

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ORLİCZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ ARALIK
SAYILARININ BAZI DİZİ UZAYLARI VE UYGULAMALAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayten EŞİ

(131121103)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Prof.Dr. M. Necdet ÇATALBAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20 Mayıs 2015

Mayıs-2015

**ORLİCZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ ARALIK
SAYILARININ BAZI DİZİ UZAYLARI VE UYGULAMALAR**

Ayten EŞİ

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof.Dr. M. Necdet ÇATALBAŞ

Mayıs-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ ARALIK
SAYILARININ BAZI DİZİ UZAYLARI VE UYGULAMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayten EŞİ

(131121103)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20 Mayıs 2015

Tezin Savunulduğu Tarih: 05 Haziran 2015

Tez Danışmanı: Prof.Dr. M. Necdet ÇATALBAŞ (Fırat Üni.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mustafa İNÇ (Fırat Üni.)
Doç.Dr. Mahmut IŞIK (Harran Üni.)

Mayıs-2015

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında bana destek olan, özgüvenimi arttıran, hayata bakış açımı genişleten değerli Hocam Prof. Dr. M. Necdet ÇATALBAŞ 'a ayrıca çalışmam boyunca her türlü desteği esirgemeyen Eşim Prof. Dr. Ayhan ESİ 'ye, değerli meslektaşlarım Doç. Dr. Yavuz ALTIN 'a ve Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e çok teşekkür ederim.

Ayten ESİ
Elazığ-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET.....	III
SUMMARY	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. METOT VE MATERYAL	2
2.1 Temel Tanım ve Kavramlar.....	2
2.2 Aralık Sayıları	4
2.3 Aralık Sayılarının Yakınsaklığı	5
2.4 Aralık Sayılarının Bazı Dizi Uzayları	6
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	10
4. UYGULAMALAR	17
KAYNAKLAR.....	20
ÖZGEÇMİŞ	22

ÖZET

Bu yüksek lisans tez çalışmasında Orlicz fonksiyonu yardımıyla aralık sayı dizilerinin bazı uzaylarını tanımladık ve bu dizi uzaylarının sağladığı bazı özelliklerini inceledik.

ANAHTAR KELİMELELER: Metrik, metrik uzay, tamlık, tam uzay, aralık sayısı, aralık dizi uzayı, Orlicz fonksiyonu.

SUMMARY

Some Sequence Spaces of Interval Numbers Defined by Orlicz Function and Applications

In this thesis, we introduce some new spaces of sequences of interval numbers using by Orlicz function and examine some properties of resulting sequence classes of interval numbers.

KEY WORDS: Metric, metric space, completeness, complete space, interval number, interval numbers spaces, Orlicz function.

SEMBOLLER LİSTESİ

- $\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi,
 IR : Aralık sayıları cümlesi,
 $\bar{\ell}_{\infty}$: Aralık değerli sınırlı diziler uzayı,
 $\bar{c}$: Aralık değerli yakınsak diziler uzayı,
 $\bar{c}_0$: Aralık değerli sıfıra yakınsak diziler uzayı,
 w^i : Tüm aralık sayı dizilerinin uzayı.

1. GİRİŞ

Aralık aritmetiği ilk olarak Dwyer [11] tarafından 1951 yılında önerildi ve 1959 ve 1962 yıllarında sırasıyla Moore ve Yang [13] aralık aritmetiğinin gelişimini biçimsel bir sistem olarak değerini hesaplamayı sağladılar. Daha sonra Chiao [10], 2002 yılında aralık sayı dizilerini oluşturdu ve aralık sayıları için alışılmış yakınsaklığı tanımladı. Son zamanlarda, sırasıyla Şengönül ve Eryılmaz [15] aralık sayılarının sınırlı ve yakınsak dizilerini tanımlayıp, bunların bir tam metrik uzay olduğunu ve Esi [1–5] ve Esi ve arkadaşları [6–8] nolu referanslarda aralık sayı dizilerinin çeşitli yakınsaklık tanımlarını ve bu dizi uzaylarının özelliklerini incelemişlerdir.

Aralık analizi nümerik analiz içinde yeni bir fikir değildir. Aralık aritmetiğinin ilk prensipleri 1950’lerin ortalarında birbirinden bağımsız fakat eş zamanlı olarak Amerika Birleşik Devletleri’nde Paul S. Dwyer (1951, [11]) ve Moore R. E. (1959, [23]), Polonya’da Mieczysław Warmus (1956, [20]) ve Japonya’da Teruo Sunaga (1958, [21]) tesis etmişlerdir. Aralık analizinin babası Moore R.E. olarak kabul edilmektedir. Çünkü herşeyden önce onun makaleleri makine hesaplamalarında büyük bir gelişme sağlamış ve hatta aralık metotları üzerindeki yayınları ve bunların uygulamaları bugüne kadar devam etmektedir. Aralık analizi 1950’lerden sonra nümerik analizde yüzen nokta (floating-point) aritmetiğinin hesaplamalarında bu konu ile ilgilenenler için önemli olmaya başlamıştır. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgi için www.ima.umn.edu/~arnold/disaster/disaster.html internet adresine başvurulabilir.

2. METOT VE MATERİYAL

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir cümle ve K cismi de $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini göstereyin.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$: K \times X \rightarrow X$$

$$(a, x) \rightarrow ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve her $a, b \in K$ için aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

1. $x + y = y + x$,
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. Her $x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır,
4. Her $x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır,
5. Her $x \in X$ için $1.x = x$,
6. $a(x + y) = ax + ay$,
7. $(a + b)x = ax + bx$,
8. $a(bx) = (ab)x$.

Bu durumda X cümlesine K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir reel vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.2. Boş olmayan bir X cümlesi ve bir

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa X cümlesi üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.3. X bir vektör uzayı Y , X 'in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Y , X vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluştuyorsa Y 'ye X 'in bir (lineer) alt uzayı denir.

Tanım 2.1.4. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \|x\|, \end{aligned}$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $a \in K$ için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(N2) \quad \|ax\| = |a| \cdot \|x\|,$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|x\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.5. Normlu uzay tanımında verilen üçgen eşitsizliği $K > 1$ olmak üzere $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ şeklinde tanımlanırsa bu norma Quasi-norm denir.

Tanım 2.1.6. Quasi-norm ile tanımlanmış bir vektör uzayına Quasi-vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.7. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir.

