

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



NULL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru KOÇAK

(161121112)

Anabilim Dalı : Matematik

Program : Geometri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

MAYIS-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NULL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ebru KOÇAK
(161121112)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : Nisan 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : Mayıs 2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Münevver Yıldırım YILMAZ

: Dr. Öğr. Üyesi İnan ÜNAL

MAYIS-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde engin bilgi ve birikiminden yararlandığım, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, sayın Prof. Dr. Mehmet BEK-TAŞ' a teşekkürlerimi bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ebru KOÇAK

ELAZIĞ-2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Reel Kuaterniyonlar	3
2.2. Minkowski (veya Lorentz) Uzayı	8
2.3. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler	13
2.3.1. $\mathbb{R}_1^4$ de Pseudo-Küre Null Kuaterniyonik Eğriler	16
2.4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri	19
2.4.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri	19
2.4.2. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri	21
3. NULL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN	
KARAKTERİZASYONLARI	27
3.1 $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında Null Kuaterniyonik Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar	27
3.2. $\mathbb{R}_1^4$ Uzayında Null Kuaterniyonik Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması İçin Karakterizasyonlar	31
4. SONUÇ	43
5. KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	46

ÖZET

NULL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu çalışmada Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğriler incelenmiştir. Özellikle $\mathbb{R}_1^4$ de null kuaterniyonik eğriler tanımlanarak Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir.

Daha sonra $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ uzaylarında null kuaterniyonik eğriler için karakterizasyonlar ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Reel Kuaterniyonlar, Minkowski (veya Lorentz) Uzayı, $\mathbb{R}_1^4$ Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler.

SUMMARY

THE CHARACTERIZATIONS OF NULL QUATERNIONIC CURVES

In the study, null quaternionic curves are investigated in Minkowski space. In particular, Serret-Frenet formulas are given for null quaternionic curves in Minkowski space by defining null quaternionic curves in $\mathbb{R}_1^4$.

Then, the characterizations for null quaternionic curves are given and proved in $\mathbb{R}_1^3$ and $\mathbb{R}_1^4$ spaces.

Keywords: Real Quaternions, Minkowski (or Lorentzian) Space, Null Quaternionic Curves in $\mathbb{R}_1^4$.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_\nu^n$	: Semi-Öklidyen uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: Minkowski 3-uzay
$\mathbb{R}_1^4$	: Minkowski 4-uzay
Q	: Kuaterniyon kümesi
p, q	: Kuaterniyon
$\times$	: Kuaterniyon çarpımı
α	: Kuaterniyon eşleniği
h	: Kuaterniyonik metrik
$\ \cdot\ $	: Kuaterniyonik norm
γ	: Minkowski 3-uzayda kuaterniyonik eğri
β	: Minkowski 4-uzayda kuaterniyonik eğri
$\{L, N, U, W\}$	: Kuaterniyonik eğrinin Frenet dörtlüsü

1. GİRİŞ

William Rowan Hamilton 1830 yılından itibaren kompleks sayılar üzerinde çalışmış ve 1833 yılında iki reel sayıdan oluşan kompleks sayıların bir cebir oluşturduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu sonucu kullanarak çalışmalarını iki kompleks ve bir reel bileşenden oluşan üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaştırmıştır. Bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımladığı halde bölme işlemi için bir yöntem geliştirememiştir. 1843 de bu sayı sisteminin çarpma işleminde değişme özelliğinin geçerli olmadığını farkına varmış ve çarpma işleminin bu özelliğinden vazgeçerek $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımlamıştır. Böylece Hamilton, kuaterniyon olarak isimlendirdiği 4-boyutlu olan sözde hiper-kompleks sayıları keşfetmiştir.

Hacısalihoglu (1983) reel ve dual kuaterniyonların özelliklerini incelemiş ve kullanım alanları ile ilgili bilgiler vermiştir [1]. Agrawal (1987) Hamilton operatörleri ve dual kuaterniyonların uzay kinematikiindeki yerini incelemiştir. Ward (1997) genelleştirilmiş kuaterniyonları tanımlayarak, uygulamaları hakkında bilgiler vermiştir.

Riemann manifoldlar üzerinde eğriler teorisi yıllar önce çalışılmış ve bulunan sonuçlar semi-Riemann manifoldlar üzerindeki eğrilere uygulanırken bazı yeni durumlarla karşılaşmıştır. Bunlardan biri eğrinin null eğri olması durumunda yay parametresi cinsinden ifade edilmesinde karşılaşılan zorluklardır. Bu sorunu aşmak için 1969 da Bonnor, eğrinin ivme vektörünü birim hızlı yapan pseudo-yay parametresi kavramını tanımlamıştır. Ayrıca buna bağlı olarak oluşturulan Cartan çatısı kullanılarak Minkowski Spacetime da null eğrilerin geometrisini ele almıştır. A. Bejancu 1994 de Lorentz manifoldlarda ve daha genel olarak semi-Riemann manifoldlarda ki null eğrilerin genel olarak incelenebileceği bir metod geliştirmiştir. 2001 de A. Ferrandez vd. Cartan çatıyı Lorentz uzay formlarına genelleştirerek, temel varlık ve teklik teoremlerini ispatlamışlardır.

Bu çalışmanın amacı $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik eğrilerin karakterizasyonlarını elde etmektir. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde öncelikle reel kuaterniyonlar ve minkowski uzayının temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Daha sonra özellikle $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında null kuaterniyonik

eğri tanımlanarak pseudo-küre null kuaterniyonik eğriler ile ilgili tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Son olarak $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik eğrilerin bazı alt uzaylarda kalması için karakterizasyonlar ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölüm sonuç bölümüdür.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teoremler ve tanımlar verilmiştir. Bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda reel kuaterniyonlar ile ilgili gerekli bazı temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. İkinci kısımda Minkowski uzayının temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Üçüncü kısımda $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğrinin tanım ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca $\mathbb{R}_1^4$ de pseudo-küre null kuaterniyonik eğri ile ilgili tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Son olarak dördüncü kısımda $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ boyutlu Minkowski uzayındaki bir null kuaterniyonik eğrinin Serret-Frenet denklemleri verilmiştir.

