

**DENEME DENKLEM YÖNTEMLERİ İLE BAZI
LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
TAM ÇÖZÜMLERİNİN BELİRLENMESİ**

Tolga AKTÜRK

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hasan BULUT
MAYIS -2015**

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DENEME DENKLEM YÖNTEMLERİ İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ
TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
TAM ÇÖZÜMLERİNİN BELİRLENMESİ**

**DOKTORA TEZİ
TOLGA AKTÜRK
(11121202)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

Danışmanı: Doç. Dr. Hasan BULUT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21 Nisan 2015

MAYIS – 2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DENEME DENKLEM YÖNTEMLERİ İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ
TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
TAM ÇÖZÜMLERİNİN BELİRLENMESİ

DOKTORA TEZİ
TOLGA AKTÜRK
(11121202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.04.2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 18.05.2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Emine MISIRLI (E.Ü)

Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE (U.Ü)

MAYIS – 2015

ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, maddi ve manevi her türlü desteği esirgemeyen hocam Doç. Dr. Hasan BULUT'a ve Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE'ye ayrıca hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya her zaman desteklerini esirgemedikleri için teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Tolga AKTÜRK

ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	V
KISALTMALAR	IX
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
3. MATERYAL VE METOTLAR.....	9
3.1 Geniştirilmiş Deneme Denklem Metodu.....	9
3.2 Yeni Fonksiyon Metodu	11
3.3 Tanh Fonksiyon Metodu.....	12
3.4 Geliştirilmiş Tanh Fonksiyon Metodu.....	13
4. METOTLARIN UYGULANMASI.....	15
4.1 Genelleştirilmiş Benjamin Denklemin GDDM'nun Uygulanması	15
4.2 Genelleştirilmiş Burger-Kdv Denklemin GDDM'nun Uygulanması.....	24
4.3 Genelleştirilmiş Düzenlenen Uzun Dalga Denklemin GDDM'nun Uygulanması	32
4.4 Genelleştirilmiş Lineer Olmayan Klein-Gordon Denklemin GDDM'nun Uygulanması	41
4.5 Boussinesq Denklemin GDDM'nun uygulanması	46
4.6 (N+1) boyutlu sine-cosine-Gordon Denklemin YFM'nun Uygulanması.....	49
4.7 Genelleştirilmiş çift sinh-Gordon Denklemin YFM'nun Uygulanması	52
4.8 (N+1) boyutlu çift sine-Gordon Denklemin YFM'nun Uygulanması.....	54
4.9 (N+1) boyutlu sinh-cosh-Gordon Denklemin YFM'nun Uygulanması	57
4.10 Boussinesq Denklemin GTFM'nun Uygulanması	59
5. SONUÇ	64
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	71

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümleri (traveling wave solutions) için geliştirilen metotlar ve uygulamaları hakkında bazı bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, bu tez çalışması için gerekli olan bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, genişletilmiş deneme denklem metodu, yeni fonksiyon metodu, tanh fonksiyon metodu ve geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Genişletilmiş deneme denklem metodu (the extended trial equation method) kullanılarak genelleştirilmiş Benjamin denklemi, genelleştirilmiş Burger-KdV denklemi, genelleştirilmiş düzenlenen uzun dalga denklemi (generalized regularized long wave equation), Boussinesq denklemi ve genelleştirilmiş lineer olmayan Klein-Gordon denklemi çözülmüştür. Ayrıca yeni fonksiyon metodu (the new function method) ile $(N+1)$ boyutlu sine-cosine-Gordon, genelleştirilmiş çift sinh-Gordon, $(N+1)$ boyutlu çift sine-Gordon, $(N+1)$ boyutlu sinh-cosh-Gordon denklemlerinin yeni çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra Boussinesq denklemi geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu (the generalized tanh function method) kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen çözüm fonksiyonlarının iki ve üç boyutlu grafikleri Mathematica programı kullanılarak çizilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu tez çalışmasında kullanılan metotların ortaya çıkardığı analitik, nümerik ve yaklaşık çözümler değerlendirilmiş ve elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genişletilmiş deneme denklem metodu, yeni fonksiyon metodu, geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, yürüyen dalga çözümleri.

SUMMARY

Determining the Exact Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations by Trial Equation Methods

This study consist of five chapters.

In the first chapter, it has been given some informations about the methods, developed for the traveling wave solutions of the nonlinear partial differential equations, and their applications.

In chapter two, some fundamental definitions and ideas which are necessary in this thesis study are given.

In chapter three, the extended trial equation method, improved tanh function method and new function method are introduced.

In chapter four, the traveling wave solutions of the nonlinear partial differential equations are obtained. The generalized Benjamin equation, the generalized Burger-KdV equation, the generalized reduced long wave equation, the Boussinesq equation and the generalized nonlinear Klein-Gordon equation are solved by the extended trial equation method, also $(N+1)$ -dimensional sine-cosine-Gordon, the generalized double sinh-Gordon, $(N+1)$ -dimensional double sine-Gordon, $(N+1)$ -dimensional sinh-cosh-Gordon equations are solved by the new function method, Boussinesq equation are solved by the generalized tanh function method.

The graphics of the obtained functions were given in two and three dimensional spaces by using Mathematica program.

In chapter five, it has been given a conclusion about techniques used by taking into account analytical, numerical and approximate solutions the methods proposed and used in this thesis study, the solutions found by these methods are evaluated, and the obtained results are given.

Key Words: The extended trial equation method, the new function methods, improved tanh function method, the nonlinear partial differential equations, the traveling wave solutions.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Bir dalga ve özellikleri.....	6
Şekil 2.2.	Bir solitary dalga	7
Şekil 4.1.	$\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \alpha_1 = \beta = 0.2$, $-10 < x < 10$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.20) denkleminin iki boyutlu grafiği.....	18
Şekil 4.2.	$\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \alpha_1 = \beta = 0.2$, $-10 < x < 10$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.20) denkleminin üç boyutlu grafiği	18
Şekil 4.3.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.21) denkleminin iki boyutlu grafiği ...	18
Şekil 4.4.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.21) denkleminin üç boyutlu grafiği	19
Şekil 4.5.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $-110 < x < 110$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.22) denkleminin iki boyutlu grafiği	19
Şekil 4.6.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $-110 < x < 110$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.22) denkleminin üç boyutlu grafiği	19
Şekil 4.7.	$\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \beta = 0.2$, $\alpha_1 = -1$, $0 < x < 5$, ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.36) denkleminin iki boyutlu grafiği ...	22
Şekil 4.8.	$\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \beta = 0.2$, $\alpha_1 = -1$, $0 < x < 5$, ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.36) denkleminin üç boyutlu grafiği ...	22
Şekil 4.9.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.37) denkleminin iki boyutlu grafiği ...	22
Şekil 4.10.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.37) denkleminin üç boyutlu grafiği ...	23
Şekil 4.11.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $\alpha_4 = 0.4$, $-100 < x < 100$ ve $t = 100$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.38) denkleminin iki boyutlu grafiği	23
Şekil 4.12.	$\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $\alpha_4 = 0.4$, $-100 < x < 100$ ve $-100 < t < 120$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.38) denkleminin üç boyutlu grafiği	23

Şekil 4.13. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2, \tau_0 = \tau_1 = 3, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, \delta = -3, \alpha_3 = 0.3, \alpha_4 = 0.4,$ $0 < x < 10$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = 3, p = 4, p = 5$ değerleri için (4.2.18) denkleminin iki boyutlu grafiği	26
Şekil 4.14. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2, \tau_0 = \tau_1 = 3, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.2, \delta = -3, \alpha_3 = 0.3, \alpha_4 = 0.4,$ $0 < x < 10$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = 3, p = 4, p = 5$ değerleri için (4.2.18) denkleminin üç boyutlu grafiği	26
Şekil 4.15. $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2, \xi_3 = 3, \xi_4 = 4, \xi_5 = 5, \xi_6 = 6, a = b = k = \beta = \delta = 0.2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3,$ $-10 < x < 10$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.19) denkleminin iki boyutlu grafiği	27
Şekil 4.16. $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2, \xi_3 = 3, \xi_4 = 4, \xi_5 = 5, \xi_6 = 6, a = b = k = \beta = \delta = 0.2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3,$ $-10 < x < 10$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.19) denkleminin üç boyutlu grafiği	27
Şekil 4.17. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$ $\alpha_1 = 1.12, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla doğru $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.33) denkleminin iki boyutlu grafiği	30
Şekil 4.18. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$ $\alpha_1 = 1.12, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla doğru $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.33) denkleminin üç boyutlu grafiği ...	30
Şekil 4.19. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$ $\alpha_1 = 1.12, \alpha_2 = 0.8, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.34) denkleminin iki boyutlu grafiği	30
Şekil 4.20. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.34) denkleminin üç boyutlu grafiği	31
Şekil 4.21. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$ $\alpha_1 = 1.12, \alpha_2 = 0.8, \alpha_3 = 2, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.35) denkleminin iki boyutlu grafiği ...	31
Şekil 4.22. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$ $\alpha_1 = 1.12, \alpha_2 = 0.8, \alpha_3 = 2, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.35) denkleminin üç boyutlu grafiği....	31
Şekil 4.23. Birinci grafik (4.3.18) denkleminin $-50 < x < 50, -1 < t < 1, \tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = 1,$ $\xi_0 = \xi_1 = \delta = \gamma = k = 1, \eta_0 = 0, q = 2$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.18) denkleminin $-30 < x < 30, t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	34

Şekil 4.24. Birinci grafik (4.3.19) denkleminin $-25 < x < 25$, $-5 < t < 5$, $\tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = 1$ $\xi_0 = 1$, $\eta_0 = 0$, $\alpha_2 = q = 2$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.19) denkleminin $-15 < x < 15$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	35
Şekil 4.25. Birinci grafik (4.3.21) denkleminin $-30 < x < 40$, $-1 < t < 1$, $\tau_0 = \tau_1 = 1$, $\xi_0 = \xi_1 = 1$, $\xi_0 = \xi_1 = \eta_0 = 0$, $\alpha_3 = q = 2$, $\alpha_1 = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.21) denkleminin $-30 < x < 40$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	36
Şekil 4.26. Birinci grafik (4.3.41) denkleminin $-5 < x < 5$, $-0.5 < t < 0.5$, $\tau_0 = \tau_2 = \alpha_1 = 1$ $\xi_0 = \zeta_0 = \eta_0 = 0$, $\xi_1 = \tau_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.41) denkleminin $-90 < x < 90$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	40
Şekil 4.27. Birinci grafik (4.3.42) denkleminin $-25 < x < 25$, $-2 < t < 2$, $\tau_0 = \tau_2 = 1$ $\alpha_1 = \xi_0 = 1$, $\eta_0 = 0$, $\xi_1 = \tau_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.42) denkleminin $-25 < x < 25$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	40
Şekil 4.28. Birinci grafik (4.3.43) denkleminin $-150 < x < 150$, $-1 < t < 1$, $\delta = \gamma = q = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\xi_1 = \tau_1 = -1$, $\tau_0 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 2$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.43) denkleminin $-150 < x < 150$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	41
Şekil 4.29. Birinci grafik (4.4.24) denkleminin $-10 < x < 10$, $-0.5 < t < 0.5$, $\tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = 1$ $\xi_4 = \zeta_0 = \beta = \delta = a = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\gamma = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.4.24) denkleminin $-10 < x < 10$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	45
Şekil 4.30. Birinci grafik (4.4.25) denkleminin $-20 < x < 20$, $-0.5 < t < 0.5$, $\tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = 1$ $\xi_4 = \zeta_0 = \beta = \delta = a = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\gamma = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.4.25) denkleminin $-20 < x < 20$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	46
Şekil 4.31. Birinci grafik (4.5.13) denkleminin $-50 < x < 50$, $0 < t < 1$, $\tau_1 = 5$, $\alpha_1 = 0.6$, $\zeta_0 = 0.3$, $k = 0.1$, $\omega = 2$, $\tau_0 = 3$, $\eta_0 = 0$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.5.13) denkleminin $-50 < x < 50$, $t = 0.5$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	48
Şekil 4.32. Birinci grafik (4.5.14) denkleminin $-50 < x < 50$, $0 < t < 1$, $\tau_1 = 5$, $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_3 = 0.8$, $k = 0.1$, $\omega = 2$, $\tau_0 = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.5.14) denkleminin $-50 < x < 50$, $t = 0.5$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	48

Şekil 4.33. Birinci grafik (4.6.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 5$, $\beta = \frac{1}{4}$, $P = 9$, $N = 1$, $c = 2$, $Q = 0$, $\tau = 1$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve (4.6.15) denkleminin $-20 < x < 20$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği	51
Şekil 4.34. (4.6.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 5$, $\beta = \frac{1}{4}$, $P = 9$, $N = 1$, $c = 2$, $Q = 0$, $\tau = 1$ ve $x = 1$ için üç boyutlu grafiği ve $-20 < x < 20$, $t = 1$ için iki boyutlu grafiği	51
Şekil 4.35. (4.7.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $P = 8$, $N = 2$, $c = 5$, $Q = 0$, $\tau = 1$, $k = 3$ için üç boyutlu grafiği ve $-20 < x < 20$, $t = 1$ için iki boyutlu grafiği	54
Şekil 4.36. (4.8.15) denkleminin $-40 < x < 40$, $-50 < t < 50$, $\alpha = 6$, $\beta = 8$, $P = 1$, $N = 2$, $c = 5$, $Q = 0$, $\tau = 1$, $k = 3$ için üç boyutlu grafiği ve $-11 < x < 12$, $t = 1$ için iki boyutlu grafiği	56
Şekil 4.37. (4.9.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 6$, $\beta = 8$, $P = 1$, $N = 2$, $c = 5$, $Q = 0$, $\tau = 1$, $k = 3$ için üç boyutlu grafiği ve $-11 < x < 12$, $t = 1$ için iki boyutlu grafiği	59
Şekil 4.38. Birinci grafikte $-10 < x < 10$, $0 < t < 1$, $k = \omega = 1$, $C = 0.5$, $C_0 = 0.1$ de (4.10.14) denkleminin üç boyutlu çözüm grafiği, ikinci grafik (4.10.14) denkleminin $-5 < x < 5$, $t = 0.5$ anında analitik çözüm grafiği	62

KISALTMALAR

- GDDM** : Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu
GTFM : Geliştirilmiş Tanh Fonksiyon Metodu
YFM : Yeni Fonksiyon Metodu

1. GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler, gerçek yaşam problemlerinin modellenmesi sonucu ortaya çıkmıştır. Bu tür diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerinin (traveling wave solutions) incelenmesi ile çeşitli dalga davranışları elde edilmiştir. Şok dalgaları, su dalgaları, solitonlar ve tekil dalga çözümlerine ulaşılarak lineer olmayan dalga teorisi alanında ciddi bir gelişme kaydedilmiştir. İlk olarak dispersif dalgalar ile ilgili temel teşkil eden KdV denklemi sığ su dalgalarının yayılımı olayının bir modeli olarak 1895 yılında Korteweg ve de Vries tarafından ortaya konulmuştur [1]. Ardından elastik olarak ve enerjilerini koruyarak yayılabilen, başka bir dalga ile etkileşiminde ise tüm özelliklerini koruyarak dağılan, etkileşimden önceki görünümüne ve hızına sahip olabilen soliton olarak ifade edilen lineer olmayan dalgalar Zabusky ve Kruskal tarafından tespit edilmiştir [2,3]. Ayrıca 1993 yılında Rosenau ve Hyman tarafından yapılan bir çalışmada kompaktan adı verilen yeni bir soliter dalga sınıfına ulaşılmıştır [4].

Mühendislik, fizik ve diğer bilim dallarındaki çeşitli problemleri çözmek için önce bu problemlerin matematiksel ifadelerini elde etmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı sınır ve başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonları bulmak gerekir. Son yıllarda yapılan araştırmalar kısmi diferansiyel denklemlerin yeni dalga çözümleriyle ilgili karmaşık olayları anlama ve tanımlamada etkin rol oynamaktadır. İyi tanımlanmış matematiksel problemler, analitik çözümler elde etme şansını artıracabileceğinden olayların fiziksel yorumu da tam olarak yapılmış olur. Bu nedenle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerini bulmak oldukça önemlidir. Ayrıca bu tip problemlerin yürüyen dalga çözümlerini hesaplamak için literatürde birçok metot bulunmaktadır. Bu metotlardan bazıları, Hirota bilineer dönüşüm metodu [5], Backlund ve Darboux dönüşüm metodu [6], ters saçılım metodu [3,7], geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu [8], genişletilmiş Weierstrass dönüşüm metodu [9-12], ilk integral metodu [13], F-açılım metodu [14], (G'/G) -açılım metodu [15,16], Jacobi eliptik fonksiyon metodu [17], Kudryashov metodu [18] şeklinde sıralanabilir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde bazı temel tanımlara yer verilmiştir. Bu temel bilgiler kullanılarak tez çalışmasındaki metotlar ve uygulamaları ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde ise genişletilmiş deneme denklem metodu (the extended trial equation method), yeni fonksiyon metodu (new function method), tanh

fonksiyon metodu (tanh function method) ve geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu (improved tanh function method) detaylı olarak tanıtılmıştır.

Deneme denklem metodu ilk kez 2005 yılında C. S. Liu tarafından önerilmiştir [19]. Liu'nun bu metottaki temel düşüncesi, bir diferansiyel denklemin tam çözümünün integrasyon alma işlemi ile elde edilebilecek olmasıdır. Ardından tam polinomal diskriminat sistemine dayanan bir deneme denklem yöntemi geliştirilmiştir [21,22]. X. H. Du tarafından geliştirilen irrasyonel deneme denklem metodu kullanılarak Burgers-KdV, dağıtıcı çift sine-Gordon, Fujimoto-Watanabe denklemleri etkin bir biçimde çözülmüştür [23]. Deneme denklem metodu 2012 yılında Pandır ve arkadaşları tarafından yapılan bir çalışmada daha da geliştirilerek genişletilmiş deneme denklem metodu olarak literatüre kazandırılmıştır [20,24-26].

Bir diğer metot olan yeni fonksiyon metodu ilk olarak üstel fonksiyon içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerini elde etmek için tanımlanmış ve Dodd-Bullough denklemine uygulanmıştır [27]. Ardından Sun yeni fonksiyon yaklaşımını trigonometrik fonksiyon içeren sine-Gordon denklemine uygulamıştır [28]. Dolayısıyla üstel ve trigonometrik fonksiyonların yer aldığı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere ait bu uygulamalar trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonları içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerine ilişkin bazı yeni yaklaşımların oluşumunu sağlamıştır [29,30].

Diğer taraftan tanh fonksiyon metodu W. Malfliet tarafından 1992 yılında [31], geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu ise H. Chen ve H. Zhang tarafından 2004 yılında literatüre sunulmuştur [32, 33].

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde ise sırasıyla GDDM genelleştirilmiş Benjamin, genelleştirilmiş Burger-KdV, genelleştirilmiş düzenlenen uzun dalga ve genelleştirilmiş lineer olmayan Klein-Gordon denklemlerine uygulanarak yeni çözüm fonksiyonlarına ulaşılmış ve bu fonksiyonların iki ve üç boyutlu grafikleri verilmiştir.

Ayrıca bu bölümde, sırasıyla $(N+1)$ boyutlu sine-cosine-Gordon, genelleştirilmiş çift sinh-Gordon, $(N+1)$ boyutlu çift sine-Gordon, $(N+1)$ boyutlu sinh-cosh-Gordon denklemlerine YFM uygulanmış, böylece yeni Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunarak fiziksel davranışları iki ve üç boyutlu grafikler ile incelenmiştir.

Bu bölümde son olarak geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu Boussinesq denklemine uygulanmıştır.

2. TEMELKAVRAMLAR

Tanım 2.1.

Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre türevini içeren bir denkleme *diferansiyel denklem* denir. Bağımlı değişkenin bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme *kısmi türevli diferansiyel denklem* denir. [33,34].

Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyorsa bu diferansiyel denkleme *değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem* denir. Eğer bir diferansiyel denklem de bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım yada bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik, yada logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir [34,35].

Kavram 2.1.

Dengeleme prensibi, en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin karşılığı olan polinomların en yüksek dereceli terimlerinin kuvvetleri eşitlenerek hesaplandığından θ , ε ve δ değişkenleri arasında bir dengeleme bağıntısı oluşturulabilir[36].

Tanım 2.2.

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.1)$$

ise Φ fonksiyonuna adi diferansiyel denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklem, denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir.

Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir. Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise

başlangıç şartları, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar ise *sınır şartları* ile tanımlanır [36].

Kavram 2.2.

Jacobi eliptik fonksiyonlar, eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, m eliptik modül olmak üzere $cn(u, m)$, $dn(u, m)$ ve $sn(u, m)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2(t)}} dt, \quad 0 < m^2 < 1, \quad (2.2)$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin fonksiyonundan ortaya çıkar.

Burada $m = \text{mod } u$ ve $\varphi = am(u, m) = am(u)$ Jacobi genliktir. $\varphi = F^{-1}(u, m) = am(u, m)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$\sin(\varphi) = \sin(am(u, m)) = sn(u, m), \quad (2.3)$$

$$\cos(\varphi) = \cos(am(u, m)) = cn(u, m), \quad (2.4)$$

$$\sqrt{1-m^2 sn^2(\varphi)} = \sqrt{1-m^2 \sin^2(am(u, m))} = dn(u, m), \quad (2.5)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar

$$sn(u, 0) = \sin(u), \quad sn(u, 1) = \tanh(u), \quad (2.6)$$

$$cn(u, 0) = \cos(u), \quad cn(u, 1) = \text{sech}(u), \quad (2.7)$$

$$dn(u, 0) = 1, \quad dn(u, 1) = \text{sech}(u), \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jacobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türevler

$$\frac{d}{du}(sn(u)) = cn(u) dn(u), \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{du}(cn(u)) = -sn(u) dn(u), \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{du}(dn(u)) = -m^2 sn(u) cn(u), \quad (2.11)$$

eşitlikleri ile gösterilebilir. Jacobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanısıra bu fonksiyonlar arasında

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1, \quad (2.12)$$

$$m^2 sn(u) + dn^2(u) = 1, \quad (2.13)$$

bağıntıları vardır [36].

Kavram 2.3.

Matematiksel bir terim olarak iyi tanımlı problem kavramı ilk olarak Jacques Hadamard tarafından literatüre sunulan bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

- i) Çözüm vardır,
- ii) Çözüm tektir,
- iii) Çözüm karardır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümünün tek olması, mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa model hakkında daha fazla bilgiye ihtiyaç vardır.

Eğer başlangıç yada sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm karardır.

Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. X ve Y iki normlu uzay ve $K: X \rightarrow Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Karardılık: x çözümü daima y 'ya bağlıdır. Yani $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \rightarrow Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ olmasıdır [37].

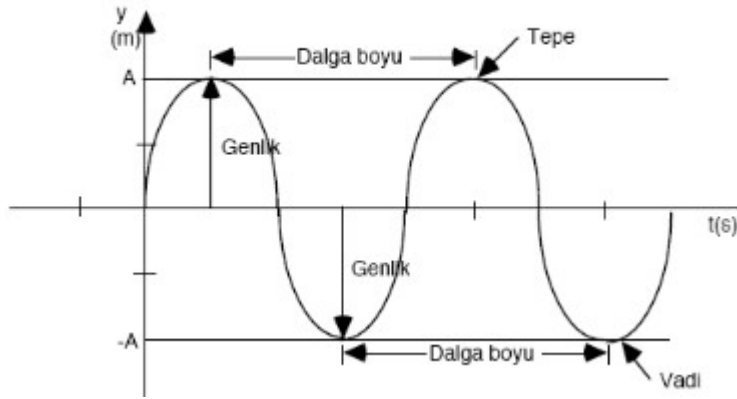
Kavram 2.4.

Diskriminant matematik bilminde bir cebirsel kavramdır. Gerçek katsayılı ikinci derece polinom denklemler'in çözümü için kullanılır. İkinci dereceden büyük herhangi bir polinom'un köklerinin bulunması için de bu kavram, köklerin toplamı için gereken ifadenin ve köklerin çarpımı için gereken ifadenin bulunması suretiyle genişletilmiştir. Bu arada bir polinom için çoklu köklerin varlığı veya yokluğu için gereken koşul da diskriminant'ın varlığı ve yokluğu ile bulunabilmektedir. Diskriminant kavramı polinomların incelenmesinden daha başka matematik alanlarda da kullanılmaktadır. Bu kavramın kullanışı konik kesitlerin ve genel olarak kuadratik şekillerin daha iyi anlaşılmasına izin vermektedir. Galois teorisi'nin kuadratik formlara veya sayılar sonlu

uzantısı hakkındaki gelişmelerde de diskriminant kavramı rol oynar. Matris sistemindeki determinant hesaplanmasının temelinde de diskriminant kavramı yatmaktadır[38].

Tanım 2.3.

Bir cisim veya ortamdaki sarsıntıya karşılık gelen olaya *dalga* denir. Dalga boşlukta ve madde içinde yayılabilen ritmik bir olaydır. Bir ip ile oluşturulan dalga, bir tepe ve bir vadiye sahiptir. Tepeye *karın*, vadiye ise *çukur* adı verilir (Şekil 2.1). Her dalga belli bir dalga boyuna sahiptir. Bir karından bir karına olan toplam mesafeye bir *dalga boyu* adı verilir. Bir çukurdan, diğerine olan mesafe de dalga boyu ile aynıdır [39].



