 - t^2 = 2t + 1$$

$$f^\Delta(g(t)) = 2(2t) + 1 = 4t + 1 \quad (2.3)$$

olmak üzere, (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden

$$f^\Delta(g(t))g^\Delta(t) = 2(4t + 1) = 8t + 2,$$

yazılacağından, (2.1) eşitliği sağlanmaz.

Zincir kuralı çok önemli bir kuraldır. Bu nedenle bu kuralın zaman skalasında tanımlanması gerekir. Klasik analizde verilen haliyle zincir kuralının sağlanmadığı yukarıda ifade edildi. O halde bazı şartlar yükleyerek zincir kuralı zaman skalasında yeniden tanımlanmalıdır. Bu tanımlardan bazıları aşağıdaki şekildedir.

Teorem 2.11. (Zincir Kuralı) $([9, 10])$ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ise $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde türevli olsun. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli türevlenebilir ise $[t, \sigma(t)]$ aralığında öyle bir c sabiti vardır ki $(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c))g^\Delta(t)$ şeklinde olur.

Örnek 2.14. $([9, 10])$ $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $f(t) = t^2$, $g(t) = 2t$ fonksiyonları verilsin. $t = 3$ olmak üzere, yukarıdaki teoremden adı geçen c sabitini bulalım.

$$\begin{aligned} (f \circ g)^\Delta(3) &= f'(g(c))g^\Delta(3) \\ (f \circ g)^\Delta(t) &= 4(t+1)^2 - 4t^2 = 4t^2 + 8t + 4 - 4t^2 = 8t + 4 \Rightarrow (f \circ g)^\Delta(3) = 8 \cdot 3 + 4 = 28 \\ g^\Delta(t) &= 2(t+1) - 2t = 2t + 2 - 2t = 2 \Rightarrow g^\Delta(3) = 2 \\ f'(t) &= 2t \Rightarrow f'(g(c)) = 2g(c) \\ (f \circ g)^\Delta(3) &= f'(g(c))g^\Delta(3) \Rightarrow 28 = 2g(c)2 \Rightarrow g(c) = \frac{28}{4} \Rightarrow 2c = \frac{28}{4} \\ c &= \frac{7}{2} \Rightarrow c = \frac{7}{2} \in [3, \sigma(3)], \sigma(3) = 4 \end{aligned}$$

Teorem 2.11 ile verilen zincir kuralı oldukça zayıftır. Bu nedenle bazı matematikçiler tarafından zaman skalası üzerinde daha kullanışlı zincir kuralları tanımlanmıştır. Aşağıda verilecek zincir kuralı 1998 yılında Christian Pötzche tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.12. (Zincir Kuralı) $([9, 10])$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, türevli bir fonksiyon ve $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ -türevlenebilir olsun. Bu durumda $f \circ g$, Δ -türevlenebilirdir ve

$$(f \circ g)^\Delta(t) = \left\{ \int_0^1 f'[g(t) + h\mu(t)g^\Delta(t)]dh \right\} g^\Delta(t),$$

eşitliği sağlar. Bu eşitlik bileşke fonksiyonunun Δ -türevinin nasıl hesaplanacağını gösterir.

Daha farklı zincir kuralı versiyonları sonraki yıllarda C.D. Ahlbrandt, M. Bohner, J. Ridenhour gibi matematikçiler tarafından verilmiştir.

Örnek 2.15. $([9, 10])$ $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = t^2$, $f(x) = \exp(x) = e^x$ fonksiyonları verilsin. Teorem 2.12 kullanılarak zincir kuralının sağlandığı gösterilecektir.

I.Yol: Hilger türev tanımından

$$\begin{aligned} g^\Delta(t) &= (t+1)^2 - t^2 = 2t+1 \\ f(x) &= \exp(x) \implies f'(x) = \exp(x) \end{aligned}$$

olmak üzere Teorem 2.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned} (f \circ g)^\Delta(t) &= \left\{ \int_0^1 f'[t^2 + h(2t+1)]dh \right\} (2t+1) \\ &= (2t+1) \int_0^1 \exp(t^2 + h(2t+1))dh \\ &= (2t+1) \exp(t^2) \int_0^1 \exp(h(2t+1))dh \\ &= (2t+1) \exp(t^2) \frac{1}{2t+1} \left\{ \exp(h(2t+1)) \Big|_0^1 \right\} \\ &= \exp(t^2) \{ \exp(2t+1) - 1 \}, \end{aligned}$$

olur.

II.Yol:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^\Delta(t) &= \Delta(f \circ g)(t) = \Delta(f(g(t))) = \Delta \exp(t^2) = \exp(t+1)^2 - \exp(t^2) \\ &= \exp(t^2) \{ \exp(2t+1) - 1 \}, \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.13. ($L_2^\Delta[a, b]$ uzayı) $[a, b]$ aralığında tanımlı karesel Δ -integrellenebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanan $L_2^\Delta[a, b]$ uzayı

$$L_2^\Delta[a, b] = \left\{ f : \int_a^b f^2(x) \Delta x < \infty \right\}.$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \Delta x, \quad (2.4)$$

olarak verilir. Bu çalışmada incelemeler yapılırken $L_2^\Delta[a, b]$ uzayı önemli bir yere sahip olacaktır.

Tanım 2.14. (Wronskian) ([9, 10]) y_1 ve y_2 Δ -türevli ve rd -süreklili iki fonksiyon olmak üzere

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1^\Delta(t) & y_2^\Delta(t) \end{pmatrix} = y_1(t)y_2^\Delta(t) - y_1^\Delta(t)y_2(t),$$

ifadesine y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronskianı denir.

3 p -Laplacian tipinde denklemler ve genelleştirilmiş trigonometrik fonksiyonların klasik anlamda özellikleri

Klasik sinüs ve kosinüs fonksiyonları genelleştirilerek, genelleştirilmiş sinüs ve kosinüs fonksiyonları elde edilmiştir. Bu fonksiyonlar sırası ile $p > 1$ için $S_p(x)$ ve $S'_p(x)$ şeklinde gösterilirler. Bu kısımda kısaca bu fonksiyonların temel özellikleri verilecektir. $S_p(x)$ fonksiyonu [16]

$$- \left((S'_p)^{(p-1)} \right)' = (p-1)S_p^{(p-1)}, \quad (3.1)$$

$$S_p(0) = 0, S'_p(0) = 1, \quad (3.2)$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür. $S_p(x)$ ve $S'_p(x)$ fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır ve her x için

$$|S_p(x)|^p + |S'_p(x)|^p = 1, \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlarlar. Diğer taraftan genelleştirilmiş pi sayısı da

$$\pi_p = 2 \frac{\frac{\pi}{p}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)},$$

şeklinde tanımlanır ve $S_p(x)$ fonksiyonunun birinci sıfırındır. $p = 2$ için genelleştirilmiş pi sayısı, klasik pi sayısına dönüşür.

Klasik tanjant ve kotanjant fonksiyonları genelleştirilerek, genelleştirilmiş tanjant ve kotanjant fonksiyonları elde edilmiştir. Sırası ile $p > 1$ için $S_p(x)$ ve $S'_p(x)$ fonksiyonları kullanılarak genelleştirilmiş tanjant fonksiyonu ve genelleştirilmiş kotanjant fonksiyonu sırası ile

$$T_p(x) = \frac{S_p(x)}{S'_p(x)}, x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi_p,$$
$$RT_p(x) = \frac{S'_p(x)}{S_p(x)}, x \neq k\pi_p,$$

şeklinde tanımlanır. $S_p(x)$ ve $S'_p(x)$ fonksiyonlarının bazı önemli özellikleri aşağıda verilecektir [16].

Teorem 3.1. [16]

a) $S'_p \neq 0$ olmak üzere

$$(S'_p)' = - \left| \frac{S_p}{S'_p} \right|^{p-2} S_p,$$

eşitliği vardır.

b)

$$\left(S_p S_p'^{(p-1)} \right)' = |S'_p|^p - (p-1)S_p^p = 1 - p|S_p|^p = (1-p) + p|S'_p|^p,$$

sağlanır.

İspat:

a)

$$-\left(S_p'^{(p-1)}\right)' = (p-1)S_p^{(p-1)},$$

olduğu bilinmektedir. Buradan

$$-S_p''S_p'^{(p-2)}(p-1) = (p-1)S_p^{(p-2)}S_p \Rightarrow S_p'' = -\left|\frac{S_p}{S_p'}\right|^{p-2} S_p,$$

olarak elde edilir.

b)

$$\left(S_p S_p'^{(p-1)}\right)' = S_p'(S_p')^{p-1} + S_p \left(S_p'^{(p-1)}\right)'$$

yazılabileceğinden ve $\left(S_p'^{(p-1)}\right)' = (1-p)S_p^{(p-1)}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(S_p S_p'^{(p-1)}\right)' &= S_p'(S_p')^{p-1} + S_p(1-p)S_p^{(p-1)} \\ &= (S_p')^p - (p-1)S_p^p \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2. [16]

$$-\left((S_p')^{(p-1)}\right)' = (p-1)S_p^{(p-1)}, \quad (3.4)$$

$$S_p(0) = 0, S_p'(0) = 1, \quad (3.5)$$

başlangıç değer problemi verilsin. Bu durumda

$$|S_p(x)|^p + |S_p'(x)|^p = 1,$$

şeklindedir.

İspat: (3.4) denkleminin her iki tarafı $S_p'(t)$ ile çarpılırsa

$$-\left((S_p')^{(p-1)}\right)' S_p' = (p-1)S_p^{(p-1)} S_p',$$

olup, bu ifade 0 dan x e kadar integre edilirse

$$-\int_0^x \left((S_p')^{(p-1)}\right)' S_p' dt = (p-1) \int_0^x S_p^{(p-1)} S_p' dt, \quad (3.6)$$

elde edilir. $\int_0^x \left((S_p')^{(p-1)}\right)' S_p' dt$ ve $\int_0^x S_p^{(p-1)} S_p' dt$ integrallerini değişken değiştirme ile hesaplayalım.

$$-\int_0^x \left((S_p')^{(p-1)}\right)' S_p' dt = -(p-1) \int_0^x S_p'^{(p-2)} S_p'' dt$$

$S'_p = u \Rightarrow S''_p dt = du$ olacak şekilde,

$$\begin{aligned} -\int_0^x \left((S'_p)^{(p-1)} \right)' S'_p dt &= -(p-1) \int u^{(p-1)} du = -(p-1) \frac{u^p}{p} \Big|_0^x = -(p-1) \frac{(S'_p)^p}{p} \Big|_0^x \\ &= \frac{-(p-1)}{p} \left((S'_p(x))^p - (S'_p(0))^p \right) \\ &= \frac{-(p-1)}{p} \left((S'_p(x))^p - 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\int_0^x S_p^{(p-1)} S'_p dt$ integrali için $S_p = u \Rightarrow S'_p dt = du$ olacağından

$$\begin{aligned} (p-1) \int_0^x S_p^{(p-1)} S'_p dt &= (p-1) \int u^{(p-1)} du = (p-1) \frac{u^p}{p} = (p-1) \frac{S_p^p}{p} \Big|_0^x \\ &= \frac{(p-1)}{p} \left((S_p(x))^p - (S_p(0))^p \right) \\ &= \frac{(p-1)}{p} (S_p(x))^p \end{aligned}$$

elde edilir. $\int_0^x \left((S'_p)^{(p-1)} \right)' S'_p dt$ ve $\int_0^x S_p^{(p-1)} S'_p dt$ integralleri (3.6) ifadesinde yazılırsa

$$|S_p(x)|^p + |S'_p(x)|^p = 1,$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.1. (Öz değer-Öz fonksiyon) [76]

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda s(x)] y = 0 \quad (3.7)$$

diferensiyel denkleminde Sturm-Liouville denklemi denir. Burada λ bir parametre olmak üzere, $p(x)$, $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığındaki bütün x değerleri için reel fonksiyonlardır. Çözümlerin varlığını garanti edebilmek için bu aralıkta $q(x)$ ve $s(x)$ sürekli, $p(x)$ ise türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu Sturm-Liouville sistemi için aşık olmaya (sıfıra özdeş olmayan) çözümler varsa λ değerlerine öz değer ve karşılık gelen çözümlere de öz fonksiyon denir.

Örnek 3.1. [76]

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

şeklindeki Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değer ve öz fonksiyonları aşağıdaki şekildedir. Bu problemin sıfır çözümünden başka bir çözümünü bulmak için λ nın 3 ayrı halini ($\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $\lambda > 0$) ayrı ayrı göz önüne almak gerekmektedir.

i) $\lambda < 0$ için $\lambda = -\mu^2$ alındığında,

$$y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow m^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\mu$$

olmak üzere

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

olur. Sınır şartları sırası ile uygulanırsa

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = -B$$

ve

$$y'(\pi) = 0 \Rightarrow \mu(Ae^{\mu\pi} - Be^{-\mu\pi}) = 0$$

elde edilir. $\mu \neq 0$ olduğu için $e^{\mu\pi} \neq 0$ ve $e^{-\mu\pi} \neq 0$ yazılabilir. O halde $A = B = 0$ olmalıdır. O zaman denklem $y(x) = 0$ aşıkâr çözümlüne sahiptir.

ii) $\lambda = 0$ için $y'' = 0$ elde edilir. Bu durumda verilen denklemin genel çözümü

$$y = Ax + B$$

olur. Sınır şartları uygulandığında

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y'(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0$$

elde edilir. O halde $\lambda = 0$ için de problem aşıkâr çözüme sahiptir.

iii) $\lambda > 0$ için durum daha farklıdır.

$$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm i\sqrt{\lambda}$$

olmak üzere genel çözüm

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= c_1 \left[\cos(\sqrt{\lambda}x) + i \sin(\sqrt{\lambda}x) \right] + c_2 \left[\cos(\sqrt{\lambda}x) - i \sin(\sqrt{\lambda}x) \right] \\ &= \cos(\sqrt{\lambda}x) (c_1 + c_2) + \sin(\sqrt{\lambda}x) i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

olur. Burada $c_1 + c_2 = A$ ve $i(c_1 - c_2) = B$ yerine yazılırsa,

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

olur. Sınır şartları uygulanırsa,

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

ve

$$y'(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

olur. $B = 0$ ve $\lambda \neq 0$ seçimi aşıkâr çözümü vereceğinden $B \neq 0$ ve $\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$ alınmalıdır.

$$\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2}$$

olup öz değlerler,

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$$

şeklindedir. Karşılık gelen öz fonksiyonlar, $B = c_n$ olduğunda

$$\theta_n(x) = c_n \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right), (n = 1, 2, \dots)$$

şeklindedir.