2.1. Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.1.1 Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada, birinci birim $+1$ bir reel sayı olup diğer üç birim ise

$$i) \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_4, (\vec{e}_4 = +1)$$

$$ii) \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k = -\vec{e}_j \times \vec{e}_i, (ijk) \text{ (123) ün bir çift permütasyonudur.}$$

özelliklerine sahiptir. $Q = \{q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \mid d, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanına reel kuaterniyon denir. Burada $q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ kuaterniyonunun skalar kısmı S_q ve vektörel kısmı $\vec{V}_q$ olmak üzere iki kısıma ayrılır. Yani;

$$S_q = d, \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

olmak üzere $q = S_q + \vec{V}_q$ dır [1], [2].

Tanım 2.1.2 (Toplama İşlemi) p ve q birer reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \oplus & : Q \times Q \rightarrow Q \\ (p, q) & \rightarrow p \oplus q = S_{p+q} + \vec{V}_{p \oplus q} \end{aligned}$$

işlemi $S_{p+q} = S_p + S_q$ ve $\vec{V}_{p \oplus q} = \vec{V}_p \oplus \vec{V}_q$ şeklinde tanımlanır. Burada $S_p, S_q \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi $\mathbb{R}$ deki toplama işlemidir. $\vec{V}_p, \vec{V}_q$ da birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu işleminin aynısıdır. O halde $(Q, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. Bu Abel grubunda $(0, 0, 0, 0)$ sıfır kuaterniyonu etkisiz elemandır [1].

Tanım 2.1.3 (Skalarla Çarpma) p ve q birer reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned}\odot & : \mathbb{R} \times Q \rightarrow Q \\ (\lambda, q) & \rightarrow \lambda \odot q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dış işlem için

- (i) $\lambda \odot (p \oplus q) = (\lambda \odot p) \oplus (\lambda \odot q)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall p, q \in Q$,
- (ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall q \in Q$,
- (iii) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$,
- (iv) $1 \odot q = q$

dir. O halde $\{Q, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Bu uzay Q ile gösterilir [1].

Tanım 2.1.4 (Kuaterniyon Çarpımı) p ve q birer reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned}\times & : Q \times Q \rightarrow Q \\ (p, q) & \rightarrow p \times q = S_p \cdot S_q + S_p \odot \vec{V}_q + S_q \odot \vec{V}_p - \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [1]. Burada $\langle, \rangle$ ve $\wedge$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$ üzerindeki iç çarpımı ve vektörel çarpımı göstermektedir. Çalışma boyunca bu semboller aynı anlamlarda kullanılacaktır.

Kuaterniyon çarpımının özellikleri aşağıdaki gibidir:

- (i) İki kuaterniyonun çarpımı bir kuaterniyondur.
- (ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- (iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Ancak kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle $\{Q, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$ sistemi bir asosyatif cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir. Kısaca Q ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve boyutu 4 tür.

Özel olarak p ve q birer skalar ise veya vektör kısımları orantılı $(\vec{V}_p = \lambda \vec{V}_q)$ ise $p \times q = q \times p$ olur.

Tanım 2.1.5 (Eşitlik) Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı $\forall p, q \in Q$ için

$$p = q \Leftrightarrow S_p = S_q \text{ ve } \vec{V}_p = \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.1.6 (Fark) Toplama ve skalar ile çarpma işlemlerinden iki kuaterniyonun farkı

$$p - q = (S_p - S_q) + (\vec{V}_p - \vec{V}_q)$$

yani

$$S_{p-q} = S_p - S_q \text{ ve } \vec{V}_{p-q} = \vec{V}_p - \vec{V}_q$$

olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.1.7 (Eşlenik) Bir $q \in Q$ kuaterniyonun eşleniği,

$$\alpha : Q \rightarrow Q$$

$$q \rightarrow \alpha q = S_q - \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan αq kuaterniyonudur [9]. $\vec{V}_{\alpha q} = -\vec{V}_q$ olduğundan

$$q \times \alpha q = \alpha q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$$

dir. O halde

$$q \times \alpha q = \alpha q \times q \geq 0$$

ve

$$q \times \alpha q = \alpha q \times q = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

dır. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(i) \alpha(ap + bq) = a\alpha p + b\alpha q,$$

$$(ii) \alpha(p \times q) = \alpha q \times \alpha p,$$

$$(iii) \alpha(\alpha p) = p$$

şeklindeki özelliklere sahiptir [2].

Tanım 2.1.8 Eğer, $q \in Q$ kuaterniyonu için,

$$q + \alpha q = 0$$

oluyorsa q ya bir uzay(spatial) kuaterniyonu denir [3].

Tanım 2.1.9 Eğer, $q \in Q$ kuaterniyonu için,

$$q - \alpha q = 0$$

ise q ya bir temporal kuaterniyonu denir [3].

Tanım 2.1.10 $p, q \in Q$ kuaterniyonları için,

$$\begin{aligned} h & : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R} \\ h(p, q) & = \frac{1}{2} [p \times \alpha q + q \times \alpha p] \end{aligned}$$

ile verilen simetrik, reel değerli, bilineer h formu kuaterniyon iç çarpımı olarak adlandırılır [3].

Tanım 2.1.11 Eğer $p, q \in Q$ kuaterniyonları için $h(p, q) = 0$ oluyorsa p ile q ya h -ortogonaldir denir [3].

Tanım 2.1.12 Bir $q \in Q$ kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| & : Q \rightarrow \mathbb{R} \\ q & \rightarrow \|q\| \\ \|q\|^2 & = h(q, q) = q \times \alpha q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\|q\|$ pozitif reel sayısına q nun normu denir [3].

Tanım 2.1.13 Bir $q \in Q$ kuaterniyonunun inversi;

$$\begin{aligned} (\)^{-1} & : Q - \{0\} \rightarrow Q - \{0\} \\ q & \rightarrow q^{-1} = \frac{\alpha q}{\|q\|^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece,

$$q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$$

dir. $q \neq 0$ olmak üzere, $\forall q \in Q$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması Q cebirini bir bölüm cebiri yapar [1].