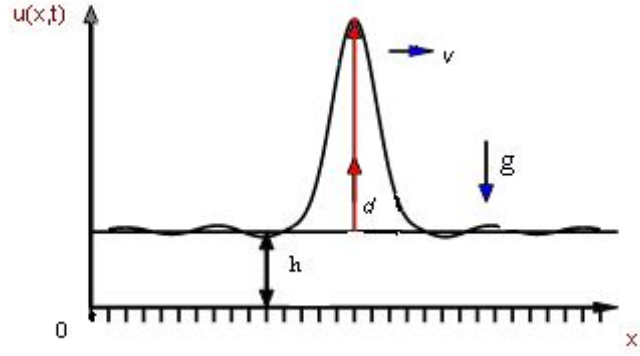
Şekil 2.1 Bir dalga ve özellikleri

Kavram 2.5.

Doppler Etkisi (Doppler olayı), adını ünlü bilim insanı ve matematikçi Christian Andreas Doppler'den almakta olup, kısaca dalga özelliği gösteren herhangi bir fiziksel varlığın frekans ve dalga boyu'nun hareketli (yakınlaşan veya uzaklaşan) bir gözlemci tarafından farklı zaman ve/veya konumlarda farklı algılanması olayıdır. Dalga kaynağının gözlemciye göre hareketinin yol açtığı ses ya da herhangi bir başka dalga olarak algılanmasıdır. Hareketsiz bir ses kaynağının yayınladığı dalganın sayısı belirli uzaklıktaki bir dinleyiciye olduğu gibi iletilir. Kaynak ya da dinleyici harekette ise birbirlerine yaklaşıp yaklaşırken dinleyici daha fazla dalga algılayacağından, saniyede algılanan dalga sayısı ya da frekans artar. Uzaklaşma durumunda ise frekans küçülür. Bu olay düdük çalan bir trenin yaklaşıp uzaklaşması sırasında açık biçimde gözlenebilir; trenin düdüğü, tren yaklaşırken frekansı artacağından tizleşecek, uzaklaşırken ise frekansı azalacağından kalınlaşacak [39].

Tanım 2.4.

İlerleme, çarpışma esnasında hiçbir şekilde fiziksel özelliklerini değiştirmeyen dalgalara *solitary dalgalar* denir [40].



Şekil 2.2 Bir solitary dalga

Kavram 2.6.

Soliton teorisi pek çok fiziksel alanda da uygulama sahasına sahiptir[41]. Diğer taraftan, bir soliton aşağıdaki özellikleri taşıyan bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olarak tanımlanabilir.

- i) Çözüm, sürekli bir dalga formunda olmalıdır.
- ii) Çözüm sınırlandırılır, yani; KdV denkleminde elde edilen solitonlar gibi çözüm üstel olarak sıfıra doğru bozulur veya Sine-Gordon denkleminde verilen solitonlar gibi çözüm sonsuzda bir sabite yakınsar.
- iii) Soliton, karakterini koruyan diğer solitonlar ile iç etkileşim içinde bulunur.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözüm varsa *solitonlar* olarak adlandırılır. Diğer bir ifade ile bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır.

Tanım 2.5.

$A \subset \mathbb{R}$ olsun. $\forall x \in A$ için $x \geq k$ şartını sağlayan bir k sayısı varsa A kümesine *alttan sınırlıdır* denir ve $\forall x \in A$ için $x \leq m$ olacak şekilde bir m sayısı varsa A kümesine *üstten sınırlıdır* denir. Altan ve üstten sınırlı bir kümeye *sınırlıdır* denir. $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A nın *supremumu* denir ve $\sup A$ ile gösterilir. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne A nın *infimumu* denir ve $\inf A$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü P olsun

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} A(f, p) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \bar{U}(f, p) = s,$$

ise f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında *integrallenebilir fonksiyondur* denir. Bu s sayısına da, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki *belirli integrali* denir.

Kavram 2.7.

Mathematica, yüksek boyutlarda veriyi çok hızlı ve kolay bir şekilde işleyebilen, Laplace, Fourier dönüşümlerini ve analizlerini yapabilen ve bunlar gibi çok çeşitli fonksiyonları kolayca gerçekleştirebilen hazır araçlara sahip olan paket programdır. [42,43].

3. MATERYAL VE METOTLAR

Bu bölümde, genişletilmiş deneme denklem metodu, yeni fonksiyon metodu, tanh fonksiyon metodu ile geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu tanıtılmış ve bu metodların bazı temel özellikleri verilmiştir.

3.1. Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (Extended Trial Equation Method)

$u = u(x, t)$ iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere,

$$P(u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.1.1)$$

biçimindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesi için $\lambda \neq 0$ iken

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \lambda t, \quad (3.1.2)$$

dalga dönüşümü (3.1.1) denkleminde yerine yazılarak aşağıdaki gibi bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$N(u, u', u'', u''', \dots) = 0. \quad (3.1.3)$$

Bu metodun amacı, dengeleme prosedürüne uygun olan genelleştirilmiş lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerini elde etmektir. Bu tip denklemler genellikle,

$$Auu'' + B(u')^2 + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 = 0, \quad (3.1.4)$$

formuna sahip olduğundan genelleştirilmiş eliptik diferansiyel denklemler üzerinde çalışılmıştır. (3.1.4) denkleminin bazı özel durumları aşağıda verilmiştir:

$$Auu'' + B(u')^2 + Cu^2 + Du^3 = 0,$$

$$Auu'' + B(u')^2 + Cu^2 + Du^4 = 0,$$

(3.1.4) tipindeki denklemlerin çözümü aşağıdaki gibi bir sonlu seri yaklaşımı ile bulunabilir:

$$u = \sum_{i=0}^{\delta} \tau_i \Gamma^i. \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) denkleminde u çözüm fonksiyonu Γ fonksiyonunun kuvvetlerinin lineer kombinasyonu ile ifade edilmektedir. $\Phi(\Gamma)$ ve $\Psi(\Gamma)$ polinom fonksiyonlar olmak üzere, Γ fonksiyonları

$$(\Gamma')^2 = \Lambda(\Gamma) = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} = \frac{\sum_{i=0}^{\theta} \xi_i \Gamma^i}{\sum_{j=0}^{\varepsilon} \zeta_j \Gamma^j} = \frac{\xi_0 + \xi_1 \Gamma + \dots + \xi_{\theta} \Gamma^{\theta}}{\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma + \dots + \zeta_{\varepsilon} \Gamma^{\varepsilon}}, \quad (3.1.6)$$

şeklindeki lineer olmayan adi eliptik diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonudur. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemleri kullanılarak (3.1.4) denklemindeki türev içeren uu'' ve $(u')^2$ fonksiyonlarının polinom formuna indirgenmiş olması gerekmektedir. Bu nedenle (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerinden

$$(u')^2 = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Gamma^{i-1} \right)^2, \quad (3.1.7)$$

$$u'' = \frac{\Phi'(\Gamma) \Psi(\Gamma) - \Phi(\Gamma) \Psi'(\Gamma)}{2 \Psi^2(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Gamma^{i-1} \right) + \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i(i-1) \tau_i \Gamma^{i-2} \right), \quad (3.1.8)$$

bağıntıları elde edilebilir. (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri (3.1.3) denkleminde yerine yazılarak Γ 'ya bağlı $\Omega(\Gamma)$ polinom fonksiyonu

$$\Omega(\Gamma) = \rho_s \Gamma^s + \dots + \rho_1 \Gamma + \rho_0 = 0, \quad (3.1.9)$$

şeklinde elde edilir. Dengeleme prensibi en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin karşılığı olan polinomların en yüksek dereceli terimlerinin kuvvetleri eşitlenerek hesaplandığından θ , ε ve δ değişkenleri arasında bir dengeleme bağıntısı oluşturulabilir. Ayrıca θ , ε ve δ değişkenlerine çeşitli değerler verilerek farklı çözüm durumları ortaya çıkarılabilir. $\Omega(\Gamma)$ polinomunun katsayıları sıfır alındığında,

$$Q_i = 0, \quad i = 0, \dots, s \quad (3.1.10)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\theta}$, $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{\varepsilon}$ ve $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{\delta}$ parametreleri belirlenebilir.

Ayrıca (3.1.6) denklemini integre edildiğinde,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\Gamma)}} d\Gamma = \int \sqrt{\frac{\Psi(\Gamma)}{\Phi(\Gamma)}} d\Gamma, \quad (3.1.11)$$

bağıntısı elde edilir.

$\Phi(\Gamma)$ polinomunun köklerini sınıflandırma işlemine bağlı olarak tanımlanan diskriminant sisteminin kullanımı ile (3.1.11) denkleminin çözümüne ulaşılır ve böylece (3.1.1) denkleminin yürüyen dalga çözümleri elde edilir.

3.2. Yeni Fonksiyon Metodu (New Function Method)

Bu bölümde, yeni fonksiyon metodunun trigonometrik sine, cosine, sinh, cosh ve üstel e^{mu} , ($n \in \mathbb{Z}$) fonksiyonlarını içeren kısmi diferansiyel denklemler için bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Öncelikle bu tarz denklemlerin en genel halini aşağıdaki gibi ele alalım

$$P(u, \sin(u), \cos(u), \sinh(nu), \cosh(nu), e^{(nu)}, u_t, u_{xx}) = 0, \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) denkleminin ($c \neq 0$) olmak üzere $u = u(x, t) = u(\mu) = u(x - ct)$, $\mu = x - ct$ şeklindeki dalga dönüşümü uygulandığında

$$N(u, u', u'', \dots) = 0, \quad (3.2.2)$$

biçimindeki lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. F , G ve g fonksiyonları için u çözüm fonksiyonu

$$F(u'') = G(g(u)), \quad (3.2.3)$$

denklemini sağlar. Ayrıca

$$u' = f(g(u)), \quad u'' = f(g(u))g'(u)f'(g(u)), \quad (3.2.4)$$

denklemleri (3.2.3) denkleminde yerine yazılarak

$$F(f(g(u))g'(u)f'(g(u))) = G(g(u)), \quad (3.2.5)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $\psi = g(u)$ şeklinde seçilirse,

$$F(\psi' f(\psi) f'(\psi)) = G(\psi), \quad (3.2.6)$$

bağıntısı yazılabilir. (3.2.6) denklemini integre edildiğinde

$$\frac{du}{f(g(u))} = d\mu \Rightarrow \int \frac{du}{f(g(u))} = \int d\mu = \mu + P, \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Burada P bir integrasyon sabitidir. Eğer (3.2.7) denklemini ters fonksiyon yardımıyla integre edilirse bu problemin açık çözümü, eğer integre edilemez veya integrasyonu çok karmaşık ise kapalı çözümü elde edilebilir.

3.3. Tanh Fonksiyon Metodu(Tanh Function Method)

1992 yılında ilk olarak Malfliet [31] tarafından *tanh metot* formülize edilmiş olup bu metot, ısı yayılımı, difüzyon reaksiyonu, plazma fiziği, türbülans teorisi, okyanus dinamiği ve biyofizik gibi doğa olaylarını tanımlayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için önemli bir rol oynar. Bu teknik ile elde edilen çözümler kapalı *tanh* fonksiyonu formundadır. Malfliet bu metot ile

$$H(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.3.1)$$

şeklinde verilen bir kısmi diferensiyel denklemin yürüyen eden dalga çözümünü bulmak için $\xi = c(x - vt)$ gibi bir koordinat göz önüne alarak bu koordinata göre (3.3.1) denklemini adi diferensiyel denkleme dönüştürerek yeniden yazmıştır. Burada v dalga hızını ve c ise $L = c^{-1}$ genişlikli durağan bir dalgayı ifade eder. Genelliği bozmaksızın $c > 0$ olarak tanımlanır. Adi diferensiyel denklem elde edildikten sonra $Y = \tanh(\xi)$ gibi yeni bir bağımsız değişken tanımlanır. Bu yeni değişkene göre türevler

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &\rightarrow (1 - Y^2) \frac{d}{dY}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &\rightarrow (1 - Y^2) \left(-2Y \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} \right), \\ \frac{d^3}{d\xi^3} &\rightarrow -2Y(1 - Y^2) \left(-2Y \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} \right) + (1 - Y^2)^2 \left(-2 \frac{d}{dY} - 2Y \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2) \frac{d^3}{dY^3} \right), \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca daha yüksek mertebeden türevler benzer şekilde hesaplanabilir. Bu türevler ile birlikte (3.3.1) denklemi için aranan

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^M a_m Y^m, \quad (3.3.2)$$

çözümü, elde edilen adi diferensiyel denklemde yerlerine yazılmasıyla $Y^m = 0 (m = 0, 1, 2, \dots, M)$ katsayıları yok edilerek cebirsel denklem sistemi bulunur.

Bulunan bu cebirsel denklem sisteminde $a_m = 0 (m = 0, 1, 2, \dots, M)$ katsayıları elde edilir ve bu katsayılar (3.3.2) serisinde yerlerine yazılarak (3.3.2) denkleminin dalga çözümü bulunmuş olur. Burada M en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimlerin dengelenmesiyle bulunabilen parametredir. Normal olarak analitik çözümün elde edilebilmesi için M parametresinin pozitif bir aralık içerisinde olması beklenir.

Ancak M parametresinin negatif değer aldığı bir örnekte bulunabilir. $(-1 \leq Y \leq 1)$ durumunda $Y \rightarrow 0$ tekilliğinden kaçınmak için (3.3.2) serisi değiştirilmelidir. Bunun için (3.3.2) serisi

$$\left(\sum_{m=0}^{M'} a_m Y^m \right)^{-1}, \quad M' = -M, (M > 0), \quad (3.3.3)$$

şeklinde yazılır [44–46].

3.4. Geliştirilmiş Tanh Fonksiyon Metodu (İmproved Tanh Function Method)

2004 yılında Chen ve Zhang [32], (3.4.1) denkleminin hareket eden dalga çözümlerini elde etmek için yukarıda bahsedilen tanh metodunda kullanılan

$$\frac{dF}{d\xi} = A + BF + CF^2, \quad (3.4.1)$$

Riccati diferensiyel denklemindeki katsayıların farklı durumlarına göre geliştirilmiş tanh fonksiyon metodunu sunmuşlardır. Bu metot ile (3.4.1) denklemi için aranan çözüm

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^M a_m F^m \quad (3.4.2)$$

şeklinde yazılır.

(3.4.1) denkleminin çözümleri için aşağıdaki durumlar;

1. Durum:

$$A = C = 1, B = 0 \text{ ise } F = \tan z, \quad (3.4.3)$$

2. Durum:

$$A = \frac{1}{2}, B = 0, C = -\frac{1}{2} \text{ ise } F = \coth z \pm \csc h z \text{ veya } F = \tanh z \pm i \sec h z, \quad (3.4.4)$$

3. Durum:

$$A = C = \pm \frac{1}{2}, B = 0 \text{ ise } F = \sec z \pm \tan z \text{ veya } F = \csc z \pm \cot z, \quad (3.4.5)$$

4. Durum:

$$A = 1, B = 0, C = -1 \text{ ise } F = \tanh z \text{ veya } F = \coth z, \quad (3.4.6)$$

5. Durum:

$$A = C = -1, B = 0 \text{ ise } F = \cot z, \quad (3.4.7)$$

6. Durum:

$$C = 0, B \neq 0 \text{ ise } F = \frac{(\exp(Bz) - A)}{B}, \quad (3.4.8)$$

7. Durum:

$$A = B = 0, C \neq 0 \text{ ise } F = -\frac{1}{(Cz + c_0)}, \quad (3.4.9)$$

fonksiyonları ile (3.4.1) denkleminin hareket eden dalga çözümleri yazılabilir.

Bu metot yardımı ile El-Wakil ve arkadaşları çalışmalarında lineer olmayan fiziksel bir model için periyodik dalga çözümleri elde etmişlerdir[47]. Yukarıda bahsedilen ve kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini ve periyodik dalga çözümlerini veren *tanh* metotlarının yanı sıra aynı zamanda eliptik fonksiyonların yardımı ile kısmi diferansiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerini veren metotlar da vardır. Bu metotlar sırası ile 2001 yılında Jakobi eliptik fonksiyon metot [48], 2003 yılında değiştirilmiş Jakobi eliptik fonksiyon metot [49] ve 2004 yılında genelleştirilmiş Jakobi eliptik fonksiyon metot olmak üzere bilim adamları tarafından literatüre kazandırılmıştır[50].

4. METOTLARIN UYGULANMASI

Bu bölümde ilk olarak, GDDM genelleştirilmiş Benjamin denklemine, genelleştirilmiş Burger-KdV denklemine, genelleştirilmiş düzenlenen uzun dalga denklemine, genelleştirilmiş lineer olmayan Klein-Gordon denklemine ve Boussinesq denklemine uygulanmış ve elde edilen çözüm fonksiyonlarının iki ve üç boyutlu grafikleri verilmiştir.

İkinci adımda ise, sırasıyla (N+1) boyutlu sin-cos-Gordon, genelleştirilmiş çift sinh-Gordon, (N+1) boyutlu çift sin-Gordon, (N+1) boyutlu sinh-cosh-Gordon denklemlerine YFM uygulanmış ve bulunan yürüyen dalga çözümlerinin davranışları iki ve üç boyutlu grafikler ile incelenmiştir.

Üçüncü adımda ise Boussinesq denklemine GTFM uygulanarak, bu denklemin çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca GDDM ile elde edilen çözümler, GTFM ile elde edilen çözümler ile karşılaştırılarak GTFM ile elde edilemeyen çözümlerin GDDM ile elde edildiği görülmüştür. Bulunan çözümlerin davranışları iki ve üç boyutlu grafikler ile incelenmiştir.

4.1 Genelleştirilmiş Benjamin Denklemine GDDM'nun Uygulanması

$\alpha, \beta \neq 0$ için

$$u_{tt} + \alpha (u^p u_x)_x + \beta u_{xxxx} = 0, \quad (4.1.1)$$

şeklindeki genelleştirilmiş Benjamin denklemine [51] $(k, \lambda \text{ sabitler}) \eta = kx - \lambda t$ iken

$u(x, t) = u(\eta)$ dalga dönüşümü uygulanıp bulunan denklemde $u = v^{\frac{1}{p}}$ dönüşümü gerekli türev kavramlarına göre düzenlenir, η ' ye göre iki kez integre edilir ve integral sabitleri sıfır kabul edilirse,

$$\lambda^2 k^2 (p+1) v^2 + \alpha k p^2 v^3 + \beta k^4 (1-p^2) (v')^2 + \beta k^4 p (1+p) v v'' = 0, \quad (4.1.2)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir.

(3.1.6-3.1.8) ifadeleri (4.1.2) denkleminde yerine yazılıp dengeleme prensibi uygulandığında

$$\theta = \varepsilon + \delta + 2, \quad (4.1.3)$$

şeklinde bir dengeleme bağıntısı bulunur. Bu bağıntıdaki parametlerin uygun seçimleri ile aşağıdaki çözüm durumlarına ulaşılır.

Durum 1.

$\varepsilon = 0$, $\delta = 1$, $\theta = 3$ ve $\zeta_0 \neq 0$ değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$v' = \frac{\xi_0 + \xi_1 \Gamma}{\zeta_0}, \quad (4.1.4)$$

$$v'' = \frac{\tau_1 (\xi_1 + 2\xi_2 \Gamma + 3\xi_3 \Gamma^2)}{2\zeta_0}, \quad (4.1.5)$$

$$(v')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_0 + \xi_1 \Gamma + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_3 \Gamma^3)}{\zeta_0}, \quad (4.1.6)$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.4-4.1.6) ifadeleri (4.1.2)' de yerine yazılarak Γ polinomunun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 7 paket programı ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\xi_0 = -\frac{\tau_0 (\xi_2 \tau_0 - 2\xi_1 \tau_1)}{3\tau_1^2}, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \xi_2, \quad \xi_3 = \frac{\tau_1 (2\xi_2 \tau_0 - \xi_1 \tau_1)}{3\tau_0^2}, \quad (4.1.7)$$

$$\zeta_0 = -\frac{k^3 \beta (p^2 + 3p + 2)(2\xi_2 \tau_0 - \xi_1 \tau_1)}{6p^2 a \tau_0^2}, \quad (4.1.8)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{6a\tau_0 (\xi_2 \tau_0 - \xi_1 \tau_1)}{k(p^2 + 3p + 2)(\xi_1 \tau_1 - 2\xi_2 \tau_0)}}. \quad (4.1.9)$$

(4.1.7-4.1.9) sonuçları sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$A = \sqrt{\frac{k^3 \beta \tau_1^2 (p^2 + 3p + 2)(\xi_1 \tau_1 - 2\xi_2 \tau_0)}{2p^2 a}}, \quad B = \tau_0^3 (2\xi_1 \tau_1 - \xi_2 \tau_0), \quad (4.1.10)$$

$$C = 3\tau_1^2 \tau_0^2 \xi_1, \quad D = \tau_1^2 3\tau_0^2 \xi_2, \quad E = \tau_1^3 (2\xi_2 \tau_0 - \xi_1 \tau_1),$$

polinom katsayıları için

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{1}{\sqrt{B + C\Gamma + D\Gamma^2 + E\Gamma^3}} d\Gamma, \quad (4.1.11)$$

integral formu bulunur. (4.1.11) denklemi integre edilerek (4.1.1) denkleminin kapalı formdaki dalga çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A}{v - \alpha_1}, \quad (4.1.12)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{v - \alpha_2} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{v - \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \right|, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.1.13)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{-2A}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}} F(m, n), \quad \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1. \quad (4.1.14)$$

Burada $m = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{v - \alpha_1}} \right)$ ve $n = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}$ için $F(m, n)$ birinci tip eliptik integral fonksiyonudur.

Ayrıca α_1, α_2 ve α_3 değerleri de

$$B + C\Gamma + D\Gamma^2 + E\Gamma^3 = 0, \quad (4.1.15)$$

polinom denkleminin kökleridir. Böylece,

$$\lambda = \sqrt{\frac{6a\tau_0(\xi_2\tau_0 - \xi_1\tau_1)}{k(p^2 + 3p + 2)(\xi_1\tau_1 - 2\xi_2\tau_0)}}, \quad (4.1.16)$$

için

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 + \frac{4A^2}{(kx - \lambda t - \eta_0)^2} \right]^{1/p}, \quad (4.1.17)$$

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \sec^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2A} (\eta - \eta_0) \right) \right]^{1/p}, \quad (4.1.18)$$

$$u(x, t) = \left[\alpha_3 + (\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \left(-\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}{2A} (\eta - \eta_0), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \right) \right]^{1/p}, \quad (4.1.19)$$

çözümleri elde edilir.

Bu çözüm fonksiyonlarını sadeleştirmek için $\eta_0 = 0$ alınırsa $r = \frac{-\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}{2A}$, $s = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}$,

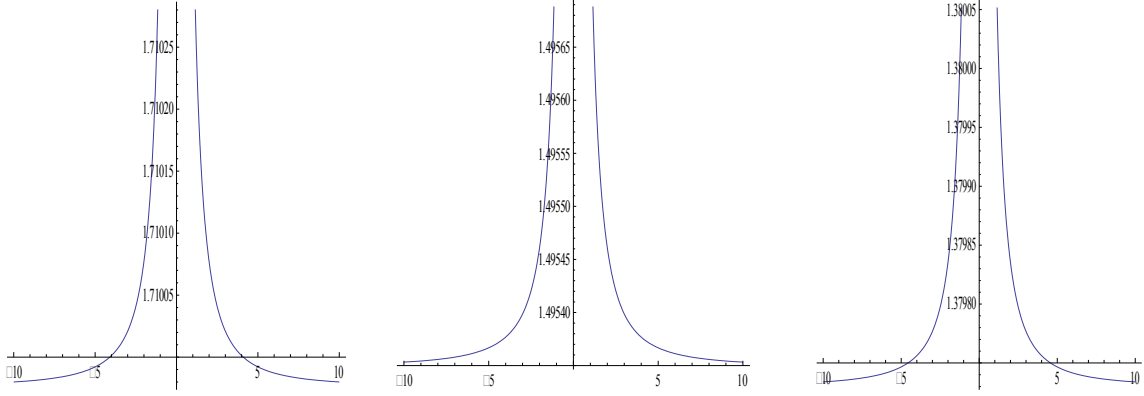
$f(r, s) = \operatorname{sn}^2[r(kx - \lambda t), s]$ için sırasıyla,

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 + 4A^2 (kx - \lambda t)^{-2} \right]^{1/p}, \quad (4.1.20)$$

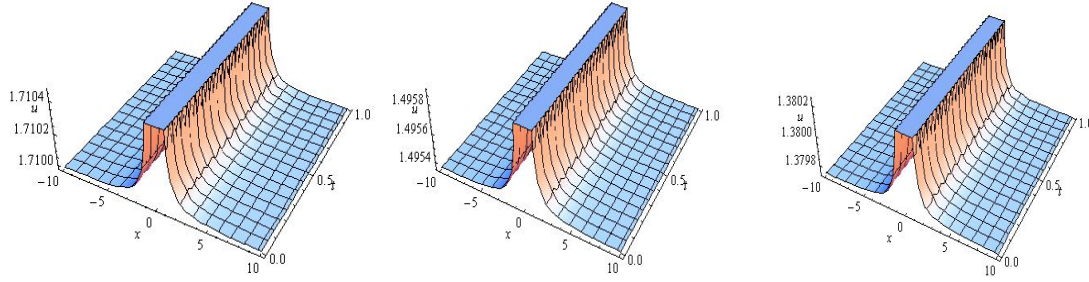
$$u(x, t) = \left[\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \sec^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{2A} (kx - \lambda t) \right) \right]^{1/p}, \quad (4.1.21)$$

$$u(x, t) = \left[\alpha_3 + (\alpha_2 - \alpha_3) f(r, s) \right]^{1/p}, \quad (4.1.22)$$

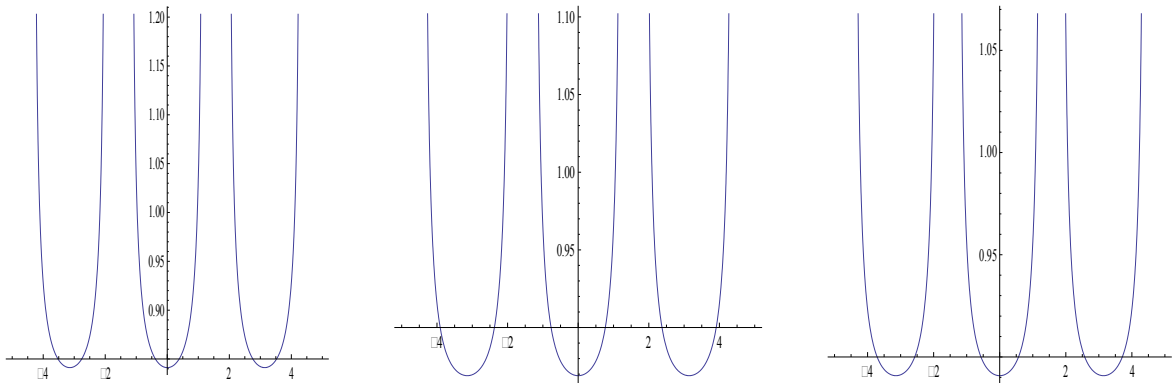
olarak bulunur.