Teorem 3.3. (Osilasyon Teoremi) [77]

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(\alpha) \cos \alpha + y'(\alpha) \sin \alpha = 0, y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

ile verilen Sturm-Liouville sınır değ problemnin öz değlerinin sınırsız, artan bir dizisi $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ olsun. λ_m öz değrine karşılık gelen m . öz fonksiyonun $[a, b]$ aralğında tam olarak m tane sıfırı vardır.

Teorem 3.4. (Sturm-Karşılaştırma Teoremi) [77] Bir $[a, b]$ aralğında $p(x) > 0$ ve $p(x), q_1(x), q_2(x)$ sürekli fonksiyonlar ve de $q_2(x) > q_1(x)$ olsunlar. Ayrıca $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ ler sırasıyla

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q_1(x)y = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q_2(x)y = 0$$

denklemlerinin birer reel çözümü olsunlar. Eğer x_1 ve $x_2, \phi_1(x)$ in ardışık iki sıfır yeri ise, o takdirde $\phi_2(x)$ çözümü $x_1 < x < x_2$ açık aralğında en az bir sıfır yerine sahiptir.

Örnek 3.2.

$$y'' + (a^2 + x^4)y = 0$$

denkleminin herhangi bir $y(x)$ çözümünün $\left(\frac{n\pi}{a}, \frac{(n+1)\pi}{a}\right)$ aralğında en az bir sıfır yerine sahip olduğu gösterilecektir.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] + (a^2 + x^4)y = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] + a^2y = 0 \tag{3.9}$$

denklemleri verilsin. $p(x) = 1$, $q_1(x) = a^2 + x^4$, $q_2(x) = a^2$ olmak üzere verilen aralıkta $p(x) = 1 > 0$, $q_1(x) > q_2(x)$ sağlanır ve p , q_1 ve q_2 sürekli fonksiyonlardır. O halde Sturm-Karşılaştırma Teoremi gereğince (3.9) un herhangi bir $\phi(x)$ çözümünün iki sıfır yeri arasında (3.8) in bir çözümünün en az bir sıfır yeri vardır. (3.9) un herhangi bir $\phi(x)$ çözümünü amaca uygun olarak $\phi(x) = \sin ax$ olarak seçilsin. Buna göre $\frac{n\pi}{a}$ ve $\frac{(n+1)\pi}{a}$, $\phi(x)$ çözümünün ardışık iki sıfır yeri olup Sturm-Karşılaştırma teoremine göre (3.8) in herhangi bir çözümü

$$\frac{n\pi}{a} < x < \frac{(n+1)\pi}{a}$$

aralığında en az bir sıfır yerine sahip olacaktır.

Örnek 3.3. $x^2y'' + xy' + y = 0$ denkleminin çözümlerinden biri $y(x) = \sin(\ln x)$ dir. $xy'' + y' + \frac{e^x}{x}y = 0$ denkleminin herhangi bir $y(x)$ çözümünün $(1, e^\pi)$ aralığında en az bir sıfır yerine sahip olduğu gösterilecektir. Öncelikle $x^2y'' + xy' + y = 0$ denklemini self-adjoint forma dönüştürülürse

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{1}{x}y = 0 \quad (3.10)$$

denklemini elde edilir. Buna göre

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{e^x}{x}y = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dy}{dx} \right] + \frac{1}{x}y = 0 \quad (3.12)$$

denklemleri alınsın. $p(x) = x$, $q_1(x) = \frac{e^x}{x}$, $q_2(x) = \frac{1}{x}$ olmak üzere verilen aralıkta $p(x) = x > 0$, $q_1(x) > q_2(x)$ sağlanır ve p , q_1 ve q_2 sürekli fonksiyonlardır. O halde Sturm-Karşılaştırma Teoremi gereğince (3.12) nin herhangi bir $y(x)$ çözümünün iki sıfır yeri arasında (3.11) in bir çözümünün en az bir sıfır yeri vardır. (3.12) nin bir çözümü $y(x) = \sin(\ln x)$ olarak verildiğine göre ve 1 ve e^π , $y(x)$ çözümünün ardışık iki sıfır yeri olduğuna göre Sturm-Karşılaştırma teoremine göre (3.11) in herhangi bir çözümü $(1, e^\pi)$ aralığında en az bir sıfır yerine sahip olacaktır.

Örnek 3.4. $y'' + (m^2 + 3e^{\cosh x})y = 0$ denkleminin herhangi bir $y(x)$ çözümünün $[0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir ($m > 0$ sabit). Bunu göstermek için

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] + (m^2 + 3e^{\cosh x})y = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] + m^2y = 0 \quad (3.14)$$

denklemlerini ele alalım. $p(x) = 1$, $q_1(x) = m^2 + 3e^{\cosh x}$, $q_2(x) = m^2$ olmak üzere verilen aralıkta p , q_1 ve q_2 sürekli fonksiyonlardır ve $p(x) = 1 > 0$, $q_1(x) > q_2(x)$ sağlanır. Şimdi çözümü (3.13) den nispeten daha kolay olan (3.14) denklemi çözülürse

$$y(x) = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx$$

elde edilir. $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ alınsın. $\phi(x) = \sin mx$ fonksiyonunun sıfır yerleri

$$\sin mx = 0 \Rightarrow x_k = \frac{k\pi}{m}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

şeklindedir. (3.14) ün çözümü olan $\phi(x)$ in $[0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yeri vardır. Sturm-Karşılaştırma Teoreminden dolayı bu $\phi(x)$ çözümünün ardışık iki sıfır yeri arasında (3.13) ün çözümü olan $y(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfır yeri olacağından, $y(x)$ çözümünün $[0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yeri vardır.

Tanım 3.2. (Zaman Skalasında Picone Özdeşliği) [78] $t \in [\alpha, \beta] \cap \mathbb{T}$, $p_1^\Delta(t)$, $p_2^\Delta(t)$, $q_1(t)$ ve $q_2(t)$ reel ve $[\alpha, \beta] \cap \mathbb{T}$ aralığında rd -sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$(p_1(t)x^\Delta(t))^\Delta + q_1(t)x^\sigma(t) = 0, \quad (3.15)$$

$$(p_2(t)y^\Delta(t))^\Delta + q_2(t)y^\sigma(t) = 0, \quad (3.16)$$

şeklindedir. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası $\sigma(t)$, $\mathbb{T}$ de ileri sıçrama operatörü, y^Δ Δ -türevlenebilir ve $y^\sigma(t) = y(\sigma(t))$ olsun.

İlk olarak diferensiyel ve fark denklemleri ile ilgili bazı sonuçları hatırlayalım. Bilindiği gibi 1909 yılında Picone aşağıdaki özdeşliği kurmuştur. $x(t)$ ve $y(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$, $p_1'(t)$, $p_2'(t)$, $q_1(t)$ ve $q_2(t)$ reel ve $[\alpha, \beta]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$(p_1(t)x'(t))' + q_1(t)x(t) = 0, \quad (3.17)$$

$$(p_2(t)y'(t))' + q_2(t)y(t) = 0,$$

denklem sisteminin basit olmayan çözümleridir. Eğer $t \in [\alpha, \beta]$ için $y(t) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{x(t)}{y(t)} (p_1(t)x'(t)y(t) - p_2(t)y'(t)x(t))' \\ &= (p_1(t) - p_2(t))x^2(t) + (q_2(t) - q_1(t))x^2(t) + p_2(t) \left(\frac{x(t)y'(t)}{y(t)} - x'(t) \right)^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) denkleminde Sturm-Karşılaştırma Teoremi ikinci dereceden lineer diferensiyel denklemi (3.17) den kolaylıkla görülebilir.

Teorem 3.5. (Sturm-Picone Karşılaştırma Teoremi) [78] Farzedelim ki $x(t)$ ve $y(t)$ (3.17) denklem sisteminin çözümleri ve a, b de $x(t)$ nin iki ardışık sıfırları olsun. Eğer

$$p_1(t) \geq p_2(t) > 0, q_2(t) \geq q_1(t), t \in [a, b], \quad (3.19)$$

ise $y(t)$ $[a, b]$ aralığı üzerinde en az bir sıfıra sahiptir.

Tanım 3.3. (Operatörün Çekirdeği) [78] Bir $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineer operatörünün çekirdeği (kernel)

$$\ker A = \{y \in \mathcal{D}(A) \mid Ay = 0\},$$

kümesi olarak tanımlanır. $\ker A$ nın $\mathcal{H}$ içinde bir alt küme ve $A0 = 0$ olduğundan her zaman $0 \in \ker A$ olur. Bazı durumlarda $\ker A$ sadece 0 elemanından oluşabilir, bazı durumlarda da $\ker A$ içinde sıfırdan farklı elemanlar bulunabilir.

Teorem 3.6. [78] Herhangi $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineer operatörünün $\ker A$ çekirdeği $\mathcal{H}$ içinde bir lineer alt kümedir:

- i) $y_1, y_2 \in \ker A \Rightarrow y_1 + y_2 \in \ker A$,
- ii) $y \in \ker A \Rightarrow \alpha y \in \ker A, \forall \alpha$ sayısı için.

İspat: i) $y_1, y_2 \in \ker A$ ise $y_1 + y_2 \in \ker A$ olduğu gösterilecektir.

$$y_1, y_2 \in \ker A \Rightarrow Ay_1 = 0, Ay_2 = 0.$$

O halde

$$A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 \in \ker A.$$

ii) $y \in \ker A$ ve α keyfi sayı ise $\alpha y \in \ker A$ olduğu gösterilecektir.

$$y \in \ker A \Rightarrow Ay = 0.$$

O halde $\forall \alpha$ sayısı için

$$A(\alpha y) = \alpha Ay = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha y \in \ker A.$$

4 ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE p –LAPLACIAN STURM-LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu kısımda aşağıdaki p –Laplacian denklemini içeren

$$Ly^{(p-1)} = - \left(y^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} (t) + (p-1)q(t)y^{\sigma(p-1)}(t) = \lambda(p-1)y^{\sigma(p-1)}(t), t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}, \quad (4.1)$$

$$y^{\Delta(p-1)}(\rho(a)) = 0, \quad (4.2)$$

$$\alpha y^{(p-1)}(b) + \beta y^{\Delta(p-1)}(b) = 0, \quad (4.3)$$

problemni ele alınsın. (4.1) denkleminde keyfi zaman skalasında p –Laplacian Sturm-Liouville denkleminin denir. (4.1)-(4.3) problemine ise $\mathbb{T}$ zaman skalasında p –Laplacian Sturm-Liouville sınır değeri problemi denir. Burada $y^{(p-1)} \in C_{rd}^2([\rho(a), b], \mathbb{R})$, $q \in L_2^{\Delta}[\rho(a), b]$, $p > 1$ ve λ spektral parametredir. Ayrıca $y^{\sigma(p-1)} = y^{(p-1)} \circ \sigma$, $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$ şeklindedir. (4.1) denkleminin $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olarak alındığında

$$- \left(y'^{(p-1)} \right)' (t) = (p-1)(\lambda - q(t))y^{(p-1)}(t), \quad (4.4)$$

olur. Bu denklemin 1–boyutlu p –Laplacian Sturm-Liouville denkleminin denir. Burada $p = 2$ alınırsa, (4.4) denkleminin

$$-y''(t) = (\lambda - q(t))y(t), t \in [a, b],$$

şeklindeki klasik Sturm-Liouville denkleminin haline gelir.

Klasik p –Laplacian Sturm-Liouville sınır değeri problemi birçok matematikçi tarafından incelenmiştir [17, 19]. Aynı şekilde klasik anlamda Sturm-Liouville sınır değeri problemi $p = 2$ için keyfi zaman skalası üzerinde çalışılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir [79, 80]. Bu kısımda ise p –Laplacian Sturm-Liouville sınır değeri problemi keyfi zaman skalası üzerinde çalışılacaktır.

Teorem 4.1. (4.1)-(4.3) p –Laplacian Sturm-Liouville sınır değeri probleminin öz değeri basittir.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}$ spektral parametre ve $y_1^{(p-1)}(t)$, $y_2^{(p-1)}(t)$ (4.1)-(4.3) p –Laplacian Sturm-Liouville sınır değeri probleminin aynı λ öz değeri karşılık gelen iki öz fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ly_1^{(p-1)} &= - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} (t) + (p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)}(t) = \lambda(p-1)y_1^{\sigma(p-1)}(t), \\ Ly_2^{(p-1)} &= - \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} (t) + (p-1)q(t)y_2^{\sigma(p-1)}(t) = \lambda(p-1)y_2^{\sigma(p-1)}(t), \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler sırasıyla $y_2^{\sigma(p-1)}$ ve $y_1^{\sigma(p-1)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta (t) y_2^{\sigma(p-1)}(t) + (p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)}(t)y_2^{\sigma(p-1)}(t) &= \lambda(p-1)y_1^{\sigma(p-1)}(t)y_2^{\sigma(p-1)}(t), \\ - \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta (t) y_1^{\sigma(p-1)}(t) + (p-1)q(t)y_2^{\sigma(p-1)}(t)y_1^{\sigma(p-1)}(t) &= \lambda(p-1)y_2^{\sigma(p-1)}(t)y_1^{\sigma(p-1)}(t), \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_1^{\sigma(p-1)} - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_2^{\sigma(p-1)} = 0, \quad (4.5)$$

elde edilir. Wronskian tanım gereğince (4.5) denklemi

$$\left(y_1^{(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} - y_2^{(p-1)} y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta = 0, \quad (4.6)$$

olarak yazılır. (4.6) eşitliğinin $\rho(a)$ dan b ye Δ -integrali alınır

$$W \left[y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)} \right] \Big|_{\rho(a)}^b = c_1,$$

elde edilir. (4.2)-(4.3) sınır koşulları kullanılarak $c_1 = 0$ bulunur.

$$\left(\frac{y_2^{(p-1)}}{y_1^{(p-1)}} \right)^\Delta = 0 \Rightarrow \frac{y_2^{(p-1)}}{y_1^{(p-1)}} = c_2.$$

Buradan $y_2^{(p-1)} = c_2 y_1^{(p-1)}$ (c_1, c_2 sabit) yazılır. Böylece $y_1^{(p-1)}$ ve $y_2^{(p-1)}$ öz fonksiyonları lineer bağımlıdır. Bu çelişkidendir. Bu yüzden p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerleri basittir.