Tanım 2.1.8. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ fonksiyonuna X içinde bir dizi adı verilir ve $f(n) = (x_n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere her $n = 1, 2, \dots$ için $x_n \in K$ olan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ (veya kısaca $x = (x_n)$) şeklindeki bütün diziler kümesi w

olsun. Bu durumda aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayabiliriz [9]:

$$c_0 = \left\{ x = (x_n) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\},$$

$$c = \{ x = (x_n) \in w : (x_n) \text{ yakınsak} \}$$

ve

$$\ell_\infty = \{ x = (x_n) \in w : (x_n) \text{ sınırlı} \}.$$

2.2. Aralık Sayıları

Çalışmamız boyunca $a \leq x \leq b$ olacak şekildeki bütün x reel sayılarının oluşturduğu kapalı bir aralığa aralık sayısı diyeceğiz. Böylece reel bir aralık, bir cümle olarak göz önüne alınabilir. Aralık sayılarının cümlesini IR ile göstereceğiz. Çalışmamız boyunca IR nin elemanlarını temsilen $\bar{x}$ ($\bar{x} = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$) gösterimini kullanacağız. Şimdi x_t ve x_r ile $\bar{x}$ aralık sayısının sırasıyla başlangıç ve bitim noktalarını gösterelim. Aralık sayılarının cebirsel ve analiz özelliklerini inceleyebiliriz.

Tanım 2.2.1 (Aralık Sayılarının Eşitliği). Herhangi $\bar{x}_1 = [x_{1_t}, x_{1_r}] \in IR$ ve $\bar{x}_2 = [x_{2_t}, x_{2_r}] \in IR$ aralık sayıları için,

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Leftrightarrow x_{1_t} = x_{2_t}, x_{1_r} = x_{2_r}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.2 (Aralık Sayılarının Toplamı). Herhangi $\bar{x}_1 = [x_{1_t}, x_{1_r}] \in IR$ ve $\bar{x}_2 = [x_{2_t}, x_{2_r}] \in IR$ aralık sayıları için,

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \{x \in R : x_{1_t} + x_{2_t} \leq x \leq x_{1_r} + x_{2_r}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3 (Aralık Sayılarının Skalerle Çarpımı). Herhangi $\bar{x}_1 = [x_{1_t}, x_{1_r}] \in IR$ aralık sayısı ve $\alpha \in R$ için,

$$\alpha \geq 0 \text{ ise } \alpha \bar{x}_1 = \{x \in R : \alpha x_{1_t} \leq x \leq \alpha x_{1_r}\}$$

ve

$$\alpha < 0 \text{ ise } \alpha \bar{x}_1 = \{x \in R : \alpha x_{1_r} \leq x \leq \alpha x_{1_t}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.4 (Aralık Sayılarının Çarpımı). Herhangi $\bar{x}_1 = [x_{1_t}, x_{1_r}] \in IR$ ve $\bar{x}_2 = [x_{2_t}, x_{2_r}] \in IR$ aralık sayıları için,

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 &= \{x \in R : \min\{x_{1_t} \cdot x_{2_t}, x_{1_t} \cdot x_{2_r}, x_{1_r} \cdot x_{2_t}, x_{1_r} \cdot x_{2_r}\} \leq x \\ &\leq \max\{x_{1_t} \cdot x_{2_t}, x_{1_t} \cdot x_{2_r}, x_{1_r} \cdot x_{2_t}, x_{1_r} \cdot x_{2_r}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi IR üzerinde $\bar{d} : IR \times IR \rightarrow R^+$ fonksiyonunu

$$\bar{d}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max\{|x_{1_t} - x_{2_t}|, |x_{1_r} - x_{2_r}|\}$$

şeklinde tanımlayalım. $\bar{d}$ fonksiyonu ile birlikte $(IR, \bar{d})$ ikilisi bir tam metrik uzaydır [11]. Özel olarak, $\bar{x}_1 = [a, a]$ ve $\bar{x}_2 = [b, b]$ seçilirse R 'nin mutlak değer metriği

$$\bar{d}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = |a - b|$$

elde edilir.

2.3. Aralık Sayılarının Yakınsaklığı

Tanım 2.3.1. Her $\varepsilon > 0$ ve her $k \geq k_0$ için $\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_0 pozitif tamsayısı var ise $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisine $\bar{x}_0$ aralık sayısına yakınsıyor denir ve sembolik olarak $\lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0$ şeklinde gösterilir. Bu limitin varlığı

$$\lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_k x_{k_t} = x_{0_t}, \quad \lim_k x_{k_r} = x_{0_r}$$

limitlerinin varlığı anlamındadır.

Çalışmamız boyunca w^i ile reel terimli bütün aralık sayı dizilerinin cümlesini göstereceğiz. w^i dizi uzayı bir quasi-vektör uzayıdır [14] ve aşağıdaki şartları sağlar :

1. $(\bar{x}_k) + (\bar{y}_k) = (\bar{y}_k) + (\bar{x}_k),$
2. $(\bar{x}_k) + ((\bar{y}_k) + (\bar{z}_k)) = ((\bar{x}_k) + (\bar{y}_k)) + (\bar{z}_k),$
3. $(\bar{x}_k) + (\bar{y}_k) = (\bar{x}_k) + (\bar{z}_k) \text{ ise } (\bar{y}_k) = (\bar{z}_k),$
4. $\alpha((\bar{x}_k) + (\bar{y}_k)) = \alpha(\bar{x}_k) + \alpha(\bar{y}_k),$
5. $(\alpha + \beta)(\bar{x}_k) = \alpha(\bar{x}_k) + \beta(\bar{x}_k),$
6. $\alpha(\beta(\bar{x}_k)) = (\alpha\beta)(\bar{x}_k) (\alpha\beta \geq 0),$
7. $(\bar{x}_k) = [1, 1](\bar{x}_k)$

w^i nin sıfır elemanı $\theta = [0, 0] = \bar{0}$ şeklindedir.

Tanım 2.3.2. $E \subset w^i$ olmak üzere $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in E$ ve $d(\bar{y}_k, \bar{0}) < d(\bar{x}_k, \bar{0})$ eşitsizliği sağlandığında $\bar{y} = (\bar{y}_k) \in E$ oluyorsa E aralık değerli dizi uzayına *solid (normal)* denir.