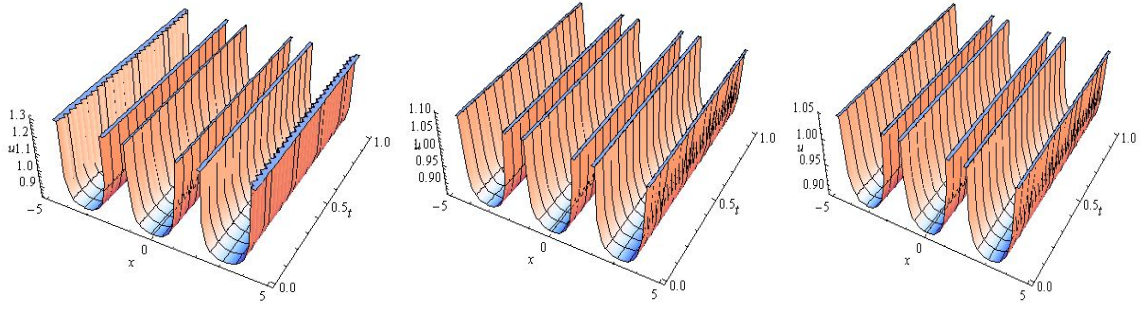
Şekil 4.1. $\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \alpha_1 = \beta = 0.2$, $-10 < x < 10$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$ $p = -5$ değerleri için (4.1.20) denkleminin iki boyutlu grafiği



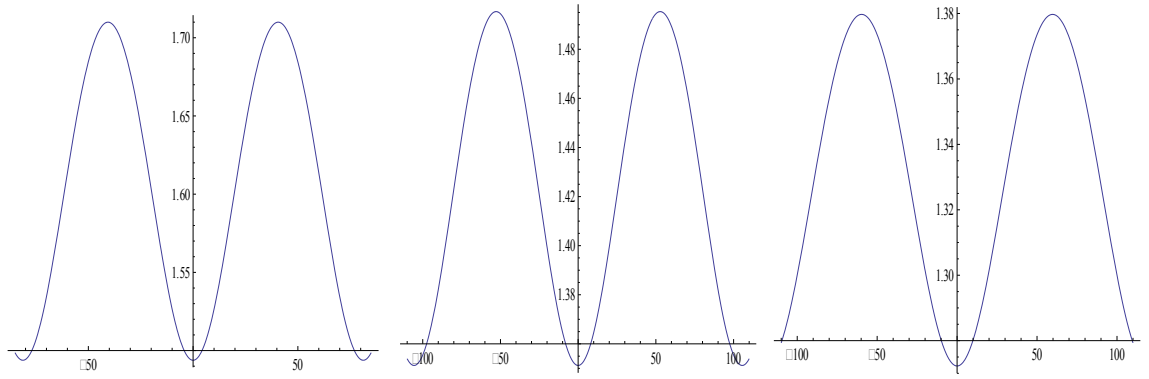
Şekil 4.2. $\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \alpha_1 = \beta = 0.2$, $-10 < x < 10$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$ $p = -5$ değerleri için (4.1.20) denkleminin üç boyutlu grafiği



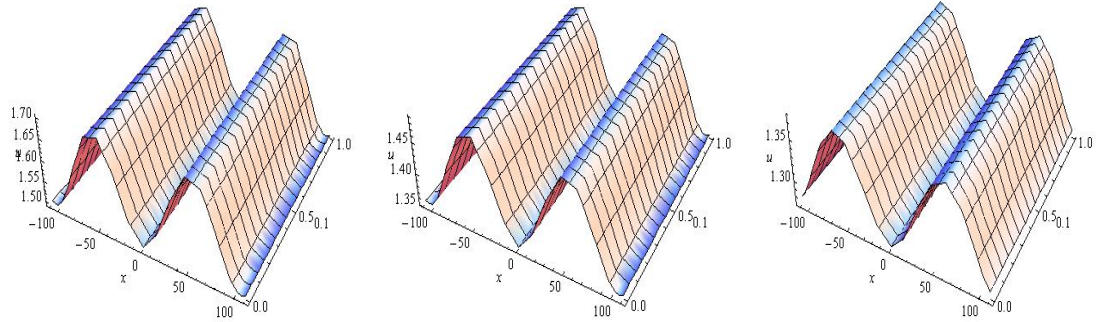
Şekil 4.3. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.21) denkleminin iki boyutlu grafiği



Şekil 4.4. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.21) denkleminin üç boyutlu grafiği



Şekil 4.5. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $-110 < x < 110$, ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.22) denkleminin iki boyutlu grafiği



Şekil 4.6. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $-110 < x < 110$, ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.22) denkleminin üç boyutlu grafiği

Yorum 1. Bu çalışmada elde edilen rasyonel fonksiyon çözümleri, tek kıvrım çözümleri ve Jacobi-eliptik fonksiyon çözümleri daha önce literatürde bulunmayan yeni çözümlerdir.

Durum 2.

$\varepsilon = 0$, $\delta = 2$, $\theta = 4$ ve $\zeta_0 \neq 0$ değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$v = \tau_0 + \tau_1 \Gamma + \tau_2 \Gamma^2, \quad (4.1.23)$$

$$(v')^2 = (\tau_1 + \tau_2 \Gamma)^2 \frac{\xi_0 + \xi_1 \Gamma + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_4 \Gamma^4}{\zeta_0}, \quad (4.1.24)$$

$$v'' = (\tau_1 + \tau_2 \Gamma) \frac{\xi_1 + 2\xi_2 \Gamma + 3\xi_3 \Gamma^2 + 4\xi_4 \Gamma^3}{2\zeta_0} + 2\tau_2 \frac{\xi_0 + \xi_1 \Gamma + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_4 \Gamma^4}{\zeta_0}, \quad (4.1.25)$$

bağıntıları elde edilir. (4.1.23-4.1.25) ifadeleri (4.1.2) denkleminde yerine yazılarak Γ fonksiyonuna ait polinomun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 7 paket programı yardımıyla çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\frac{ap^2 \zeta_0 \tau_0^2}{2k^3(2+3p+p^2)\beta\tau_2}, \quad \xi_1 = -\frac{ap^2 \zeta_0 \tau_1}{k^3(2+3p+p^2)\beta\tau_2}, \\ \xi_2 &= -\frac{ap^2 \zeta_0 \tau_2}{2k^3(2+3p+p^2)\beta}, \quad \xi_3 = -\frac{ap^2 \zeta_0 \tau_1}{k^3(2+3p+p^2)\beta}, \\ \xi_4 &= -\frac{ap^2 \zeta_0 \tau_2}{2k^3(2+3p+p^2)\beta}, \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{a(\tau_1^2 - 4\tau_0\tau_2)}}{\sqrt{2k\tau_2(p^2 + 3p + 2)}}. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

(4.1.26) sonuçları sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{1}{\sqrt{A + B\Gamma + C\Gamma^2 + D\Gamma^3 + E\Gamma^4}} d\Gamma, \quad (4.1.27)$$

elde edilir. (4.1.27) denklemindeki polinomun katsayıları

$$\begin{aligned} A &= -\frac{ap^2 \tau_0^2}{2k^3(2+3p+p^2)\beta\tau_2}, \quad B = -\frac{ap^2 \zeta_0 \tau_1}{k^3(2+3p+p^2)\beta\tau_2}, \\ C &= -\frac{ap^2 \tau_2}{2k^3(2+3p+p^2)\beta}, \quad D = -\frac{ap^2 \tau_1}{k^3(2+3p+p^2)\beta}, \\ E &= -\frac{ap^2 \tau_2}{2k^3(2+3p+p^2)\beta}, \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

şeklindedir. (4.1.27) denklemini integre edilirse, (4.1.1) denklemini için aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{1}{\alpha_1 - v}, \quad (4.1.29)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \log \left| \frac{v - \alpha_1}{v - \alpha_2} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.1.30)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)}} F(m, n), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4. \quad (4.1.31)$$

Burada $m = \arcsin \left(\sqrt{\frac{(v - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(v - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)}} \right)$ ve $n = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}$ iken $F(m, n)$ birinci

tip eliptik integral fonksiyondur. Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 değerleri aşağıdaki polinom denkleminin kökleridir

$$A + B\Gamma + C\Gamma^2 + D\Gamma^3 + E\Gamma^4 = 0. \quad (4.1.32)$$

(4.1.29-4.1.31) denklemlerinden

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{1}{\eta - \eta_0} \right]^{1/p}, \quad (4.1.33)$$

$$u(x, t) = \left[\alpha_2 \pm \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{-1 + e^{(\alpha_1 - \alpha_2)(\eta - \eta_0)}} \right]^{1/p}, \quad (4.1.34)$$

$$u(x, t) = \left[\frac{\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_4)\text{sn}^2(r, s)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)\text{sn}^2(r, s)} \right]^{1/p}, \quad (4.1.35)$$

çözümleri elde edilir. Burada λ , r ve s parametreleri

$$\lambda = \sqrt{\frac{6a\tau_0(\xi_2\tau_0 - \xi_1\tau_1)}{k(p^2 + 3p + 2)(\xi_1\tau_1 - 2\xi_2\tau_0)}},$$

$$r = \pm \frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2}(\eta - \eta_0), \quad s = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

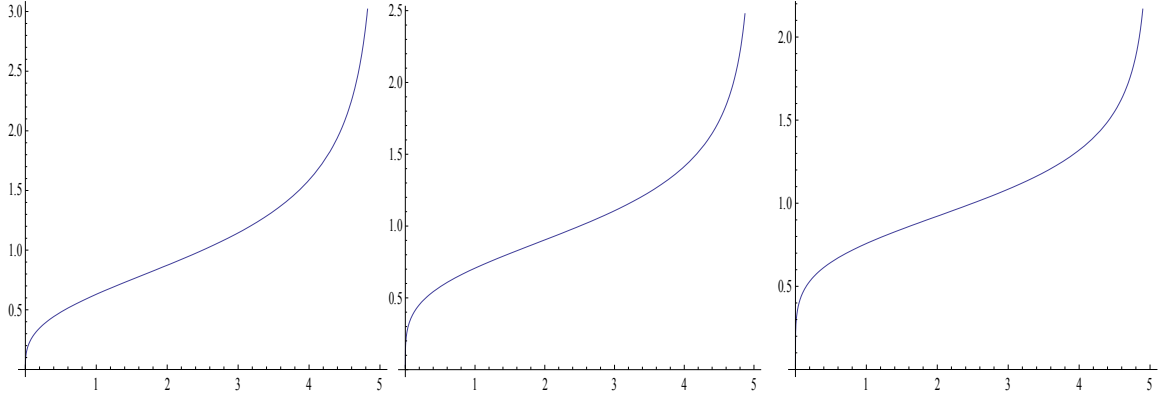
şeklinde dir. (4.1.33-4.1.35) çözümlerini sadeleştirmek için $\eta_0 = 0$ alınırsa sırasıyla

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{1}{kx - \lambda t} \right]^{1/p}, \quad (4.1.36)$$

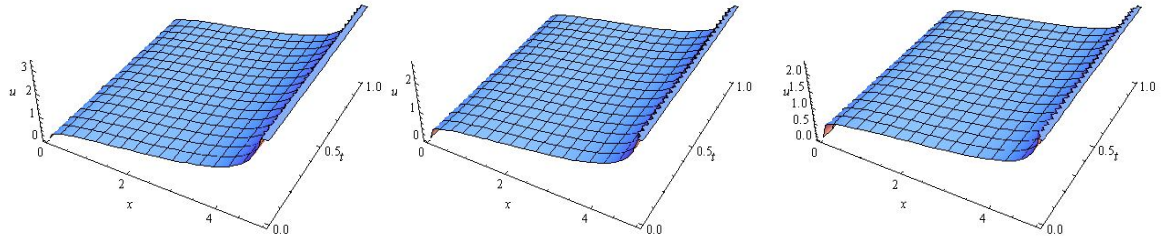
$$u(x, t) = \left[\alpha_2 \pm \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{-1 + e^{\eta(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right]^{1/p}, \quad (4.1.37)$$

$$u(x, t) = \left[\frac{\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_4)\text{sn}^2(r, s)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)\text{sn}^2(r, s)} \right]^{1/p}, \quad (4.1.38)$$

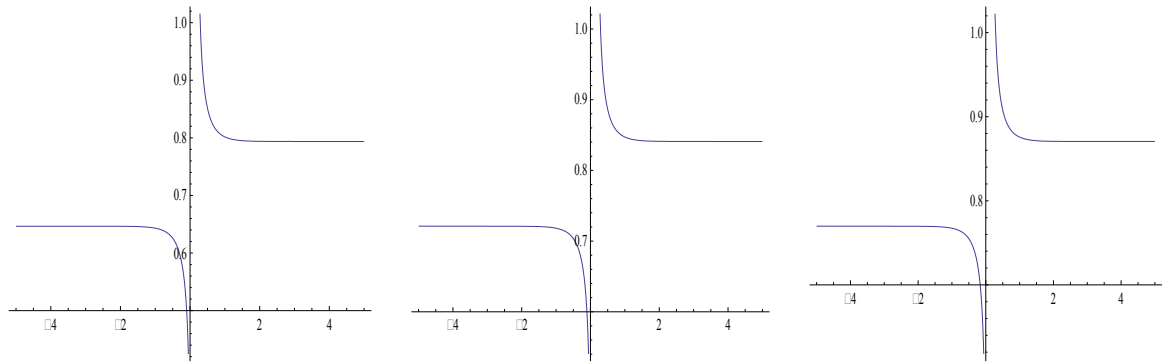
çözüm fonksiyonları bulunur. (4.1.36-4.1.38) denklemlerinin çözüm fonksiyonlarına ait davranışları gözlemlemek için uygun parametreler seçilerek aşağıdaki grafikler elde edilmiştir.



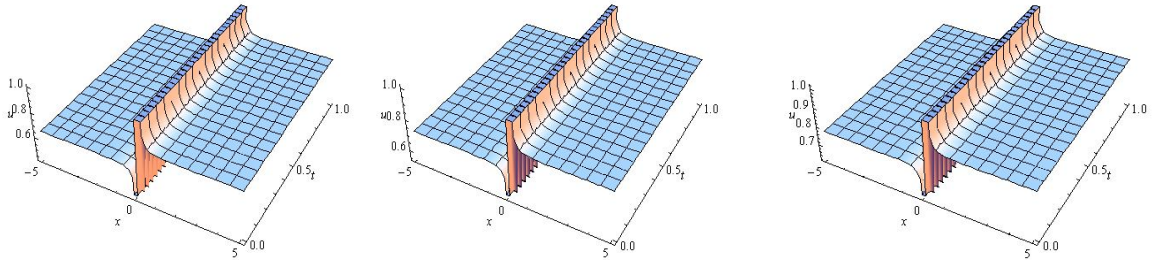
Şekil 4.7. $\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \beta = 0.2$, $\alpha_1 = -1$, $0 < x < 5$, ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$ $p = -5$ değerleri için (4.1.36) denkleminin iki boyutlu grafiği



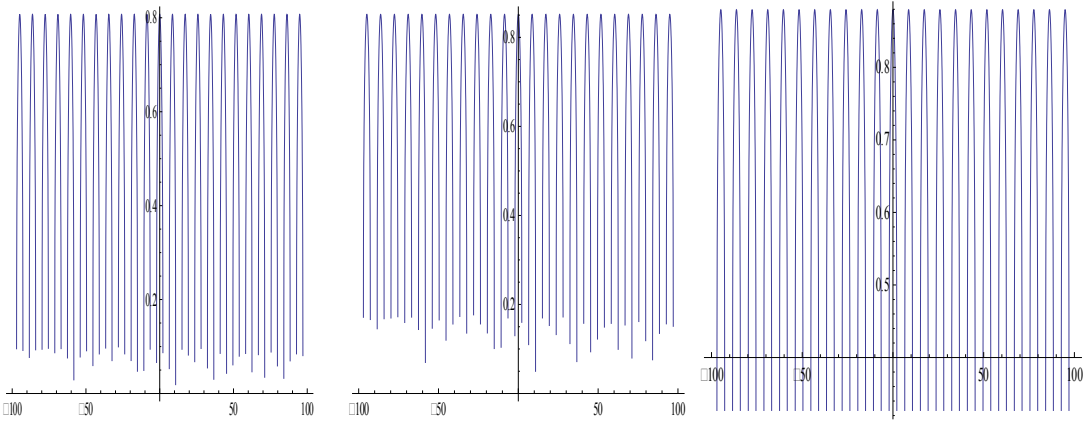
Şekil 4.8. $\xi_1 = \xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = a = k = \beta = 0.2$, $\alpha_1 = -1$, $0 < x < 5$, ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$ $p = -5$ değerleri için (4.1.36) denkleminin üç boyutlu grafiği



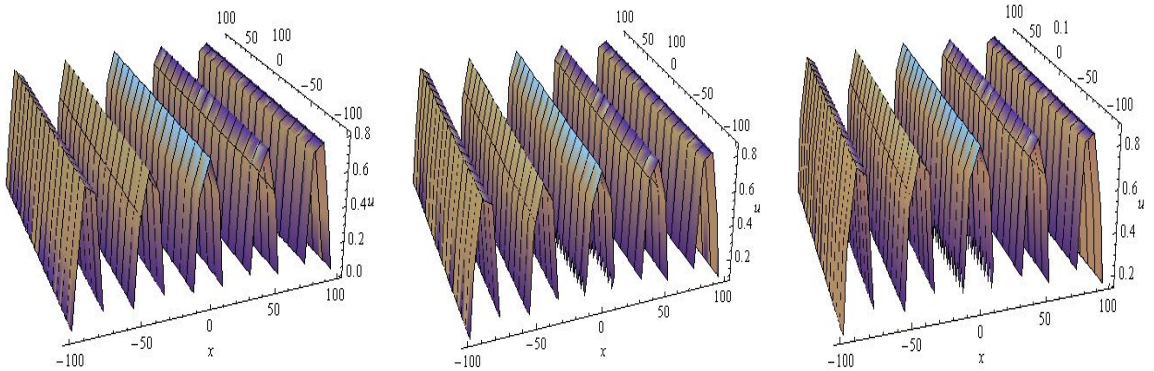
Şekil 4.9. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.37) denkleminin iki boyutlu grafiği



Şekil 4.10. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \alpha_1 = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 0.3$, $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.37) denkleminin üç boyutlu grafiği



Şekil 4.11. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $\alpha_4 = 0.4$, $-100 < x < 100$, ve $t = 100$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.38) denkleminin iki boyutlu grafiği



Şekil 4.12. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.3$, $\alpha_4 = 0.4$, $-100 < x < 100$, ve $-100 < t < 120$ iken sırasıyla $p = -3$, $p = -4$, $p = -5$ değerleri için (4.1.38) denkleminin üç boyutlu grafiği

Yorum 2. Bu çalışmada elde edilen rasyonel fonksiyon çözümleri, tek kıvrım çözümleri ve Jacobi-eliptik fonksiyon çözümleri literatürde yer almayan yeni çözümlerdir.

4.2 Genelleştirilmiş Burger-Kdv Denkleminde GDDM'nin Uygulanması

$a, b, \delta \neq 0$ için

$$u_t + au^p u_x + bu^{2p} u_x + \delta u_{xxx} = 0, \quad (4.2.1)$$

şeklindeki genelleştirilmiş Burger-KdV denkleminde [51] $(k, \lambda \text{ sabitler}) \eta = kx - \lambda t$ iken

$u(x, t) = u(\eta)$ dalga dönüşümü uygulayıp bulunan denklemde $u = v^{\frac{1}{p}}$ dönüşümü gerekli türev kavramlarına göre düzenlenir, η ' ye göre iki kez integre edilir ve integral sabitleri sıfır kabul edilirse,

$$-\lambda v^2 + \frac{ak}{p+1} v^3 + \frac{bk}{2p+1} v^4 + \frac{\delta k^3 (1-p)}{p^2} (v')^2 + \frac{\delta k^3}{p} vv'' = 0, \quad (4.2.2)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir.

(3.1.6-3.1.8) ifadeleri (4.2.2) denkleminde yerine yazılıp dengeleme prensibine göre en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin karşılığı olan polinomların en yüksek dereceli terimlerinin kuvvetlerinin eşitlenmesiyle

$$\theta = \varepsilon + 2\delta + 2, \quad (4.2.3)$$

bağıntısı elde edilir. Bağıntıda yer alan parametlerin uygun seçimleri ile aşağıdaki çözüm durumlarına ulaşılır.

Durum 1.