Teorem 4.2. $y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)} \in C_{rd}^2([\rho(a), b], \mathbb{R})$, (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer probleminin iki öz fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) = y_1^{(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} - y_2^{(p-1)} y_1^{\Delta(p-1)}$$

olmak üzere

(a) $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ olmak üzere

$$(Ly_1^{(p-1)})y_2^{\sigma(p-1)} - (Ly_2^{(p-1)})y_1^{\sigma(p-1)} = W^\Delta(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}),$$

elde edilir.

(b)

$$\left\langle Ly_1^{(p-1)}, y_2^{\sigma(p-1)} \right\rangle - \left\langle Ly_2^{(p-1)}, y_1^{\sigma(p-1)} \right\rangle = W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(b) - W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(\rho(a)),$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliklere sırası ile Sturm-Liouville problemi için p -Lagrange ve p -Green eşitlikleri denir.

İspat:

(a) Wronskian tanımı ve çarpımın Δ -türevi kuralı gereğince

$$\begin{aligned}
 W^\Delta(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) &= \left(y_1^{(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} - y_2^{(p-1)} y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \\
 &= \left(y_1^{(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta - \left(y_2^{(p-1)} y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \\
 &= y_1^{\Delta(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} + y_1^{\sigma(p-1)} \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta - y_1^{\Delta(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_2^{\sigma(p-1)} \\
 &= -y_1^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right) + y_2^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right),
 \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeye $(p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)}y_2^{\sigma(p-1)}$ terimi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
 W^\Delta(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) &= -y_1^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right) + y_2^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right) \\
 &\quad + (p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)}y_2^{\sigma(p-1)} - (p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)}y_2^{\sigma(p-1)} \\
 &= -y_1^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)q(t)y_2^{\sigma(p-1)} \right) \\
 &\quad + y_2^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)} \right) \\
 &= (Ly_1^{(p-1)})y_2^{\sigma(p-1)} - (Ly_2^{(p-1)})y_1^{\sigma(p-1)},
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece p -Lagrange eşitliği sağlanır.

(b) $L_2^\Delta[\rho(a), b]$ uzayındaki iç çarpım ve wronskian tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \langle Ly_1^{(p-1)}, y_2^{\sigma(p-1)} \rangle - \langle Ly_2^{(p-1)}, y_1^{\sigma(p-1)} \rangle &= \int_{\rho(a)}^b \left[\left(Ly_1^{(p-1)} \right) y_2^{\sigma(p-1)} - \left(Ly_2^{(p-1)} \right) y_1^{\sigma(p-1)} \right] \Delta t \\
 &= \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)} \right) y_2^{\sigma(p-1)} \right. \\
 &\quad \left. - \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)q(t)y_2^{\sigma(p-1)} \right) y_1^{\sigma(p-1)} \right\} \Delta t \\
 &= \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_1^{\sigma(p-1)} - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_2^{\sigma(p-1)} \right\} \Delta t \\
 &= \int_{\rho(a)}^b \left\{ W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) \right\}^\Delta \Delta t \\
 &= W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(b) - W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(\rho(a)),
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece p -Green formülü ispatlanmıştır.

Teorem 4.3. $y_1^{(p-1)}(\tau, \lambda_1)$ ve $y_2^{(p-1)}(\tau, \lambda_2)$ fonksiyonları (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer probleminin $\lambda_1 \neq \lambda_2$ öz değerlerine karşılık gelen iki öz fonksiyonu olsun.

Buna göre

$$(p-1) \int_{\rho(a)}^b y_1^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_2) \Delta\tau = 0,$$

olur.

İspat: $y_1^{(p-1)}$ ve $y_2^{(p-1)}$ verilen problemin öz fonksiyonları olduğundan

$$\begin{aligned} - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(\tau) + (p-1)q(\tau)y_1^{\sigma(p-1)}(\tau) &= \lambda_1(p-1)y_1^{\sigma(p-1)}(\tau), \\ - \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(\tau) + (p-1)q(\tau)y_2^{\sigma(p-1)}(\tau) &= \lambda_2(p-1)y_2^{\sigma(p-1)}(\tau), \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklemler sırasıyla $y_2^{\sigma(p-1)}$ ve $y_1^{\sigma(p-1)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(\tau) y_2^{\sigma(p-1)}(\tau) + (p-1)q(\tau)y_1^{\sigma(p-1)}(\tau)y_2^{\sigma(p-1)}(\tau) &= \lambda_1(p-1)y_1^{\sigma(p-1)}(\tau)y_2^{\sigma(p-1)}(\tau), \\ - \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(\tau) y_1^{\sigma(p-1)}(\tau) + (p-1)q(\tau)y_2^{\sigma(p-1)}(\tau)y_1^{\sigma(p-1)}(\tau) &= \lambda_2(p-1)y_2^{\sigma(p-1)}(\tau)y_1^{\sigma(p-1)}(\tau), \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılır ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &\left\{ y_2^{(p-1)}(\tau, \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda_1) - y_1^{(p-1)}(\tau, \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda_2) \right\}^\Delta \\ &= (p-1)(\lambda_2 - \lambda_1) y_1^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_2), \end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın $\rho(a)$ noktasından b noktaya Δ -integrali alınır ve (4.2)-(4.3) sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\int_{\rho(a)}^b \left\{ y_2^{(p-1)}(\tau, \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda_1) - y_1^{(p-1)}(\tau, \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda_2) \right\}^\Delta \Delta\tau \\ &= (p-1)(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\rho(a)}^b y_1^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_2) \Delta\tau \\ &= -y_1^{(p-1)}(b, \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(b, \lambda_2) + y_2^{(p-1)}(b, \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(b, \lambda_1) \\ &\quad + y_1^{(p-1)}(\rho(a), \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda_2) - y_2^{(p-1)}(\rho(a), \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için

$$(p-1) \int_{\rho(a)}^b y_1^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda_2) \Delta t = 0,$$

eşitliği sağlanır. Bu ise farklı öz değerlere karşılık gelen $y_1^{(p-1)}(\tau, \lambda_1)$ ve $y_2^{(p-1)}(\tau, \lambda_2)$ öz fonksiyonlarının her zaman ortogonal olduğunu gösterir.

Teorem 4.4. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ olmak üzere (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer problemi için

$$y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) = -(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau,$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $v \neq \lambda \in \mathbb{R}$, (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerleri olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left\{ y^{(p-1)}(t, v) y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, v) y^{(p-1)}(t, \lambda) \right\}^{\Delta} \\ &= y^{\Delta(p-1)}(t, v) y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) + y^{\sigma(p-1)}(t, v) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \right)^{\Delta} \\ & \quad - y^{\Delta(p-1)}(t, v) y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, v) \right)^{\Delta} \\ &= y^{\sigma(p-1)}(t, v) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \right)^{\Delta} - y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, v) \right)^{\Delta} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &= y^{\sigma(p-1)}(t, v) \{ -(p-1)(\lambda - q(t)) \} y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \\ & \quad - y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \{ -(p-1)(v - q(t)) \} y^{\sigma(p-1)}(t, v) \\ &= -(p-1) \lambda y^{\sigma(p-1)}(t, v) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) + (p-1) q(t) y^{\sigma(p-1)}(t, v) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \\ & \quad + (p-1) v y^{\sigma(p-1)}(t, v) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) - (p-1) q(t) y^{\sigma(p-1)}(t, v) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \\ &= (v - \lambda) (p-1) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) y^{\sigma(p-1)}(t, v), \end{aligned}$$

olmak üzere son eşitliğin her iki tarafı $\lambda - v$ ile bölünür, $v \rightarrow \lambda$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow \lambda} \frac{\left\{ y^{(p-1)}(t, v) y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, v) y^{(p-1)}(t, \lambda) \right\}^{\Delta}}{\lambda - v} \\ &= -(p-1) \lim_{v \rightarrow \lambda} \left\{ y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) y^{\sigma(p-1)}(t, v) \right\} \end{aligned}$$

olacağından

$$\left\{ y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) \right\}^{\Delta} = -(p-1) \left(y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right)^2,$$

elde edilir. Bu ifadenin $\rho(a)$ noktasından, t noktasına Δ -integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\rho(a)}^t \left\{ y^{(p-1)}(\tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(\tau, \lambda) \right\}^{\Delta} \Delta \tau \\ &= -(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) \\
& - y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) + y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) \\
& = -(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau,
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.2) sınır şartından $y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 1$ ve $y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa $\frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0$ ve $\frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0$ elde edilir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned}
& y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) \\
& = -(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau,
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.5. (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerleri reeldir.

İspat: $\overline{\lambda_0}$ kompleks öz değer ve $\overline{y^{(p-1)}}(t, \overline{\lambda_0})$, $\overline{\lambda_0}$ öz değerine karşılık gelen (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\{ y^{\Delta(p-1)} \overline{y^{(p-1)}} - \overline{y^{\Delta(p-1)}} y^{(p-1)} \right\}^{\Delta} &= y^{\Delta(p-1)} \overline{y^{\Delta(p-1)}} + \left(y^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} \overline{y^{\sigma(p-1)}} \\
&\quad - \overline{y^{\Delta(p-1)}} y^{\Delta(p-1)} - \left(\overline{y^{\Delta(p-1)}} \right)^{\Delta} y^{\sigma(p-1)} \\
&= \left(y^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} \overline{y^{\sigma(p-1)}} - \left(\overline{y^{\Delta(p-1)}} \right)^{\Delta} y^{\sigma(p-1)} \\
&= \left\{ (p-1) (q(t) - \lambda_0) y^{\sigma(p-1)} \right\} \overline{y^{\sigma(p-1)}} \\
&\quad - \left\{ (p-1) (q(t) - \overline{\lambda_0}) \overline{y^{\sigma(p-1)}} \right\} y^{\sigma(p-1)} \\
&= (p-1) q(t) \left| y^{\sigma(p-1)} \right|^2 - (p-1) \lambda_0 \left| y^{\sigma(p-1)} \right|^2 \\
&\quad - (p-1) q(t) \left| y^{\sigma(p-1)} \right|^2 + (p-1) \overline{\lambda_0} \left| y^{\sigma(p-1)} \right|^2 \\
&= (p-1) (\overline{\lambda_0} - \lambda_0) \left| y^{\sigma(p-1)} \right|^2,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville probleminin (4.2)-(4.3) sınır koşulları dikkate alınarak $\rho(a)$ noktasından b noktasına Δ -integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
(p-1) (\overline{\lambda_0} - \lambda_0) \int_{\rho(a)}^b \left| y^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \Delta t &= y^{\Delta(p-1)}(b) \overline{y^{(p-1)}}(b) - \overline{y^{\Delta(p-1)}}(b) y^{(p-1)}(b) \\
&\quad - y^{\Delta(p-1)}(\rho(a)) \overline{y^{(p-1)}}(\rho(a)) + \overline{y^{\Delta(p-1)}}(\rho(a)) y^{(p-1)}(\rho(a)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\overline{\lambda_0} \neq \lambda_0$ için

$$(p-1) \int_{\rho(a)}^b \left| y^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \Delta t = 0 \Rightarrow y^{\sigma(p-1)}(t) = 0,$$

olur. Bu bir çelişkidir. Çünkü aşikar çözüme karşılık gelen $\overline{\lambda_0}$ verilen problemin öz değeri olamaz. Dolayısıyla (4.1)-(4.3) p -Laplacian Sturm-Liouville sınır değer probleminin öz değerleri reeldir.

Şimdi Sturm-Liouville denklemi için aşağıdaki Picone bağıntısı verilecektir. Burada $Ker A$, A matrisinin çekirdeği ve $def M = \dim Ker A$ olsun. Ayrıca, $\alpha \neq 0$ için $\alpha^\dagger = 1/\alpha$, ve $0^\dagger = 0$ şeklindedir.