Tanım 2.1.14 $q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Ancak kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Dolayısıyla bu çarpma iki türlü olduğundan p yi q ile iki türlü bölmek gerekir. r_1 ve r_2 iki kuaterniyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} r_1 & = p \times q^{-1} \\ r_2 & = q^{-1} \times p \end{aligned}$$

dir. Burada r_1 kuaterniyonuna p nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonunada p nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır [1].

Tanım 2.1.15 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\gamma & : I \rightarrow Q \\ \gamma(s) & = \sum_{i=1}^4 \gamma_i(s) \vec{e}_i, \quad (\vec{e}_4 = +1)\end{aligned}$$

ile verilen reel, tek değişkenli kuaterniyon değerli γ dönüşümü kuaterniyonik eğri olarak adlandırılır. Özel olarak, $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$ ise γ uzay-kuaterniyonik eğri adını alır [2].

Tanım 2.1.16 Normu 1 olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanması,

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|} = \frac{d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak ifade edilebilir [1].

Tanım 2.1.17 Reel eksen ile q arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\cos \theta & = \frac{d}{\sqrt{\|q\|}} \\ \sin \theta & = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{\|q\|}}\end{aligned}$$

olup buna göre;

$$\begin{aligned}q & = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \sqrt{\|q\|} \frac{(d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3)}{\sqrt{\|q\|}} \\ & = \sqrt{\|q\|} \left(\frac{d}{\sqrt{\|q\|}} + \frac{a}{\sqrt{\|q\|}} \vec{e}_1 + \frac{b}{\sqrt{\|q\|}} \vec{e}_2 + \frac{c}{\sqrt{\|q\|}} \vec{e}_3 \right) \\ & = \sqrt{\|q\|} \left[\frac{d}{\sqrt{\|q\|}} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{\|q\|}} \left(\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \vec{e}_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \vec{e}_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \vec{e}_3 \right) \right] \\ \hat{q} & = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \vec{e}_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \vec{e}_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \vec{e}_3\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak q kuaterniyonunun kutupsal halini $q = \sqrt{\|q\|} (\cos \theta + \hat{q} \sin \theta)$ şeklinde bulunur [4].

2.2. Minkowski (veya Lorentz) Uzayı

Tanım 2.2.1 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

- i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- ii) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
- $\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

koşullarını sağlıyorsa $\langle, \rangle$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [5].

Tanım 2.2.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun. $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna,

- i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise pozitif tanımlı
- ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise negatif tanımlı
- iii) $\forall \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise yarı pozitif tanımlı
- iv) $\forall \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise yarı negatif tanımlı

denir [5].

Tanım 2.2.3 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik bilinear formu, $\forall \vec{w} \in V$ için

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0$$

şartını sağlıyorsa bu simetrik bilinear forma non-dejenere, non-dejenere değilse dejenere denir [5].

Teorem 2.2.4 Bir $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\langle, \rangle$ nin herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır [5].

Tanım 2.2.5 Bir V vektör uzayı üzerindeki non-dejenere simetrik bilinear forma V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir. V üzerinde bir skalar çarpım $\langle, \rangle$ olmak üzere $(V, \langle, \rangle)$ ikilisine skalar çarpımlı uzay denir [6].

Teorem 2.2.6 V vektör uzayı içindeki bir ortonormal baz $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle$ olmak üzere, $\forall \vec{\nu} \in V$ vektörü

$$\vec{\nu} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \vec{\nu}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

biçiminde tek türlü yazılabilir [5].

Tanım 2.2.7 V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilinear form olsun.

$$\langle, \rangle |_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formunun indeksi denir ve v ile gösterilir. Buna göre, $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. $v=0$ olması için gerek ve yeter şart $\langle, \rangle$ nin pozitif tanımlı olmasıdır [5], [7].

Tanım 2.2.8 M, C^∞ manifold olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilinear, non-dejenere fonksiyonuna M üzerinde metrik tensör adı verilir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir [5].

Tanım 2.2.9 $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart reel vektör uzayı verilsin. $0 \leq v \leq n$ olmak üzere v tamsayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\langle \nu_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-v} \nu_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^n \nu_i w_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay Semi-Öklidyen uzay olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir [5].

Tanım 2.2.10 V skalar çarpım uzayı (Semi-Öklid uzayı) olsun. $\langle, \rangle$ nin indeksi $v=1, n \geq 2$ ise $\langle, \rangle$ skalar çarpımına Minkowski (veya Lorentz) metriği ve V ye de Minkowski (veya Lorentz) uzayı denir. V de $\langle, \rangle$ dejenere ise V ye dejenere vektör uzayı denir [8].

Tanım 2.2.11 M differensiyellenebilir bir manifold ve $\langle, \rangle$ de M üzerinde metrik tensör ise M ye bir Semi-Riemann manifoldu denir. Buradaki sabit indekse Semi-Riemann manifoldunun indeksi denir. v indeksli n -boyutlu bir Semi-Riemann manifoldu M_v^n ile gösterilir.

Özel olarak $v=0$ ise M^n bir Riemann manifoldudur ve metriğe de Riemann metriği denir. Ayrıca, $n \geq 2$ ve $v=1$ ise M_1^n Semi-Riemann manifolduna Minkowski (veya Lorentz) manifoldu denir [5], [9].

Tanım 2.2.12 n -boyutlu bir reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ ve $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için Riemann iç çarpımı;

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_{\mathbb{R}} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \vec{y}_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.2.13 $\mathbb{R}^n$ n -boyutlu reel vektör uzayı olsun. Minkowski (veya Lorentz) iç çarpımı;

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_L &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{x}_i \vec{y}_i - \vec{x}_n \vec{y}_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Bu Minkowski (veya Lorentz) iç çarpımı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ vektör uzayına da n -boyutlu Standart Minkowski (veya Lorentz) Uzayı ya da kısaca Minkowski (veya Lorentz) Uzayı denir. Yani,

$$\mathbb{R}_1^n = \{\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_L\}$$

dır. Çalışma boyunca $\langle, \rangle_L$ Minkowski (veya Lorentz) iç çarpımını $\langle, \rangle$ ile gösterilecektir. Her Minkowski (veya Lorentz) uzayı aynı zamanda bir Semi-Öklid uzayıdır.