$\varepsilon = 0, \delta = 2, \theta = 6$ ve $\zeta_0 \neq 0$ değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$v' = \frac{\tau_1 + 2\tau_2 \Gamma}{\sqrt{\zeta_0}} \sqrt{\xi_0 + \xi_1 \Gamma + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_4 \Gamma^4 + \xi_5 \Gamma^5 + \xi_6 \Gamma^6}, \quad (4.2.4)$$

$$v'' = \frac{(\xi_1 + 2\xi_2 \Gamma + 3\xi_3 \Gamma^2 + 4\xi_4 \Gamma^3 + 5\xi_5 \Gamma^4 + 6\xi_6 \Gamma^5)}{2\zeta_0} (\tau_1 + \tau_2 \Gamma) + \tau_2 \frac{(\xi_0 + \xi_1 \Gamma + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_4 \Gamma^4 + \xi_5 \Gamma^5 + \xi_6 \Gamma^6)}{2\zeta_0}, \quad (4.2.5)$$

$$(v')^2 = \frac{(\xi_1 + 2\xi_2 \Gamma + 3\xi_3 \Gamma^2 + 4\xi_4 \Gamma^3 + 5\xi_5 \Gamma^4 + 6\xi_6 \Gamma^5)}{\zeta_0} (\tau_1 + \tau_2 \Gamma)^2, \quad (4.2.6)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca (4.2.4-4.2.6) ifadeleri (4.2.2)' de yerine yazılarak Γ polinomunun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 7 programı ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\xi_0 = \frac{18\xi_3\xi_5^3\xi_6^2 - \xi_5^5 - 1296\xi_1\xi_5\xi_6^4}{15552\xi_6^5}, \xi_1 = \xi_1, \xi_2 = \frac{\xi_3\xi_5}{6\xi_6} - \frac{\xi_5^4}{162\xi_6^3} + \frac{3\xi_1\xi_6}{\xi_5}, \quad (4.2.7)$$

$$\xi_3 = \xi_3, \xi_4 = \frac{5\xi_5^2}{18\xi_6} + \frac{3\xi_3\xi_6}{2\xi_5}, \xi_5 = \xi_5, \xi_6 = \xi_6,$$

$$\zeta_0 = -\frac{bB^2(1+p)(2+p)^2\delta(5\xi_5^3 - 54\xi_3\xi_6^2)^2}{1296a^2p^2(1+2p)\xi_5^2\xi_6^3}, \quad (4.2.8)$$

$$\tau_0 = \frac{2a(1+2p)\xi_5^3}{b(2+p)(-5\xi_5^3 + 54\xi_3\xi_6^2)}, \tau_1 = \frac{24a(1+2p)\xi_5^2\xi_6}{b(2+p)(-5\xi_5^3 + 54\xi_3\xi_6^2)}, \quad (4.2.9)$$

$$\tau_2 = \frac{72a(1+2p)\xi_5\xi_6^2}{b(2+p)(5\xi_5^3 - 54\xi_3\xi_6^2)},$$

$$\lambda = -\frac{4ka^2(1+2p)\xi_5(7\xi_5^5 - 108\xi_3\xi_5^2\xi_6^2 + 3888\xi_1\xi_6^4)}{b(1+p)(2+p)^2(5\xi_5^3 - 54\xi_3\xi_6^2)^2}. \quad (4.2.10)$$

(4.2.7-4.2.9) sonuçları sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{A}{\sqrt{B + \frac{\xi_1}{\xi_6}\Gamma + C\Gamma^2 + \frac{\xi_3}{\xi_6}\Gamma^3 + D\Gamma^4 + \frac{\xi_5}{\xi_6}\Gamma^5 + \Gamma^6}} d\Gamma, \quad (4.2.11)$$

polinom katsayıları için integral formu bulunur. (4.2.11) denklemini integre edilerek (4.2.1) denkleminin kapalı formdaki dalga çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A}{(v - \alpha_1)^2}, \quad (4.2.12)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A(4v - 2\alpha_1 - 2\alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sqrt{(v - \alpha_1)(v - \alpha_2)}}, \alpha_1 > \alpha_2. \quad (4.2.13)$$

Ayrıca, α_1 ve α_2 değerleri de

$$B + \xi_1\Gamma + C\Gamma^2 + \xi_3\Gamma^3 + D\Gamma^4 + \xi_5\Gamma^5 + \xi_6\Gamma^6 = 0, \quad (4.2.14)$$

polinom denkleminin kökleridir. Böylece,

$$E = 16A^2 - (\alpha_2 - \alpha_1)^4(\eta - \eta_0)^2, F = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^4(\eta - \eta_0)^2 - 16A^2}, \quad (4.2.15)$$

için

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2(\eta - \eta_0)}} \right]^{1/p}, \quad (4.2.16)$$

$$u(x, t) = \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)E - (\alpha_1 - \alpha_2)^3(\eta - \eta_0)F}{32A^2 - 2(\alpha_1 - \alpha_2)^4(\eta - \eta_0)^2} \right]^{1/p}, \quad (4.2.17)$$

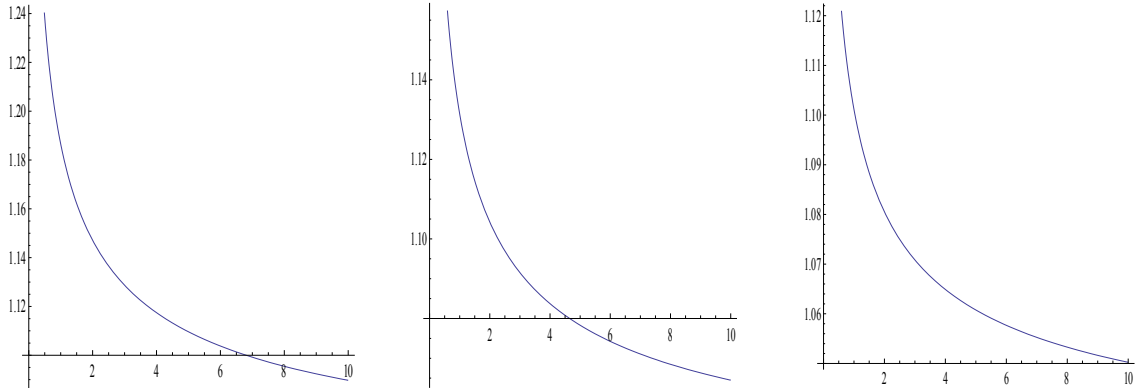
çözümleri elde edilir.

Bu çözüm fonksiyonlarını sadeleştirmek için $\eta_0 = 0$ alınırsa,

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2(kx - \lambda t)}} \right]^{1/p}, \quad (4.2.18)$$

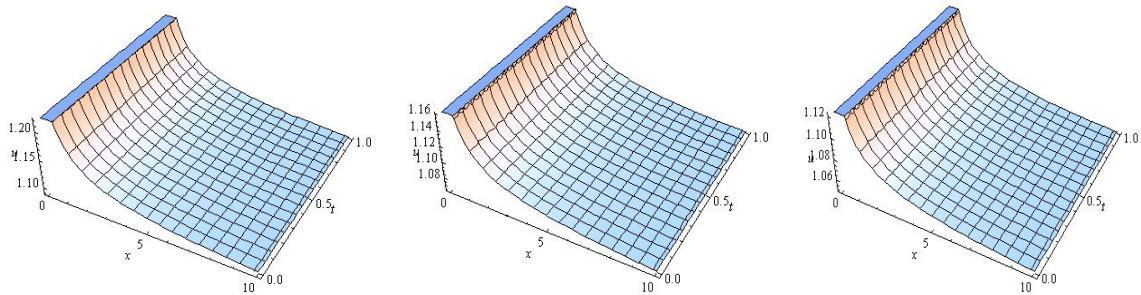
$$u(x, t) = \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)E + \eta(\alpha_1 - \alpha_2)^3 F}{32A^2 - 2\eta^2(\alpha_1 - \alpha_2)^4} \right]^{1/p}, \quad (4.2.19)$$

şeklinde analitik çözümler elde edilir.



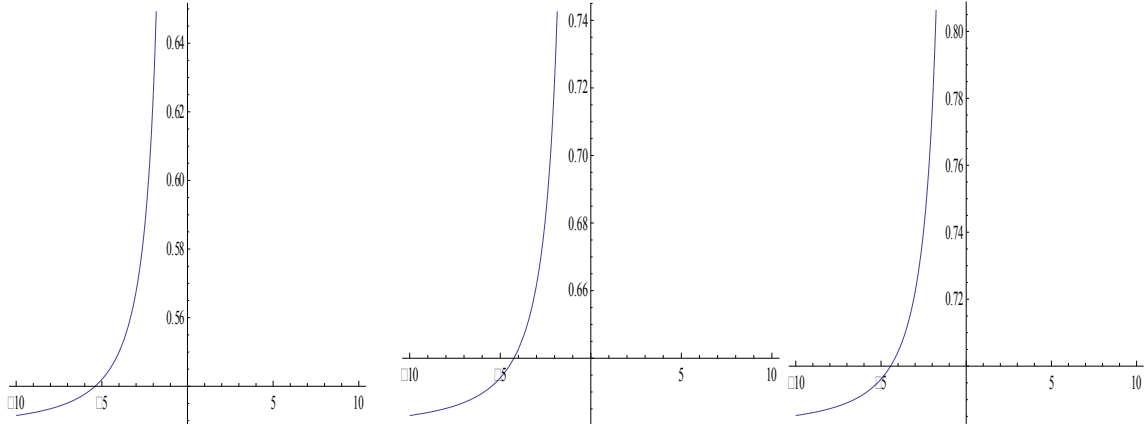
Şekil 4.13. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\delta = -3$, $\alpha_3 = 0.3$, $\alpha_4 = 0.4$, $0 < x < 10$

ve $t=0.1$ iken sırasıyla $p=3$, $p=4$, $p=5$ değerleri için (4.2.18) denkleminin iki boyutlu grafiği

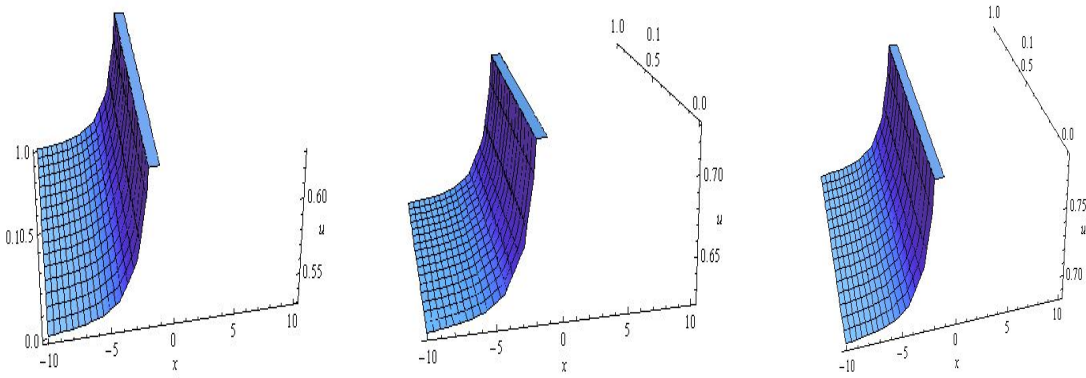


Şekil 4.14. $\xi_1 = \xi_2 = a = k = \beta = 2$, $\tau_0 = \tau_1 = 3$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\delta = -3$, $\alpha_3 = 0.3$, $\alpha_4 = 0.4$, $0 < x < 10$

ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p=3$, $p=4$, $p=5$ değerleri için (4.2.18) denkleminin üç boyutlu grafiği



Şekil 4.15. $\xi_1=1, \xi_2=2, \xi_3=3, \xi_4=4, \xi_5=5, \xi_6=6, a=b=k=\beta=\delta=0.2, \alpha_1=1, \alpha_2=3, -10 < x < 10$ ve $t=0.1$ iken sırasıyla $p=-3, p=-4, p=-5$ değerleri için (4.2.19) denkleminin iki boyutlu grafiği



Şekil 4.16. $\xi_1=1, \xi_2=2, \xi_3=3, \xi_4=4, \xi_5=5, \xi_6=6, a=b=k=\beta=\delta=0.2, \alpha_1=1, \alpha_2=3, -10 < x < 10$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p=-3, p=-4, p=-5$ değerleri için (4.2.19) denkleminin üç boyutlu grafiği

Yorum 3. Elde edilen (4.2.18-4.2.19) çözümlerinin (4.2.1) denklemini sağladığı Mathematica 7 programı ile gösterilmiştir. Elde edilen rasyonel fonksiyon çözümleri ve tek kıvrım çözümleri daha önce literatürde bulunmayan yeni çözümlerdir.

Durum 2.

$\varepsilon = 0, \delta = 1, \theta = 4$ ve $\tau_1, \zeta_0 \neq 0$ değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$v' = \tau_1 \frac{\sqrt{\xi_0 + \xi_1 \Gamma + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_4 \Gamma^4}}{\sqrt{\zeta_0}}, \quad (4.2.20)$$

$$v'' = \tau_1 \frac{\xi_1 + 2\xi_2\Gamma + 3\xi_3\Gamma^2 + 4\xi_4\Gamma^3}{2\xi_0}, \quad (4.2.21)$$

$$(v')^2 = \tau_1^2 \frac{\xi_0 + \xi_1\Gamma + \xi_2\Gamma^2 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_4\Gamma^4}{\xi_0}, \quad (4.2.22)$$

bağıntıları elde edilir. (4.2.20-4.2.22) ifadeleri (4.2.2) denkleminde yerine yazılarak Γ fonksiyonuna ait polinomun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 7 paket programı yardımıyla çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0, \quad \xi_1 = \frac{2\xi_4\tau_0^2(a+2ap+b(2+p)\tau_0)}{b(2+p)\tau_1^3} + \frac{2\xi_0\tau_1}{\tau_0}, \\ \xi_2 &= \frac{\xi_4\tau_0(4a(1+2p)+5b(2+p)\tau_0)}{b(2+p)\tau_1^1} + \frac{\xi_0\tau_1^2}{\tau_0^2}, \\ \xi_3 &= \frac{2\xi_4(a+2ap+2b(2+p)\tau_0)}{b(2+p)\tau_1}, \quad \xi_4 = \xi_4, \\ \zeta_0 &= -\frac{B^2(1+p)(1+2p)\delta\xi_4}{bp^2\tau_1^2}, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \\ \lambda &= \frac{6k\xi_3\tau_0(a+2ap+b(2+p)\tau_0) + \xi_2\tau_1(a+2ap+2b(2+p)\tau_0)}{(2+7p+7p^2+2p^3)\xi_3}. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

(4.2.23) sonuçları sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{1}{\sqrt{\Gamma^4 + B\Gamma^3 + C\Gamma^2 + D\Gamma + E}} d\Gamma, \quad (4.2.24)$$

elde edilir. (4.2.24) denklemindeki polinomun katsayıları

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{\xi_4}}, \quad B = \frac{2(a+2ap+2b(2+p)\tau_0)}{b(2+p)\tau_1}, \\ C &= \frac{\tau_0(4a(1+2p)+5b(2+p)\tau_0)}{b(2+p)\tau_1^1} + \frac{\xi_0\tau_1^2}{\xi_4\tau_0^2}, \\ D &= \frac{2\tau_0^2(a+2ap+b(2+p)\tau_0)}{b(2+p)\tau_1^3} + \frac{2\xi_0\tau_1}{\xi_4\tau_0}, \quad E = \frac{\xi_0}{\xi_4}, \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

şeklindedir. (4.2.24) denklemi integre edilirse, (4.2.1) denklemi için çözümler aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\alpha_1 - v}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4, \quad (4.2.26)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{4A}{\alpha_1 - \alpha_3} \sqrt{\frac{v - \alpha_1}{v - \alpha_3}}, \alpha_1 > \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4, \quad (4.2.27)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \log \left(\frac{\sqrt{(v - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(v - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(v - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(v - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right). \quad (4.2.28)$$

Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 değerleri aşağıdaki polinom denkleminin kökleridir

$$\Gamma^4 + B\Gamma^3 + C\Gamma^2 + D\Gamma + E = 0. \quad (4.2.29)$$

(4.2.26-4.2.28) denklemlerinden,

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{2A}{\eta - \eta_0} \right]^{1/p}, \quad (4.2.30)$$

$$u(x, t) = \left[\frac{16A^2\alpha_2 - \alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\eta - \eta_0)^2}{16A^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\eta - \eta_0)^2} \right]^{1/p}, \quad (4.2.31)$$

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \cosh \left(\frac{\eta \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{2A} \right) (\alpha_3 - \alpha_2)} \right]^{1/p}, \quad (4.2.32)$$

çözümleri elde edilir. Burada $\eta = kx - \lambda t$ ' dir. (4.2.30-4.2.32) çözümlerini sadeleştirmek

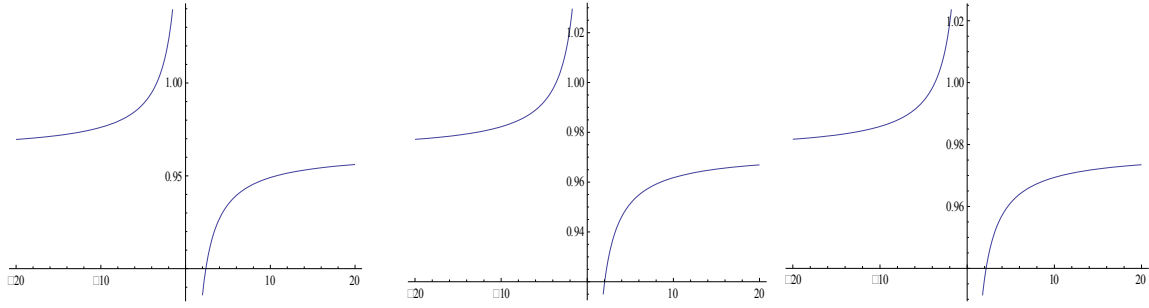
için $\eta_0 = 0$ alınırsa sırasıyla

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{2A}{\eta} \right]^{1/p}, \quad (4.2.33)$$

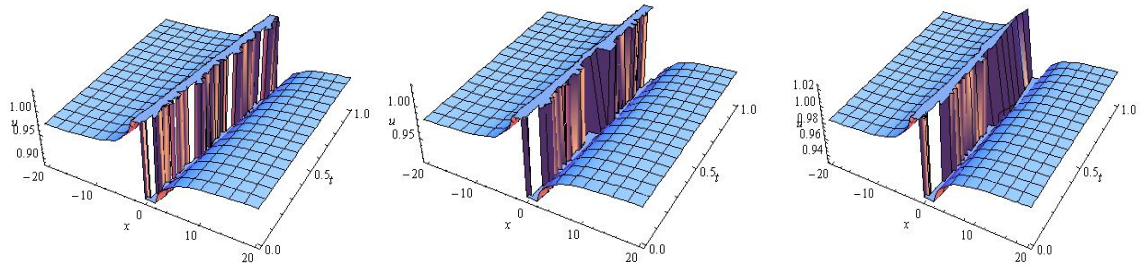
$$u(x, t) = \left[\frac{16A^2\alpha_2 - \alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)^2\eta^2}{16A^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2\eta^2} \right]^{1/p}, \quad (4.2.34)$$

$$u(x, t) = \left[\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh \left(\frac{\eta \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{2A} \right)} \right]^{1/p}, \quad (4.2.35)$$

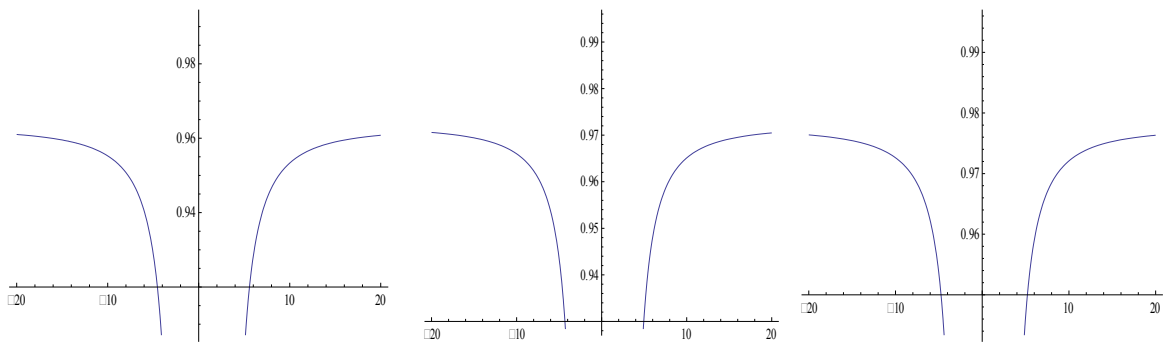
çözüm fonksiyonları bulunur. (4.2.33-4.2.35) denklemlerinin çözüm fonksiyonlarına ait davranışları gözlemlemek için uygun parametreler seçilerek aşağıdaki grafikler elde edilmiştir.



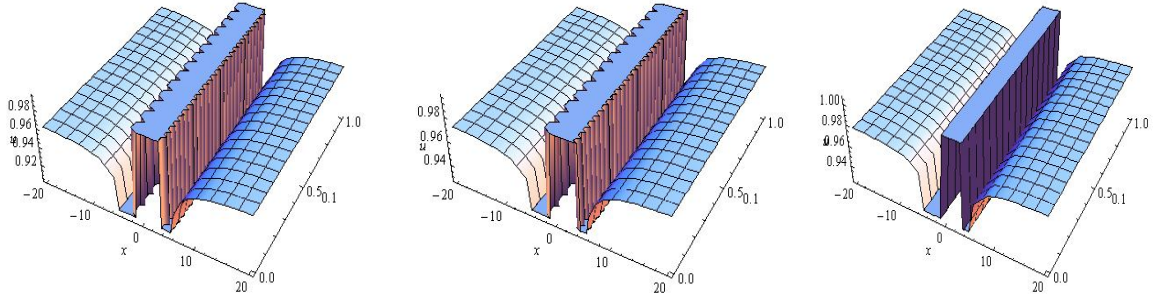
Şekil 4.17. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$
 $\alpha_1 = 1.12, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla doğru $p = -3, p = -4, p = -5$
 değerleri için (4.2.33) denkleminin iki boyutlu grafiği



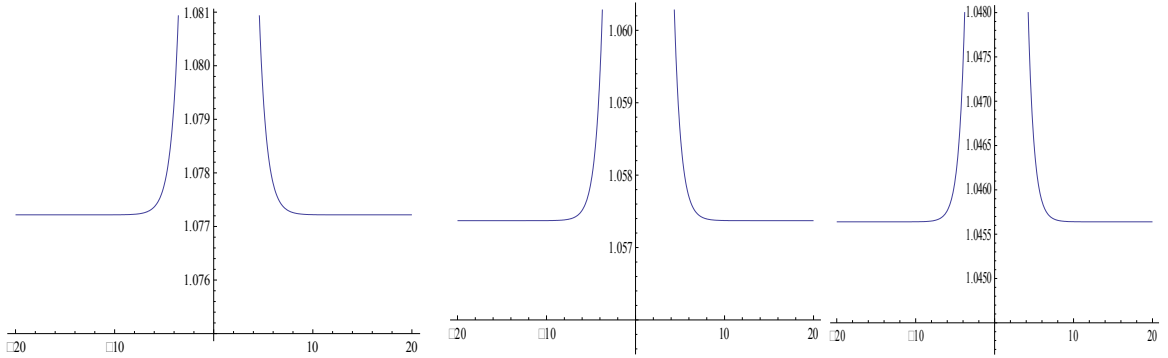
Şekil 4.18. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$
 $\alpha_1 = 1.12, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla doğru $p = -3, p = -4, p = -5$
 değerleri için (4.2.33) denkleminin üç boyutlu grafiği



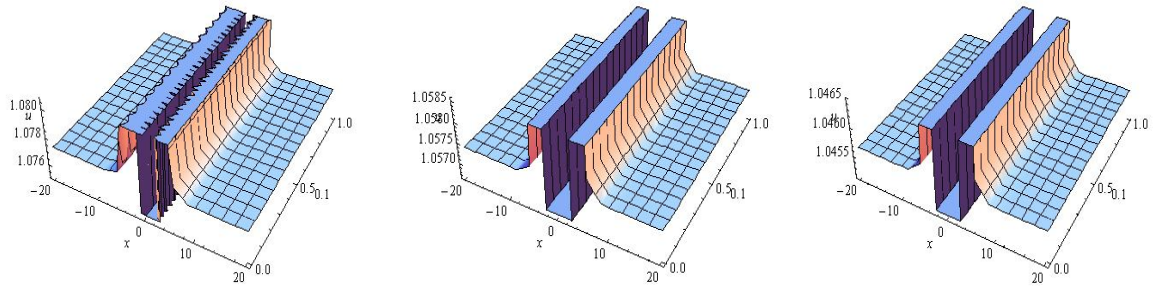
Şekil 4.19. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$
 $\alpha_1 = 1.12, \alpha_2 = 0.8, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$
 değerleri için (4.2.34) denkleminin iki boyutlu grafiği



Şekil 4.20. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$
 $-20 < x < 20$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$ değerleri için (4.2.34)
denkleminin üç boyutlu grafiği



Şekil 4.21. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$
 $\alpha_1 = 1.12, \alpha_2 = 0.8, \alpha_3 = 2, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $t = 0.1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$
değerleri için (4.2.35) denkleminin iki boyutlu grafiği



Şekil 4.22. $\xi_0 = 0.1, \xi_1 = 13.0889, \xi_2 = 166.767, \xi_3 = 16.88, \xi_4 = 2, \tau_0 = \tau_1 = a = k = b = \beta = 3,$
 $\alpha_1 = 1.12, \alpha_2 = 0.8, \alpha_3 = 2, \delta = -3, -20 < x < 20$ ve $0 < t < 1$ iken sırasıyla $p = -3, p = -4, p = -5$
değerleri için (4.2.35) denkleminin üç boyutlu grafiği

Yorum 4. Bu çalışmada elde edilen rasyonel fonksiyon çözümleri, tek kıvrım çözümleri ve hiperbolik fonksiyon çözümleri daha önce literatürde bulunmayan yeni çözümlerdir.

4.3 Genelleştirilmiş Düzenlenen Uzun Dalga (Generalized Regularized Long Wave) Denklemine GDDM'nun Uygulanması

$$u_t + u_x + \delta u^q u_x - \gamma u_{xxt} = 0, \quad q \in \mathbb{Z}^+, \quad (4.3.1)$$

şeklindeki genelleştirilmiş düzenlenen uzun dalga denklemine [52] (δ, γ sabitler)

$\eta = kx + wt$ iken $u(x, t) = u(\eta)$ dalga dönüşümü uygulanıp bulunan denklem η ' ye göre iki kez integre edilir ve integral sabitleri sıfır kabul edilirse,

$$wu + ku + \frac{\delta k}{q+1} u^{q+1} - \gamma w k^2 u'' = 0, \quad (4.3.2a)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir. $u = v^{\frac{1}{q}}$, dönüşümü (4.3.2a) denkleminde yerine yazılırsa,

$$q^2 (q+1) (w+k) v^2 + \delta k q^2 v^3 - \gamma w k^2 (1-q) (1+q) (v')^2 - \gamma w k^2 q (q+1) v v'' = 0, \quad (4.3.2b)$$

elde edilir.

(3.1.6-3.1.8) ifadeleri (4.3.2b) denkleminde yerine yazılıp dengeleme prensibi uygulandığında

$$\theta = \varepsilon + \delta + 2,$$

şeklinde bir dengeleme bağıntısı bulunur. Bu bağıntıdaki parametlerin uygun seçimleri ile aşağıdaki çözüm durumlarına ulaşılır.

Durum 1.