Teorem 4.6. (Picone Bağıntısı) $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ olsun.

$$Kery^{(p-1)}(t) \subset Ker x^{(p-1)}(t) \text{ ve } Kery^{\sigma(p-1)}(t) \subset Ker x^{\sigma(p-1)}(t),$$

$x^{(p-1)} \in C_{rd}^2([\rho(a), b], \mathbb{R})$ ve $y^{(p-1)}, L(y^{(p-1)}) + \lambda(1-p)y^{\sigma(p-1)} = 0$ denkleminin çözümü olsun. t noktasında $W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) = x^{(p-1)}y^{\Delta(p-1)} - y^{(p-1)}x^{\Delta(p-1)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \{L(x^{(p-1)}) - \lambda(p-1)x^{\sigma(p-1)}\}x^{\sigma(p-1)} &= [x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})]^\Delta \\ &\quad + (y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}), \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

İspat: $(y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})(t) \neq 0$ olsun.

$$\begin{aligned} [x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})]^\Delta &= \left[\frac{x^{(p-1)}}{y^{p-1}} W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\Delta \\ &= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} W^\Delta(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \\ &\quad + \left(\frac{x^{\Delta(p-1)}y^{(p-1)} - x^{(p-1)}y^{\Delta(p-1)}}{y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)}} \right) W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \\ &= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} W^\Delta(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) - \frac{W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})}{y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)}} \\ &= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} \left\{ -L(y^{(p-1)})x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} \\ &\quad - \frac{W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})}{y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)}} \\ &= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} \left\{ -\lambda(p-1)y^{\sigma(p-1)}x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} \\ &\quad - \frac{W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})}{y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ L(x^{(p-1)}) - \lambda(p-1)x^{\sigma(p-1)} \right\} x^{\sigma(p-1)} \\
&\quad - (y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}),
\end{aligned}$$

bulunur. t sağ saçılmış iken $(y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})(t) = 0$ olsun. O zaman $(x^{(p-1)}x^{\sigma(p-1)})(t) = 0$ dır ve

$$\begin{aligned}
W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) &= x^{(p-1)}y^{\Delta(p-1)} - y^{(p-1)}x^{\Delta(p-1)} \\
&= x^{(p-1)} \left(\frac{y^{\sigma(p-1)} - y^{(p-1)}}{\mu} \right) - y^{(p-1)} \left(\frac{x^{\sigma(p-1)} - x^{(p-1)}}{\mu} \right) \\
&= \frac{x^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)} - y^{(p-1)}x^{\sigma(p-1)}}{\mu} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

olur. t sol saçılmış ise,

$$x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})$$

fonksiyonu t noktasında süreklidir. Aynı şekilde t sol yoğun ise yine bu noktada süreklidir.

L'Hospital kuralına göre

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow t^-} \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right] (s) &= \frac{x^{\Delta(p-1)}(t)}{y^{\Delta(p-1)}(t)} W^{\Delta}(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \\
&= 0 \\
&= \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right] (t).
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\Delta \\
&= \frac{\left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\sigma - x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})}{\mu} \\
&= \frac{\left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\sigma}{\mu} \\
&= x^{\sigma(p-1)}(y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^{\Delta}(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \\
&= x^{\sigma(p-1)}(y^{\sigma(p-1)})^\dagger \left\{ -L(y^{(p-1)})x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} \\
&= x^{\sigma(p-1)}(y^{\sigma(p-1)})^\dagger \left\{ -\lambda(p-1)y^{\sigma(p-1)}x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} \\
&= \left\{ L(x^{(p-1)}) - \lambda(p-1)x^{\sigma(p-1)} \right\} x^{\sigma(p-1)} \\
&= \left\{ L(x^{(p-1)}) - \lambda(p-1)x^{\sigma(p-1)} \right\} x^{\sigma(p-1)} - \left(y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)} \right)^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}),
\end{aligned}$$

olur. t sağ yoğun $y^{(p-1)}(t) = y^{(p-1)}(\sigma(t)) = 0$ ise, $x^{(p-1)}(t) = x^{(p-1)}(\sigma(t)) = 0$ eşitliği de

sağlanır. L'Hospital kuralı gereğince

$$\begin{aligned}
& \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\Delta \\
&= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right](\sigma(t)) - \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right](s)}{\sigma(t) - s} \\
&= \lim_{s \rightarrow t} \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger \right](s) \lim_{s \rightarrow t} \frac{W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(s) - W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(t)}{s - t} \\
&= \frac{x^{\Delta(p-1)}(t)}{y^{\Delta(p-1)}(t)} W^\Delta(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(t) \\
&= 0 \\
&= \{L(x^{(p-1)}) - \lambda(p-1)x^{\sigma(p-1)}\}(t)x^{\sigma(p-1)}(t) - (y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(t),
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise teoremi ispatlar.

5 ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE p -LAPLACIAN DİFÜZYON SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu kısımda

$$\begin{aligned} Ly^{(p-1)} &= - \left(y^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} (t) + (p-1) \{q(t) + 2\lambda r(t)\} y^{\sigma(p-1)}(t) \\ &= \lambda^2(p-1)y^{\sigma(p-1)}(t), t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

şeklindeki p -Laplacian difüzyon denklemi

$$y^{\Delta(p-1)}(\rho(a)) = 0, \quad (5.2)$$

$$\alpha y^{(p-1)}(b) + \beta y^{\Delta(p-1)}(b) = 0, \quad (5.3)$$

sınır değer koşulları ile ele alınmıştır. (5.1)-(5.3) problemine $\mathbb{T}$ zaman skalasında p -Laplacian difüzyon sınır değer problemi denir. Burada λ spektral parametre, $q, r \in L_2^{\Delta}[\rho(a), b]$, $y^{(p-1)} \in C_{rd}^2([\rho(a), b], \mathbb{R})$, $p > 1$ şeklindedir. Ayrıca $y^{\sigma(p-1)} = y^{(p-1)}(\sigma)$, $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $(\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$ dir. (5.1) denkleminde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olarak alındığında aşağıdaki klasik p -Laplacian difüzyon denklemi elde edilir.

$$\left(y'^{(p-1)} \right)'(t) = (p-1)(\lambda^2 - q(t) - 2\lambda r(t))y^{(p-1)}(t). \quad (5.4)$$

Eğer, (5.4) de $p = 2$ alınırsa

$$-y''(t) + (q(t) + 2\lambda r(t))y(t) = \lambda^2 y(t), t \in [a, b],$$

şeklindeki klasik difüzyon denklemi elde edilir. Bu denklemin spektral özellikleri ile ilgili literatürde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Özellikle 2013 yılında Koyunbakan [47], p -Laplacian difüzyon denklemini ele almış ve Prüfer dönüşümü yardımı ile bu problem için öz değer ve öz fonksiyonların klasik anlamda asimptotik ifadelerini bulmuştur. 2016 yılında Gulsen ve Yılmaz [48] aynı şekilde p -Laplacian difüzyon denklemini ele almış ve önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Daha sonra Yılmaz ve Gulsen [49] zaman skalası üzerinde difüzyon sınır değer problemini incelemişlerdir. Bu kısımda amaç tüm noktaları sağ yoğun olan bir zaman skalası üzerinde p -Laplacian difüzyon sınır değer problemi için önemli sonuçlar elde etmektir. (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz değerlerinin basit ve reel, öz fonksiyonlarının klasik manada ortogonal olduğu bilinmektedir [31]. Bu kısımda bu bilinen özellikler keyfi zaman skalasına genelleştirilecektir.

Teorem 5.1. (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz değerleri basittir.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}$ spektral parametre ve $y_1^{(p-1)}(t)$, $y_2^{(p-1)}(t)$, (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin λ öz değerine karşılık gelen iki öz fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ly_1^{(p-1)} &= -\left(y_1^{\Delta(p-1)}\right)^\Delta(t) + (p-1)\{q(t) + 2\lambda r(t)\}y_1^{\sigma(p-1)}(t) = \lambda^2(p-1)y_1^{\sigma(p-1)}(t), \\ Ly_2^{(p-1)} &= -\left(y_2^{\Delta(p-1)}\right)^\Delta(t) + (p-1)\{q(t) + 2\lambda r(t)\}y_2^{\sigma(p-1)}(t) = \lambda^2(p-1)y_2^{\sigma(p-1)}(t), \end{aligned}$$

yazılır. Bu denklemler sırasıyla $y_2^{\sigma(p-1)}$ ve $y_1^{\sigma(p-1)}$ ile çarpılır,

$$\begin{aligned} & -\left(y_1^{\Delta(p-1)}\right)^\Delta(t)y_2^{\sigma(p-1)}(t) + (p-1)\{q(t) + 2\lambda r(t)\}y_1^{\sigma(p-1)}(t)y_2^{\sigma(p-1)}(t) \\ &= \lambda^2(p-1)y_1^{\sigma(p-1)}(t)y_2^{\sigma(p-1)}(t), \\ & -\left(y_2^{\Delta(p-1)}\right)^\Delta(t)y_1^{\sigma(p-1)}(t) + (p-1)\{q(t) + 2\lambda r(t)\}y_2^{\sigma(p-1)}(t)y_1^{\sigma(p-1)}(t) \\ &= \lambda^2(p-1)y_2^{\sigma(p-1)}(t)y_1^{\sigma(p-1)}(t), \end{aligned}$$

ve taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left(y_2^{\Delta(p-1)}\right)^\Delta y_1^{\sigma(p-1)} - \left(y_1^{\Delta(p-1)}\right)^\Delta y_2^{\sigma(p-1)} = 0, \quad (5.5)$$

olacağından, Wronskian tanımı gereğince (5.5) denklemi

$$\left(y_1^{(p-1)}y_2^{\Delta(p-1)} - y_2^{(p-1)}y_1^{\Delta(p-1)}\right)^\Delta = 0, \quad (5.6)$$

olarak yazılır. (5.6) eşitliğinin $\rho(a)$ noktasından b noktasına Δ -integrali alınır

$$W\left[y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}\right] \Big|_{\rho(a)}^b = c_1,$$

elde edilir. (5.2)-(5.3) sınır koşulları kullanılarak $c_1 = 0$ bulunur. Buradan ise

$$\left(\frac{y_1^{(p-1)}}{y_2^{(p-1)}}\right)^\Delta = 0 \Rightarrow \frac{y_1^{(p-1)}}{y_2^{(p-1)}} = c_2,$$

ve $y_1^{(p-1)} = c_2 y_2^{(p-1)}$ (c_1, c_2 sabit) yazılır. Bu ise $y_1^{(p-1)}$ ve $y_2^{(p-1)}$ öz fonksiyonlarının lineer bağımlı öz fonksiyonları olduğunu ifade eder. Dolayısı ile p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz değerleri basittir.

Teorem 5.2. $y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)} \in C_{rd}^2([\rho(a), b], \mathbb{R})$, (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin iki öz fonksiyonu olsun.

$$W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) = y_1^{(p-1)}y_2^{\Delta(p-1)} - y_2^{(p-1)}y_1^{\Delta(p-1)}$$

olmak üzere

(a) $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ üzerinde

$$(Ly_1^{(p-1)})y_2^{\sigma(p-1)} - (Ly_2^{(p-1)})y_1^{\sigma(p-1)} = W^\Delta(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}),$$

olur.

(b)

$$\langle Ly_1^{(p-1)}, y_2^{\sigma(p-1)} \rangle - \langle Ly_2^{(p-1)}, y_1^{\sigma(p-1)} \rangle = W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(b) - W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(\rho(a)),$$

şeklinde. Bu eşitlikler difüzyon probleminin p -Lagrange ve p -Green eşitlikleridir.

İspat:

(a) Wronskian tanımı ve çarpımın Δ -türevi kuralı gereğince

$$\begin{aligned} W^\Delta(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) &= \left(y_1^{(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} - y_2^{(p-1)} y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \\ &= \left(y_1^{(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta - \left(y_2^{(p-1)} y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \\ &= y_1^{\Delta(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} + y_1^{\sigma(p-1)} \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta - y_1^{\Delta(p-1)} y_2^{\Delta(p-1)} \\ &\quad - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_2^{\sigma(p-1)} \\ &= -y_1^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right) + y_2^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right), \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeye $(p-1)(q(t) + 2\lambda r(t))y_1^{\sigma(p-1)}y_2^{\sigma(p-1)}$ terimi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} W^\Delta(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) &= -y_1^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right) + y_2^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta \right) \\ &\quad + (p-1)(q(t) + 2\lambda r(t))y_1^{\sigma(p-1)}y_2^{\sigma(p-1)} \\ &\quad - (p-1)(q(t) + 2\lambda r(t))y_1^{\sigma(p-1)}y_2^{\sigma(p-1)} \\ &= -y_1^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)(q(t) + 2\lambda r(t))y_2^{\sigma(p-1)} \right) \\ &\quad + y_2^{\sigma(p-1)} \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)(q(t) + 2\lambda r(t))y_1^{\sigma(p-1)} \right) \\ &= (Ly_1^{(p-1)})y_2^{\sigma(p-1)} - (Ly_2^{(p-1)})y_1^{\sigma(p-1)}, \end{aligned}$$

bulunur. Böylece p -Lagrange eşitliği sağlanır.

(b) $L_2^\Delta[\rho(a), b]$ uzayındaki iç çarpım ve Wronskian tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle Ly_1^{(p-1)}, y_2^{\sigma(p-1)} \rangle - \langle Ly_2^{(p-1)}, y_1^{\sigma(p-1)} \rangle &= \int_{\rho(a)}^b \left[(Ly_1^{(p-1)})y_2^{\sigma(p-1)} - (Ly_2^{(p-1)})y_1^{\sigma(p-1)} \right] \Delta t \\ &= \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left(- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)(q(t) + 2\lambda r(t))y_1^{\sigma(p-1)} \right) y_2^{\sigma(p-1)} \right. \\ &\quad \left. - \left(- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta + (p-1)(q(t) + 2\lambda r(t))y_2^{\sigma(p-1)} \right) y_1^{\sigma(p-1)} \right\} \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_1^{\sigma(p-1)} - \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta y_2^{\sigma(p-1)} \right\} \Delta t \\
&= \int_{\rho(a)}^b \left\{ W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)}) \right\}^\Delta \Delta t \\
&= W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(b) - W(y_1^{(p-1)}, y_2^{(p-1)})(\rho(a)),
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece p -Green formülü ispatlanmıştır.

Teorem 5.3. $y_1^{(p-1)}(t, \lambda_1)$, $y_2^{(p-1)}(t, \lambda_2)$ fonksiyonları $\lambda_1 \neq \lambda_2$ öz değerlerine karşılık gelen (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz fonksiyonları olsun. Buna göre

$$(p-1)(\lambda_1 + \lambda_2) \int_{\rho(a)}^b y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t - 2(p-1) \int_{\rho(a)}^b r(t) y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t = 0,$$

şeklindedir.