Tanım 2.2.14 Bir $\vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ vektörüne,

- i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise space-like vektör,
- ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise time-like vektör,
- iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\vec{x} \neq 0$ ise light-like veya null vektör denir [11].

Tanım 2.2.15 n -boyutlu Minkowski (veya Lorentz) uzayı $\mathbb{R}_1^n$ nin iki $\vec{x}, \vec{y}$ vektörü için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise bu iki vektöre Minkowski (veya Lorentz) anlamında diktirler denir [12].

Tanım 2.2.16 $\vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ için $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$$

olarak tanımlanır [5].

Teorem 2.2.17 $\vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere,

- i) $\|\vec{x}\| > 0$ dir.
- ii) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektördür.
- iii) $\vec{x}$ bir time-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir.
- iv) $\vec{x}$ bir space-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir [5].

Tanım 2.2.18 $(V, \langle, \rangle)$ bir Minkowski (veya Lorentz) uzayı olsun. $W \subset V$ alt uzayını göz önüne alalım.

- i) $\langle, \rangle|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif ise W ya space-like alt uzay
- ii) $\langle, \rangle|_W$ indeksi 1 olan non-dejenere ise W ya time-like alt uzay
- iii) $\langle, \rangle|_W$ dejenere ise W ya light-like alt uzay denir [5].

Tanım 2.2.19 V Minkowski (veya Lorentz) uzayında bütün time-like vektörlerin cümlesi τ olsun. $\vec{x} \in \tau$ için, $\{\vec{y} \in \tau : \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < 0\}$ cümlesine $\vec{y}$ nin $\vec{x}$ i ihtiva eden time konisi denir [5].

Teorem 2.2.20 Minkowski (veya Lorentz) uzayında time-like vektörler $\vec{x}, \vec{y}$ olsunlar. Bu iki vektörün aynı time konide olması için gerek ve yeter şart $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < 0$ olmasıdır [5].

Teorem 2.2.21 Minkowski (veya Lorentz) uzayında $\vec{x}, \vec{y}$ iki time-like vektör olsun. Bu durumda;

- i) $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \geq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ (Minkowski uzayında Schwartz eşitsizliği)
- ii) Eğer $\vec{x}, \vec{y}$ vektörleri aynı time konide iseler,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ arasında hiperbolik açı diye adlandırılan bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır [12].

Sonuç 2.2.22 İki vektörün dik olabilmesi için gerek ve yeter şart birinin time-like diğerinin space-like olmasıdır [12].

Tanım 2.2.23 $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \vec{y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere,

$$\wedge \quad | \quad _L : \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} \wedge |_L \vec{y} = (\vec{x}_2 \vec{y}_3 - \vec{x}_3 \vec{y}_2, \vec{x}_3 \vec{y}_1 - \vec{x}_1 \vec{y}_3, -\vec{x}_1 \vec{y}_2 + \vec{y}_2 \vec{x}_1)$$

şeklinde tanımlı $\wedge |_L$ operatörüne $\mathbb{R}_1^3$ de Minkowski (veya Lorentz) anlamında vektörel çarpım denir [13].

Minkowski (veya Lorentz) anlamındaki vektörel çarpım, $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpımın ifadesine benzer olarak,

$$\vec{x} \wedge |_L \vec{y} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \vec{y}_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Sonuç 2.2.24 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere,

- i) $\langle \vec{x} \wedge |_L \vec{y}, \vec{z} \rangle = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}),$
- ii) $(\vec{x} \wedge |_L \vec{y}) \wedge \vec{z} = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y},$
- iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \wedge |_L \vec{y} \rangle = 0,$
- iv) $\langle \vec{y}, \vec{x} \wedge |_L \vec{y} \rangle = 0$ dir [13].

Sonuç 2.2.25 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ için,

$$\langle \vec{x} \wedge |_L \vec{y}, \vec{x} \wedge |_L \vec{y} \rangle = (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)^2 - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

dir [13].

Tanım 2.2.26 Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ diferensiyellenebilir eğrisine

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \alpha' \rangle &< 0 \text{ ise time-like eğri} \\ \langle \alpha', \alpha' \rangle &> 0 \text{ ise space-like eğri} \\ \langle \alpha', \alpha' \rangle &= 0 \text{ ise null eğri} \end{aligned}$$

adı verilir [9].

Teorem 2.2.27 $M \subset \mathbb{R}_1^n$ de time-like bir eğri olsun. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_{r-1}, V_r\}$ olsun. Bu durumda;

- i) $\dot{V}_1 = \varepsilon_0 k_1 V_2,$
- ii) $\dot{V}_i = -\varepsilon_0 k_{i-1} V_{i-1} + \varepsilon_0 k_i V_{i+1}, 1 < i < r,$
- iii) $\dot{V}_r = -\varepsilon_0 k_{r-1} V_{r-1},$

dir. Burada

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} -1, & V_i \text{ time-like ise} \\ +1, & V_i \text{ space-like ise} \end{cases}$$

dır [13].