$\varepsilon = 0, \delta = 1, \theta = 3$ ve $\xi_3 \neq 0, \zeta_0 \neq 0$ değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$(v')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.3.3)$$

$$v'' = \frac{\tau_1 (3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0}, \quad (4.3.4)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca (4.3.3-4.3.4) ifadeleri (4.3.2)' de yerine yazılarak Γ polinomunun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 7 paket programı ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \xi_0, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{\xi_1^2 q(q-4)}{4\xi_0(q-1)^2}, \quad \xi_3 = -\frac{\xi_1^3 q^2}{4\xi_0(q-1)^3}, \quad \tau_0 = \tau_0, \\ \tau_1 &= \frac{q\xi_1\tau_0}{2\xi_0(q-1)}, \quad \zeta_0 = \frac{k^2(q+2)\gamma\xi_1^2(1+q+\delta\tau_0)}{4q\delta\xi_0\tau_0(q-1)^2}, \quad w = -\frac{k(1+q+\delta\tau_0)}{q+1}.\end{aligned}\quad (4.3.5)$$

(4.3.5) sonuçları sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{k^2(q-1)(q+2)\gamma\xi_0(1+q+\delta\tau_0)}{\delta q^3 \xi_1 \tau_0}} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^3 \frac{\xi_0(q-1)(q-4)}{\xi_1 q} \Gamma^2 \frac{4\xi_0^2(q-1)^3}{\xi_1^2 q^2} \Gamma \frac{4\xi_0^3(q-1)^3}{\xi_1^3 q^2}}}, \quad (4.3.6)$$

polinom katsayıları için integral formu bulunur. (4.3.6) denklemi integre edilerek (4.3.1) denkleminin kapalı formdaki dalga çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\pm(\eta - \eta_0) = -2\sqrt{A} \frac{1}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}, \quad (4.3.7)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{A}{\alpha_2 - \alpha_1}} \arctan \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.3.8)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{\sqrt{\Gamma - \alpha_2} + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.3.9)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2\sqrt{\frac{A}{\alpha_1 - \alpha_3}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3. \quad (4.3.10)$$

Burada

$$A = -\frac{k^2(q-1)(q+2)\gamma\xi_0(1+q+\delta\tau_0)}{\delta q^3 \xi_1 \tau_0}, \quad F(\varphi, l) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \psi}}, \quad (4.3.11)$$

ve

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}}, \quad l^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}, \quad (4.3.12)$$

şeklinde tanımlı olup α_1 , α_2 ve α_3 değerleri

$$\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3} = 0, \quad (4.3.13)$$

biçimindeki polinom denkleminin kökleridir. (4.3.7-4.3.10) çözümleri (3.1.5) ve $u = v^{\frac{1}{p}}$ dönüşümünde yerine yazılırsa, (4.3.1) denkleminin çözümleri

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \frac{4\tau_1 A}{\left(kx - \frac{k(1+q+\delta\tau_0)}{q+1} t - \eta_0 \right)^2} \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.14)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A}} \left(kx - \frac{k(1+q+\delta\tau_0)}{q+1} t - \eta_0 \right) \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.15)$$

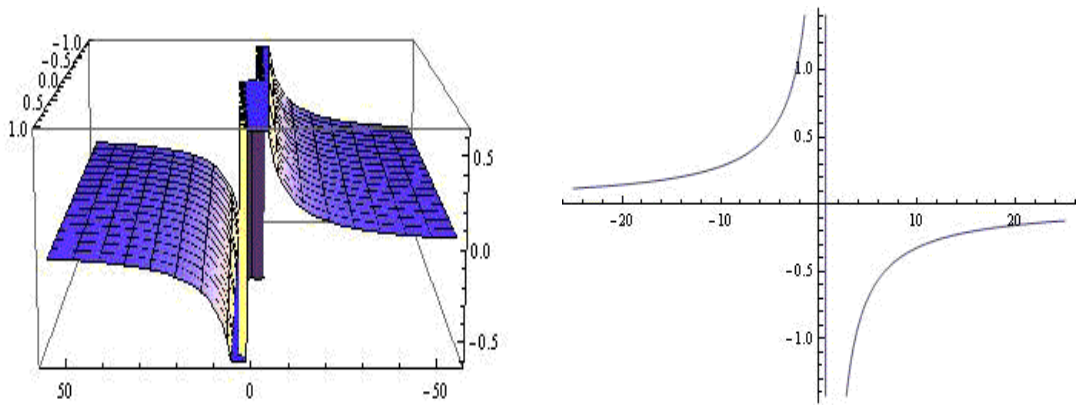
$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A}} \left(kx - \frac{k(1+q+\delta\tau_0)}{q+1} t - \eta_0 \right) \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.16)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_3 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{A}} \left(kx - \frac{k(1+q+\delta\tau_0)}{q+1} t - \eta_0 \right), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.17)$$

şeklinde elde edilir. (4.3.14-4.3.17) çözümlerini sadeleştirmek için $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_1$ ve $\eta_0 = 0$ alınırsa sırasıyla

$$u(x,t) = \left(\frac{2\sqrt{\tilde{A}}}{k(x-vt)} \right)^{\frac{2}{q}}, \quad (4.3.18)$$

elde edilir. (4.3.18)' de $v = \frac{1+q-\delta\tau_1\alpha_1}{q+1}$ dir.



Şekil 4.23. Birinci grafik (4.3.18) denkleminin $-50 < x < 50$, $-1 < t < 1$, $\tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = 1$,

$\xi_0 = \xi_1 = \delta = \gamma = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $q = 2$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise

(4.3.18) denkleminin $-30 < x < 30$, $t = 1$, için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği

1-soliton çözümü

$$u(x, t) = \frac{A_1}{\cosh^{\frac{2}{q}}[B(x - vt)]}, \quad (4.3.19)$$

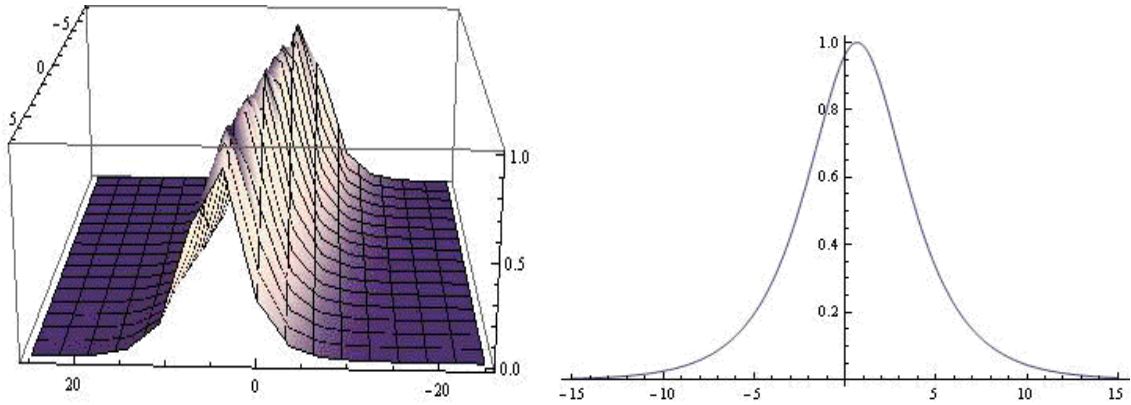
Tekil soliton çözümü

$$u(x, t) = \frac{A_2}{\sinh^{\frac{2}{q}}[B(x - vt)]}. \quad (4.3.20)$$

Burada, $\tilde{A} = \tau_1 A$, $A_1 = (\tau_1(\alpha_2 - \alpha_1))^{\frac{1}{q}}$, $A_2 = (\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2))^{\frac{1}{q}}$, $B = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A}}$ ve $v = \frac{1+q-\delta\tau_1\alpha_1}{q+1}$.

Ayrıca, A_1 ve A_2 çözümlerin salınım genişliği, v hız ve B ise çözümlerin ters genişliğidir.

Böylece, $\tau_1 > 0$ için çözümlerin var olduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 4.24. Birinci grafik (4.3.19) denkleminin $-25 < x < 25$, $-5 < t < 5$, $\tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = \xi_0 = 1$

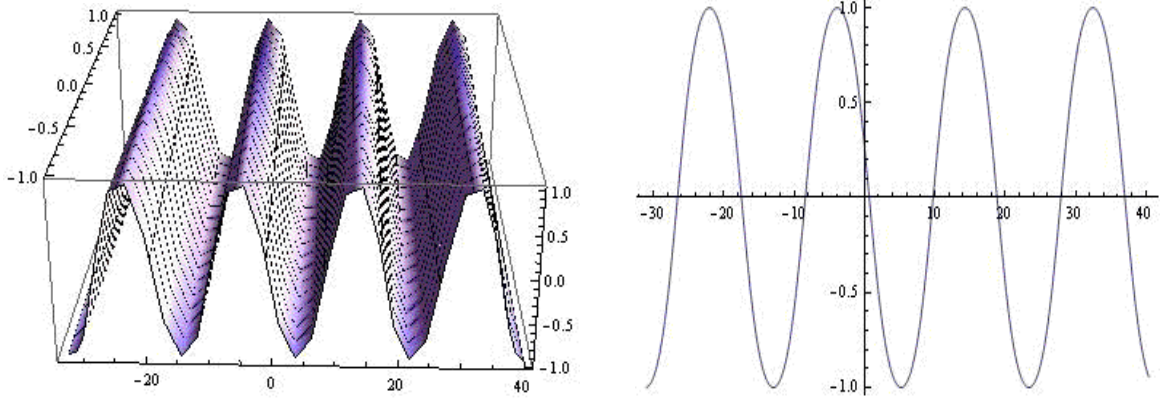
$\xi_1 = \delta = \gamma = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\alpha_2 = q = 2$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise

(4.3.19) denkleminin $-15 < x < 15$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği

Diğer taraftan, eğer $\tau_0 = -\tau_1\alpha_3$ ve $\eta_0 = 0$, alırsak (4.3.19) denkleminin Jacobi elliptik çözümü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u(x, t) = A_3 \operatorname{sn}^{\frac{2}{q}} \left[B_i(x - vt), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} \right]. \quad (4.3.21)$$

Burada, $A_3 = (\tau_1(\alpha_2 - \alpha_3))^{\frac{1}{q}}$ ve $B_i = \frac{(-1)^i k}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{A}}$, $(i = 1, 2)$ dir.



Şekil 4.25. Birinci grafik (4.3.21) denkleminin $-30 < x < 40$, $-1 < t < 1$, $\tau_0 = \tau_1 = \xi_0 = \xi_1 = 1$,

$\delta = \gamma = k = \eta_0 = 0$, $\alpha_3 = q = 2$, $\alpha_1 = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.21) denkleminin $-30 < x < 40$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği

Durum 2.

$\varepsilon = 0$, $\delta = 2$, $\theta = 4$ ve $\xi_4 \neq 0, \zeta_0 \neq 0$ değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$(v')^2 = \frac{(\tau_1 + 2\tau_2\Gamma)^2 (\xi_4\Gamma^4 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.3.22)$$

$$v'' = \frac{(\tau_1 + 2\tau_1\Gamma)(4\xi_4\Gamma^3 + 3\xi_3\Gamma^2 + 2\xi_2\Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0} + \frac{2\tau_2(\xi_4\Gamma^4 + \xi_3\Gamma^3 + \xi_2\Gamma^2 + \xi_1\Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.3.23)$$

bağıntıları elde edilir. (4.3.22-4.3.23) ifadeleri (4.3.2) denkleminde yerine yazılarak Γ fonksiyonuna ait polinomun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 7 paket programı yardımıyla çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\xi_0 = \frac{q^2\delta\zeta_0\tau_1^4 + 4k^2\gamma\xi_1\tau_1\tau_2(\delta\tau_1^2 + 2\tau_2(q+1)(q+2))}{32k^2\gamma\tau_2^2(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}, \quad \xi_1 = \xi_1,$$

$$\xi_2 = \frac{2k^2\gamma\xi_1\tau_1\tau_2(3\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2)) - q^2\delta\zeta_0\tau_1^3}{2k^2\gamma\tau_1(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}$$

$$\begin{aligned}
\xi_3 &= \frac{\delta\tau_2 (4k^2\delta\xi_1\tau_2 - q^2\zeta_0\tau_1) - q^2\delta\zeta_0\tau_1^3}{k^2\gamma(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}, \\
\xi_4 &= \frac{\delta\tau_2^2 (4k^2\delta\xi_1\tau_2 - q^2\zeta_0\tau_1) - q^2\delta\zeta_0\tau_1^3}{2k^2\gamma\tau_1(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}, \\
\tau_0 &= \frac{\tau_1^2}{4\tau_2}, \tau_1 = \tau_1, \quad \tau_2 = \tau_2, \quad \zeta_0 = \zeta_0, \\
w &= -\frac{kq^2\zeta_0\tau_1(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}{\tau_2(q+1)(q+2)(q^2\zeta_0\tau_1 - 4k^2\delta\xi_1\tau_2)}.
\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

(4.3.24) sonuçları sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazıldığında

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{2k^2\gamma\tau_1\zeta_0(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q-1)(q+2))}{\delta\tau_2^2(4k^2\delta\xi_1\tau_2 - q^2\zeta_0\tau_1)}} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4}\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4}\Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4}\Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4}}}. \tag{4.3.25}$$

bulunur. Sonra (4.3.25) ifadesi integre edilirse, (4.3.1) denkleminin çözümleri

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{A}{\Gamma - \alpha_1}, \tag{4.3.26}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \tag{4.3.27}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{A}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{\Gamma - \alpha_1}{\Gamma - \alpha_2} \right|, \tag{4.3.28}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} - \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}}{\sqrt{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \sqrt{(\Gamma - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \tag{4.3.29}$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} F(\varphi, l), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4. \tag{4.3.30}$$

Burada,

$$A = \sqrt{\frac{2k^2\gamma\tau_1\zeta_0(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}{\delta\tau_2^2(4k^2\delta\xi_1\tau_2 - q^2\zeta_0\tau_1)}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\Gamma - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\Gamma - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}}, \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)}, \tag{4.3.31}$$

dir. Ayrıca, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 değerleri aşağıdaki polinom denkleminin kökleri

$$\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = 0. \quad (4.3.32)$$

(4.3.26-4.3.29) çözümleri (3.1.5) ve $u = v^{\frac{1}{p}}$ dönüşümünde yerine yazılırsa,

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 \pm \frac{\tau_1 A}{kx - Dt - \eta_0} + \tau_2 \left(\alpha_1 \pm \frac{A}{kx - Dt - \eta_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.33)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \alpha_1 + \frac{4A^2(\alpha_2 - \alpha_1)\tau_1}{4A^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)(kx - Dt - \eta_0)]^2} + \tau_2 \left(\alpha_1 + \frac{4A^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{4A^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)(kx - Dt - \eta_0)]^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.34)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\tau_1}{\exp\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A}(kx - Dt - \eta_0)\right] - 1} + \tau_2 \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\exp\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A}(kx - Dt - \eta_0)\right] - 1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.35)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\tau_1}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh\left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A}(kx - Dt - \eta_0)\right]} + \right. \\ \left. + \tau_2 \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh\left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A}(kx - Dt - \eta_0)\right]} \right)^2 \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (4.3.36)$$

$$u(x,t) = \left[\alpha_2 + \tau_1 \alpha_2 + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)sn^2\left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A}(kx - Dt - \eta_0)\right], \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} \right]^{\frac{1}{q}}, \\ + \tau_2 \left(\alpha_2 + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)sn^2\left[\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A}(kx - Dt - \eta_0)\right]} \right)^2, \quad (4.3.37)$$

Burada,

$$D = \frac{kq^2\zeta_0\tau_1(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}{\tau_2(q+1)(q+2)(q^2\zeta_0\tau_1 - 4k^2\delta\zeta_1\tau_2)}$$

dir. (4.3.33 – 4.3.37) çözümlerini sadeleştirmek için $\eta_0 = 0$ alınırsa sırasıyla

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 \pm \frac{A}{k(x-vt)} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.38)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + \frac{4A^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{4A^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2)k(x-vt)]^2} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.39)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\exp[B_3(x-vt)] - 1} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.40)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\exp[B_3(x-vt)] - 1} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.41)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2) \cosh[C(x-vt)]} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3.42)$$

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) \operatorname{sn}^2(\varphi, l)} \right)^i \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (4.3.43)$$

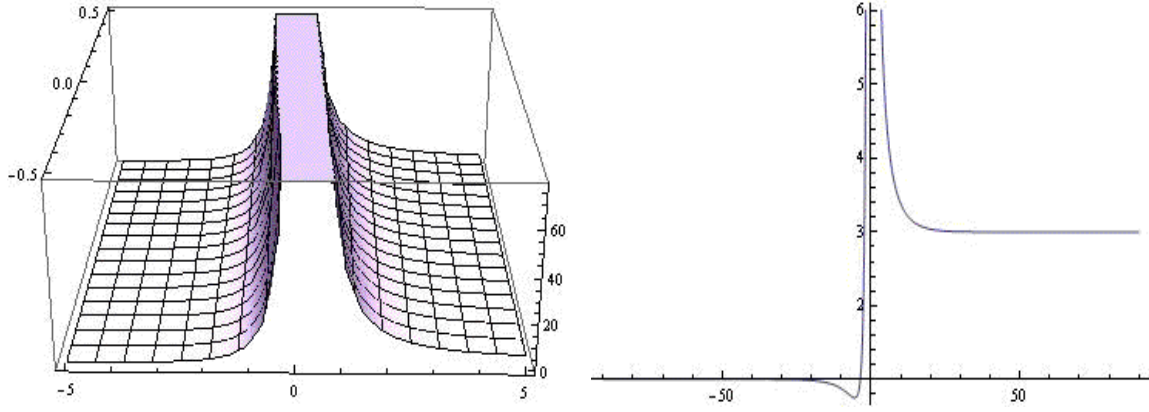
Burada,

$$A = \sqrt{\frac{2k^2\gamma\tau_1\zeta_0(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}{\delta\tau_2^2(4k^2\delta\zeta_1\tau_2 - q^2\zeta_0\tau_1)}}, \quad B_3 = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{A}, \quad C = \frac{k\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{A},$$

$$\varphi = \frac{k\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A}(x-vt), \quad l^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \text{ ve } v = \frac{q^2\zeta_0\tau_1(\delta\tau_1^2 + \tau_2(q+1)(q+2))}{\tau_2(q+1)(q+2)(q^2\zeta_0\tau_1 - 4k^2\delta\zeta_1\tau_2)},$$

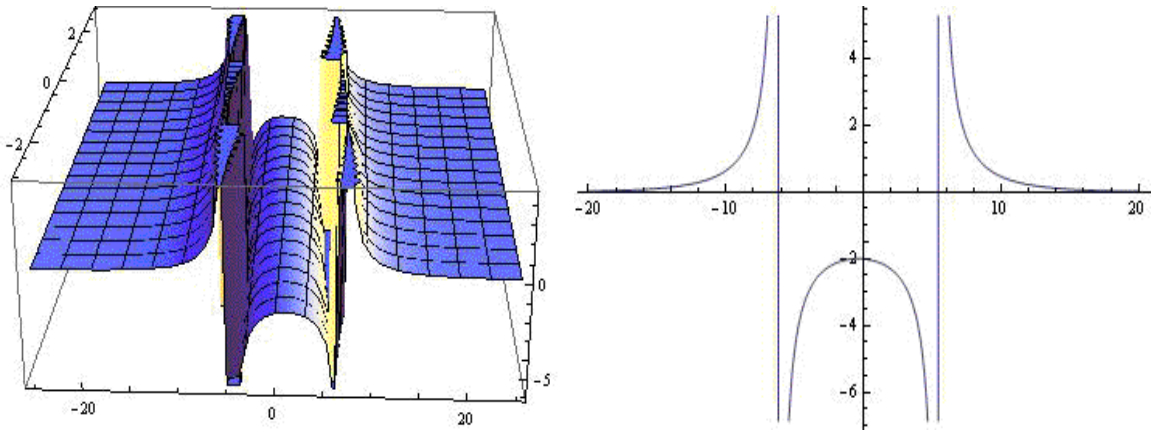
dir.

Yukarıda kullanılan A çözümün salınım genişliği, v hızı ve B ve C ise çözümlerin ters genişliğidir.



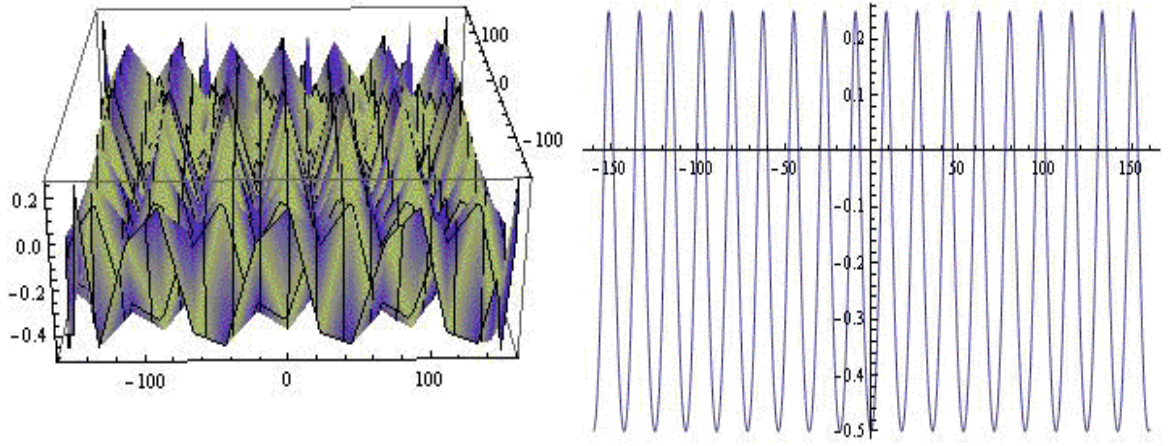
Şekil 4.26. Birinci grafik (4.3.41) denkleminin $-5 < x < 5$, $-0.5 < t < 0.5$, $\tau_0 = \tau_2 = \alpha_1 = \xi_0 = \zeta_0 = 1$

$\delta = \gamma = q = \eta_0 = 0$, $\xi_1 = \tau_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $k = 1$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.41) denkleminin $-90 < x < 90$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği



Şekil 4.27. Birinci grafik (4.3.42) denkleminin $-20 < x < 20$, $-2 < t < 2$, $\tau_0 = \tau_2 = \alpha_1 = \xi_0 = 1$

$\zeta_0 = \delta = \gamma = q = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\xi_1 = \tau_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.42) denkleminin $-20 < x < 20$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği



Şekil 4.28. Birinci grafik (4.3.43) denkleminin $-150 < x < 150$, $-1 < t < 1$, $\tau_2 = \alpha_1 = \xi_0 = \zeta_0 = 1$

$\delta = \gamma = q = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\xi_1 = \tau_1 = -1$, $\tau_0 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 2$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.3.43) denkleminin $-150 < x < 150$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği

Yorum 5. Elde edilen (4.3.38-4.3.43) çözümlerinin (4.3.1) denklemini sağlayan ve daha önce literatürde bulunmayan yeni çözümler olduğu görülmüştür.

4.4 Genelleştirilmiş Lineer Olmayan Klein-Gordon Denklemine GDDM'nun Uygulanması

$a, \gamma \in \mathbb{Z}^+$ ve $\alpha, \beta \neq 0$ olmak üzere

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + \alpha u - \beta u^\gamma = 0, \quad (4.4.1)$$

şeklindeki genelleştirilmiş lineer olmayan Klein-Gordon denklemine [52]

$u(x, t) = u(\eta)$, $\eta = k(x - ct)$ dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$k^2 (c^2 - a^2) u''(\eta) + \alpha u - \beta u^\gamma = 0, \quad (4.4.2)$$

elde edilir. (4.4.2) denkleme

$$u = v^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.3)$$

dönüşümü uygulandığında

$$2k^2 (c^2 - a^2) (\gamma - 1) v v'' + 2k^2 (c^2 - a^2) (3 - \gamma) (v')^2 + \alpha (\gamma - 1)^2 v^2 - \beta (\gamma - 1)^2 v^4 = 0, \quad (4.4.4)$$

şeklindeki lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. (3.1.7-3.1.8) ifadeleri

(4.4.4) denkleminde yerine yazılıp dengeleme prensibi kullanıldığında

$$\theta = \varepsilon + 2\delta + 2,$$

dengeleme bağıntısı elde edilir.

Durum 1.