İspat:

$$\begin{aligned}
- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(t) + (p-1) \{q(t) + 2\lambda_1 r(t)\} y_1^{\sigma(p-1)}(t) &= \lambda_1^2(p-1) y_1^{\sigma(p-1)}(t), \\
- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(t) + (p-1) \{q(t) + 2\lambda_2 r(t)\} y_2^{\sigma(p-1)}(t) &= \lambda_2^2(p-1) y_2^{\sigma(p-1)}(t),
\end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. Bu denklemler sırasıyla $y_2^{\sigma(p-1)}$ ve $y_1^{\sigma(p-1)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&- \left(y_1^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(t) y_2^{\sigma(p-1)}(t) + (p-1) \{q(t) + 2\lambda_1 r(t)\} y_1^{\sigma(p-1)}(t) y_2^{\sigma(p-1)}(t) \\
&= \lambda_1^2(p-1) y_1^{\sigma(p-1)}(t) y_2^{\sigma(p-1)}(t), \\
&- \left(y_2^{\Delta(p-1)} \right)^\Delta(t) y_1^{\sigma(p-1)}(t) + (p-1) \{q(t) + 2\lambda_2 r(t)\} y_2^{\sigma(p-1)}(t) y_1^{\sigma(p-1)}(t) \\
&= \lambda_2^2(p-1) y_2^{\sigma(p-1)}(t) y_1^{\sigma(p-1)}(t),
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa çıkarılır ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left\{ y_2^{(p-1)}(t, \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(t, \lambda_1) - y_1^{(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(t, \lambda_2) \right\}^\Delta \\
&= (p-1) \left\{ (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) - 2(\lambda_2 - \lambda_1) r(t) \right\} y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2),
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın $\rho(a)$ noktasından b noktasına Δ -integrali alınır ve sınır koşulları kullanılırsa

$$\int_{\rho(a)}^b \left\{ y_2^{(p-1)}(t, \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(t, \lambda_1) - y_1^{(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(t, \lambda_2) \right\}^\Delta \Delta t$$

$$\begin{aligned}
&= (p-1)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_{\rho(a)}^b y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t \\
&\quad - 2(p-1)(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\rho(a)}^b r(t) y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t \\
&= -y_1^{(p-1)}(b, \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(b, \lambda_2) + y_2^{(p-1)}(b, \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(b, \lambda_1) \\
&\quad + y_1^{(p-1)}(\rho(a), \lambda_1) y_2^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda_2) - y_2^{(p-1)}(\rho(a), \lambda_2) y_1^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda_1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için

$$(p-1)(\lambda_1 + \lambda_2) \int_{\rho(a)}^b y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t - 2(p-1) \int_{\rho(a)}^b r(t) y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t = 0,$$

olur. Bu ise farklı öz değerlere karşılık gelen $y_1^{(p-1)}(t, \lambda_1)$ ve $y_2^{(p-1)}(t, \lambda_2)$ öz fonksiyonlarının her zaman ortogonal olduğunu gösterir.

Teorem 5.4. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ olmak üzere (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer problemi için

$$\begin{aligned}
&y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) \\
&= -2\lambda(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau + 2(p-1) \int_{\rho(a)}^t r(\tau) \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau,
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $v \neq \lambda$ olmak üzere $v, \lambda \in \mathbb{R}$, (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz değerleri olsun.

$$\begin{aligned}
&\left\{ y^{(p-1)}(t, v) y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, v) y^{(p-1)}(t, \lambda) \right\}^{\Delta} \\
&= y^{\sigma(p-1)}(t, v) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \right)^{\Delta} + y^{\Delta(p-1)}(t, v) y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \\
&\quad - y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, v) \right)^{\Delta} - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) y^{\Delta(p-1)}(t, v) \\
&= y^{\sigma(p-1)}(t, v) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \right)^{\Delta} - y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \left(y^{\Delta(p-1)}(t, v) \right)^{\Delta} \\
&= y^{\sigma(p-1)}(t, v) \left\{ (p-1) (q(t) + 2\lambda r(t) - \lambda^2) \right\} y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \\
&\quad - y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \left\{ (p-1) (q(t) + 2v r(t) - v^2) \right\} y^{\sigma(p-1)}(t, v) \\
&= (v^2 - \lambda^2) (p-1) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) y^{\sigma(p-1)}(t, v) - 2(v - \lambda) r(t) (p-1) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) y^{\sigma(p-1)}(t, v).
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafı $\lambda - v$ ile bölünür, $v \rightarrow \lambda$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow \lambda} \frac{\{y^{(p-1)}(t, v)y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, v)y^{(p-1)}(t, \lambda)\}^{\Delta}}{\lambda - v} \\ &= -(p-1) \lim_{v \rightarrow \lambda} \left\{ (v + \lambda) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) y^{\sigma(p-1)}(t, v) - 2r(t) y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) y^{\sigma(p-1)}(t, v) \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left\{ y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) \right\}^{\Delta} \\ &= -2\lambda(p-1) \left(y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right)^2 + 2r(t)(p-1) \left(y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right)^2, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin $\rho(a)$ noktasından t noktasına Δ -integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\rho(a)}^t \left\{ y^{(p-1)}(\tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(\tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(\tau, \lambda) \right\}^{\Delta} \Delta \tau \\ &= -2\lambda(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau + 2(p-1) \int_{\rho(a)}^t r(\tau) \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) - y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) \\ & + y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) \\ &= -2\lambda(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau + 2(p-1) \int_{\rho(a)}^t r(\tau) \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau, \end{aligned}$$

bulunur. Burada (5.2) sınır şartından $y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 1$ ve $y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0 \text{ ve } \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} & y^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) - y^{\Delta(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} y^{(p-1)}(t, \lambda) \\ &= -2\lambda(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau + 2(p-1) \int_{\rho(a)}^t r(\tau) \left(y^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right)^2 \Delta \tau, \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.5. (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz değerleri reeldir.

İspat: $\overline{\lambda_0}$ kompleks öz değer ve $\overline{y}^{(p-1)}(t)$, $\overline{\lambda_0}$ özdeğerine karşılık gelen (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz fonksiyonu olsun.

$$\begin{aligned}
\left\{ y^{\Delta(p-1)} \overline{y}^{(p-1)} - \overline{y}^{\Delta(p-1)} y^{(p-1)} \right\}^{\Delta} &= \left(y^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} \overline{y}^{\sigma(p-1)} - \left(\overline{y}^{\Delta(p-1)} \right)^{\Delta} y^{\sigma(p-1)} \\
&= \left\{ (p-1) (q(t) + 2\lambda_0 r(t) - \lambda_0^2) y^{\sigma(p-1)} \right\} \overline{y}^{\sigma(p-1)} \\
&\quad - \left\{ (p-1) (q(t) + 2\overline{\lambda_0} r(t) - \overline{\lambda_0}^2) \overline{y}^{\sigma(p-1)} \right\} y^{\sigma(p-1)} \\
&= (p-1) (\overline{\lambda_0}^2 - \lambda_0^2) y^{\sigma(p-1)} \overline{y}^{\sigma(p-1)} \\
&\quad - 2(p-1) (\overline{\lambda_0} - \lambda_0) r(t) y^{\sigma(p-1)} \overline{y}^{\sigma(p-1)} \\
&= (p-1) (\overline{\lambda_0}^2 - \lambda_0^2) \left| y^{\sigma(p-1)} \right|^2 \\
&\quad - 2(p-1) (\overline{\lambda_0} - \lambda_0) r(t) \left| y^{\sigma(p-1)} \right|^2.
\end{aligned}$$

Bu eşitlikte (5.2)-(5.3) p -Laplacian difüzyon probleminin sınır koşulları dikkate alınarak $\rho(a)$ dan b noktasına Δ -integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&(p-1) (\overline{\lambda_0}^2 - \lambda_0^2) \int_{\rho(a)}^b \left| y^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \Delta t - 2(p-1) (\overline{\lambda_0} - \lambda_0) \int_{\rho(a)}^b r(t) \left| y^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \Delta t \\
&= y^{\Delta(p-1)}(b) \overline{y}^{(p-1)}(b) - \overline{y}^{\Delta(p-1)}(b) y^{(p-1)}(b) - y^{\Delta(p-1)}(\rho(a)) \overline{y}^{(p-1)}(\rho(a)) \\
&\quad + \overline{y}^{\Delta(p-1)}(\rho(a)) y^{(p-1)}(\rho(a)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\overline{\lambda_0} \neq \lambda_0$ ve $(\overline{\lambda_0} + \lambda_0) - 2r(t) > 0$ olacak şekilde

$$(p-1) (\overline{\lambda_0} + \lambda_0) \int_{\rho(a)}^b \left| y^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \Delta t - 2(p-1) \int_{\rho(a)}^b r(t) \left| y^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \Delta t = 0,$$

ve

$$y^{\sigma(p-1)}(t) = 0,$$

olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer probleminin öz değerleri reeldir.

Şimdi ise osilasyon kriteri için oldukça önemli bir bağıntı olan Picone bağıntısı (5.1)-(5.3) p -Laplacian difüzyon sınır değer problemi için ifade edilecektir. A matrisinin çekirdeğini $Ker A$ ile gösterelim. $def M = \dim Ker A$ ve $\alpha \neq 0$ için $\alpha^\dagger = 1/\alpha$ ve $0^\dagger = 0$ olsun.

Teorem 5.6. (Picone Bağıntısı) $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ olmak üzere

$$Kery^{(p-1)}(t) \subset Ker x^{(p-1)}(t) \text{ ve } Kery^{\sigma(p-1)}(t) \subset Ker x^{\sigma(p-1)}(t),$$

ve $x^{(p-1)} \in C_{rd}^2([\rho(a), b], \mathbb{R})$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki $y^{(p-1)}, Ly^{(p-1)} + \lambda^2(1-p)y^{\sigma(p-1)} = 0$ denkleminin çözümü olsun. t noktasında, $W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) = x^{(p-1)}y^{\Delta(p-1)} - y^{(p-1)}x^{\Delta(p-1)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \{L(x^{(p-1)}) - \lambda^2(p-1)x^{\sigma(p-1)}\}x^{\sigma(p-1)} &= [x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})]^\Delta \\ &\quad + (y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}), \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki $(y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})]^\Delta \\ &= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} W^\Delta(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \\ &\quad + \left(\frac{x^{\Delta(p-1)}y^{(p-1)} - x^{(p-1)}y^{\Delta(p-1)}}{y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)}} \right) W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \\ &= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} \left\{ -L(y^{(p-1)})x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} - \frac{W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})}{y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)}} \\ &= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} \left\{ -\lambda^2(p-1)y^{\sigma(p-1)}x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} - \frac{W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})}{y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)}} \\ &= \left\{ L(x^{(p-1)}) - \lambda^2(p-1)x^{\sigma(p-1)} \right\} x^{\sigma(p-1)} - (y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}), \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer t sağ saçılmış ve $(y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})(t) = 0$ ise, $(x^{(p-1)}x^{\sigma(p-1)})(t) = 0$ ve

$$\begin{aligned} W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) &= x^{(p-1)}y^{\Delta(p-1)} - y^{(p-1)}x^{\Delta(p-1)} \\ &= x^{(p-1)} \left(\frac{y^{\sigma(p-1)} - y^{(p-1)}}{\mu} \right) - y^{(p-1)} \left(\frac{x^{\sigma(p-1)} - x^{(p-1)}}{\mu} \right) \\ &= \frac{x^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)} - y^{(p-1)}x^{\sigma(p-1)}}{\mu} = 0, \end{aligned}$$

olur. Eğer t sol saçılmış ise, $x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})$, t noktasında süreklidir. Eğer t sol yoğun ise,

$$x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})$$

aynı zamanda t noktasında süreklidir. L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t^-} \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right] (s) &= \frac{x^{\Delta(p-1)}(t)}{y^{\Delta(p-1)}(t)} W^\Delta(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) = 0 \\ &= \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right] (t). \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\Delta \\ &= \frac{\left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\sigma - x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})}{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})]^\sigma}{\mu} \\
&= x^{\sigma(p-1)}(y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^\Delta(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \\
&= x^{\sigma(p-1)}(y^{\sigma(p-1)})^\dagger \left\{ -L(y^{(p-1)})x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} \\
&= \frac{x^{\sigma(p-1)}}{y^{\sigma(p-1)}} \left\{ -\lambda^2(p-1)y^{\sigma(p-1)}x^{\sigma(p-1)} + L(x^{(p-1)})y^{\sigma(p-1)} \right\} \\
&= \left\{ L(x^{(p-1)}) - \lambda^2(p-1)x^{\sigma(p-1)} \right\} x^{\sigma(p-1)} \\
&= \left\{ L(x^{(p-1)}) - \lambda^2(p-1)x^{\sigma(p-1)} \right\} x^{\sigma(p-1)} \\
&\quad - (y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}),
\end{aligned}$$

olur. Eğer t sağ yoğun ise, $x^{(p-1)}(t) = x^{(p-1)}(\sigma(t)) = 0$ kabulü altında L'Hospital kuralı uygulanırsa son eşitlik

$$\begin{aligned}
&\left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)}) \right]^\Delta \\
&= \lim_{s \rightarrow t} \frac{[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})](\sigma(t)) - [x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})](s)}{\sigma(t) - s} \\
&= \lim_{s \rightarrow t} \left[x^{(p-1)}(y^{(p-1)})^\dagger \right](s) \lim_{s \rightarrow t} \frac{W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(s) - W(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(t)}{s - t} \\
&= \frac{x^{\Delta(p-1)}(t)}{y^{\Delta(p-1)}(t)} W^\Delta(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(t) = 0 \\
&= \{L(x^{(p-1)}) - \lambda^2(p-1)x^{\sigma(p-1)}\}(t)x^{\sigma(p-1)}(t) - (y^{(p-1)}y^{\sigma(p-1)})^\dagger W^2(x^{(p-1)}, y^{(p-1)})(t),
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu ise ispatı tamamlar.