2.4. Aralık Sayılarının Bazı Dizi Uzayları

Bu bölümde aralık sayılarının sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarını tanımlayacağız.

$\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{\ell}_\infty$ aralık dizi uzayları sırasıyla sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı aralık sayı dizilerinin uzaylarıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanırlar:

$$\begin{aligned}\bar{c}_0 &= \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \lim_k \bar{x}_k = \theta, \theta = [0, 0] \right\}, \\ \bar{c} &= \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R} \right\}, \\ \bar{\ell}_\infty &= \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \sup_k \{|x_{k_t}|, |x_{k_r}|\} < \infty \right\}.\end{aligned}$$

$\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{\ell}_\infty$ uzayları w^i uzayının alt uzaylarıdır.

Ayrıca her $(\bar{x}_k), (\bar{y}_k) \in \bar{c}_0$ (ya da $\bar{c}, \bar{\ell}_\infty$) için

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = \sup_k \max\{|x_{k_t} - y_{k_t}|, |x_{k_r} - y_{k_r}|\} \quad (2.1)$$

olarak tanımlanan $\bar{d}$, metrik aksiyomlarını sağlar [15]. Böylece $(\bar{c}_0, \bar{d})$ (veya $(\bar{c}, \bar{d})$, $(\bar{\ell}_\infty, \bar{d})$) bir metrik uzaydır.

Tanım 2.4.1. $\bar{y} \in w^i$, $\bar{y} = ([y_{k_t}, y_{k_r}])$ olduğunu varsayalım. Eğer $y_{k_t} = y_{k_r}$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $\bar{y} = (\bar{y}_k)$ dizisine *dejenere aralık dizisi* denir.

$\bar{x} = (\bar{x}_k)$ ve $\bar{y} = (\bar{y}_k)$ dejenere aralık dizisi ise (2.1) de verdiğimiz metrik bildiğimiz reel veya kompleks sayıların sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarındaki

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = \sup |x_{k_t} - y_{k_t}|$$

metriğine indirgenir.

Kolaylıkla görebiliriz ki bütün reel değerli dizilerin w uzayı w^i uzayının dejenere olmuş şeklindedir. Çünkü her reel sayı bir dejenere aralıktır. Böylece w nin her bir alt

uzayına bir dejenere dizi uzayı denir. ℓ_∞ , c , c_0 dizi uzayları için sırasıyla bütün dejenere sınırlı, dejenere yakınsak ve dejenere sıfıra yakınsak dizi uzayları diyebiliriz.

Tanım 2.4.2. $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i$, $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq k_0$ için $\bar{d}(\bar{x}_n, \bar{x}_m) < \varepsilon$ olacak şekilde mevcut ise $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık dizisine aralık Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.4.1. $(\bar{c}_0, \bar{d})$, $(\bar{c}, \bar{d})$, $(\bar{\ell}_\infty, \bar{d})$, (2.1) de tanımlanan metrik ile birer tam metrik uzaydır.

İspat. Biz sadece $(\bar{c}_0, \bar{d})$ nin tam metrik uzay olduğunu gösterelim. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(\bar{x}^n) = (\bar{x}_k^n) = (\bar{x}_0^n, \bar{x}_1^n, \bar{x}_2^n, \dots) \in \bar{c}_0$ ve $(\bar{x}^n)$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısını $n, m \geq k_0$ için $\bar{d}(\bar{x}_k^n, \bar{x}_k^m) < \varepsilon$ olacak şekilde bulabiliriz. Buradan

$$\bar{d}(\bar{x}_k^n, \bar{x}_k^m) = \sup_{n,m} \max\{|x_{k_t}^n - x_{k_t}^m|, |x_{k_r}^n - x_{k_r}^m|\} < \varepsilon$$

ve

$$|x_{k_t}^n - x_{k_t}^m| < \varepsilon, \quad |x_{k_r}^n - x_{k_r}^m| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $(\bar{x}_k^n)$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ de bir Banach uzayı olduğu için $(\bar{x}_k^n)$ yakınsaktır. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_k^n = \bar{x}_k$ diyelim. Böylece her $n, m \geq k_0$ için $\bar{d}(\bar{x}_k^n, \bar{x}_k^m) < \varepsilon$ olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{d}(\bar{x}_k^n, \bar{x}_k^m) = \bar{d}(\bar{x}_k^n, \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}_k^m) = \bar{d}(\bar{x}_k^n, \bar{x}_k) < \varepsilon.$$

Böylece $n \rightarrow \infty$ için $\bar{x}^n \rightarrow \bar{x}$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_k^n - \bar{x}_k^n) &= \sup_k \max\{|x_{k_t} - (x_{k_t}^n - x_{k_t}^n)|, |x_{k_r} - (x_{k_r}^n - x_{k_r}^n)|\} \\ &\leq \sup_k \max\{|x_{k_t} - x_{k_t}^n| + |x_{k_t}^n - x_{k_t}^n|, |x_{k_r} - x_{k_r}^n| + |x_{k_r}^n - x_{k_r}^n|\} \\ &\leq \sup_k \max\{|x_{k_t} - x_{k_t}^n|, |x_{k_r} - x_{k_r}^n|\} + \sup_k \max\{|x_{k_t}^n - x_{k_t}^n|, |x_{k_r}^n - x_{k_r}^n|\} \end{aligned}$$

olduğundan $\bar{x} \in \bar{c}_0$ dir. □

Klasik dizi uzayları üzerindeki norm fonksiyonu, aralık sayılarının dizi uzaylarına genişletilebilir. λ^i nin w^i nin bir alt cümlesi olduğunu kabul edelim ve aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.4.3. λ^i üzerindeki negatif olmayan $\|\cdot\|_{\lambda^i} : \lambda^i \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ normu aşağıdaki özellikleri sağlar.

Her $\bar{x}, \bar{y} \in \lambda^i$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \lambda^i \setminus \{\theta\}$ için

N1) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} > 0$,

N2) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\bar{x} = \theta = [0, 0]$,

N3) $\|\bar{x} + \bar{y}\|_{\lambda^i} \leq \|\bar{x}\|_{\lambda^i} + \|\bar{y}\|_{\lambda^i}$,

N4) $\|\alpha \bar{x}\|_{\lambda^i} = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|_{\lambda^i}$.