$\varepsilon = 0$, $\delta = 1$, $\theta = 4$ ve $\xi_4 \neq 0, \zeta_0 \neq 0$ değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$(v')^2 = \frac{\tau_1^2 (\xi_4 \Gamma^4 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{\zeta_0}, \quad (4.4.5)$$

$$v'' = \frac{\tau_1 (4\xi_4 \Gamma^3 + 3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0}, \quad (4.4.6)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (4.4.5-4.4.6) ifadeleri (4.4.4)' de yerine yazılarak Γ polinomunun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 7 paket programı ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\frac{\xi_4 \tau_0^2 (\alpha + \gamma \alpha - 2\beta \tau_0^2)}{2\beta \tau_1^2}, \quad \xi_1 = \frac{\xi_4 \tau_0 (4\beta \tau_0^2 - \alpha(\gamma + 1))}{\beta \tau_1^3}, \quad \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \\ \xi_2 &= -\frac{\xi_4 (\alpha + \gamma \alpha - 12\beta \tau_0^2)}{2\beta \tau_1^2}, \quad \xi_3 = \frac{4\xi_4 \tau_0}{\tau_1}, \quad \xi_4 = \xi_4, \quad \zeta_0 = \zeta_0, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$c = \pm \sqrt{\frac{2a^2 k^2 (\gamma + 1) \xi_4 + \beta (\gamma - 1)^2 \zeta_0 \tau_1^2}{2k^2 (\gamma + 1) \xi_4}}. \quad (4.4.8)$$

Bu sonuçlar (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_4}} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 - \frac{4\tau_0}{\tau_1} \Gamma^3 - \frac{\alpha + \gamma \alpha - 12\beta \tau_0^2}{2\beta \tau_1^2} \Gamma^2 + \frac{\tau_0 (4\beta \tau_0^2 - \alpha(\gamma + 1))}{\beta \tau_1^3} \Gamma - \frac{\tau_0^2 (\alpha + \gamma \alpha - 2\beta \tau_0^2)}{2\beta \tau_1^2}}}, \quad (4.4.9)$$

integral formu bulunur. (4.4.9) denklemini integre edilirse, (4.4.1) denkleminin kapalı formdaki dalga çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{B}{\Gamma - \alpha_1}, \quad (4.4.10)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2B}{\alpha_1 - \alpha_2} \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\Gamma - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad (4.4.11)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{B}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{\Gamma - \alpha_1}{\Gamma - \alpha_2} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad (4.4.12)$$

$$\pm(\eta-\eta_0)=\frac{B}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\Gamma-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}-\sqrt{(\Gamma-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}}{\sqrt{(\Gamma-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}+\sqrt{(\Gamma-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}}\right|, \quad \alpha_1>\alpha_2>\alpha_3, \quad (4.4.13)$$

$$\pm(\eta-\eta_0)=\frac{2B}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}F(\varphi,l), \quad \alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4. \quad (4.4.14)$$

Burada

$$B=\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_4}}, \quad \varphi=\arcsin\sqrt{\frac{(\Gamma-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4)}{(\Gamma-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)}}, \quad l^2=\frac{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}, \quad (4.4.15)$$

dir.

Ayrıca $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 değerleri de aşağıdaki polinom denkleminin kökleridir.

$$\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4}\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4}\Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4}\Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = 0. \quad (4.4.16)$$

Böylece (4.4.10-4.4.14) kapalı çözüm fonksiyonlarının integrasyonundan sırasıyla

$$u(x,t)=\left[\tau_0+\tau_1\alpha_1\pm\frac{\tau_1B}{k(x\pm\sqrt{Et})-\eta_0}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.17)$$

$$u(x,t)=\left[\tau_0+\tau_1\alpha_1+\frac{4B^2(\alpha_2-\alpha_1)\tau_1}{4B^2-\left[(\alpha_1-\alpha_2)k(x\pm\sqrt{Et}-\eta_0)\right]^2}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.18)$$

$$u(x,t)=\left[\tau_0+\tau_1\alpha_2+\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\tau_1}{\exp\left[\frac{k(\alpha_1-\alpha_2)}{B}(x\pm\sqrt{Et}-\eta_0)\right]-1}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.19)$$

$$u(x,t)=\left[\tau_0+\tau_1\alpha_1+\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\tau_1}{\exp\left[\frac{k(\alpha_1-\alpha_2)}{B}(x\pm\sqrt{Et}-\eta_0)\right]-1}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.20)$$

$$u(x,t)=\left[\tau_0+\tau_1\alpha_1-\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\tau_1}{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+(\alpha_3-\alpha_2)\cosh\left[\frac{k\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}}{B}(x\pm\sqrt{Et})\right]}\right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.21)$$

$$u(x,t) = \left[\tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \frac{\tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4) s t^2 \left[\mp \frac{k \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_2 - \alpha_4)}}{2B} (x \pm \sqrt{Et} - \eta_0), k \right]} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.22)$$

çözümleri elde edilir. $k = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3) (\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_4)}$, $E = \frac{2\alpha^2 k^2 (\gamma+1) \xi_4 + \beta (\gamma-1)^2 \zeta_0 \tau_1^2}{2k^2 (\gamma+1) \xi_4}$. Bu

çözüm fonksiyonlarını sadeleştirmek için $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_1$ ve $\eta_0 = 0$ alırsak, (4.4.17-4.4.21)

çözümleri sırasıyla

$$u(x,t) = \left[\pm \frac{B \tau_1}{k(x-vt)} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.23)$$

$$u(x,t) = \left[\frac{4B^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \tau_1}{4B^2 - [(\alpha_1 - \alpha_2) k(x-vt)]^2} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.24)$$

$$u(x,t) = \left[\frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \tau_1}{2} \left(1 \mp \coth \left[\frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{2B} (x-vt) \right] \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (4.4.25)$$

şeklindeki rasyonel ve hiperbolik yürüyen dalga çözümlerine ve ayrıca aşağıdaki soliton çözüme dönüşür:

$$u(x,t) = \left[\frac{A_3}{(D + \cosh[B_1(x-vt)])^{\frac{2}{\gamma-1}}} \right]. \quad (4.4.26)$$

Burada $A_3 = \left(\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \tau_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$, $B_1 = \frac{k \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}}{B}$, $D = \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_2}$

ve $v = \pm \sqrt{\frac{2\alpha^2 k^2 (\gamma+1) \xi_4 + \beta (\gamma-1)^2 \zeta_0 \tau_1^2}{2k^2 (\gamma+1) \xi_4}}$. Kullanılan A_3 çözümün salınım genişliği, v

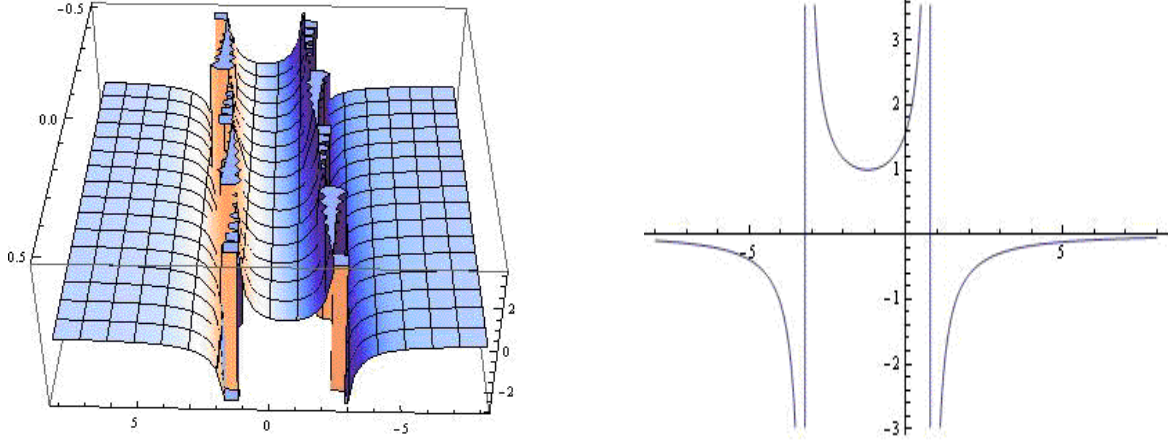
hızı ve B_1 ise çözümlerin ters genişliğidir. Ayrıca, $\tau_0 = \tau_1 \alpha_2$ ve $\eta_0 = 0$ alınırsa, (4.4.22) denkleminin Jacobi eliptik çözümü

$$u_j(x, t) = \frac{A_4}{\left(D_1 + \operatorname{sn}^2 \left[B_j(x - vt), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)} \right] \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}}, \quad (4.4.27)$$

olarak elde edilir. Burada $j = 2, 3$ için A_4 , D_1 , B_j değerleri aşağıdaki gibidir:

$$A_4 = \left(\frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_4} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad D_1 = \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_4}, \quad B_j = \frac{(-1)^j k \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2B}.$$

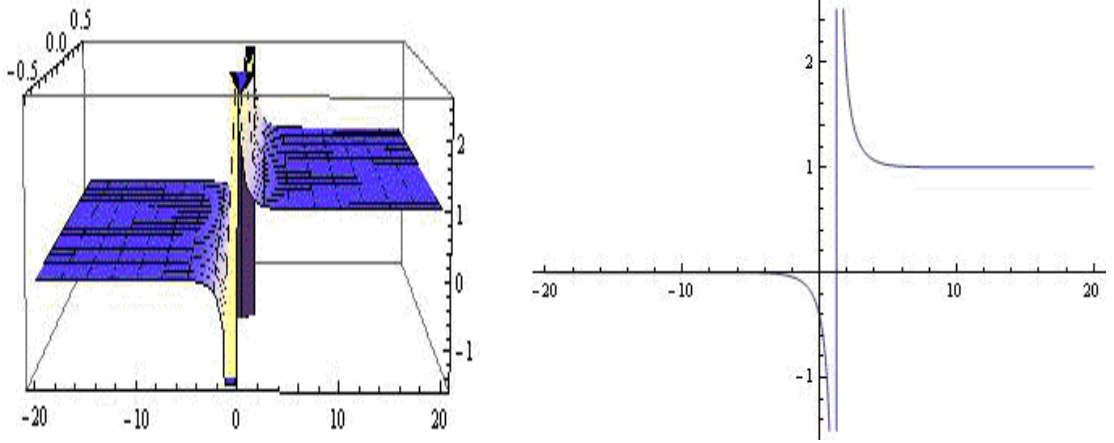
(4.4.24-4.4.25) denklemlerinin çözüm fonksiyonlarına ait davranışları gözlemlemek için uygun parametreler seçilerek aşağıdaki grafikler elde edilmiştir.



Şekil 4.29. Birinci grafik (4.4.24) denkleminin $-10 < x < 10$, $-0.5 < t < 0.5$, $\tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = \xi_4 = \zeta_0 = \beta = 1$,

$\delta = a = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\gamma = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise

(4.4.24) denkleminin $-10 < x < 10$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği



Şekil 4.30. Birinci grafik (4.4.25) denkleminin $-20 < x < 20$, $-0.5 < t < 0.5$, $\tau_0 = \tau_1 = \alpha_1 = \xi_4 = \zeta_0 = 1$

$\beta = \delta = a = k = 1$, $\eta_0 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\gamma = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.4.25) denkleminin $-20 < x < 20$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği

Yorum 6. Genelleştirilmiş Klein-Gordon denkleminin literatürde üstel fonksiyon metodu kullanılarak hiperbolik fonksiyon çözümlerinin olduğu görülmüştür. Bu çalışmada elde edilen rasyonel fonksiyon çözümleri, Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri ve eliptik integral F, E ve Π fonksiyon çözümleri daha önce literatürde bulunmayan yeni çözümlerdir.

4.5 Boussinesq Denklemine GDDM'nun uygulanması

Lineer olmayan Boussinesq denklemi,

$$u_{tt} = (c_1 u + c_2 u^n)_{xx} + u_{xxtt},$$

şeklindedir [53]. Burada $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ ve $n = 2$ alınırsa

$$u_{tt} - u_{xx} + 2(u_x)^2 + 2uu_{xx} - u_{xxtt} = 0, \quad (4.5.1)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu denkleme $u(x, t) = u(\eta)$, $\eta = k(x - \omega t)$ dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$(\omega^2 - 1)u'' + 2(u')^2 + 2uu'' - k^2\omega^2 u^{(4)} = 0, \quad (4.5.2)$$

elde edilir. (4.5.2) denklemi integre edildiğinde

$$(\omega^2 - 1)u + u^2 - k^2\omega^2 u'' = 0, \quad (4.5.3)$$

şeklindeki lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. (3.1.7-3.1.8) ifadeleri (4.5.3) denkleminde yerine yazılıp dengeleme prensibi kullanıldığında

$$\theta = \varepsilon + \delta + 2,$$

dengeleme bağıntısı elde edilir.

Durum 1.

$\varepsilon = 0, \delta = 1, \theta = 3$ ve $\xi_3 \neq 0, \zeta_0 \neq 0, \tau_1 \neq 0$, değerleri (3.1.6-3.1.8) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$u = \tau_0 + \tau_1 \Gamma, \quad (4.5.4)$$

$$u'' = \frac{(\xi_1 + 2\xi_2 \Gamma + 3\xi_3 \Gamma^2)}{2\zeta_0} \tau_1, \quad (4.5.5)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (4.5.4-4.5.5) ifadeleri (4.5.3)' de yerine yazılarak Γ polinomunun katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica 9 paket programı ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} \zeta_0 = \zeta_0, k = k, \tau_0 = \tau_0, \tau_1 = \tau_1, w = w, \xi_0 = \xi_0, \xi_2 = \frac{\zeta_0(-1 + \omega^2 + 2\tau_0)}{k^2 \omega^2}, \\ \xi_1 = \frac{2\zeta_0 \tau_0(-1 + \omega^2 + \tau_0)}{k^2 \omega^2 \tau_1}, \xi_3 = \frac{2\zeta_0 \tau_1}{3k^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Bu sonuçlar (3.1.6) ve (3.1.11) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \sqrt{\frac{\zeta_0}{\xi_3}} \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3}}}, \quad (4.5.7)$$

integral formu bulunur. (4.5.7) denklemi integre edilirse, (4.5.1) denkleminin kapalı formdaki dalga çözümleri aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2B}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, \quad (4.5.8)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2B}{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_3}}{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}}\right), \alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3. \quad (4.5.9)$$

Ayrıca α_1 ve α_2 değerleri de aşağıdaki polinom denkleminin kökleridir;

$$\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_3} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_3} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3} = 0. \quad (4.5.10)$$

Böylece (4.5.8-4.5.9) kapalı çözüm fonksiyonlarının integrasyonundan sırasıyla

$$u_1(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \left(\alpha_1 + \frac{4B^2}{(\eta - \eta_0)^2} \right), \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, \quad (4.5.11)$$

$$u_2(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \left(\alpha_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) \sec^2 \left(\frac{(\eta - \eta_0) \sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}}{2B} \right) \right), \alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3, \quad (4.5.12)$$

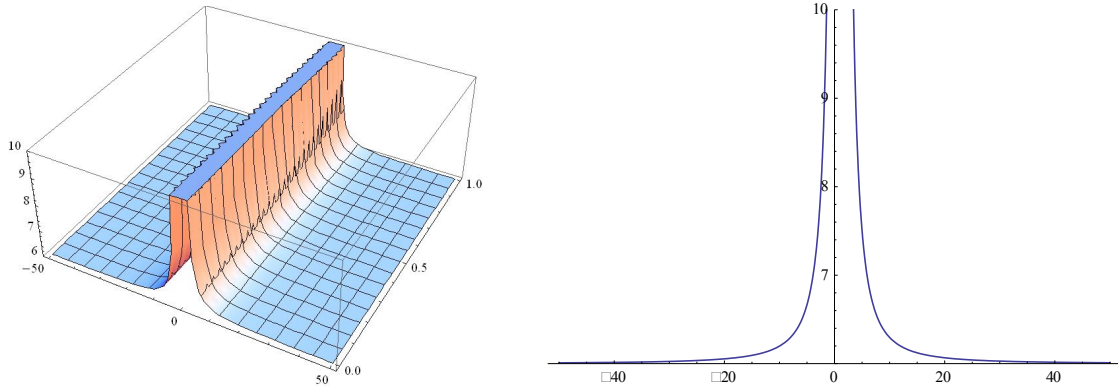
çözümleri elde edilir. Bu çözüm fonksiyonlarını sadeleştirmek için $\eta = kx - kwt$ ve $\eta_0 = 0$ alırsak, (4.5.11-4.5.12) çözümleri sırasıyla;

$$u_1(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left(\alpha_1 + \frac{4B^2}{(kx - kwt)^2} \right), \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, \quad (4.5.13)$$

$$u_2(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left(\alpha_1 + (\alpha_3 - \alpha_1) \sec^2 \left(\frac{(kx - kwt) \sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}}{2B} \right) \right), \alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3, \quad (4.5.14)$$

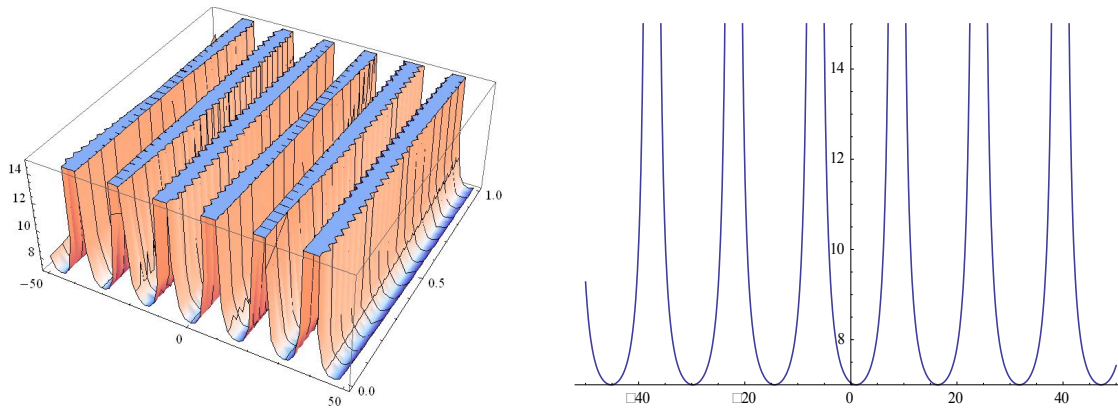
bulunur. Burada $B = \sqrt{\frac{3k^2 \omega^2}{2\tau_1}}$ dir. (4.5.13-4.5.14) denklemlerinin çözüm fonksiyonlarına

ait davranışları gözlemlemek için uygun parametreler seçilerek aşağıdaki grafikler elde edilmiştir.



Şekil 4.31. Birinci grafik (4.5.13) denkleminin $-50 < x < 50$, $0 < t < 1$, $\tau_1 = 5$, $\alpha_1 = 0.6$,

$\zeta_0 = 0.3$, $k = 0.1$, $\omega = 2$, $\tau_0 = 3$, $\eta_0 = 0$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.5.13) denkleminin $-50 < x < 50$, $t = 0.5$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği



Şekil 4.32. Birinci grafik (4.5.14) denkleminin $-50 < x < 50$, $0 < t < 1$, $\tau_1 = 5$, $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_3 = 0.8$, $\zeta_0 = 0.3$,

$k = 0.1$, $\omega = 2$, $\tau_0 = 3$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve ikinci grafik ise (4.5.14) denkleminin $-50 < x < 50$, $t = 0.5$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği

4.6. (N+1) Boyutlu sine-cosine-Gordon Denkleminin YFM'nun Uygulanması

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{j=1}^N \phi_{x_j x_j} - \phi_{tt} - \alpha \cos(\phi) - \beta \sin(2\phi) = 0, \quad (4.6.1)$$

şeklindeki (N+1) boyutlu sin-cos-Gordon denklemini [54] inceleyelim. (4.6.1) denklemi

$$P(\phi, \cos(\phi), \sin(2\phi), \phi_t, \phi_{x_1 x_1}, \phi_{x_2 x_2}, \dots, \phi_{x_N x_N}) = 0, \quad (4.6.2)$$

şeklindeki genel bir formda yazılabilir. (4.6.2) denkleminde

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \phi(\eta), \quad \eta = k \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right), \quad (4.6.3)$$

dalga dönüşümü uygulandığında

$$\tau^2 (N - c^2) \phi'' - \alpha \cos(\phi) - \beta \sin(2\phi) = 0, \quad (4.6.4)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Ayrıca

$$\phi' = f(\sin(\phi)), \quad (4.6.5)$$

dönüşümü (4.6.4) denkleminde gerekli olan türevlere göre düzenlendiğinde

$$\phi'' = (\cos \phi) f(\sin(\phi)) f'(\sin(\phi)), \quad (4.6.6)$$

denklemi yazılabilir. (4.6.6) denklemi (4.6.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tau^2 (N - c^2) (\cos(\phi)) f(\sin(\phi)) f'(\sin(\phi)) = (\cos(\phi)) (\alpha + 2\beta \sin(\phi)), \quad (4.6.7)$$

eşitliği oluşur.

$$\sin(\phi) = \psi \text{ dönüşümü ile } \cos(\phi) = \sqrt{1 - \psi^2} \text{ ve } \phi' = \frac{\psi'}{\sqrt{1 - \psi^2}} = f(\sin(\phi)) = f(\psi),$$

bağıntıları bulunabilir. Elde edilen bu ifadeler (4.6.7) denkleminde yerine yazıldığında

$$\tau^2 (N - c^2) f(\psi) f'(\psi) = \alpha + 2\beta \psi, \quad (4.6.8)$$

elde edilir. (4.6.8) denklemi integre edildiğinde

$$\frac{\tau^2 (N - c^2)}{2} f^2(\psi) = \alpha \psi + \beta \psi^2 + P, \quad (4.6.9)$$

bağıntısı bulunur. Burada P integral sabitidir.

(4.6.9) denklemi düzenlendiğinde

$$f(\psi) = \pm \sqrt{\frac{2}{\tau^2 (N - c^2)} (\alpha \psi + \beta \psi^2 + P)}, \quad (4.6.10)$$

eşitliği ve $\frac{\psi'}{\sqrt{1-\psi^2}} = f(\psi)$ dönüşümü ile de

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\eta} = \pm \sqrt{\frac{2}{\tau^2(N-c^2)}(\alpha\psi + \beta\psi^2 + P)(1-\psi^2)}, \quad (4.6.11)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Mathematica 7 paket programının sembolik hesaplama özelliği kullanılarak değişkenlerine ayrılabilir (4.6.11) diferansiyel denklemi çözülmüş ve JacobiAmplitude fonksiyonunun ters fonksiyonu olan birinci tip eliptik integral fonksiyonu F aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$\eta + Q = \pm \sqrt{-\frac{2\tau^2(N-c^2)}{\beta(\psi_2-\psi_3)(\psi_1-\psi_4)}} F \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{(\psi-\psi_2)(\psi_1-\psi_4)}{(\psi-\psi_1)(\psi_2-\psi_4)}} \right), \frac{(\psi_1-\psi_3)(\psi_2-\psi_4)}{(\psi_2-\psi_3)(\psi_1-\psi_4)} \right]. \quad (4.6.12)$$

Burada verilen, Q integrasyon sabiti, ψ_1, ψ_2, ψ_3 ve ψ_4 ise $(\alpha\psi + \beta\psi^2 + P)(1-\psi^2) = 0$, denkleminin kökleri olmak üzere:

$$\psi_1 = 1, \psi_2 = -1, \psi_3 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4P\beta}}{2\beta}, \psi_4 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4P\beta}}{2\beta}, \quad (4.6.13)$$

değerleri yazılabilir. Buradan

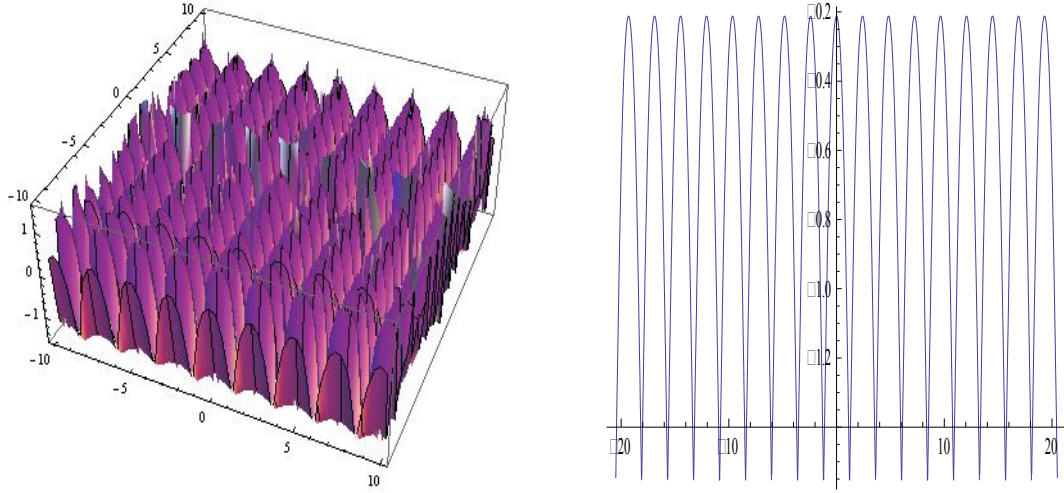
$$\psi = \frac{\psi_2(\psi_1-\psi_4) - \psi_1(\psi_2-\psi_4)sn^2 \left[\sqrt{-\frac{\beta(\psi_1-\psi_4)(\psi_2-\psi_3)}{2\tau^2(N-c^2)}}(\eta+Q), \frac{(\psi_1-\psi_3)(\psi_2-\psi_4)}{(\psi_2-\psi_3)(\psi_1-\psi_4)} \right]}{\psi_1-\psi_4 - (\psi_2-\psi_4)sn^2 \left[\sqrt{-\frac{\beta(\psi_1-\psi_4)(\psi_2-\psi_3)}{2\tau^2(N-c^2)}}(\eta+Q), \frac{(\psi_1-\psi_3)(\psi_2-\psi_4)}{(\psi_2-\psi_3)(\psi_1-\psi_4)} \right]}, \quad (4.6.14)$$

fonksiyonu bulunur. (4.6.14) ifadesinde ψ yerine $\sin(\phi)$ ve $\eta = \tau \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right)$ yazılırsa

(4.6.1) denklemi için açık çözüm

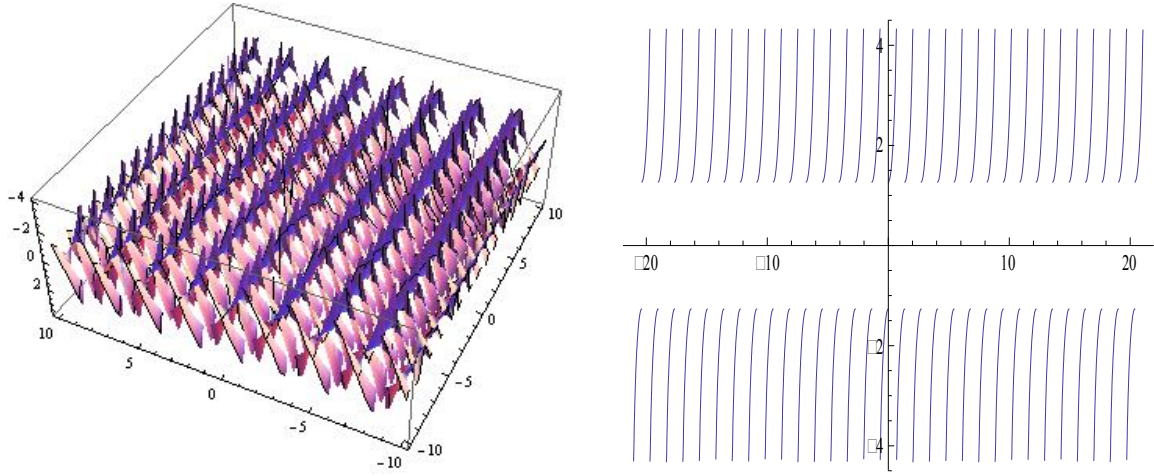
$$\phi = \arcsin \left[\frac{\psi_2(\psi_1-\psi_4) - \psi_1(\psi_2-\psi_4)sn^2 \left[\sqrt{-\frac{\beta(\psi_1-\psi_4)(\psi_2-\psi_3)}{2\tau^2(N-c^2)}}(\eta+Q), l^2 \right]}{\psi_1-\psi_4 - (\psi_2-\psi_4)sn^2 \left[\sqrt{-\frac{\beta(\psi_1-\psi_4)(\psi_2-\psi_3)}{2\tau^2(N-c^2)}}(\eta+Q), l^2 \right]} \right], \quad (4.6.15)$$

şeklinde elde edilir. Burada c, Q keyfi sabitler olmak üzere $l^2 = \frac{(\psi_1-\psi_3)(\psi_2-\psi_4)}{(\psi_2-\psi_3)(\psi_1-\psi_4)}$ olur.