6 ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE p -LAPLACIAN DIRAC SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde

$$Ly^{(p-1)} = By^{\Delta(p-1)}(t) + (p-1)Q(t)y^{\sigma(p-1)}(t) = \lambda(p-1)y^{\sigma(p-1)}(t), t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T} \quad (6.1)$$

şeklindeki p -Laplacian Dirac sisteminin bazı temel spektral özellikleri

$$\alpha y_1^{(p-1)}(\rho(a)) + \beta y_2^{\sigma(p-1)}(\rho(a)) = 0, \quad (6.2)$$

$$\gamma y_1^{(p-1)}(b) + \delta y_2^{\sigma(p-1)}(b) = 0, \quad (6.3)$$

sınır koşulları ile ifade edilecektir. Burada $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \neq 0$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{T}$, $p > 1$,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$q, r \in L_2^\Delta[\rho(a), b]$, λ spektral parametre ve $y^{\sigma(p-1)} = y^{(p-1)}(\sigma)$ şeklindedir. T transpoz olmak üzere

$$y^{(p-1)}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(p-1)}(t), & y_2^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}^T \in C_{rd}^1([\rho(a), b], \mathbb{R}),$$

(6.1)-(6.3) probleminin öz fonksiyonu olsun. (6.1) p -Laplacian denklemi, aşağıdaki şekilde p -Laplacian Dirac denklem sistemi şekline getirilebilir. (6.1) eşitliğinden,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{\Delta(p-1)} \\ y_2^{\Delta(p-1)} \end{pmatrix} + (p-1) \begin{pmatrix} q(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{\sigma(p-1)} \\ y_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix} = \lambda(p-1) \begin{pmatrix} y_1^{\sigma(p-1)} \\ y_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix},$$

olur. Burada bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{pmatrix} \left(y_2^{(p-1)}\right)^\Delta + (p-1)q(t)y_1^{\sigma(p-1)} \\ \left(-y_1^{(p-1)}\right)^\Delta + (p-1)r(t)y_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(p-1)y_1^{\sigma(p-1)} \\ \lambda(p-1)y_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \left(y_2^{(p-1)}\right)^\Delta &= (p-1)(\lambda - q(t))y_1^{\sigma(p-1)}, \\ \left(y_1^{(p-1)}\right)^\Delta &= (p-1)(-\lambda + r(t))y_2^{\sigma(p-1)}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

sistemi elde edilir. (6.4) denklem sistemine, $\mathbb{T}$ zaman skalasında p -Laplacian Dirac denklem sistemi denir. Bu sisteme, (6.2)-(6.3) sınır koşullarıyla birlikte p -Laplacian Dirac sınır değer problemi denir. (6.4) sisteminde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olarak alındığında aşağıdaki klasik p -Laplacian Dirac denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(y_2^{(p-1)}\right)' &= (p-1)(\lambda - q(t))y_1^{(p-1)}, \\ \left(y_1^{(p-1)}\right)' &= (p-1)(-\lambda + r(t))y_2^{(p-1)}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

(6.5) sistemi literatürde p -Laplacian Dirac sisteminin birinci kanonik formu olarak bilinir. Bu sistemin $p = 2$ özel hali ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur. $p = 2$ olması durumunda elde edilen klasik Dirac sisteminin tarihi gelişim süreci ile ilgili bazı bilgilerin verilmesi gerekmektedir.

Gülşen, Yılmaz ve Göktaş zaman skalası üzerinde kesirli Dirac öz değer problemini çalıştı [70]. Daha sonra klasik durum için p -Laplacian Dirac sistemini ilk kez ele aldılar [68] ve öz değer ve öz fonksiyonları için önemli asimptotik formüller elde ettiler. Bu kısımda ise aynı problem zaman skalası üzerinde çalışılacak ve tüm noktaları sağ yoğun olan keyfi zaman skalası üzerinde p -Laplacian Dirac sistemi için önemli sonuçlar verilecektir. Bilindiği üzere (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin öz değerleri reel, basit ve $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olması halinde öz fonksiyonları ortogonaldır [67]. Aşağıdaki teoremler p -Laplacian Dirac sistemi için mevcut olan bazı sonuçları keyfi bir zaman skalasına genelleştirecektir.

Teorem 6.1. (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin öz değerleri basittir.

İspat: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ($\lambda \neq \mu$ için) spektral parametreler ve $u^{(p-1)}(t) = \begin{pmatrix} u_1^{(p-1)}(t) & u_2^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}^T$ (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin λ, μ öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left(u_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda) &= (p-1)(\lambda - q(t))u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda), \\ \left(u_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda) &= (p-1)(-\lambda + r(t))u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda), \\ \left(u_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \mu) &= (p-1)(\mu - q(t))u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu), \\ \left(u_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \mu) &= (p-1)(-\mu + r(t))u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu). \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikler sırasıyla $u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu)$, $u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu)$, $u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda)$, $u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda)$ fonksiyonları ile çarpılırsa

$$\left(u_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu) = (p-1)(\lambda - q(t))u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu), \quad (6.6)$$

$$\left(u_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda)u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu) = (p-1)(-\lambda + r(t))u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda)u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu), \quad (6.7)$$

$$\left(u_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \mu)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) = (p-1)(\mu - q(t))u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda), \quad (6.8)$$

$$\left(u_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \mu)u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) = (p-1)(-\mu + r(t))u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu)u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda), \quad (6.9)$$

elde edilir. (6.6) ile (6.8) ve (6.7) ile de (6.9) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(u_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \mu)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) - \left(u_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu) \\ &= (p-1)(\mu - \lambda)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda)u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(u_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu) - \left(u_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \mu) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \\
&= (p-1)(\mu - \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu),
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp ve bazı düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left\{ u_1^{(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu) - u_1^{(p-1)}(t, \mu) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right\}^\Delta \\
&= (p-1)(\mu - \lambda) \left(u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu) + u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu) \right),
\end{aligned} \tag{6.10}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $\lambda - \mu$ ile bölünür, $\mu \rightarrow \lambda$ iken limit alınır

$$\begin{aligned}
& -(p-1) \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \left\{ u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_1^{\sigma(p-1)}(t, \mu) + u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu) \right\} \\
&= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\left\{ u_1^{(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \mu) - u_1^{(p-1)}(t, \mu) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right\}^\Delta}{\lambda - \mu}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& -(p-1) \left\{ \left[u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 + \left[u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 \right\} \\
&= \left\{ u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(t, \lambda) - u_1^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right\}^\Delta,
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitliğin $[\rho(a), b]$ aralığında Δ -integrali alınır ve (6.2) sınır koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& -(p-1) \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left[u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 + \left[u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 \right\} \Delta t \\
&= u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(b, \lambda) - u_1^{(p-1)}(b, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda),
\end{aligned} \tag{6.11}$$

olur. Dolayısıyla $\Lambda(\lambda) = - \left[\gamma u_1^{(p-1)}(b, \lambda) + \delta u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda) \right]$ basit sıfırlara sahiptir. Aksine, λ^* in çift katlı kök olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} \gamma u_1^{(p-1)}(b, \lambda^*) + \delta u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda^*) &= 0 \\ \gamma \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(b, \lambda^*) + \delta \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \\
&\Rightarrow u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda^*) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(b, \lambda^*) - u_1^{(p-1)}(b, \lambda^*) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda^*) = 0.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$\lambda = \lambda^*$ için (6.11) ve (6.12) eşitliklerinden

$$-(p-1) \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left[u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 + \left[u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 \right\} \Delta t = 0 \Rightarrow u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) = u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) = 0,$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $\Lambda(\lambda) = - \left[\gamma u_1^{(p-1)}(b, \lambda) + \delta u_2^{\sigma(p-1)}(b, \lambda) \right]$ yalnızca basit sıfırlara sahiptir.

Teorem 6.2. $u^{(p-1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(p-1)} & u_2^{(p-1)} \end{pmatrix}^T, v^{(p-1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(p-1)} & v_2^{(p-1)} \end{pmatrix}^T \in C_{rd}^1([\rho(a), b], \mathbb{R})$,
(6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değeri probleminin öz fonksiyonları olsun.

$$W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) = u_2^{(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} - u_1^{(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)}$$

olmak üzere

(a) $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\left(Lu^{(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} - \left(Lv^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} = W^\Delta(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}),$$

şeklinde dir.

(b) Ele alınan problem için

$$\begin{aligned} & < \left(Lu^{(p-1)} \right)^T, v^{\sigma(p-1)} > - < \left(Lv^{(p-1)} \right)^T, u^{\sigma(p-1)} > \\ & = W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)})(b) - W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)})(\rho(a)), \end{aligned}$$

olur.

İspat:

(a) Wronskian tanımı ve çarpımın Δ -türevi kuralı gereğince

$$W^\Delta(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) = u_2^{\Delta(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} + u_2^{\sigma(p-1)} v_1^{\Delta(p-1)} - u_1^{\Delta(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)} - u_1^{\sigma(p-1)} v_2^{\Delta(p-1)}, \quad (6.13)$$

yazılır. (6.13) ifadesine $(p-1)q(t)u_1^{\sigma(p-1)}v_1^{\sigma(p-1)}$ ve $(p-1)r(t)u_2^{\sigma(p-1)}v_2^{\sigma(p-1)}$ terimleri eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} W^\Delta(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) &= u_2^{\Delta(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} + u_2^{\sigma(p-1)} v_1^{\Delta(p-1)} - u_1^{\Delta(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)} - u_1^{\sigma(p-1)} v_2^{\Delta(p-1)} \\ &\quad + (p-1)q(t)u_1^{\sigma(p-1)}v_1^{\sigma(p-1)} - (p-1)q(t)u_1^{\sigma(p-1)}v_1^{\sigma(p-1)} \\ &\quad + (p-1)r(t)u_2^{\sigma(p-1)}v_2^{\sigma(p-1)} - (p-1)r(t)u_2^{\sigma(p-1)}v_2^{\sigma(p-1)} \\ &= v_1^{\sigma(p-1)} \left(u_2^{\Delta(p-1)} + (p-1)q(t)u_1^{\sigma(p-1)} \right) \\ &\quad - u_2^{\sigma(p-1)} \left(-v_1^{\Delta(p-1)} + (p-1)r(t)v_2^{\sigma(p-1)} \right) \\ &\quad + v_2^{\sigma(p-1)} \left(-u_1^{\Delta(p-1)} + (p-1)r(t)u_2^{\sigma(p-1)} \right) \\ &\quad - u_1^{\sigma(p-1)} \left(v_2^{\Delta(p-1)} + (p-1)q(t)v_1^{\sigma(p-1)} \right) \\ &= \left(Lu^{(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} - \left(Lv^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)}, \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değeri problemi için p -Lagrange eşitliği gösterilmiş olur.

(b) $L_2^\Delta [\rho(a), b]$ uzayındaki iç çarpım ve Wronskian tanımını kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& < \left(Lu^{(p-1)} \right)^T, v^{\sigma(p-1)} > - < \left(Lv^{(p-1)} \right)^T, u^{\sigma(p-1)} > \\
&= \int_{\rho(a)}^b \left[\left(Lu^{(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} - \left(Lv^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} \right] \Delta t \\
&= \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left(Bu^{\Delta(p-1)} + (p-1)Qu^{\sigma(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} - \left(Bv^{\Delta(p-1)} + (p-1)Qv^{\sigma(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} \right\} \Delta t \\
&= \int_{\rho(a)}^b \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{\Delta(p-1)} \\ u_2^{\Delta(p-1)} \end{pmatrix} + (p-1) \begin{pmatrix} q(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{\sigma(p-1)} \\ u_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1^{\sigma(p-1)} & v_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{\Delta(p-1)} \\ v_2^{\Delta(p-1)} \end{pmatrix} + (p-1) \begin{pmatrix} q(t) & 0 \\ 0 & r(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{\sigma(p-1)} \\ v_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1^{\sigma(p-1)} & u_2^{\sigma(p-1)} \end{pmatrix} \right\} \Delta t \\
&= \int_{\rho(a)}^b \left\{ u_2^{\Delta(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} + u_2^{\sigma(p-1)} v_1^{\Delta(p-1)} - u_1^{\Delta(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)} - u_1^{\sigma(p-1)} v_2^{\Delta(p-1)} \right\} \Delta t \\
&= \int_{\rho(a)}^b \left\{ W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \right\}^\Delta \Delta t \\
&= W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)})(b) - W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)})(\rho(a)).
\end{aligned}$$

Böylece (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer problemi için p -Green formülü ispatlanmıştır.

Teorem 6.3.

$$\begin{aligned}
y^{(p-1)}(t, \lambda_1) &= \begin{pmatrix} y_1^{(p-1)}(t, \lambda_1), & y_2^{(p-1)}(t, \lambda_1) \end{pmatrix}^T \\
z^{(p-1)}(t, \lambda_2) &= \begin{pmatrix} z_1^{(p-1)}(t, \lambda_2), & z_2^{(p-1)}(t, \lambda_2) \end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

fonksiyonları $\lambda_1 \neq \lambda_2$ öz değerlerine karşılık gelen (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin iki öz fonksiyonu olsun. Buna göre

$$(p-1) \int_{\rho(a)}^b (y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1))^T z^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t = 0,$$

şeklindedir.