Kolaylıkla gösterilebilir ki $(\bar{c}_0, \bar{d})$, $(\bar{c}, \bar{d})$ ve $(\bar{\ell}_\infty, \bar{d})$ uzayları da birer normlu uzay haline getirilebilir. Burada

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \theta) = \sup_k \max\{|x_{k_t} - \theta_{k_t}|, |x_{k_r} - \theta_{k_r}|\} = \sup_k \max\{|x_{k_t}|, |x_{k_r}|\},$$

$\theta = [0, 0]$ elemanı; $\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{\ell}_\infty$ uzaylarının birim elemanıdır.

Teorem 2.4.2. $\bar{c}_0$, $\bar{c}$ ve $\bar{\ell}_\infty$ uzayları

$$\|\bar{x}\| = \sup_k \max\{|x_{k_t}|, |x_{k_r}|\}$$

normuyla normlu aralık uzaylarıdır.

İspat. $\lambda^i = \bar{c}_0$ ($\bar{c}$ veya $\bar{\ell}_\infty$) ve $\bar{x}, \bar{y} \in \lambda^i$ olsun.

N1) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} = \sup_k \max\{|x_{k_t}|, |x_{k_r}|\}$ olduğu için her $\bar{x} \in \lambda^i \setminus \{0\}$ için $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} > 0$ olduğu kolayca görülür.

N2) $\|\bar{x}\|_{\lambda^i} = 0 \Leftrightarrow \sup_k \max\{|x_{k_t}|, |x_{k_r}|\} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \theta$.

N3)

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|_{\lambda^i} &= \sup_k \max\{|x_{k_t} + y_{k_t}|, |x_{k_r} + y_{k_r}|\} \\ &\leq \sup_k \max\{|x_{k_t}| + |y_{k_t}|, |x_{k_r}| + |y_{k_r}|\} \\ &= \sup_k \max\{(|x_{k_t}|, |x_{k_r}|) + (|y_{k_t}|, |y_{k_r}|)\} \\ &\leq \sup_k \max\{(|x_{k_t}|, |x_{k_r}|)\} + \sup_k \max\{(|y_{k_t}|, |y_{k_r}|)\} \\ &= \|\bar{x}\|_{\lambda^i} + \|\bar{y}\|_{\lambda^i}. \end{aligned}$$

N4)

$$\begin{aligned}
\|\alpha \bar{x}\|_{\lambda^i} &= \sup_k \max\{|\alpha x_{k_t}|, |\alpha x_{k_r}|\} \\
&= |\alpha| \cdot \sup_k \max\{|x_{k_t}|, |x_{k_r}|\} \\
&= |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|_{\lambda^i}.
\end{aligned}$$

Bu durumda $\|\bar{x}\|_{\lambda^i}$, λ^i üzerinde bir normdur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Tanım 2.4.4. $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun. Eğer M fonksiyonu sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlıyorsa Orlicz fonksiyonu adı verilir.

Bir M Orlicz fonksiyonuna, eğer $M(2x) \leq BM(x)$ ($x \geq 0$) olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı karşılık geliyorsa, x 'in bütün değerleri için Δ_2 -şartını sağlıyor denir. Birçok yazar tarafından Orlicz fonksiyonu yardımıyla dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların sağladığı özellikler incelenmiştir, ayrıntılı bilgi için [16–18] nolu referanslara başvurulabilir.

Lemma 2.4.1. Her k için $p_k > 0$ ve $H = \sup_k p_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C [|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}]$$

$C = \max(1, 2^{H-1})$ dir.

Lemma 2.4.2. $a_k, b_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

1. $0 < p_k \leq 1$ ise

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{p_k} \leq \sum_{k=1}^n a_k^{p_k} + \sum_{k=1}^n b_k^{p_k}$$

2. $p_k \geq 1$ ise

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{p_k} \right\}^{1/p_k} \leq \left\{ \sum_{k=1}^n a_k^{p_k} \right\}^{1/p_k} + \left\{ \sum_{k=1}^n b_k^{p_k} \right\}^{1/p_k}$$

eşitsizlikleri mevcuttur [9].

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

M bir Orlicz fonksiyonu, $s \geq 0$ bir reel sayı ve $p = (p_k)$ pozitif sayıların $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ şartını sağlayan bir dizisi olmak üzere,

$$\bar{c}_0(M, p, s) = \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} = 0, s \geq 0, r > 0 \right\},$$

$$\bar{c}(M, p, s) = \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ \left. s \geq 0, r > 0, \text{ bazı } \bar{x}_0 \in w^i \text{ için} \right\},$$

$$\bar{\ell}_\infty(M, p, s) = \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} < \infty, s \geq 0, r > 0 \right\},$$

ve

$$\bar{\ell}(M, p, s) = \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \sum_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} < \infty, s \geq 0, r > 0 \right\}$$

dizi uzaylarını tanımlayalım.

Teorem 3.0.3. $\bar{\ell}_\infty(M, p, s)$, $\bar{c}(M, p, s)$, $\bar{c}_0(M, p, s)$ ve $\bar{\ell}(M, p, s)$ cümleleri koordinatsal toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

İspat. Biz ispatı sadece $\bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ cümlesi için yapacağız. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir.

$$+ : \bar{\ell}_\infty(M, p, s) \times \bar{\ell}_\infty(M, p, s) \rightarrow \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$$

$$\bullet : \mathbb{R} \times \bar{\ell}_\infty(M, p, s) \rightarrow \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$$

işlemlerini tanımlayalım.