Şekil 4.33. Birinci grafik (4.6.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 5$, $\beta = \frac{1}{4}$,

$P = 9$, $N = 1$, $c = 2$, $Q = 0$, $\tau = 1$ değerleri için üç boyutlu grafiği ve (4.6.15) denkleminin $-20 < x < 20$, $t = 1$ için yaklaşık tam çözümünün iki boyutlu grafiği



Şekil 4.34. (4.6.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 5$, $\beta = \frac{1}{4}$, $P = 9$, $N = 1$,

$c = 2$, $Q = 0$, $\tau = 1$ ve $x = 1$ için sırasıyla üç boyutlu grafiği ve $-20 < x < 20$, $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

Yorum 7. Bu çalışmada (4.6.1) denkleminin F eliptik integral fonksiyon çözümü elde edilmiştir. Bu fonksiyon için bazı dönüşümleri kabul ederek sn Jacobi eliptik fonksiyonu elde edilmiştir. Yeni fonksiyon metodunun trigonometrik yada hiperbolik fonksiyonları içeren örneğin $sine$, $cosine$, $sinh$, $cosh$ şeklindeki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için uygun bir yaklaşım olduğu görülmüştür.

4.7. Genelleştirilmiş çift sinh-Gordon Denkleminin YFM'nun Uygulanması

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$u_{tt} - u_{xx} + 2\alpha \sinh(nu) + \beta \sinh(2nu) = 0, \quad n \geq 1, \quad (4.7.1)$$

şeklindeki genelleştirilmiş çift-sinh-Gordon denklemini [30] inceleyelim. (4.7.1) denklemi

$$P(u, \sinh(nu), \sinh(2nu), u_t, u_{xx}) = 0, \quad (4.7.2)$$

şeklindeki genel bir formda yazılabilir. (4.7.2) denkleminde

$$u = u(x, t) = u(\mu) = u(x - ct), \quad \mu = x - ct, \quad (4.7.3)$$

dalga dönüşümü uygulandığında

$$(c^2 - ku'') + 2\alpha \sinh(nu) + \beta \sinh(2nu) = 0, \quad (4.7.4)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Ayrıca

$$u' = f(\cosh nu), \quad (4.7.5)$$

dönüşümü (4.7.4) denkleminde gerekli olan türevlere göre düzenlendiğinde

$$u'' = n \sinh(nu) f'(\cosh nu) f'(\cosh nu), \quad (4.7.6)$$

denklemi yazılabilir. (4.7.6) denklemi (4.7.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$(c^2 - k)u'' = -2 \sinh(nu) [\alpha + \beta \cosh(nu)], \quad (4.7.7)$$

eşitliği oluşur. $\cosh nu = \psi$ dönüşümü ile,

$$u = \frac{1}{n} \operatorname{arccosh}(\psi) \quad \text{ve} \quad u' = \frac{\psi'}{n\sqrt{\psi^2 - 1}} = f(\cosh(nu)) = f(\psi),$$

bağıntıları bulunabilir. Elde edilen bu ifadeler (4.7.7) denkleminde yerine yazıldığında

$$(c^2 - k)nf(\psi)f'(\psi) = -2[\alpha + \beta\psi], \quad (4.7.8)$$

elde edilir. (4.7.8) denklemi integre edildiğinde

$$\frac{(c^2 - k)n}{2} f^2(\psi) = -2\alpha\psi - \beta\psi^2 + P, \quad (4.7.9)$$

bağıntısı bulunur. Burada P integral sabitidir.

(4.7.9) denklemi düzenlediğinde,

$$f(\psi) = \pm \sqrt{\frac{2}{(c^2 - k)n} (-2\alpha\psi - \beta\psi^2 + P)}, \quad (4.7.10)$$

elde edilir. $\frac{\psi'}{n\sqrt{\psi^2 - 1}} = f(\psi)$ bağıntısı kullanılarak,

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\mu} = \pm \sqrt{\frac{2}{(c^2 - k)n} (\psi^2 - 1) (-2\alpha\psi - \beta\psi^2 + P)}, \quad (4.7.11)$$

denklemleri oluşur. Mathematica 7 paket programının sembolik hesaplama özelliği kullanılarak değişkenlerine ayrılabilir (4.7.11) diferansiyel denklemi çözülmüş ve JacobiAmplitude fonksiyonunun ters fonksiyonu olan birinci tip eliptik integral fonksiyonu F aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$\eta + Q = \pm \sqrt{-\frac{2(c^2 - k)}{n\beta(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)}} F \left[\arcsin \left(\frac{\sqrt{(\psi - \psi_2)(\psi_1 - \psi_4)}}{\sqrt{(\psi - \psi_1)(\psi_2 - \psi_4)}}, \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right) \right]. \quad (4.7.12)$$

Burada verilen, Q integrasyon sabiti, ψ_1, ψ_2, ψ_3 ve ψ_4 ise $(\alpha\psi + \beta\psi^2 + P)(1 - \psi^2) = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere,

$$\psi_1 = -1, \psi_2 = 1, \psi_3 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + P\beta}}{\beta}, \psi_4 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + P\beta}}{\beta}, \quad (4.7.13)$$

değerleri yazılabilir. Buradan

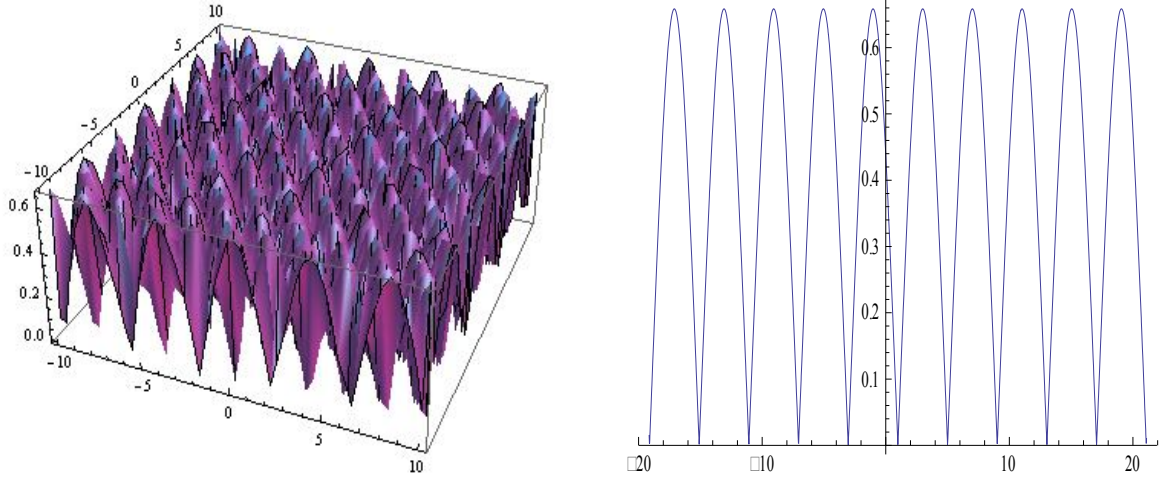
$$\psi = \frac{\psi_2(\psi_1 - \psi_4) - \psi_1(\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{-\frac{n\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2(c^2 - k)}} (\eta + Q), \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right]}{\psi_1 - \psi_4 - (\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{-\frac{n\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2(c^2 - k)}} (\eta + Q), \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right]}, \quad (4.7.14)$$

fonksiyonu bulunur. (4.7.14) ifadesinde ψ yerine $\cosh(n\phi)$ ve $\eta = \tau \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right)$

yazılırsa (4.7.1) denklemleri için açık çözüm

$$\phi = \frac{1}{n} \operatorname{arccosh} \left[\frac{\psi_2(\psi_1 - \psi_4) - \psi_1(\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{-\frac{n\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2(c^2 - k)}} \left(\tau \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right) + Q \right), l^2 \right]}{\psi_1 - \psi_4 - (\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{-\frac{n\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2(c^2 - k)}} \left(\tau \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right) + Q \right), l^2 \right]} \right], \quad (4.7.15)$$

şeklinde elde edilir. Burada c, Q keyfi sabitler olmak üzere $l^2 = \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)}$ olur.



Şekil 4.35. (4.7.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $P = 8$, $N = 2$,
 $c = 5$, $Q = 0$, $\tau = 1$, $k = 3$ için üç boyutlu grafiği ve $-20 < x < 20$, $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

Yorum 8. Bu çalışmada genelleştirilmiş çift sinh-Gordon denkleminin yeni yürüyen dalga çözümlerini elde etmek için yeni fonksiyon metodu kullanılarak yeni bir eliptik integral fonksiyon çözümü elde edilmiştir. Basit matematiksel işlemler yardımıyla eliptik integral fonksiyon çözümünü sn Jacobi eliptik fonksiyon çözümüne dönüştürülebilir. Elde edilen sonuçlar yeni fonksiyon metodunun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için uygun bir metod olduğu görülmüştür.

4.8. (N+1) Boyutlu çift sine-Gordon Denkleminin YFM'nun Uygulanması

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{j=1}^N u_{x_j x_j} - u_{tt} - \alpha \sin u - \beta \sin 2u = 0, \quad (4.8.1)$$

şeklindeki (N+1) boyutlu çift sin-Gordon denklemini [27] inceleyelim. (4.8.1) denklemi

$$P(u, \sin u, \sin 2u, u_t, u_{x_j x_j}) = 0, \quad (4.8.2)$$

şeklindeki genel bir formda yazılabilir. (4.8.2) denkleminde

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = u(\eta), \eta = k \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right), \quad (4.8.3)$$

dalga dönüşümü uygulandığında

$$k^2 (N - c^2) u'' - \alpha \sin u - \beta \sin 2u = 0, \quad (4.8.4)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Ayrıca

$$u' = f(\cos u), \quad (4.8.5)$$

dönüşümü (4.8.4) denkleminde gerekli olan türevlere göre düzenlendiğinde

$$u'' = (-\sin u) f(\cos u) f'(\cos u), \quad (4.8.6)$$

denklemi yazılabilir. (4.8.6) denklemi (4.8.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$k^2 (c^2 - N) f(\cos u) f'(\cos u) = \alpha + 2\beta \cos u, \quad (4.8.7)$$

eşitliği oluşur. $\cos u = \psi$ dönüşümü ile,

$$u = \arccos \psi \quad \text{ve} \quad u' = -\frac{\psi'}{\sqrt{1-\psi^2}} = f(\cos u) = f(\psi),$$

bağıntıları bulunabilir. Elde edilen bu ifadeler (4.8.7) denkleminde yerine yazıldığında

$$k^2 (c^2 - N) f(\psi) f'(\psi) = \alpha + \beta \psi, \quad (4.8.8)$$

elde edilir. (4.8.8) denklemi integre edildiğinde

$$\frac{k^2 (c^2 - N)}{2} f^2(\psi) = \alpha \psi + \beta \psi^2 + P, \quad (4.8.9)$$

bağıntısı bulunur. Burada P integral sabitidir.

(4.8.9) denklemi düzenlediğinde,

$$f(\psi) = \pm \sqrt{\frac{2}{k^2 (c^2 - N)} (\alpha \psi + \beta \psi^2 + P)}, \quad (4.8.10)$$

elde edilir. $-\frac{\psi'}{\sqrt{1-\psi^2}} = f(\psi)$ bağıntısı kullanılarak,

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\mu} = -\sqrt{\frac{2}{k^2 (c^2 - N)} (1-\psi^2) (\alpha \psi + \beta \psi^2 + P)}, \quad (4.8.11)$$

denklemi oluşur. Mathematica 7 paket programının sembolik hesaplama özelliği kullanılarak değişkenlerine ayrılabilir (4.8.11) diferansiyel denklemi çözülmüş ve JacobiAmplitude fonksiyonunun ters fonksiyonu olan birinci tip eliptik integral fonksiyonu F aşağıdaki gibi elde edilmiştir

$$\eta + Q = -\sqrt{\frac{2k^2 (c^2 - N)}{\beta (\psi_2 - \psi_3) (\psi_1 - \psi_4)}} F \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{(\psi - \psi_2) (\psi_1 - \psi_4)}{(\psi - \psi_1) (\psi_2 - \psi_4)}}, \frac{(\psi_1 - \psi_3) (\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3) (\psi_1 - \psi_4)} \right) \right]. \quad (4.8.12)$$

Burada verilen, Q integrasyon sabiti, ψ_1, ψ_2, ψ_3 ve ψ_4 ise $(\alpha \psi + \beta \psi^2 + P)(1-\psi^2) = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere,

$$\psi_1 = -1, \psi_2 = 1, \psi_3 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4P\beta}}{2\beta}, \psi_4 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4P\beta}}{2\beta}, \quad (4.8.13)$$

değerleri yazılabilir. Buradan

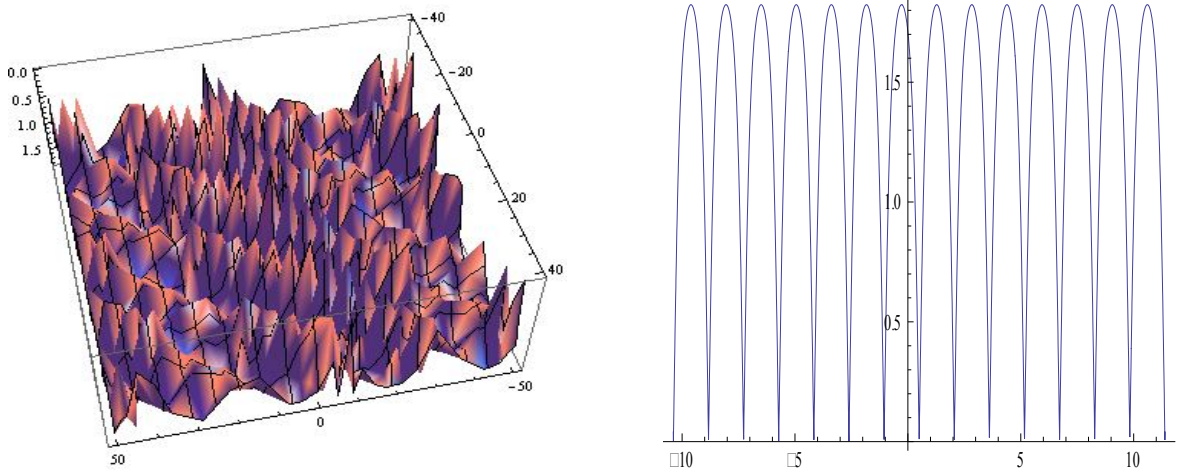
$$\psi = \frac{\psi_2(\psi_1 - \psi_4) - \psi_1(\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[-\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}}(\eta + Q), \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right]}{\psi_1 - \psi_4 - (\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[-\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}}(\eta + Q), \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right]}, \quad (4.8.14)$$

fonksiyonu bulunur. (4.8.14) ifadesinde ψ yerine $\cos(\phi)$ ve $\eta = \tau \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right)$ yazılırsa

(4.8.1) denklemini için açık çözüm

$$\phi = \arccos \left[\frac{\psi_2(\psi_1 - \psi_4) - \psi_1(\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[-\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}}(\eta + Q), l^2 \right]}{\psi_1 - \psi_4 - (\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[-\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}}(\eta + Q), l^2 \right]} \right], \quad (4.8.15)$$

şeklinde elde edilir. Burada c, Q keyfi sabitler olmak üzere $l^2 = \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)}$ olur.



Şekil 4.36. (4.8.15) denkleminin $-40 < x < 40, -50 < t < 50, \alpha = 6, \beta = 8, P = 1, N = 2,$

$c = 5, Q = 0, \tau = 1, k = 3$ için üç boyutlu grafiği ve $-11 < x < 12, t = 1$ için iki boyutlu grafiği

Yorum 9. Bu çalışmada geliştirilmiş *çift sine-Gordon* denkleminin yeni yürüyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Bulunan çözümlerin (4.8.1) denklemini sağladığı Mathematica 7 programı ile gösterilmiştir.

4.9. (N+1) Boyutlu sinh-cosh-Gordon Denkleminin YFM'nun Uygulanması

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{j=1}^N u_{x_j x_j} - u_{tt} - \alpha \cosh(u) - \beta \sinh(2u) = 0, \quad (4.9.1)$$

şeklindeki (N+1) boyutlu sinh-cosh-Gordon denklemini inceleyelim [27]. (4.9.1) denklemi

$$P(u, \cosh(u), \sinh(2u), u_{tt}, u_{x_j x_j}) = 0, \quad (4.9.2)$$

şeklindeki genel bir formda yazılabilir. (4.9.2) denkleminde

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = u(\eta), \eta = k \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right), \quad (4.9.3)$$

dalga dönüşümü uygulandığında

$$k^2 (N - c^2) u'' - \alpha \cosh(u) - \beta \sinh(2u) = 0, \quad (4.9.4)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Ayrıca

$$u' = f(\sinh(u)), \quad (4.9.5)$$

dönüşümü (4.9.4) denkleminde gerekli olan türevlere göre düzenlendiğinde

$$u'' = \cosh(u) f'(\sinh(u)) f'(\sinh(u)), \quad (4.9.6)$$

denklemi yazılabilir. (4.9.6) denklemi (4.9.4) denkleminde yerine yazılarak

$$k^2 (N - c^2) f'(\sinh(u)) f'(\sinh(u)) = \alpha + 2\beta \sinh(u), \quad (4.9.7)$$

şeklindeki denklem elde edilir. Ayrıca $\sinh(u) = \psi$ dönüşümü ile,

$$u = \operatorname{arcsinh}(\psi) \quad \text{ve} \quad u' = \frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi^2}} = f'(\sinh(u)) = f'(\psi),$$

bağıntıları bulunabilir. Bulunan bu bağıntılar (4.9.7) denkleminde yerine yazıldığında

$$k^2 (N - c^2) f'(\psi) f'(\psi) = \alpha + 2\beta \psi, \quad (4.9.8)$$

denklemi elde edilir. (4.9.8) denklemi integre edildiğinde

$$\frac{k^2 (N - c^2)}{2} f^2(\psi) = \alpha \psi + \beta \psi^2 + P, \quad (4.9.9)$$

bağıntısı bulunur. Burada P integral sabitidir. (4.9.9) denklemi düzenlendiğinde,

$$f(\psi) = \pm \sqrt{\frac{2}{k^2 (N - c^2)} (\alpha \psi + \beta \psi^2 + P)}, \quad (4.9.10)$$

elde edilir. $\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi^2}} = f(\psi)$ bağıntısı kullanılarak,

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\eta} = \sqrt{\frac{2}{k^2(N-c^2)}(1+\psi^2)(\alpha\psi + \beta\psi^2 + P)}, \quad (4.9.11)$$

denklemini oluştur. Mathematica 7 paket programının sembolik hesaplama özelliği kullanılarak değişkenlerine ayrılabilir (4.9.11) diferansiyel denklemini çözülmüş ve JacobiAmplitude fonksiyonunun ters fonksiyonu olan birinci tip eliptik integral fonksiyonu F aşağıdaki gibi elde edilmiştir;

$$\eta + Q = -\sqrt{\frac{2k^2(c^2 - N)}{\beta(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)}} F \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{(\psi - \psi_2)(\psi_1 - \psi_4)}{(\psi - \psi_1)(\psi_2 - \psi_4)}}, \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right) \right]. \quad (4.9.12)$$

Burada verilen, Q integrasyon sabiti, ψ_1, ψ_2, ψ_3 ve ψ_4 ise $(\alpha\psi + \beta\psi^2 + P)(1+\psi^2) = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere,

$$\psi_1 = -i, \psi_2 = i, \psi_3 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4P\beta}}{2\beta}, \psi_4 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4P\beta}}{2\beta}, \quad (4.9.13)$$

değerleri yazılabilir. Buradan

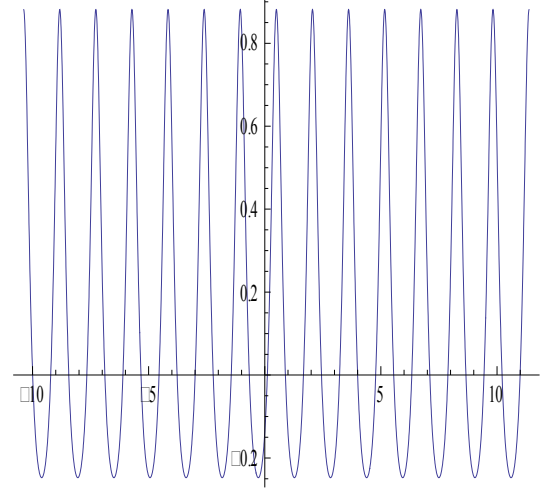
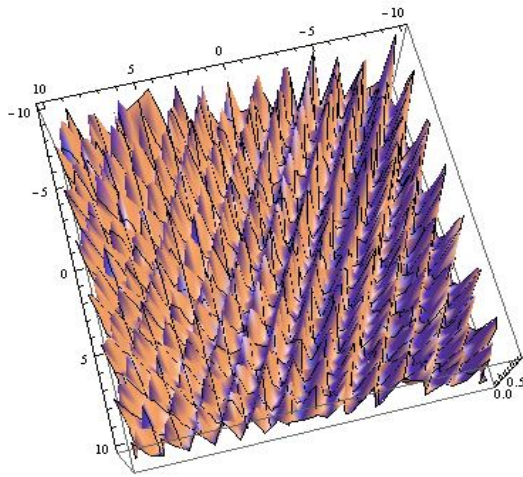
$$\psi = \frac{\psi_2(\psi_1 - \psi_4) - \psi_1(\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}} (\eta + Q), \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right]}{\psi_1 - \psi_4 - (\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}} (\eta + Q), \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \right]}, \quad (4.9.14)$$

fonksiyonu bulunur. (4.9.14) ifadesinde ψ yerine $\sinh(\phi)$ ve $\eta = \tau \left(\sum_{j=1}^N x_j - ct \right)$ yazılırsa

(4.9.1) denklemini için açık çözüm

$$\phi = \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\psi_2(\psi_1 - \psi_4) - \psi_1(\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}} (\eta + Q), l^2 \right]}{\psi_1 - \psi_4 - (\psi_2 - \psi_4) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{\beta(\psi_1 - \psi_4)(\psi_2 - \psi_3)}{2k^2(c^2 - N)}} (\eta + Q), l^2 \right]} \right], \quad (4.9.15)$$

şeklinde elde edilir. Burada c, Q keyfi sabitler olmak üzere $l^2 = \frac{(\psi_1 - \psi_3)(\psi_2 - \psi_4)}{(\psi_2 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)}$ olur.