İspat: Öz fonksiyon ve öz değer tanımı gereğince

$$\begin{aligned}\left(y_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_1) &= (p-1)(\lambda_1 - q(t))y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1), \\ \left(y_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_1) &= (p-1)(-\lambda_1 + r(t))y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1), \\ \left(z_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_2) &= (p-1)(\lambda_2 - q(t))z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2), \\ \left(z_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_2) &= (p-1)(-\lambda_2 + r(t))z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2).\end{aligned}$$

yazılır. Bu denklemler sırasıyla $z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2)$, $z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2)$, $y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)$, $y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)$ terimleri ile çarpılır,

$$\left(y_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_1)z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) = (p-1)(\lambda_1 - q(t))y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2), \quad (6.14)$$

$$\left(y_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_1)z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) = (p-1)(-\lambda_1 + r(t))y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2), \quad (6.15)$$

$$\left(z_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_2)y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) = (p-1)(\lambda_2 - q(t))z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2)y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1), \quad (6.16)$$

$$\left(z_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_2)y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) = (p-1)(-\lambda_2 + r(t))z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2)y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1), \quad (6.17)$$

ve (6.14), (6.16) ile (6.15), (6.17) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&\left(z_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_2)y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) - \left(y_2^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_1)z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \\ &= (p-1)(\lambda_2 - \lambda_1)y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left(y_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_1)z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) - \left(z_1^{(p-1)}\right)^\Delta(t, \lambda_2)y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) \\ &= (p-1)(\lambda_2 - \lambda_1)y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2),\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanır ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\left\{y_1^{(p-1)}(t, \lambda_1)z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) - y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_1^{(p-1)}(t, \lambda_2)\right\}^\Delta \\ &= (p-1)(\lambda_2 - \lambda_1)\left[y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) + y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2)\right],\end{aligned} \quad (6.18)$$

bulunur. Her iki tarafın $\rho(a)$ noktasından b noktasına Δ -integrali alınır ve sınır şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}&(p-1)(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\rho(a)}^b \left\{y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) + y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1)z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2)\right\} \Delta t \\ &= y_1^{(p-1)}(b)z_2^{\sigma(p-1)}(b) - y_2^{\sigma(p-1)}(b)z_1^{(p-1)}(b) \\ &\quad - y_1^{(p-1)}(\rho(a))z_2^{\sigma(p-1)}(\rho(a)) + y_2^{\sigma(p-1)}(\rho(a))z_1^{(p-1)}(\rho(a)) \\ &= 0,\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için

$$\begin{aligned}
& (p-1) \int_{\rho(a)}^b \left\{ y_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) z_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) + y_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1) z_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \right\} \Delta t \\
&= (p-1) \int_{\rho(a)}^b (y^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_1))^T z^{\sigma(p-1)}(t, \lambda_2) \Delta t \\
&= 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise farklı öz değerlere karşılık gelen $y^{(p-1)}(t, \lambda_1)$ ve $z^{(p-1)}(t, \lambda_2)$ öz fonksiyonlarının her zaman ortogonal olduğunu gösterir.

Teorem 6.4. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $t \in [\rho(a), b] \cap \mathbb{T}$ olmak üzere (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer problemi için

$$\begin{aligned}
& u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(t, \lambda) - u_1^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \\
&= -(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left\{ \left[u_1^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right]^2 + \left[u_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right]^2 \right\} \Delta \tau,
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: $v, \lambda \in \mathbb{R}$ ($v \neq \lambda$ için) olsun. $u^{(p-1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(p-1)} & u_2^{(p-1)} \end{pmatrix}^T$ (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin v, λ öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonu olsun.

$$\begin{aligned}
& \left\{ u_1^{(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, v) - u_1^{(p-1)}(t, v) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right\}^\Delta \\
&= (p-1)(v - \lambda) \left\{ u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, v) + u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_1^{\sigma(p-1)}(t, v) \right\}.
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafı $\lambda - v$ ile bölünür, $v \rightarrow \lambda$ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{v \rightarrow \lambda} \frac{\left\{ u_1^{(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, v) - u_1^{(p-1)}(t, v) u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right\}^\Delta}{\lambda - v} \\
&= -(p-1) \lim_{v \rightarrow \lambda} \left\{ u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_1^{\sigma(p-1)}(t, v) + u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) u_2^{\sigma(p-1)}(t, v) \right\},
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left\{ u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(t, \lambda) - u_1^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right\}^\Delta \\
&= -(p-1) \left\{ \left[u_1^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 + \left[u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \right]^2 \right\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin $\rho(a)$ noktasından t noktasına Δ -integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\rho(a)}^t \left\{ u_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(\tau, \lambda) - u_1^{(p-1)}(\tau, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right\}^{\Delta} \Delta \tau \\ &= -(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left\{ \left[u_1^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right]^2 + \left[u_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right]^2 \right\} \Delta \tau, \end{aligned}$$

bulunur. Burada (6.2) sınır şartından $u_1^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) = \beta$ ve $u_2^{\sigma(p-1)}(\rho(a), \lambda) = -\alpha$ olduğu göz önüne alınırsa $\frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0$ ve $\frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(\rho(a), \lambda) = 0$ elde edilir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} & u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_1^{(p-1)}(t, \lambda) - u_1^{(p-1)}(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} u_2^{\sigma(p-1)}(t, \lambda) \\ &= -(p-1) \int_{\rho(a)}^t \left\{ \left[u_1^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right]^2 + \left[u_2^{\sigma(p-1)}(\tau, \lambda) \right]^2 \right\} \Delta \tau, \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 6.5. (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin öz değerleri reeldir.

İspat: $\overline{\lambda_0}$ kompleks öz değer ve $\overline{u}^{(p-1)}(t) = \left(\overline{u}_1^{(p-1)}(t), \overline{u}_2^{(p-1)}(t) \right)^T$, $\overline{\lambda_0}$ öz değerine karşılık gelen (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin öz fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left\{ u_1^{(p-1)}(t) \overline{u}_2^{\sigma(p-1)}(t) - \overline{u}_1^{(p-1)}(t) u_2^{\sigma(p-1)}(t) \right\}^{\Delta} \\ &= u_1^{\Delta(p-1)} \overline{u}_2^{\sigma(p-1)} + u_1^{\sigma(p-1)} \overline{u}_2^{\Delta(p-1)} - \overline{u}_1^{\Delta(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)} - \overline{u}_1^{\sigma(p-1)} u_2^{\Delta(p-1)} \\ &= (p-1) (\overline{\lambda_0} - \lambda_0) \left(\left| u_1^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 + \left| u_2^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \right). \end{aligned} \tag{6.19}$$

yazılır. (6.19) eşitliğinde (6.2)-(6.3) p -Laplacian Dirac probleminin sınır koşulları dikkate alınarak $\rho(a)$ noktasından b noktasına Δ -integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & (p-1) (\overline{\lambda_0} - \lambda_0) \int_{\rho(a)}^b \left(\left| u_1^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 + \left| u_2^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \right) \Delta t \\ &= u_1^{(p-1)}(b) \overline{u}_2^{\sigma(p-1)}(b) - \overline{u}_1^{(p-1)}(b) u_2^{\sigma(p-1)}(b) \\ &\quad - u_1^{(p-1)}(\rho(a)) \overline{u}_2^{\sigma(p-1)}(\rho(a)) + \overline{u}_1^{(p-1)}(\rho(a)) u_2^{\sigma(p-1)}(\rho(a)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\overline{\lambda_0} \neq \lambda_0$ için

$$(p-1) \int_{\rho(a)}^b \left(\left| u_1^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 + \left| u_2^{\sigma(p-1)}(t) \right|^2 \right) \Delta t = 0,$$

ve

$$u_1^{\sigma(p-1)}(t) = 0 \text{ ve } u_2^{\sigma(p-1)}(t) = 0,$$

olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer probleminin öz değerleri reeldir.

Şimdi ise osilasyon kriteri için önemli bir formül olan Picone bağıntısını (6.1)-(6.3) p -Laplacian Dirac sınır değer problemi için verilecektir.

Teorem 6.6. (Picone Bağıntısı)

$$u^{(p-1)} = (u_1^{(p-1)}, u_2^{(p-1)})^T, v^{(p-1)} = (v_1^{(p-1)}, v_2^{(p-1)})^T \in C_{rd}^1([\rho(a), b], \mathbb{R})$$

fonksiyonları

$$Ly^{(p-1)} + \lambda(1-p)y^{\sigma(p-1)} = 0,$$

denkleminin çözümleri olsun.

$$W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) = u_2^{(p-1)}v_1^{\sigma(p-1)} - u_1^{(p-1)}v_2^{\sigma(p-1)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & -\frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ \left(Lv^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} - \lambda(p-1) \left(u^{\sigma(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} \right\} = \left[\frac{u_1^{(p-1)}}{u_2^{(p-1)}} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \right]^\Delta \\ & + \frac{(p-1)}{u_2^{(p-1)}u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ \lambda \left(u^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} - \left(u^{\sigma(p-1)} \right)^T Qu^{(p-1)} \right\} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}), \end{aligned}$$

şeklinde dir.

İspat: $(u_2^{(p-1)}u_2^{\sigma(p-1)})(t) \neq 0$ olduğunu kabul edilsin. Bu durumda p -Lagrange özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left[\frac{u_1^{(p-1)}}{u_2^{(p-1)}} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \right]^\Delta &= \frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} W^\Delta(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \\ &+ \left(\frac{u_1^{\Delta(p-1)}u_2^{(p-1)} - u_1^{(p-1)}u_2^{\Delta(p-1)}}{u_2^{(p-1)}u_2^{\sigma(p-1)}} \right) W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \\ &= \frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ \left(Lu^{(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} - \left(Lv^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} \right\} \\ &+ \frac{(p-1)}{u_2^{(p-1)}u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ (-\lambda + r)u_2^{\sigma(p-1)}u_2^{(p-1)} - (\lambda - q)u_1^{(p-1)}u_1^{\sigma(p-1)} \right\} \\ &\times W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ \lambda(p-1) \left(u^{\sigma(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} - \left(Lv^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} \right\} \\
&\quad + \frac{(p-1)}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ -\lambda \left(u_2^{\sigma(p-1)} u_2^{(p-1)} + u_1^{\sigma(p-1)} u_1^{(p-1)} \right) + r u_2^{\sigma(p-1)} u_2^{(p-1)} + q u_1^{\sigma(p-1)} u_1^{(p-1)} \right\} \\
&\quad \times W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \\
&\Rightarrow -\frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ \left(Lv^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} - \lambda(p-1) \left(u^{\sigma(p-1)} \right)^T v^{\sigma(p-1)} \right\} = \left[\frac{u_1^{(p-1)}}{u_2^{(p-1)}} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \right]^\Delta \\
&\quad + \frac{(p-1)}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} \left\{ \lambda \left(u^{(p-1)} \right)^T u^{\sigma(p-1)} - \left(u^{\sigma(p-1)} \right)^T Qu^{(p-1)} \right\} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}),
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\left[\frac{u_1^{(p-1)}}{u_2^{(p-1)}} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \right]^\Delta = (p-1) \left\{ (-\lambda + r) - (\lambda - q) \frac{u_1^{(p-1)} u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} \right\} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}),$$

formülü sağlar. Aslında

$$\begin{aligned}
\left[\frac{u_1^{(p-1)}}{u_2^{(p-1)}} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \right]^\Delta &= \frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} W^\Delta(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \\
&\quad + \left(\frac{u_1^{\Delta(p-1)} u_2^{(p-1)} - u_1^{(p-1)} u_2^{\Delta(p-1)}}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} \right) W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}) \\
&= \frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} [-v_2^{\Delta(p-1)} u_1^{\sigma(p-1)} + v_1^{\Delta(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)} \\
&\quad + u_2^{\Delta(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} - u_1^{\Delta(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)}] \\
&\quad + \left(\frac{u_1^{\Delta(p-1)} u_2^{(p-1)} - u_1^{(p-1)} u_2^{\Delta(p-1)}}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} \right) (u_2^{(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} - u_1^{(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)}) \\
&= (p-1) \frac{u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{\sigma(p-1)}} [-(\lambda - q) v_1^{\sigma(p-1)} u_1^{\sigma(p-1)} + (-\lambda + r) v_2^{\sigma(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)} \\
&\quad + (\lambda - q) u_1^{\sigma(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} - (-\lambda + r) u_2^{\sigma(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)}] \\
&\quad + (p-1) \left(-\lambda + r - \frac{(\lambda - q) u_1^{\sigma(p-1)} u_1^{(p-1)}}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} \right) (u_2^{(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} - u_1^{(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)}) \\
&= (p-1) [(-\lambda + r) (u_2^{(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} - u_1^{(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)}) \\
&\quad - (\lambda - q) \frac{u_1^{(p-1)} u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} (u_2^{(p-1)} v_1^{\sigma(p-1)} - u_1^{(p-1)} v_2^{\sigma(p-1)})] \\
&= (p-1) \left\{ (-\lambda + r) - (\lambda - q) \frac{u_1^{(p-1)} u_1^{\sigma(p-1)}}{u_2^{(p-1)} u_2^{\sigma(p-1)}} \right\} W(u^{(p-1)}, v^{(p-1)}),
\end{aligned}$$

şeklinde. Böylece teorem ispatlanmıştır.

7 SONUÇ

Bu çalışmada zaman skalası üzerinde p –Laplacian sınır değer problemleri ele alınarak bu problemlere ait bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. p –Laplacian Sturm-Liouville, p –Laplacian difüzyon ve p –Laplacian Dirac sistemi ele alınarak keyfi zaman skalası üzerinde spektral açıdan incelemeler yapılmıştır. Her bölümdeki problemler için keyfi zaman skalası üzerinde Picone bağıntısı incelenmiş ve bu bağıntı ispatlanmıştır. Her problem için elde edilen bu sonuçlar bu konuda elde edilen ilk sonuçlar olması nedeniyle önemlidir ve matematikçilere önemli bir yol gösterecektir. Daha sonraki çalışmalarda keyfi zaman skalası üzerinde osilasyon kriteri ve Sturm-Picone karşılaştırma teoremleri incelenebilir ve ilginç sonuçlar elde edilebilir. Bu tez, bu çeşit çalışmalar için bir temel olacaktır.



KAYNAKLAR

- [1] **Hilger, S.**, 1988. Ein Masskettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, *PhD Thesis*, Universität Würzburg, Germany.
- [2] **Hilger, S.**, 1990. Analysis on measure chains-A unified approach to continuous and discrete calculus, *Results Math.*, **18**, 18-56.
- [3] **Aulbach, B. and Hilger, S.**, 1990. A unified approach to continuous and discrete dynamics, *Qualitative theory of differential equations*, Szeged, 1988; Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, North-Holland, Amsterdam, **53**, 37–56.
- [4] **Bohner, M.**, 2004. Calculus of variations on time scales, *Dynamic Systems and Applications*, **13**(3-4), 339-349.
- [5] **Hilscher, R. and Zeidan, V.**, 2004. Calculus of variations on time scales: weak local piecewise C_{rd}^1 solutions with variable endpoints, *J. Math. Anal. Appl.*, **289**, 143-166.
- [6] **Atici, F.M. and Guseinov, G.S.**, 2002. On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, *J. Comput. Appl. Math.*, **141**, 75–99.
- [7] **Guseinov, G.S.**, 2003. Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 285(1), 107-127.
- [8] **Rynne, B.P.**, 2007. L_2 spaces and boundary value problems on time-scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **328**(2), 1217-1236.
- [9] **Bohner, M. and Peterson, A.**, 2001. Dynamic equations on time scales: an introduction with applications, *Birkhäuser Boston Inc*, Boston (MA).
- [10] **Bohner, M. and Peterson, A.**, 2003. Advances in dynamic equations on time scales, *Birkhäuser Boston Inc.*, Boston, MA.
- [11] **Agarwal, R., Bohner, M., O'Regan, D., Peterson, A.**, 2002. Dynamic equations on time scales: a survey, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**(1-2), 1-26.
- [12] **Guseinov, G.S., Kaymakçalan, B.**, 2002. On a disconjugacy criterion for second order dynamic equations on time scales, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**(1-2), 187-196.