$\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ alalım. Böylece

$$\sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} < \infty,$$

$$\sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

yazabiliriz. Şimdi

$$\bar{d}(\bar{x}_k + \bar{y}_k, \bar{0}) \leq \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) + \bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0})$$

ve M Orlicz fonksiyonunun artanlığını kullanarak

$$\begin{aligned} M(\bar{d}(\bar{x}_k + \bar{y}_k, \bar{0})) &\leq M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) + \bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0})) \\ &\leq M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})) + M(\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0})) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $p = (p_k)$ pozitif terimli dizisi için $0 \leq h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ ve $C = \max(1, 2^{H-1})$ olduğundan Lemma 2.4.1 gereğince

$$\begin{aligned} [M(\bar{d}(\bar{x}_k + \bar{y}_k, \bar{0}))]^{p_k} &\leq [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})) + M(\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0}))]^{p_k} \\ &\leq C[M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} + C[M(\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0}))]^{p_k} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (k^{-s}) sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned} \sup_k k^{-s} [M(\bar{d}(\bar{x}_k + \bar{y}_k, \bar{0}))]^{p_k} &\leq \\ \sup_k k^{-s} C[M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} + \sup_k k^{-s} C[M(\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0}))]^{p_k} &< \infty \end{aligned}$$

Böylece $\bar{x} + \bar{y} \in \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ olur. Şimdi de $\bar{x} \in \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ alalım. O halde $\sup_k k^{-s} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} < \infty$ yazabiliriz. $\bar{d}(\alpha \bar{x}_k, \bar{0}) = |\alpha| \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})$ ve M Orlicz fonksiyonu olduğundan

$$M(\bar{d}(\alpha \bar{x}_k, \bar{0})) = M(|\alpha| \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})) \leq |\alpha| M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))$$

ve $p = (p_k)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olduğundan

$$[M(\bar{d}(\alpha \bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} \leq |\alpha|^{p_k} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k}$$

elde edilir. Ayrıca (k^{-s}) dizisi sınırlı olduğundan

$$\sup_k k^{-s} [M(\bar{d}(\alpha \bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} \leq \sup_k k^{-s} |\alpha|^{p_k} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} < \infty$$

elde edilir. Böylece $\alpha \bar{x} \in \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ olur. □

Teorem 3.0.4. $\bar{c}_0(M, p, s)$, $\bar{c}(M, p, s)$, $\bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ dizi uzayları

$$\bar{d}_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = \inf \left\{ r^{\frac{p_k}{T}} : \sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{r} \right) \right]^{p_k} \leq 1 \right\}$$

metriğine ve $\bar{\ell}(M, p, s)$ dizi uzayı da

$$\bar{d}_p(\bar{x}, \bar{y}) = \inf \left\{ r^{\frac{p_k}{T}} : \sum_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{r} \right) \right]^{p_k} \leq 1 \right\}$$

metriğine göre tam metrik uzaylardır. Burada $T = \max(1, \sup_k p_k = H < \infty)$ ile verilmektedir.

İspat. Biz sadece $\bar{c}_0(M, p, s)$ uzayı için ispatı vereceğiz. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir. Öncelikle $\bar{c}_0(M, p, s)$ cümlesinin verilen $\bar{d}_\infty(\bar{x}, \bar{y})$ metriği ile metrik uzay olduğunu göstermek kolaydır.

$\bar{c}_0(M, p, s)$ nin tamlığını gösterebilmek için $\bar{c}_0(M, p, s)$ uzayında $(\bar{x}_k^i) = (\bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i, \dots)$ olmak üzere herhangi bir Cauchy dizisi alalım. Bu taktirde $i, j \rightarrow \infty$ için $\bar{d}_\infty(\bar{x}^i, \bar{x}^j) \rightarrow 0$ yazabiliriz. O halde verilen $\varepsilon > 0$ için $r > 0$ ve $x_0 > 0$ sayılarını $\frac{\varepsilon}{rx_0} > 0$ ve $M(\frac{rx_0}{2}) \geq 1$ olacak şekilde seçelim. Böylece $i, j \geq n_0$ olduğunda $\bar{d}_\infty(\bar{x}^i, \bar{x}^j) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$ olacak şekilde n_0 tamsayısını bulabiliriz. Buradan

$$\inf \{ r^{\frac{p_k}{T}} : \sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k^i, \bar{x}_k^j)}{r} \right) \right]^{p_k} \leq 1 \} < \frac{\varepsilon}{rx_0}$$

elde edilir. Şimdi, $M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k^i, \bar{x}_k^j)}{r} \right) \leq M(\frac{rx_0}{2})$ olduğundan, bu ifadede

$$\frac{\bar{d}(\bar{x}_k^i, \bar{x}_k^j)}{\bar{d}_\infty(\bar{x}^i, \bar{x}^j)} \leq \frac{rx_0}{2}$$

yazabiliriz. Böylece $\bar{d}(\bar{x}_k^i, \bar{x}_k^j) < \frac{rx_0}{2} \frac{\varepsilon}{rx_0} = \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Bu ise $(\bar{x}_k^i)$ dizisinin her sabit k için $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ uzayı $\bar{d}$ metriğine göre tam olduğundan $i \rightarrow \infty$ için $\bar{x}_k^i \rightarrow \bar{x}_k$ diyelim. Bu şekilde tanımlanan sonsuz tane limit yardımıyla $\bar{x} = (\bar{x}_k) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots)$ dizisini tanımlayalım. Böylece

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k^i, \bar{x}_k^j)}{r} \right) \right] \leq 1,$$

yani

$$\sup_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k^i, \bar{x}_k)}{r} \right) \right] \leq 1$$

elde edilir. Şimdi $i \geq n_0$ seçelim ve r 'ler üzerinden infimum alarak,

$$\bar{d}_\infty(\bar{x}^i, \bar{x}) < \varepsilon$$

elde ederiz. Böylece $\bar{d}_\infty$ metriği için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\bar{d}_\infty(\bar{x}, \bar{0}) \leq \bar{d}_\infty(\bar{x}, \bar{x}^i) + \bar{d}_\infty(\bar{x}^i, \bar{0})$$

ifadesi $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}_0(M, p, s)$ olduğunu gösterir. $(\bar{x}_k^{(i)})$ keyfi bir Cauchy dizisi olduğundan $\bar{c}_0(M, p, s)$ bir tam uzaydır. $\square$

Teorem 3.0.5. a) $\inf_k p_k = h > 0$ olsun. Eğer $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}$ ise $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s)$ dir.

b) Eğer $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(p, s)$ ise $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s)$ dir. Burada

$$\bar{c}(p, s) = \left\{ \bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i : \lim_k k^{-s} [\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)]^{p_k} = 0, s \geq 0, \text{ bazı } \bar{x}_0 \in w^i \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. a) Kabul edelim ki $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}$ dir. Bu taktirde $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) = 0$ olacak şekilde $\bar{x}_0 \in \bar{c}$ vardır. M Orlicz fonksiyonu olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))] = M(0) = 0$ yazabiliriz. $\inf_k p_k = h > 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^h = 0$ olduğundan $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ sayısını her $k > k_0$ için bu son eşitlikten

$$[M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^h < \varepsilon < 1 \text{ ve } p_k \geq h$$

olduğundan bütün k lar için

$$[M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} \leq [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^h < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} = 0$$

bulunur. Ayrıca (k^{-s}) dizisi sınırlı olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-s} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Bu da $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s)$ olması demektir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

b) $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(p, s)$ olsun. Bu taktirde $k \rightarrow \infty$ için $a_k = k^{-s} [\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)]^{p_k} \rightarrow 0$ yazabiliriz. $\varepsilon > 0$ verilsin. M Orlicz fonksiyonu 0 noktasında sürekli olduğundan $0 < \delta < 1$ sayısını $0 \leq t \leq \delta$ için $M(t) < \varepsilon$ olacak şekilde seçebiliriz.