Şekil 4. 37. (4.9.15) denkleminin $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$, $\alpha = 6$, $\beta = 8$, $P = 1$, $N = 2$, $c = 5$, $Q = 0$, $\tau = 1$, $k = 3$ için üç boyutlu grafiği ve $-11 < x < 12$, $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

4.10. Boussinesq Denkleminin GTFM'nun Uygulanması

Boussinesq denklemi,

$$u_{tt} = (c_1 u + c_2 u^n)_{xx} + u_{xxtt}, \quad (4.10.1)$$

şeklindedir [8]. Eğer (4.10.1) denkleminde $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ ve $n = 2$ alınırsa,

$$u_{tt} - u_{xx} + 2uu_{xx} - 2(u_x)^2 - u_{xxtt} = 0 \quad (4.10.2)$$

elde edilir. Boussinesq denklemi için

$$H(u, u_{tt}, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx - k\omega t, \quad (4.10.3)$$

(4.10.3) dönüşümü (4.10.2)'de yerine yazılırsa,

$$\omega^2 u'' - u'' + 2(u')^2 + 2uu'' - k^2 \omega^2 u^4 = 0, \quad (4.10.4)$$

elde edilir. (4.10.4) denklemi integre edilirse,

$$\omega^2 u' - u' - 2u - 2u.u' - k^2 \omega^2 u^4 = 0, \quad (4.10.5)$$

oluşur. (4.10.5) denklemi için dengeleme prensibi u''' ve $u.u'$ terimleri için uygulandığında (3.4.1a) ya göre $M = 2$ elde edilir.

Buradan,

$$u = a_0 + a_1 F + a_2 F^2, \quad (4.10.6)$$

bağıntısı yazılabilir. (4.10.6) ifadesini (3.3.1) ile birlikte (4.10.5) denkleminde yerine

yazılırsa Mathematica 7 programında ω , t , F^m terimlerinin katsayıları ile bir cebirsel

denklem sistemi elde edilir. F^m nin katsayılarından oluşan cebirsel denklem sistemi aşağıdaki şekildedir.

$$u' = a_1 A + a_1 BF + a_1 CF^2 + 2a_2 AF + 2a_2 BF^2 + 2a_2 BF^3,$$

$$\begin{aligned} u.u' = & a_0 a_1 A + a_0 a_1 BF + a_0 a_1 CF^2 + 2a_0 a_2 AF + 2a_0 a_2 BF^2 + 2a_0 a_2 CF^3 \\ & + a_1^2 AF + a_1^2 BF^2 + a_1^2 CF^3 + 2a_1 a_2 AF^2 + 2a_1 a_2 BF^3 \\ & + 2a_1 a_2 AF^4 + a_1 a_2 AF^2 + a_1 a_2 BF^3 + a_1 a_2 CF^4 \\ & + 2a_2^2 AF^3 + 2a_2^2 BF^4 + 2a_2^2 CF^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u''' = & a_1 B^2 A + a_1 B^3 F + 7a_1 B^2 CF^2 + 8a_1 ABCF + 12a_1 BC^2 F^3 + 2a_1 A^2 C \\ & + 8a_1 AC^2 F^2 + 6a_1 C^3 F^4 + 6a_2 A^2 B + 14a_2 AB^2 F + 52a_2 ABCF^2 \\ & + 16a_2 A^2 CF + 40a_2 AC^2 F^3 + 8a_2 B^3 F^2 + 38a_2 B^2 CF^3 \\ & + 54a_2 BC^2 F^4 + 24a_2 C^3 F^5, \end{aligned}$$

u', uu', u''' değerleri (4.10.5)'de yazılarak F 'nin kuvvetlerine göre yeniden düzenlenirse,

$$F^0 : \omega^2 a_1 A - a_1 A + 2a_0 a_1 A - k^2 \omega^2 a_1 B^2 A - 2k^2 \omega^2 a_1 A^2 C - 6k^2 \omega^2 a_2 A^2 B = 0$$

$$\begin{aligned} F^1 : & \omega^2 a_1 B + 2\omega^2 a_2 A - a_1 B - 2a_2 B + 2a_0 a_1 B + 4a_0 a_2 A + 2a_1^2 A - k^2 \omega^2 a_1 B^3 \\ & - 8k^2 \omega^2 a_1 ABC - 14k^2 \omega^2 a_2 AB^2 - 16k^2 \omega^2 a_2 A^2 C = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^2 : & \omega^2 a_1 C + 2\omega^2 a_2 B - a_1 C - 2a_2 B + 2a_0 a_1 C + 4a_0 a_2 B + 2a_1^2 B \\ & + 6a_1 a_2 A - 7k^2 \omega^2 a_1 B^2 C - 8k^2 \omega^2 a_1 AC^2 - 52k^2 \omega^2 ABC \\ & - 8k^2 \omega^2 a_2 B^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^3 : & 2\omega^2 a_2 C - 2a_2 C + 4a_0 a_2 C + 2a_1^2 C + 4a_1 a_2 B + 2a_1 a_2 B \\ & + 4a_2^2 A - 12k^2 \omega^2 a_1 BC^2 - 40k^2 \omega^2 a_2 AC^2 - 38k^2 \omega^2 B^2 C = 0, \end{aligned}$$

$$F^4 : -6a_1 a_2 C + 4a_2^2 B - 6k^2 \omega^2 a_1 C^3 - 54k^2 \omega^2 a_2 BC^2 = 0,$$

$$F^5 : 4a_2^2 C - 24k^2 \omega^2 a_2 C^3 = 0,$$

elde edilir. Bu sistemde

$$B = 0, a_0 = 4k^2 \omega^2 AC - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = 6k^2 \omega^2 C^2, \omega = \frac{1}{4k^2 AC + 1}, \quad (4.10.7)$$

değerleri Mathematica 7 programı yardımıyla elde edilir.

(i) (4.10.7) de $A = 1, B = 0, C = 1$, şeklinde seçilirse

$$a_0 = 4k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2}, a_2 = 6k^2 \omega^2,$$

elde edilir. Böylece, çözüm aşağıdaki gibidir,

$$u(x,t) = 4k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} + 6k^2\omega^2 \left[\tan^2(kx - k\omega t) \right]. \quad (4.10.8)$$

(ii) Bu durumda, eğer (4.10.7) de $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$ seçilirse,

$$a_0 = 4k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = 6k^2\omega^2,$$

elde edilir. Böylece, çözüm aşağıdaki gibi bulunur,

$$u(x,t) = 4k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} + 6k^2\omega^2 \left[\cot^2(kx - k\omega t) \right]. \quad (4.10.9)$$

(iii) Eğer (4.10.7) de $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ şeklinde seçilirse,

$$a_0 = -4k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = 6k^2\omega^2,$$

elde edilir. Böylece, çözüm aşağıdaki gibi bulunur,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -4k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} + 6k^2\omega^2 \tanh^2[kx - k\omega t], \\ u(x,t) &= -4k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} + 6k^2\omega^2 \coth^2[kx - k\omega t]. \end{aligned} \quad (4.10.10)$$

(iv) Eğer (4.10.7) de $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{2}$ şeklinde seçilirse,

$$a_0 = k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{2}k^2\omega^2,$$

elde edilir. Böylece, çözüm aşağıdaki şekilde bulunur,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}k^2\omega^2 \left[\sec(kx - k\omega t) + \tan(kx - k\omega t) \right]^2, \\ u(x,t) &= k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}k^2\omega^2 \left[\csc(kx - k\omega t) + \cot(kx - k\omega t) \right]^2, \end{aligned} \quad (4.10.11)$$

şeklinde elde edilir.

(v) Eğer (4.10.7) de $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{2}$ olarak seçilirse,

$$a_0 = k^2\omega^2 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{2}k^2\omega^2,$$

elde edilir. Böylece, çözüm aşağıdaki şekilde bulunur,

$$u(x,t) = k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} k^2 \omega^2 \left[\sec(kx - k\omega t) + \tan(kx - k\omega t) \right]^2, \quad (4.10.12)$$

$$u(x,t) = k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} k^2 \omega^2 \left[\csc(kx - k\omega t) + \cot(kx - k\omega t) \right]^2,$$

şeklinde elde edilir.

(vi) Eğer (4.10.7) de $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{2}$ şeklinde seçilirse,

$$a_0 = -k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{2} k^2 \omega^2,$$

elde edilir. Böylece, çözüm aşağıdaki şekilde bulunur,

$$u(x,t) = -k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} k^2 \omega^2 \left[\coth(kx - k\omega t) \pm \operatorname{csc} h(kx - k\omega t) \right]^2, \quad (4.10.13)$$

$$u(x,t) = -k^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} k^2 \omega^2 \left[\tanh(kx - k\omega t) \pm i \operatorname{sec} h(kx - k\omega t) \right]^2,$$

şeklinde elde edilir.

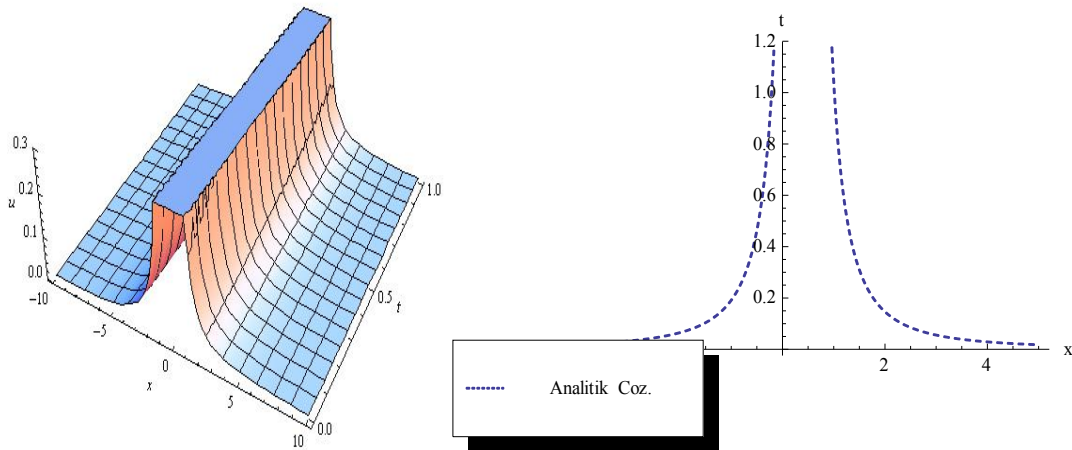
(vii) Eğer (4.10.7) de $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ şeklinde seçilirse,

$$a_0 = -\frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2}, \quad a_2 = 6k^2 \omega^2 C^2,$$

elde edilir. Böylece, çözüm aşağıdaki şekilde bulunur,

$$u(x,t) = -\frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} k^2 \omega^2 C^2 \left(-\frac{1}{(kx - k\omega t) + C_0} \right)^2, \quad (4.10.14)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 4.38. Birinci grafikte $-10 < x < 10$, $0 < t < 1$, $k = \omega = 1$, $C = 0.5$, $C_0 = 0.1$ de (4.10.14) denkleminin üç boyutlu çözüm grafiği, ikinci grafik (4.10.14) denkleminin $-5 < x < 5$, $t = 0.5$ anında Analitik çözüm grafiği

Yorum 10. Boussinesq denklemine uygulanan GTFM ile elde edilemeyen (4.5.13) çözümünün GDDM ile elde edildiği görülmüştür.

5. SONUÇ

Bu çalışmada çeşitli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerinin belirlenmesi için genişletilmiş deneme denklem metodu, yeni fonksiyon metodu ve geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu ele alınmış ve yapılan uygulamalar ile metotların güvenilirliği ve etkinliği ortaya çıkarılmıştır. Önerilen tüm metotlar MATHEMATICA paket programında kodlama yapılarak sembolik hesaplama yaklaşımı ile ilgili problemlere uygulanmıştır. Bu uygulamalar ilk önce lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga dönüşümü altında lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere indirgendiğini daha sonra da metotlara göre değişiklikler göstermekle birlikte adi diferansiyel denklemlerin lineer olmayan sembolik cebirsel denklem sistemine dönüştürüldüğünü göstermiştir. Cebirsel denklem sistemleri hesaplanarak lineer olmayan gerçek yaşam problemlerinin dalga çözümlerine ulaşılmıştır. Genişletilmiş deneme denklem metodu ile literatürde yer almayan eliptik integral F , E , π çözüm fonksiyonları ve buradan da çeşitli Jakobi eliptik fonksiyonlarının yanı sıra literatürde bulunan bazı hiperbolik ve trigonometrik çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca bazı çözüm fonksiyonlarının fiziksel davranışları çizilen iki ve üç boyutlu grafikler ile analiz edilmiştir. Böylece elde edilen dalga hareketlerinin türleri ve özellikleri belirlenmiştir.

Belirlenen dalga çözümlerinin lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri sağladıkları Mathematica paket programı kullanılarak gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında, genişletilmiş deneme denklem metodu, yeni fonksiyon metodu ve geliştirilmiş tanh fonksiyon metodunun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin literatürde bulunan çözümlerinin yanı sıra bulunmayan bazı yeni yürüyen dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan etkili bir yaklaşım olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Korteweg, D. J. and de Vries, G., 1895. On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, *Philosophical Magazine*, **39**, 422–443.
- [2] Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D., 1965. Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters* **15 (6)**, 240–243.
- [3] Ablowitz, M.J. and Segur, H., 1981. Solitons and the Inverse Scattering Transform, *SIAM, Philadelphia*, 425 p.
- [4] Rosenau, P. and Hyman, James M., 1993. Compactons: Solitons with finite wavelength, *Physical Review Letters (American Physical Society)* **70 (5)**, 564–567.
- [5] Hirota, R., 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation, *Journal of Mathematical Physics*, **14(7)**, 805–809 pp.
- [6] Matveev, V. B. and Salle, M. A., 1991. Darboux Transformations and solitons, in: Series in Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [7] Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., 1991. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform, *Cambridge University Press, Cambridge*, 516 p.
- [8] Fan, E., 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, **98**, 288–300.
- [9] Porubov, A.V. and Velarde, M.G., 1999. Exact periodic solutions of the complex Ginzburg-Landau equation, *J. Math. Phys.* **40(2)**, 884–896.
- [10] Huber, A., 2001. The calculation of novel class of solutions of a non-linear fourth order evolution equation by the Weierstrass transform method, *Appl. Math. Comput.* **201(1–2)**, 668–677.
- [11] Huber, A., 2006. A novel class of solutions for a non-linear third order wave equation generated by the Weierstrass transformation, *Chaos Soliton. Fract.* **28(4)**, 972–978.
- [12] Wakil, E.A., Abulwafa, E.M. and Abdou, M.A., 2010. Extended Weierstrass transformation method for nonlinear evolution equations, *Nonlinear Sci. Lett. A: Math. Phys. Mech.* **1(3)**, 253–262.
- [13] Feng, Z., 2002. The first integral method to study the Burgers-KdV equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **35(2)**: 343–349.
- [14] Zhaou, Y., Wang, M. and Wang, Y., 2003. Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients, *Physics Letters A*, **308**, 31–36.

- [15] Wang, M., Li, X. and Zhang, J., 2008. The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physic, *Phys. Lett. A*, **372**(4), 417–423.
- [16] Ebadi, G. and Biswas, A., 2011. The (G'/G) method and topological soliton solution of the $K(m, n)$ equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16**(6), 2377–2382.
- [17] J. Lee., R. Sakthivel. and L.Wazzan., 2010. Exact traveling wave solutions of a higher-dimensional nonlinear evolution equation, *Modern Physics Letters B*, **24**(10), 1011–1021.
- [18] Kudryashov, N.A., 2012. One method for finding exact solutions of nonlineardifferential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 2248-2253.
- [19] Liu, C.S., 2005. Trial equation method and its applications to nonlinear evolution equations, *Acta Phys. Sin.* **54**(6), 2505.
- [20] Gurefe, Y., Sonmezoglu, A. and Misirli, E., 2011. Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics, *Pramana J. Phys.* **77**(6), 1023–1029.
- [21] Liu, C.S., 2010. Applications of complete discrimination system for polynomial for classifications of traveling wave solutions to nonlinear differential equations, *Comput. Phys. Commun.* **181**(2), 317–324.
- [22] Jun, C.Y., 2011. Classification of traveling wave solutions to the Vakhnenko equations, *Comput. Math. Appl.* **62**(10), 3987–3996.
- [23] Du, X.H., 2010. An irrational trial equation method and its applications, *Pramana J. Phys.* **75**(3), 415–422.
- [24] Pandir, Y., Gurefe, Y., Kadak, U. and Misirli, E., 2012. Classifications of exact solutions for some nonlinear partial differential equations with generalized evolution, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012**, 16 pages.
- [25] Gurefe, Y., Misirli, E., Sonmezoglu, A. and Ekici, M., 2013. Extended trial equation method to generalized nonlinear partial differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **219**(10), 5253–5260.
- [26] Pandir, Y., Gurefe, Y. and Misirli, E., 2013. Classification of exact solutions to the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation, *Phys. Scr.* **87**, 12.
- [27] Shen, G., Sun, Y. and Xiong, Y., 2013. New travelling-wave solutions for Dodd-Bulloughequation, *J. Appl. Math.*, 5 pages.
- [28] Sun, Y., 2014. New travelling wave solutions for Sine-Gordon equation, *J. Appl. Math.*, 4 pages.

- [29] Bulut, H., Akturk, T. and Gurefe, Y., 2014. Travelling wave solutions of the (N+1)-dimensional sine-cosine-Gordon equation, *AIP Conf. Proc.*, **1637**, 145.
- [30] Bulut, H., Akturk, T. and Gurefe, Y., 2015. An application of the new function method to the generalized double sinh-Gordon equation, *AIP Conf. Proc.*, **1648**, 370014.
- [31] Malfliet, W., 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, **60(7)**, 650-654.
- [32] Chen H. and Zhang H., 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos Solitons Fract.*, **19**, 71-76.
- [33] Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G. and Oturanç, G. 1995. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, İzmir.
- [34] Cesur, Y., 2004. Diferansiyel Denklemler ve Mathematica, İTÜ yayınları,
- [35] Baskonus, H. M., 2014. Bazı Lineer ve Lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [36] Ugurlu, Y., 2010. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Periyodik Dalga Çözümleri, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [37] Cavlak, E., 2013. Kesirli Kuvvetlere Sahip Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Sayısal Çözümlerinin İrdelenmesi, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [38] Gelfand, I. M., Kapranov, M. M. and Zelevinsky, A. V. 1994. Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Birkhäuser. 3-7643-3660-9.,
- [39] Yokus, A., 2011. Bazı özel lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [40] Russell, J.S., 1844. Report on Waves, *14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS*.
- [41] Wazwaz, A.M., 2002. Partial Differential Equations: Methods and Applications, *Balkema, Rotterdam*.
- [42] Cinar, M., 2000. Mathematica 3.0 ve 4.0 sürümü, Seçkin Yayıncılık, Ankara, Türkiye
- [43] Gulcu, A., 2005. Mathematica 5.0, Asil Yayıncılık, Ankara, Türkiye
- [44] Wazwaz, A.M., 2005. The tanh method: Solitons and periodic solutions for the Dodd-Bullough-Mikhailov and the Tzitzeica-Dodd-Bullough equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, 55-63.

- [45] Wazwaz, A.M., 2006. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation, *Applied Mathematics Letters*, **19**, 1162-1167.
- [46] Wazwaz, A.M., 2007. New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation, *Physics Letters A*, **360**, 558-592.
- [47] El-Wakil S.A., Abdou M.A., 2008. New exact travelling wave solutions of two nonlinear physical models, *Nonlinear Analysis*, **68**, 235-245.
- [48] Fu, Z., Liu, S. and Zhao, Q., 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solitons of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.
- [49] Shen, S. and Pan, Z., 2003. A note on the Jacobi elliptic function expansion method, *Physics Letters A*, **308**, 143-148.
- [50] Chen, H. T. and Hong-Qing, Z., 2004. New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized $(2 + 1)$ -dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 765-769.
- [51] Belgacem, F. B. M., Bulut, H., Baskonus, H. M. and Akturk, T., 2014. Mathematical analysis of the generalized Benjamin and Burger-Kdv equations via the extended trial equation method, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, (2014), **16**, 91-100.
- [52] Raslan K. R. and Hassan S.M., 2009. Solitary waves for the MRLW equation, *Appl. Math. Let.*, **22**, 984-989.
- [53] Clarkson, P.A., 1989. New Similarity Solutions for the Modified Boussinesq Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 2355-2367.
- [54] Wazwaz, A.M., 2006. Travelling wave solutions for combined and double combined sine-cosine-Gordon equations by the variable separated ODE method, *Appl. Math. Comput.*, **177**, 755-760.
- [55] Pandir, Y., Gurefe, Y. and Misirli, E., 2013. The Extended Trial Equation Method for Some Time Fractional Differential Equations, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2013**, 13 pages.
- [56] Wazwaz, A. M., 2005. Exact solutions to the double sinh-Gordon equation by the tanh method and a variable separated ODE method, *Comput. Math. Appl.* **50**, 1685-1696.
- [57] Kheiri, H. and Jabbari, A., 2010. Exact solutions for the double sinh-Gordon and generalized form of the double sinh-Gordon equations by using (G'/G) -expansion method, *Turk. J. Phys.* **34**, 73-82.
- [58] Amirali, G., Duru, H., 2002. Nümerik Analiz, Pegem A Yayıncılık. Ankara.

- [59] Bulut H., Baskonus H. M., and Pandir Y., 2013. The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation, *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, 8 pages.
- [60] Bulut, H., Pandir, Y. and Baskonus, H. M., 2013. An application of the extended trial equation method to the fractional Rosenau–hyman equation, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, Yildiz Technical University, Istanbul.
- [61] Liu, Y., 1995. Instability and Blow-up of Solutions to a Generalized Boussineq Equation, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **26**, 1527-1547.
- [62] Liu, C.S., 2006. A new trial equation method and its applications, *Communications in Theoretical Physics*, **45**, 395-397.
- [63] Sirendaoreji, S. and Jiong, S., 2002. A direct method for solving sinh-Gordon type equation, *Phys. Lett. A.*, **298**, 133–139.
- [64] Fu, Z., Liu, S., Shida, S. and Liu, Z., 2004. Exact solutions to double and triple sinh-Gordon equations, *Naturforsch.*, **59a**, 933–937.
- [65] Bulut, H., and Pandir, Y., 2013. Modified trial equation method to the non-linear fractional Sharma–Tasso–Olever equation, *International Journal of Modeling and Optimization*, **3(4)**, 353-357.
- [66] Tuluce, S., 2012. Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Analizi, *Doktora Semineri*, F.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [67] Bekir, A., 2005. Painleve Analysis, Exact Solutions and Symmetries of Nonlinear Equations, Ph. D. Thesis, Osmangazi University.
- [68] Balci, M., 1988. Analiz II, Balci Yayınları, Ankara, Türkiye
- [69] Daripa, P. and Rajan, K., D., 2002. Analytical and Numerical Studies of a singularly perturbed Boussinesq equation, *Applied Mathematics and Computation*, **126**, 1-30.
- [70] Liu, C.S., 2006. A new trial equation method and its applications, *Commun. Theor. Phys.*, **45**, 395-397.
- [71] Ebaid, A., 2009. Exact solutions for the generalized Klein-Gordon equation via a transformation and Exp-function method and comparison with Adomian’s method, *J. Comput. Appl. Math.* **223**, 278-290.
- [72] Chuntao, Y., 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, **224**, 77-84.
- [73] Liu, C.S., 2006. Trial equation method for nonlinear evolution equations with rank inhomogeneous: mathematical discussions and applications, *Commun. Theor. Phys.*, **45**, 219-223.

- [74] Lee, J. and Sakthivel, R., 2010. Travelling wave solutions for $(N + 1)$ -dimensional nonlinear evolution equations, *Pramana-J. Phys.* **75** (4), 565-578.
- [75] Kheiri, H. and Jabbari, A., 2010. Exact solutions for the double sinh-Gordon and generalized form of the double sinh-Gordon equations by using (G'/G) -expansion method, *Turk. J. Phys.* **34**, 73-82.
- [76] Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M. and Noori, S.R.M., 2012. Exact solutions of the generalized Benjamin equation and $(3+1)$ dimensional Gkp Equation by the extended Tanh method, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, **7** (1), 175–187.
- [77] Liu, J., Mua, G., Dai, Z. and Liu, X., 2011. Analytic multi-soliton solutions of the generalized Burgers equation, *Comput. Math. Appl.*, **61**, 1995-1999.
- [78] Abdullove, Kh., Bogalubsky, O. H. and Markhankov, V. G., 1976. One More Example of Inelastic Soliton Interaction, *Physics Letters A.*, **56**(6), 427-428.
- [79] Soliman, A. A. and Abdoa, H. A., 2009. New exact solutions of nonlinear variants of the RLW, the PHI-four and Boussinesq equations based on modified extended direct algebraic method, *Int. J. Nonl. Sci.*, **7**(3), 274-282.
- [80] Sirendaoreji, Jiong Sun., 2002. A direct method for solving sinh–Gordon type equation, *Phys. Lett. A.*, **298**, 133–139.
- [81] Fu, Z., Liu, S. and Liu, Shida., 2004. Exact solutions to double and triple sinh–Gordon equations, *Z. Naturforsch.*, **59**, 933–937.
- [82] Bulut, H., Tuz M. and Akturk T., 2013. New Multiple Solution to The Boussinesq Equation and The Burgers -Like Equation, *Journal of Applied Mathematics*, **2013**, 6 pages.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında İzmir’de doğdum. İlk ve orta eğitim-öğretimimi Amasya ve Lise eğitim-öğretimimi ise Konya’da tamamladım. 2003 yılında Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğinde lisans öğrenimime başladım ve 2007 yılında mezun oldum. Sonra 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladım ve 2011 yılında Yüksek lisansımı bitirdim. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora çalışmasına başladım.