- [13] **Erbe, L., Peterson, A., Řehák, P.**, 2002. Comparison theorems for linear dynamic equations on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **275**(1), 418-438.
- [14] **Karpuz, B.**, 2016. Nonoscillation and oscillation of second order linear dynamic equations via the sequence of functions technique, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **18**(4), 889-903.
- [15] **Grace, S.R., Bohner, M., Agarwal, R.P.**, 2009. On the oscillation of second-order half-linear dynamic equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, **15**(5), 451-460.
- [16] **Chen, H.Y.**, 2009. On generalized trigonometric functions, Master of Science, *National Sun Yat-sen University*, Kaohsiung, Taiwan.
- [17] **Wang, W.C.**, 2010. Direct and inverse problems for one dimensional p -Laplacian operators, *National Sun Yat-sen University*, PhD Thesis.
- [18] **Law, C.K., Lian, W.C. and Wang, W.C.**, 2009. The inverse nodal problem and the Ambarzumyan problem for the p -Laplacian, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A Math.*, **139**(6), 1261-1273.
- [19] **Wang, W.C., Cheng, Y.H. and Lian, W.C.**, 2011. Inverse nodal problems for the p -Laplacian with eigenparameter dependent boundary conditions, *Math. Comput. Modelling*, **54** (11-12), 2718-2724.
- [20] **Song, C., Weng, P.**, 2008. Multiple positive solutions for p -Laplacian functional dynamic equations on time scales, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **68**(1), 208-215.
- [21] **Han, W. and Kang, S.**, 2009. Multiple positive solutions of nonlinear third-order BVP for a class of p -Laplacian dynamic equations on time scales, *Mathematical and Computer Modelling*, **49**(3-4), 527-535.
- [22] **Graef, J.R., Kong, L.**, 2011. First-order singular boundary value problems with p -Laplacian on time scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, **17**(05), 831-839.
- [23] **Dogan, A.**, 2013. Existence of multiple positive solutions for p -Laplacian multipoint boundary value problems on time scales, *Advances in Difference Equations*, **2013**(1), 238.

- [24] **Anderson, D., Avery, R., Henderson, J.**, 2004. Existence of solutions for a one dimensional p -Laplacian on time-scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, **10**(10), 889-896.
- [25] **He, Z.**, 2005. Double positive solutions of three-point boundary value problems for p -Laplacian dynamic equations on time scales, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **182**(2), 304-315.
- [26] **Sun, H.R., Li, W.T.**, 2007. Existence theory for positive solutions to one-dimensional p -Laplacian boundary value problems on time scales, *Journal of Differential Equations*, **240**(2), 217-248.
- [27] **Su, Y.H., Feng, Z.**, 2017. Variational approach for a p -Laplacian boundary value problem on time scales, *Applicable Analysis*, 1-19, Doi: 10.1080/00036811.2017.1359566.
- [28] **Binding, P., Browne, P.J., Karabash, I.M.**, 2010. Sturm-Liouville problems for the p -Laplacian on a half-line, *Edinburgh Mathematical Society. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **53**(2), 271.
- [29] **Jaulent, M. and Jean, C.**, 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, *Communications in Mathematical Physics*, **28**(3), 177-220.
- [30] **Maksudov, F.G. and Guseinov, M.M.**, 1979. A quadratic pencil of operators in the presence of a continuous spectrum,. (Russian) *Akad. Nauk Azerbaïdžhan. SSR Dokl.* **35**(1), 9-13.
- [31] **Gasymov, M.G. and Guseinov, G.Sh.**, 1981. Determination of a diffusion operator from the spectral data, *Doklady Akademii Nauk Azerbaijan SSSR*, **37**(2), 19-23.
- [32] **Fragela, A.**, 1984. Quadratic pencils of differential operators with integral boundary conditions, *Differential equations and their applications* (Russian), 50-52, Moskov.
- [33] **Maksudov, F.G., Guseinov, G.Sh.**, 1986. On the solution of the inverse scattering problem for a quadratic pencil of one-dimensional Schrödinger operators on the whole axis, (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **289**(1), 42-46.
- [34] **Krall, A.M., Bairamov, E., Çakar, Ö.**, 1999. Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition, *Journal of Differential Equations*, **151**(2), 252-267.

- [35] **Guseinov, I.M. and Nabiev, I.M.**, 2000. A class of inverse problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators, *Differential Equations*, **36**(3), 471-473.
- [36] **Koyunbakan, H.**, 2006. A new inverse problem for the diffusion operator, *Applied Mathematics Letters*, **19**(10), 995-999.
- [37] **Guseinov, I.M. and Nabiev, I.M.**, 2007. The inverse spectral problem for pencils of differential operators, *Sbornik: Mathematics*, **198**(11), 1579.
- [38] **Koyunbakan, H.**, 2008. Reconstruction of potential function for diffusion operator, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **29**(7-8), 1-10.
- [39] **Buterin, S.A., Shieh, C.T.**, 2009. Inverse nodal problem for differential pencils, *Applied Mathematics Letters*, **22**(8), 1240-1247.
- [40] **Yang, C.F.**, 2010. Reconstruction of the diffusion operator from nodal data, *Verlag der Zeitschrift für Naturforschung A*, **65**(1-2), 100-106.
- [41] **Yang, C.F. and Zettl, A.**, 2012. Half inverse problems for quadratic pencils of Sturm-Liouville operators, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **16**(5), 1829-1846.
- [42] **Pronska, N.**, 2013. Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra, *Integral Equations and Operator Theory*, **76**(3), 403-419.
- [43] **Manafov, M.D., Kablan, A.**, 2015. Inverse spectral and inverse nodal problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations with δ –interaction, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2015**(26), 1-10.
- [44] **Çakmak, Y., Işık, S.**, 2016. Half Inverse problem for the impulsive diffusion operator with discontinuous coefficient, *Filomat*, **30**(1), 157-168.
- [45] **Wang, Y.P., Yurko, V.A.**, 2017. Inverse spectral problems for differential pencils with boundary conditions dependent on the spectral parameter, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**(8), 3190-3196.
- [46] **Gülşen, T., Panakhov, E.S.**, 2018. On the isospectrality of the scalar energy-dependent Schrödinger problems, *Turkish Journal of Mathematics*, **42**(1), 139-154.
- [47] **Koyunbakan, H.**, 2013. Inverse nodal problem for p –Laplacian energy-dependent Sturm-Liouville equation, *Boundary Value Problems*, **2013**(1), 272.

- [48] **Gulsen, T., Yilmaz, E.**, 2016. Inverse nodal problem for p -Laplacian diffusion equation with polynomially dependent spectral parameter, *Communications, Series A1; Mathematics and Statistics*, **65**(2), 23-36.
- [49] **Gulsen, T., Sian, S.S.M., Yilmaz, E., Koyunbakan, H.**, 2018. Impulsive Diffusion Equation on Time Scales, *International Journal of Analysis and Applications*, **16**(1), 137-148.
- [50] **Moses, H.E.**, 1956. Calculation of the scattering potential from reflection coefficients, *Physical Review*, **102**(2), 557-559.
- [51] **Prats, F. and Toll J.S.**, 1959. Construction of the Dirac equation central potential from phase shifts and bound states, *Physical Review*, **113**(1), 363-370.
- [52] **Verde, M.**, 1959. The inversion problem in wave mechanics and dispersion relations, *Nuclear Physics*, **9**(2), 255-266.
- [53] **Gasymov, M.G. and Levitan B.M.**, 1966. Inverse problem for Diracs System, *Doklady Akademi Nauk SSSR*, **167**(5), 967-970.
- [54] **Panakhov, E.S.**, 1985. The defining of Dirac system in two incompletely set collection of eigenvalues, *Doklady Akademi AzSSR*, **5**, 8-12.
- [55] **Gasymov, M.G. and Dzhabiev T.T.**, 1975. Determination of a system of Dirac differential equations using two spectra, *Transactions of the summer school on spectral Theory of Operators*, 46-71.
- [56] **Mochizuki, K., Trooshin, I.**, 2002. Inverse problem for interior spectral data of the Dirac operator on a finite interval, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **38**(2), 387-395.
- [57] **Amirov, R.K., Guldu, Y.**, 2007. Inverse problems for Dirac operator with discontinuity conditions inside an interval, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **37**(2), 215.
- [58] **Özkan, S., Amirov, R.K.**, 2011. An interior inverse problem for the impulsive Dirac operator, *Tamkang Journal of Mathematics*, **42**(3), 259-263.
- [59] **Mamedov, K.R., Çöl, A.**, 2012. On an inverse scattering problem for a class Dirac operator with discontinuous coefficient and nonlinear dependence on the spectral para-

meter in the boundary condition, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **35**(14), 1712-1720.

- [60] **Guo, Y., Wei, G., Yao, R.**, 2015. Inverse problem for interior spectral data of discontinuous Dirac operator, *Applied Mathematics and Computation*, **268**, 775-782.
- [61] **Aliyev, Z., Manafova, P.**, 2016. Oscillation theorems for the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2016**(115), 1-10.
- [62] **Ercan, A., Panakhov, E.**, 2017. Stability problem for singular Dirac equation system on finite interval, *AIP Conference Proceedings*, 1798(1), 020054, AIP Publishing.
- [63] **Yang, C.F., Yang, X.P.**, 2009. Some Ambarzumyan-type theorems for Dirac operators, *Inverse Problems*, **25**(9), 095012.
- [64] **Keskin, B., Ozkan, A.S.**, 2010. Inverse spectral problems for Dirac operator with eigenvalue dependent boundary and jump conditions, *Acta Mathematica Hungarica*, **130**(4), 309-320.
- [65] **Bairamov, E., Aygar, Y., Olgun, M.**, 2010. Jost solution and the spectrum of the discrete Dirac systems, *Boundary Value Problems*, **2010**(1), 306571.
- [66] **Allahverdiev, B.P.**, 2003. Spectral analysis of dissipative Dirac operators with general boundary conditions, *Journal of mathematical analysis and applications*, **283**(1), 287-303.
- [67] **Yang C.F. and Pivovarchik V.N.**, 2011. Inverse nodal problem for Dirac system with spectral parameter in boundary conditions, *Complex Analysis and Operator Theory*, **7**(4), 1211-1230.
- [68] **Gulsen, T., Yilmaz, E., Koyunbakan, H.**, 2017. Inverse nodal problem for p -Laplacian Dirac system, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**(7), 2329-2335.
- [69] **Gulsen, T., Yilmaz, E.**, 2017. Spectral theory of Dirac system on time scales, *Applicable Analysis*, **96**(16), 2684-2694.
- [70] **Gulsen, T., Yilmaz, E., Goktas, S.**, 2017. Conformable fractional Dirac system on time scales, *Journal of inequalities and applications*, **2017**(1), 161.

- [71] **Hinton, D.**, 2005. Sturm's 1836 oscillation results evolution of the theory in Sturm-Liouville theory, *Birkhäuser Basel*, 1-27.
- [72] **Aliyev, Z.S., Rzayeva, H.S.**, 2014. Oscillation properties of the eigenvector-functions of the one-dimensional Dirac's canonical system, *In Proc. IMM, NAS Azerbaijan 40, Special issue, In memory of MG Gasymov on his 75th birthday* (pp. 36-48).
- [73] **Allegretto, W., Xi, H.Y.**, 1998. A Picone's identity for the p -Laplacian and applications, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **32**(7), 819-830.
- [74] **Bal, K.**, 2013. Generalized Picone's identity and its applications, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2013**(243), 1-6.
- [75] **Batıt, Ö.**, 2001, Some function spaces and their dual spaces, *Master Thesis*, Ege Üniversitesi.
- [76] **Tülüce, Ş.**, 2010. Bir spektral problemin özdeğerlerinin sayısal analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Selçuk Üniversitesi.
- [77] **Levitan, B.M., Sargsjan I.S.**, 1970. Introduction to spectral theory, selfadjoint ordinary differential operators, *American Mathematical Society*.
- [78] **Picone, M.**, 1909. Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second ordine, *JMPA*, **11**,1-141.
- [79] **Agarwal, R.P., Bohner, M., Wong, P.J.Y.**, 1999. Sturm-Liouville eigenvalue problems on time scales, *Applied Mathematics and Computation*, **99**(2-3), 153-166.
- [80] **Kong, Q.**, 2008. Sturm-Liouville problems on time scales with separated boundary conditions, *Results in Mathematics*, **52**(1-2), 111-121.

ÖZGEÇMİŞ

Ad : Meltem
Soyad : Kayalı
Doğum tarihi : 10/08/1988
Doğum Yeri : Adana/Ceyhan

İletişim Numarası : 05343016480
E-mail adresi : meltemkayali23.23@gmail.com

Eğitim durumu : Yüksek Lisans
• İlkokul : Toros İlköğretim Okulu(1994-2000)
• Ortaokul : Toros İlköğretim Okulu(2000-2003)
• Lise : Gazi Anadolu Lisesi(2003-2006)
• Üniversite : Fırat Üniversitesi(2010-2014)
• Yüksek Lisans : Fırat Üniversitesi(2016-2018)