Şimdi

$$I_1 = \{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) \leq \delta\}$$

$$I_2 = \{k \in \mathbb{N} : \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) > \delta\}$$

cümlelerini oluşturalım. $k \in I_2$ ve $\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) > \delta$ için

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) < \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) \cdot \delta^{-1} < 1 + \llbracket \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) \cdot \delta^{-1} \rrbracket$$

yazabiliriz. Burada $\llbracket \cdot \rrbracket$ tamdeğeri göstermektedir. Şimdi Orlicz fonksiyonunun özelliklerini kullanarak, $\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) > \delta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)) &\leq (1 + \llbracket \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) \cdot \delta^{-1} \rrbracket) M(1) \\ &\leq 2M(1) \cdot \delta^{-1} \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) \end{aligned}$$

ve $k \in I_1$ için $\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) \leq \delta$ olduğundan $M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)) < \varepsilon$ yazabiliriz. Böylece

$$k^{-s} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} = k^{-s} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]_{I_1}^{p_k} + k^{-s} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]_{I_2}^{p_k}$$

yazarak

$$k^{-s} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} < k^{-s} \varepsilon^H + [2M(1)\delta^{-1}]^H \cdot a_k$$

elde edilir. Böylece $k \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s)$ elde edilir. Böylece istenen elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 3.0.6. M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları ve $s, s_1, s_2 \geq 0$ olacak şekilde reel sayılar olsunlar. Bu taktirde

$$\text{a)} \quad \bar{c}(M_1, p, s) \cap \bar{c}(M_2, p, s) \subset \bar{c}(M_1 + M_2, p, s)$$

$$\text{b)} \quad \text{Eğer } s_1 \leq s_2 \text{ ise } \bar{c}(M, p, s_1) \subset \bar{c}(M, p, s_2) \text{ dir.}$$

İspat. **a)** $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M_1, p, s) \cap \bar{c}(M_2, p, s)$ olsun. Bu taktirde $C = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere Lemma 2.4.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} [(M_1 + M_2)(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} &= [M_1(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)) + M_2(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} \\ &\leq C[M_1(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} + C[M_2(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. (k^{-s}) sınırlı olduğundan

$$k^{-s} [(M_1 + M_2)(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} \leq Ck^{-s} [M_1(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} + Ck^{-s} [M_2(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k}$$

olur. $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M_1, p, s) \cap \bar{c}(M_2, p, s)$ olduğundan kolayca $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M_1 + M_2, p, s)$ elde edilir.

b) Eğer $s_1 \leq s_2$ olacak şekildeki reel sayılar ise $k^{-s_2} \leq k^{-s_1}$ yazabiliriz. Böylece $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s_1)$ ise $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s_2)$ olacağı

$$k^{-s_2} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k} \leq k^{-s_1} [M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0))]^{p_k}$$

eşitsizliğinden açıktır. □

Teorem 3.0.7. *M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde*

a) *Eğer $0 < \inf_k p_k = h \leq p_k \leq 1$ ise $\bar{c}(M, p, s) \subset \bar{c}(M, s)$,*

b) *Eğer $1 \leq p_k \leq \sup_k p_k$ ise $\bar{c}(M, s) \subset \bar{c}(M, p, s)$,*

c) *$\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ olsun. Bu taktirde $\bar{c}(M, p, s) \subset \bar{c}(M, q, s)$*

bağıntıları sağlanır.

İspat. **a)** Bu kısmın ispatı

$$k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right] \leq k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{p_k}$$

eşitsizliğinden açıktır.

b) Bu kısmın ispatı ise

$$k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{p_k} \leq k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]$$

eşitsizliğinden açıktır.

c) Herhangi bir $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s)$ alalım. Bu taktirde

$$\lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{p_k} = 0$$

yazabiliriz, k 'nın yeterince büyük değerleri için bu limit yardımıyla

$$k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{p_k} \leq 1$$

yazabiliriz. M Orlicz fonksiyonu azalmayan olduğundan bu ifadede

$$\lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{q_k} \leq \lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{p_k} = 0$$

yazabiliriz ki bu da $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, q, s)$ olduğunu gösterir. □

Teorem 3.0.8. M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde

a) $\bar{\ell}_\infty \subset \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$,

b) Eğer M sınırlı ise böylece $\bar{\ell}_\infty(M, p, s) = w^i$ dir.

İspat. a) $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{\ell}_\infty$ olsun. Bu takdirde $\sup_k \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) < \infty$ olduğundan $\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) \leq G$ olacak şekilde $G \geq 0$ sayısı bulunabilir. M Orlicz fonksiyonu olduğundan $(M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})))$ dizisi de sınırlıdır. O halde

$$\begin{aligned} k^{-s}[M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} &\leq k^{-s}[M(G)]^{p_k} \\ &\leq k^{-s}[M(G)]^H < \infty \end{aligned}$$

olur. Yani $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ dir.

b) M Orlicz fonksiyonu sınırlı olsun. Bu takdirde $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in w^i$ için M Orlicz fonksiyonunun sınırlılığını kullanarak

$$k^{-s}[M(\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}))]^{p_k} \leq k^{-s}L^{p_k} \leq k^{-s}L^H < \infty$$

yazabiliriz. Buradan $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ olur. Böylece $\bar{\ell}_\infty(M, p, s) = w^i$ elde edilir. □

Teorem 3.0.9. $\bar{\ell}_\infty(p)$, $\bar{c}_0(p)$, $\bar{\ell}(p)$ uzayları solid uzaylardır.