2.3. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler

Semi-reel kuaterniyonların temel kavramlarını vereceğiz. Bir grup semi-reel kuaterniyonlar

$$Q_v = \{q \mid q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d; a, b, c, d \in \mathbb{R}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}_{v(v=1,2)}^3\},$$

$$h_v(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \varepsilon(\vec{e}_i), 1 \leq i \leq 3\},$$

olarak tanımlanır. Burada $1 \leq i, j, k \leq 3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \times \vec{e}_i &= -\varepsilon(\vec{e}_i), \\ \vec{e}_i \times \vec{e}_j &= \varepsilon(\vec{e}_i) \varepsilon(\vec{e}_j) \vec{e}_k \in \mathbb{R}_1^3, \\ \vec{e}_i \times \vec{e}_j &= -\varepsilon(\vec{e}_i) \varepsilon(\vec{e}_j) \vec{e}_k \in \mathbb{R}_2^4 \\ \varepsilon_{\vec{e}_i} &= \begin{cases} -1, & \vec{e}_i \text{ time-like} \\ +1, & \vec{e}_i \text{ space-like} \end{cases} \end{aligned}$$

dir. Ve (123) ün bir çift permütasyonu (ijk) dır. İki p ve q semi-reel kuaterniyonların çarpımı;

$$p \times q = S_p S_q + S_p \vec{V}_q + S_q \vec{V}_p - h(\vec{V}_p, \vec{V}_q) + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q$$

dir. Burada h ve $\wedge$ daha önce kullandığımız, $\mathbb{R}_v^3$ Semi-Öklid uzayında iç ve vektörel çarpımlarıdır. $q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d \in Q_v$ bir semi-reel kuaterniyonu için $\alpha q =$

$-a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3 + d$ ile tanımlanan $\alpha q, q$ nun eşleniğidir. Bu yüzden simetrik, non-dejenere ve bilineer form h aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h_v : Q_v \times Q_v \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}_1^3$ için

$$h_1(p, q) = \frac{1}{2} [\varepsilon(p) \varepsilon(\alpha q) (p \times \alpha q) + \varepsilon(q) \varepsilon(\alpha p) (q \times \alpha p)]$$

ve özel olarak $\mathbb{R}_2^4$ için

$$h_2(p, q) = \frac{1}{2} [-\varepsilon(p) \varepsilon(\alpha q) (p \times \alpha q) - \varepsilon(q) \varepsilon(\alpha p) (q \times \alpha p)]$$

dir. Genel olarak $v = \{1, 2\}$ için

$$h_v(q, q) = a^2 \varepsilon(\vec{e}_1) + b^2 \varepsilon(\vec{e}_2) + c^2 \varepsilon(\vec{e}_3) + d^2$$

olup semi-reel kuaterniyonun iç çarpımı diye isimlendirilir. $p = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3 + d_1$ ve $q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d$ iki semi-reel kuaterniyonun vektörel çarpımı

$v = 1$ için

$$\begin{aligned} \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q &= \varepsilon(\vec{e}_2) \varepsilon(\vec{e}_3) (b_1c - bc_1) \vec{e}_1 \\ &\quad - \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_3) (a_1c - ac_1) \vec{e}_2 \\ &\quad + \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_2) (a_1b - ab_1) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

$v = 2$ için

$$\begin{aligned} \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q &= -\varepsilon(\vec{e}_2) \varepsilon(\vec{e}_3) (b_1c - bc_1) \vec{e}_1 \\ &\quad + \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_3) (a_1c - ac_1) \vec{e}_2 \\ &\quad - \varepsilon(\vec{e}_1) \varepsilon(\vec{e}_2) (a_1b - ab_1) \vec{e}_3, \end{aligned}$$

olarak tanımlanır Genel olarak

$v = \{1, 2\}$ için

$$\|q\|^2 = |h_v(q, q)| = |a^2 \varepsilon(\vec{e}_1) + b^2 \varepsilon(\vec{e}_2) + c^2 \varepsilon(\vec{e}_3) + d^2|$$

olup q semi-reel kuaterniyonun normu olarak tanımlanır.

Spatial kuaterniyon kavramının kullanımı çalışmamız boyunca yapılacaktır. Herbir $q + \alpha q = 0$ için q bir spatial kuaterniyon diye isimlendirilir. Herbir $q - \alpha q = 0$ için q bir temporal kuaterniyondur [15].

$\mathbb{R}_1^4$ üzerinde semi kuaterniyonik metriğe h diyelim. $\mathbb{R}_1^4$ de bir $\beta(s)$ eğrisi $\forall s$ için $\beta'(s) \neq 0$ ve $h(\beta'(s), \beta'(s)) = 0$ ise bu eğriye bir null kuaterniyonik eğri denir. Dikkat edilmeli ki $\mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik eğri $\beta(s)$ için, $h(\beta''(s), \beta''(s)) \neq 0$ dir. $\mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik eğri $\beta(s)$ için, $h(\beta''(s), \beta''(s)) = \mp 1$ ise bu eğriye pseudo-yay ile parametrelendirilmiştir denir. $\mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik eğri

$$\beta(s) = \gamma_1(s) \vec{e}_1 + \gamma_2(s) \vec{e}_2 + \gamma_3(s) \vec{e}_3 + \gamma_4(s) \vec{e}_4$$

olsun.

$$\begin{aligned} \beta & : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_{\mathbb{R}_1^4} \\ s & \rightarrow \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i(s) \vec{e}_i, \quad \vec{e}_4 = 1, \quad 1 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

aşık bir biçimde $\{\beta \in Q_{\mathbb{R}_1^4} \mid \beta + \alpha\beta = 0\}$ null spatial kuaterniyonlar uzayı ile tammlanan $\mathbb{R}_\nu^3$ 3-boyutlu semi-Öklid uzayıdır.

$\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında null spatial kuaterniyonik eğri için diferensiyellenebilir Frenet dördlüsü $\{L, N, U, W\}$ olsun. s bir pseudo-yay parametresine nazaran bir Cartan çatı $\{L, N, U, W\}$ ile $(\mathbb{R}_1^4, h)$ 4-boyutlu Minkowski uzayında bir β Cartan null kuaterniyonik eğriyi ele alalım. Cartan denklemleri;

$$\begin{aligned} L' &= W, \quad N' = (p - \tau)U + pW, \\ U' &= (p - \tau)L, \quad W' = pL + N \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} L' &= W, \quad N' = (\tau + p)U + pW, \\ U' &= (\tau + p)L, \quad W' = pL + N, \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} h(L, L) &= h(N, N) = h(L, U) = h(N, U) = h(W, U) \\ &= h(N, W) = h(L, W) = 0 \\ h(U, U) &= h(W, W) = +1 \text{ ve } h(L, N) = -1 \end{aligned}$$

dir [15].