İspat. Herhangi bir $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisi $\bar{\ell}_\infty(p)$, $\bar{c}_0(p)$, $\bar{\ell}(p)$ uzaylarından herhangi birine ait olmak üzere $\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0}) \leq \bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})$ sağlansın. O halde

$$\begin{aligned} \sup_k [\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0})]^{p_k} &\leq \sup_k [\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})]^{p_k} < \infty \\ \lim_k [\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0})]^{p_k} &\leq \lim_k [\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})]^{p_k} = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\sum_k [\bar{d}(\bar{y}_k, \bar{0})]^{p_k} \leq \sum_k [\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki bu da $y = (\bar{y}_k)$ dizisinin bu uzaylara ait bir eleman olacağını gösterir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.0.10. $\bar{\ell}_\infty(M, p, s)$, $\bar{c}_0(M, p, s)$, $\bar{\ell}(M, p, s)$ uzayları solid uzaylardır.

İspat. Teorem 3.0.9 ve Orlicz fonksiyonunun artanlığı kullanılarak ispat kolayca verilebilir. □

4. UYGULAMALAR

Aralık analizi nümerik analizde sayıların yerine reel sayıların kapalı aralıklarının hesaplamada kullanıldığı dallarından biridir. Aralık analizi kesinlikle doğru olan hesaplama sonuçlarını elde etmek için kullanılır. Sıradan bir hesaplamanın sonucu reel eksen üzerinde doğru cevaptan bilinmeyen uzaklıkta bulunan bir noktadır, ve sorumuz bu uzaklık ne kadardır? Çoğu durumda verilen cevap “çok küçük” şeklindedir. Fakat bu küçüklüğün ne kadar olduğu açık değildir. Bazı durumlarda bu uzaklığın değerinin bilinmesi çok önemlidir. Bu amaçla hesaplama hatalarının değerlendirilmesi gereklidir. Bir aralık hesabının sonucu olan bir aralık, bir sayı çifti ile oluşturulan bir alt ve bir üst sınır olarak cevabı tam olarak garanti altına alır. Ancak yine de gerçeği tam olarak bilemeyebiliriz, fakat en azından ne kadarını bilmediğimizi bilme şansına sahibiz [22]. Aralık analizi bize hesaplanan sonucun doğru olduğunu nasıl garanti edebilir? Cevabı çok basittir, çünkü aralık analizini kullanarak hataların birçok çeşidini her adımda tahmin edebiliriz. Örneğin veri girişi hataları, yuvarlama hataları ve kesme hataları gibi.

Aşağıda vereceğimiz örnekle aralık analizini kullanarak nümerik hesaplamalarda hatanın nasıl hesaplanabileceğini gösterelim. Hemen belirtelim ki bu örnek yuvarlama hatasının etkisini göstermektedir.

$x = -0.531$ için,

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

ifadesini hesaplayalım.

$$y = 1 - 0.531 + \frac{(-0.531)^2}{2} = 0.6099805$$

ifadesini üç ondalıklı olarak yuvarlama yaparak $y = 0.610$ elde ederiz. Şimdi hatanın büyüklüğünü görelim, bu hata $0.610 - 0.6099805 = 0.0000195$ elde edilir.

Şimdi aynı hesabı aynı makinede üç ondalığa kadar aralık kullanarak yeniden yapalım. Her şeyden önce

$$x^2 = (-0.531)^2 = 0.281961 \in [0.281, 0.282]$$

olduğunu gözlemleyelim ve bu aralığı hesaplama süresince kullanalım. O halde

$$y = 1 - 0.531 + \frac{(-0.531)^2}{2} \in 0.469 + \frac{1}{2} [0.281, 0.282] \\ \subset 0.469 + [0.140, 0.141] = [0.609, 0.610]$$

elde edilir. Dikkat edilirse y 'nin doğru değeri kesinlikle $[0.609, 0.610]$ aralığına aittir.

Reel sayılar cümlesinde bütün kapalı aralıkların oluşturduğu cümle reel bir vektör uzayı değildir. Bunun ana sebebi de her bir aralığın toplamsal tersinin bulunamayacak olmasındandır. Fonksiyonel analizin temel konularından birinin vektör uzayları olduğu iyi bilinmektedir. Bundan dolayıdır ki çeşitli araştırmacılar fonksiyonel analizde aralık uzayları üzerinde bir teori geliştirmeye çalışmışlardır. Bunun öncü çalışması da fonksiyonel analizdeki geleneksel Hahn-Banach Genişleme Teoremi'nin Non-lineer Analiz, Vektör Optimizasyonu ve Matematiksel Ekonomi alanlarında çok kullanışlı olmasından dolayı aralık uzayları üzerinde Hahn-Banach Genişleme Teoremi'ni oluşturmaktır. İlk olarak aralık uzayları ve standart olmayan normlu aralık uzayları oluşturuldu. Aralık normlu uzaylar diğer uzaylara göre kıyaslandığında az bilinirler. Fakat son zamanlarda birçok yazar bu uzayları çalışmışlardır. Örnek olarak 2010 yılında Wu [19] tarafından yayınlanan makalede standart olmayan normlu aralık uzaylarında Hahn-Banach Teoremi adlı çalışmaya bakılabilir.

Şimdi tez çalışmamızda ele aldığımız aralık dizi uzaylarına ait bazı örnekler verelim:

Örnek 4.0.1. $M(x) = x$, $s = 1$ ve her k için $p_k = 1$ olmak üzere $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisini $\bar{x}_k = [1, 1 + \frac{1}{k}]$ olacak şekilde tanımlayalım. O halde

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) = \max \left\{ |1 - 0|, \left| 1 + \frac{1}{k} - 0 \right| \right\} = 1 + \frac{1}{k}$$

olur ve

$$\sup k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} = \sup k^{-s} \left(1 + \frac{1}{k} \right) < \infty$$

elde edilir. Böylece $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{\ell}_\infty(M, p, s)$ bulunur.

Örnek 4.0.2. $M(x) = x$, $s \geq 0$ ve her k için $p_k = 1$ olmak üzere $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisini $\bar{x}_k = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu taktirde

$$\lim_k \bar{x}_k = \lim_k \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right] = \bar{0} = [0, 0],$$

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) = \max \left\{ \left| -\frac{1}{k} - 0 \right|, \left| \frac{1}{k} - 0 \right| \right\} = \frac{1}{k}$$

olup,

$$\lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} = \lim_k k^{-s} k^{-1} = \lim_k \frac{1}{k^{s+1}} = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}_0(M, p, s)$ bulunur.