2.3.1. $\mathbb{R}_1^4$ de Pseudo-Küre Null Kuaterniyonik Eğriler

Bu bölümde, pseudo-küre null kuaterniyonik eğrileri tanımlayacağız. Null kuaterniyonik eğriler $S_1^3(r) = \{X \in \mathbb{R}_1^4 : h(X - A, X - A) = r^2\}$ ile verilen yarıçapı $r > 0$ ve merkezi A olan bir pseudo-kürede tamamen yatar. Oskülatör pseudo-küre aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.3.1 $\beta, \mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik Cartan eğri olsun. O halde β ile sonsuz yakın 5 noktaya sahip olan pseudo-küreye β oskülatör pseudo-küre denir.

$\beta(s), \mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik Cartan eğri ile s bir pseudo-yay parametresine nazaran Cartan eğrilikler $p, (p - \tau)$ ya sahip olsun [15].

Yardımcı Teorem 2.3.2 $\beta(s), \mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik Cartan eğrisi olsun. O zaman $\beta(s)$ nin

$$A(s_0) = \beta(s_0) - \frac{1}{p - \tau} U(s_0)$$

noktası oskülatör pseudo-kürenin merkez noktasıdır [15].

İspat: Bazı $\beta(s_0)$ noktasının $A(s_0) - \beta(s_0)$ konum vektörünün $\{L, N, U, W\}$ Cartan çatısının bir lineer kombinasyonu olarak;

$$A(s_0) - \beta(s_0) = m_1 L + m_2 N + m_3 U + m_4 W \quad (2.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $m_i, 1 \leq i \leq 4$ için diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$f(s) = h(A(s_0) - \beta(s_0), A(s_0) - \beta(s_0)) - r^2$$

fonksiyonunu ele alınsın. Oskülatör pseudo-kürenin yarıçapı r olduğu biliniyor. Böylece s_0 da

$$f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = f^{(4)}(s_0) = 0$$

eşitlikleri oskülatör pseudo-küre tanımından dolayı sağlanır. Sonra

$$\begin{aligned} h(L(s_0), A(s_0) - \beta(s_0)) &= 0 \text{ ve } m_2 = 0, \\ h(W(s_0), A(s_0) - \beta(s_0)) &= 0 \text{ ve } m_4 = 0, \\ h(N(s_0), A(s_0) - \beta(s_0)) &= 0 \text{ ve } m_1 = 0, \\ h(U(s_0), A(s_0) - \beta(s_0)) &= 0 \text{ ve } m_3(s_0) = -\frac{1}{p - \tau} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

Böylece,

$$m_1 = m_2 = m_4 = 0 \text{ ve } m_3(s_0) = -\frac{1}{p-\tau}$$

bulunur. Böylece (2.1) denkleminde

$$A(s_0) - \beta(s_0) = -\frac{1}{p-\tau}U \text{ ve } r = \left| -\frac{1}{p-\tau} \right|$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.3.3 β bir null kuaterniyonik Cartan eğrisi olsun. β bir pseudo-küresel eğridir ancak ve ancak $(p-\tau)$ sıfırdan farklı bir sabittir [15].

İspat: Farzedilsin ki β , $S_1^3(r)$ üzerinde yatan bir null kuaterniyonik Cartan eğrisi olsun. O zaman, oskülatör pseudo-küreler eğrinin tüm noktaları tamamen $S_1^3(s)$ dir ve bu yüzden r ve $\frac{1}{p-\tau}$ sabittir.

Tersine, $\frac{1}{p-\tau}$ nin sıfırdan farklı bir sabit olduğu kabul edilsin. Tüm oskülatör pseudo-küreler aynı yarıçapa sahiptirler. Üstelik,

$$A(s_0) = \beta(s_0) - \frac{1}{p-\tau}U(s_0)$$

fonksiyonu hesaplanırsa oskülatör pseudo-kürenin merkez noktası bulunur. Her-yerdeki türevi sıfırdır, o halde sabittir. Sonuç olarak, β eğrisi $S_1^3(r)$ üzerinde yatar. O halde $\forall s$ için $h(X-A, X-A) = r^2$ denklemi geçerlidir. İspat tamamlanır.

Böylece, $h(X-A, X-A) = \left| -\frac{1}{p-\tau} \right|^2$, null kuaterniyonik eğriler ile $\frac{1}{p-\tau} = \text{sabit}$, $S_1^3(r)$ pseudo-küre üzerinde yatarlar.

Sonuç: Bir $\beta \subset \mathbb{R}_1^4$ null kuaterniyonik Cartan eğrisinin tamamen bir pseudo-küre üzerinde yatması için gerek ve yeter şart $s \in I$ nin herbiri ya da f de ki sabit bir A noktası için

$$h(X(s) - \beta(s), -\beta'(s_0)) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır..

$\mathbb{R}_1^4$ de ki null kuaterniyonik Cartan eğrilikleri ile pseudo-küre null kuaterniyonik eğri karakterize edilebilir. Null kuaterniyonik eğriler $(p-\tau)$ gibi bir sıfırdan farklı sabite sahip bir pseudo-küre oluşturur. Benzer sonuçlar ayrıca diğer null kuaterniyonik Cartan çatısı içinde elde edilir.

$\mathbb{R}_1^4$ de bir time-like vektör $\vec{e}_2$ ile diğer Cartan çatısına göre

$$L' = W, N' = (\tau + p)U + pW, U' = (\tau + p)L, W' = pL + N$$

dir. Burada, teorem üzerinde kullanılan iddialara göre $A(s_0) = \beta(s_0) - \frac{1}{p+\tau}U(s_0)$ sonucu elde edilir [15].



2.4 Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

2.4.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

1. Durum: ($\vec{e}_1$ bir time-like vektör olsun.)

h kuaterniyonik metrik ile $\mathbb{R}_1^3$ bir 3-boyutlu Minkowski uzayı tanımlasın. $\forall s \in I$ için pozitif veya negatif yönlü

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$\{\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)\}$ gibi bir null kuaterniyonik Cartan eğri olsun.

$\{l = \gamma'(s), n, u\}$ Cartan çatısını dikkate alalım, burada $h(l, l) = h(n, n) = h(l, u) = h(n, u) = 0, h(l, n) = h(u, u) = 1$ dir. Frenet denklemleri,

$$l' = ku, \quad n' = \tau u, \quad u' = -\tau l - kn \quad (2.2)$$

ve

$$l' = ku, \quad n' = -\tau u, \quad u' = \tau l - kn, \quad (2.3)$$

burada τ eğrinin torsiyonu ve k eğrinin eğriligidir. Bu durumda γ bir null kuaterniyonik Cartan eğrisi, $k(s) = 1$, ayrıca

$$l' = u, \quad n' = \tau u, \quad u' = -\tau l - n$$

ve

$$l' = u, \quad n' = -\tau u, \quad u' = \tau l - n,$$

$\{l, n, u\}$ ile $\gamma(s)$ nin Frenet formülü olur [16].

2. Durum: ($\vec{e}_2$ bir time-like vektör olsun.)

h kuaterniyonik metrik ile $\mathbb{R}_1^3$ bir 3-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall s \in I$ için pozitif veya negatif yönlü

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$\{\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)\}$ gibi bir null kuaterniyonik Cartan eğri olsun.

$\{l = \gamma'(s), n, u\}$ Cartan çatısı dikkate alınır, burada $h(l, l) = h(n, n) = h(l, u) = h(n, u) = 0, h(l, n) = -1, h(u, u) = 1$ dir. Frenet denklemleri,

$$l' = ku, \quad n' = -\tau u, \quad u' = -\tau l + kn$$

ve

$$l' = ku, \quad n' = \tau u, \quad u' = \tau l + kn, \quad (2.4)$$

burada τ eğrinin torsiyonu ve k eğrinin eğriligidir. Bu durumda γ bir null kuaterniyonik Cartan eğrisi, $k(s) = 1$, ayrıca

$$l' = u, \quad n' = -\tau u, \quad u' = -\tau l + n$$

ve

$$l' = u, \quad n' = \tau u, \quad u' = \tau l + n,$$

$\{l, n, u\}$ ile $\gamma(s)$ nin Frenet formülü olur [16].

2.4.2. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski Uzayında Null Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

1. Durum: ($\vec{e}_1$ bir time-like vektör olsun.)

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 = 1\}, \mathbb{R}_1^4$ ün bir ortonormal bazıdır.

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_2 + \vec{e}_1), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_2 - \vec{e}_1), \quad U = \vec{e}_3, \quad W = \vec{e}_4$$

vektörleri için

$$h(L, L) = h(N, N) = h(L, U) = h(N, U) = h(W, U) = h(N, W) = h(L, W) = 0$$

ve

$$h(L, N) = h(U, U) = h(W, W) = +1$$

eşitlikleri sağlar.

Böylece $\mathbb{R}_1^4$ ün bir bazı $\{L, N, U, W\}$ olur. L ve N null vektörler ve U ve W space-like vektörlerdir. h kuaterniyonik metrik ile bir 4-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^4$ ile gösterilir. $\mathbb{R}_1^4$ de 4-boyutlu Minkowski uzayları birim kuaterniyonun uzayları ile tanımlanır. I aralığı üzerinde tanımlanan $\mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik eğri

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_\nu$$

$$\beta = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3 + \gamma_4 \vec{e}_4$$

olsun. Sıfır uzunluğa sahip $L(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma'_i(s) \vec{e}_i$ teğeti gibi olan s parametresi seçilir. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzaylarında diferensiyellenebilir Minkowski uzay eğrisinin $\{L(s), N(s), U(s), W(s)\}$ Frenet elemanları olur. Bu özel sınıfın Frenet çatısı ve Frenet denklemleri β ile gösterilir. o zaman Frenet denklemleri

$$L' = KW, \quad N' = -(\tau + p)U + pW,$$

$$U' = (\tau + p)L, \quad W' = -pL - KN$$

ve

$$L' = KW, \quad N' = (\tau - p)U + pW,$$

$$U' = -(\tau - p)L, \quad W' = -pL - KN,$$

dir.

β sıfır özelliğe sahip $L(s) = \beta'(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma'_i(s) \vec{e}_i$ teğetli bir null kuaterniyonik eğri olsun. O zaman,

$$\beta'(s) \neq 0, h(\beta'(s), \beta'(s)) = \beta'(s) \times \alpha\beta'(s) = 0 \quad (2.5)$$

elde edilir. $\beta'(s) = L$ olduğundan $h(L, L) = 0$ dir. Fakat $\beta''(s) = W$ null olamaz, her zaman space-likedir. Üstelik $h(W, W) = h(\beta''(s), \beta''(s)) = 1$ dir. s ile (2.5) denklemi kullanılarak,

$$\beta''(s) \times \alpha\beta'(s) + \beta'(s) \times \alpha\beta''(s) = 0$$

elde edilir. O halde,

- (i) $\beta''(s) \times \alpha\beta'(s)$ bir semi-spatial kuaterniyon,
- (ii) $h(\beta'(s), \beta''(s)) = 0 \Rightarrow h(L, W) = 0, h(L, L') = 0,$

eşitlikleri bulunur.

(ii) de s ye göre türev alınırsa, $h(L, W') = -1$ elde edilir. Şimdi L' ü bir vektör ve bir baz yardımıyla yazılabilir.

$$L' = aL + bN + cU + dW, a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Burada $\{L, N, U, W\}$, L' için bir ortonormal baz olur. Sırasıyla L, N, U ve W ile (2.6) denkleminin skaler çarpımı alınır. L' bir semi-spatial kuaterniyon olduğundan W ve K nın skaler çarpımı

$$L' = KW, h(L', W) = K = 1 \quad (2.7)$$

denklemi ile semi-spatial kuaterniyon elde edilir. Eğer $\|L\| = h(L, L) = 0$ diferensiyelenebilir ve (2.7) denklemi sonucunda, $K(s) \neq 0$ iken

$$W \times \alpha L + L \times \alpha W = 0$$

elde edilir. O halde

- (i) $h(L, W) = 0$, W, L ile h -ortogonaldir.
- (ii) l bir semi-spatial kuaterniyon olduğundan $L \times \alpha W$ bir semi-spatial kuaterniyondur.