Örnek 4.0.3. $M(x) = x$, $s \geq 0$, her k için $p_k = 1$ olmak üzere $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisini $\bar{x}_k = [1, 2 + \frac{1}{k+1}]$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu takdirde

$$\lim_k \bar{x}_k = \lim_k \left[1, 2 + \frac{1}{k+1} \right] = \bar{x}_0 = [1, 2],$$

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0) = \max \left\{ |1 - 1|, \left| 2 + \frac{1}{k+1} - 2 \right| \right\} = \frac{1}{k+1}$$

olur, buradan

$$\lim_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{x}_0)}{r} \right) \right]^{p_k} = \lim_k k^{-s} \left(\frac{1}{k+1} \right) = \lim_k \frac{1}{k^s} \left(\frac{1}{k+1} \right) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{c}(M, p, s)$ dir, fakat dikkat edilirse $\bar{x} = (\bar{x}_k) \notin \bar{c}_0(M, p, s)$

olup, $\bar{c}_0(M, p, s) \subset \bar{c}(M, p, s)$ kapsamasının kesin olduğu açıktır.

Örnek 4.0.4. $M(x) = x$, $s = 2$ ve her k için $p_k = 2$ olmak üzere $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ aralık sayı dizisini $\bar{x}_k = [-\frac{1}{k^2}, 0]$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu takdirde

$$\lim_k \bar{x}_k = \lim_k \left[-\frac{1}{k^2}, 0 \right] = \bar{0} = [0, 0],$$

$$\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0}) = \max \left\{ \left| -\frac{1}{k^2} - 0 \right|, |0 - 0| \right\} = \frac{1}{k^2}$$

olur. O halde

$$\sum_k k^{-s} \left[M \left(\frac{\bar{d}(\bar{x}_k, \bar{0})}{r} \right) \right]^{p_k} = \sum_k k^{-2} (k^{-2})^2 = \sum_k k^{-6} < \infty$$

yani,

$$\bar{x} = (\bar{x}_k) \in \bar{\ell}(M, p, s)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Esi, A.**, 2012. *New class of interval numbers*, Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science, 98-102.
- [2] **Esi, A.**, 2012. *Lacunary sequence spaces of interval numbers*, Thai Journal of Mathematics, 10(2), 445-451.
- [3] **Esi, A.**, 2012. *Double lacunary sequence spaces of double sequence of interval numbers*, Proyecciones Journal of Mathematics, 31(1), 297-306.
- [4] **Esi, A.**, 2011. *Strongly almost λ -convergence and statistically almost λ -convergence of interval numbers*, Scientia Magna, 7(2), 117-122.
- [5] **Esi, A.**, 2014 *Statistical and lacunary statistical convergence of interval numbers in topological groups*, Acta Scientarium Technology, 36(3), 491-495.
- [6] **Esi, A., and Braha, N.**, 2013. *On asymptotically λ -statistical equivalent sequences of interval numbers*, Acta Scientarium Technology, 35(3), 515-520.
- [7] **Esi, A., and Esi, A.**, 2013. *Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences of interval numbers*, International Journal of Mathematics and Its Applications, 1(1), 43-48.
- [8] **Esi, A., and Hazarika, B.**, 2013. *Some ideal convergence of double $\wedge$ -interval number sequences defined by Orlicz function*, Global Journal of Mathematical Analysis, 1(3), 110-116.
- [9] **Kreyzing, E.**, 1978. *Introduction Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons, Inc, Canada.
- [10] **Kuo-Ping Chiao**, 2002. *Fundamental properties of interval vector max-norm*, Tamsui Oxford Journal of Mathematics, 18(2), 219-233.
- [11] **Dwyer, P. S.**, 1951. *Linear Computation*, New York, Wiley.
- [12] **Dwyer, P. S.**, 1953. *Error of matrix computation, simultaneous equations and eigenvalues*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 29, 49-58.
- [13] **Moore R. E. and Yang, C. T.**, 1959. *Interval Analysis I*, LMSD-285875, Lockheed Missiles and Spaces Company.
- [14] **Markov, S.**, 2005. *Quasilinear spaces and their relation to vector spaces*, Electronic Journal on Mathematics of Computation, 2(1).
- [15] **Şengönül M., and Eryılmaz, A.**, 2010. *On the sequence spaces of interval numbers*, Thai Journal of Mathematics, 8(3), 503-510.

- [16] **Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.**, 1971. On Orlicz sequence spaces, Israel J. Math.101, 379-390.
- [17] **Esi, A.**, 1999. Some new sequence spaces defined by Orlicz functions, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 27, 71-76.
- [18] **Esi, A., and Et, M.**, 2000. Some new sequence spaces defined by Orlicz functions, Indian J. Pure Appl. Math., 31(8), 967-972.
- [19] **Wu, H.**, 2010. Hahn-Banach theorems in non-standard normed interval spaces, Non-linear Analysis, 72, 469-477.
- [20] **Warmus, M.**, 1956. Calculus of approximations, Bulletin de l'Academia Polonaise de Sciences, 4(5), 253-257.
- [21] **Sunaga, T.**, 1958. Theory of interval algebra and its application to numerical analysis, RAAG Memoirs, Ggujustsu Bungen Fukuy-Tokyo, 2, 29-48.
- [22] **Hayes, B.A.**, 2003. Lucid interval, American Scientist, 91(6), 484-488.
- [23] **Moore, R. E.**, 1959. Automatic error analysis in digital computation, LMSD Technical report 48421.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ayten EŞİ

Doğum Yeri: Malatya

Doğum Tarihi: 23/01/1963

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: Fransızca

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Turan Emeksiz Lisesi (1978-1981) (Malatya)

Lisans: İnönü Üniversitesi (1983-1987) (Malatya)

Yüksek Lisans: Fırat Üniversitesi (2013-2015) (Elazığ)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Elazığ Lisesi (1989-1997)

Balakgazi Yabancı Dil Ağırlıklı Lise (1997-2000)

Gaziantep Üniversitesi Adıyaman Eğitim Fakültesi (Öğr.Gör.)(2000-2002)

İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen-Edebiyat Fakültesi (Öğr.Gör.)(2002-2007)

Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi (Öğr.Gör.)(2007-20..)