Bu durumda, W birim space-like ve l null olduğu aşıkardır. $L = l \times W$ null kuaterniyonik vektör denilsin. β boyunca, L

$$l = L \times \alpha W \text{ ve } L = l \times W \quad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.8), (2.7) ve (2.2) kullanılarak sonuçta

$$U = u \times W \text{ ve } l \times W' = KW - kU \quad (2.9)$$

denklemini bulunur.

U nun özellikleri,

$$(i) \ h(U, U) = U \times \alpha U = 1,$$

(ii) L, U ve W karşılıklı h -ortogonaldır.

(2.9) denkleminde verilen $U = u \times W$ diferensiyellenebilir. Denklem sonucunda (2.8) ve (2.2) kullanılarak

$$U' = \tau L - kN + u \times W', \ N = n \times W \quad (2.10)$$

elde edilir.

N nin özellikleri,

$$(i) \ \|N\|^2 = h(N, N) = 0,$$

(ii) N, U ve W karşılıklı h -ortogonaldır.

O halde, böyle $h(L, N) = 1$ olduğundan L ve N karşılıklı h -ortogonaldır. (2.10) denkleminde $N = n \times W$ diferensiyellenebilirse, denklem sonucunda (2.2) ve (2.9) kullanılarak

$$N' = -\tau U + n \times W' \quad (2.11)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} l \times W' &= KW - kU, \ U = u \times W, \\ U' &= \tau L - kN + u \times W', \ N = n \times W, \\ N' &= -\tau U + n \times W' \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir. Yukarıda incelenen, Frenet denklemleri arasından, yalnızca (2.7) denklemini elde edilmiştir. Aşağıdaki metod ile Frenet denklemleri bulunmak istenmiştir.

$$\begin{aligned} L' &= a_{11}L + a_{12}N + a_{13}U + a_{14}W, \\ N' &= a_{21}L + a_{22}N + a_{23}U + a_{24}W, \\ U' &= a_{31}L + a_{32}N + a_{33}U + a_{34}W, \\ W' &= a_{41}L + a_{42}N + a_{43}U + a_{44}W, \end{aligned}$$

L, N, U, W ile sırasıyla bu denklemlerin skalar çarpımları alınırsa.

$$\begin{bmatrix} L' \\ N' \\ U' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & m & p \\ -m & 0 & 0 & r \\ -p & -K & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ N \\ U \\ W \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Bu matrizen $W' = -pL - KN - rU$ elde edilir. Ve u, n ve l vektörleri ile W' vektörü çarpılırsa

$$\begin{aligned} l \times W' &= KW + KU - rL, \\ n \times W' &= pW - pU + rN, \\ u \times W' &= pL - KN + rW, \end{aligned} \quad (2.14)$$

kuaterniyondur. Dolayısıyla, (2.12) denkleminde (2.14) denklemi yerine konursa

$$\begin{aligned} (K + k)U - rL &= 0 \\ N' &= (-\tau - p)U + pW + rN, \\ U' &= (\tau + p)L - (K + k)N + rW, \end{aligned} \quad (2.15)$$

bulunur. Buradan (2.16) eşitliğine sahip olunur.

$$\begin{bmatrix} L' \\ N' \\ U' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & r & -\tau - p & p \\ \tau + p & -(K + k) & 0 & r \\ -p & -K & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ N \\ U \\ W \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Eğer (2.13) ve (2.16) matrisleri eşitlenirse, $K + k = 0$, $r = 0$ olur. Sonuç olarak

$$\begin{bmatrix} L' \\ N' \\ U' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & \tau - p & p \\ -(\tau - p) & 0 & 0 & 0 \\ -p & -K & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ N \\ U \\ W \end{bmatrix},$$

matrisi elde edilir. Burada, $\mathbb{R}_1^4$ de β eğrisinin birinci eğriliği K dir. $\mathbb{R}_1^3$ de γ eğrisinin birinci eğriliği k dir ve $\mathbb{R}_1^4$ de β eğrisinin ikinci eğriliğinin zıt işaretlisidir. Yinede bu mümkün değildir. Çünkü, $K = 1$ ve $k = 1$ dir. Halbu ki $K + k = 0$ dan $K = -k$ olması

gerekir. Böylece, $K = 1$ ve $k = 1$ alınır. Frenet denklemleri ispatlanamaz. $\mathbb{R}_1^4$ de $\vec{e}_1$ time-like olduğu halde $\mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısı oluşturulamaz [16].

2. Durum: ($\vec{e}_2$ bir time-like vektör olsun.)

$\mathbb{R}_1^4$ de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 = 1\}$ bir ortonormal baz ve $\vec{e}_2$ bir time-like vektör olsun.

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_2 + \vec{e}_1), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_2 - \vec{e}_1), \quad U = \vec{e}_3, \quad W = \vec{e}_4$$

vektörlerinin oluşturduğu

$$\begin{aligned} h(L, L) &= h(N, N) = h(L, U) = h(N, U) = h(W, U) \\ &= h(N, W) = h(L, W) = 0, \\ h(U, U) &= h(W, W) = +1, \\ h(L, N) &= -1, \end{aligned}$$

sağlanır.

U ve W space-like vektörler ve L ve N null vektörleri için $\{L, N, U, W\}$, $\mathbb{R}_1^4$ de bir bazdır. h kuaterniyonik metrik eğri ile $\mathbb{R}_1^4$ de bir 4-boyutlu Minkowski uzayı belirtir. Birim kuaterniyon uzaylar ile tanımlanan $\mathbb{R}_1^4$ de 4-boyutlu Minkowski uzaylarıdır. I aralığı üzerinde tanımlanan $\mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik eğri

$$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_\nu$$

$$\beta = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3 + \gamma_4 \vec{e}_4$$

olsun. Sıfır uzunluğa sahip $L(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i'(s) \vec{e}_i$ teğeti gibi olan s parametresi seçilir. $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzaylarında diferensiyellenebilir Minkowski uzay eğrisinin Frenet elemanları $\{L(s), N(s), U(s), W(s)\}$ olsun. (1. Durum) önermesi ile β nın özel sınıfı Frenet çatısı ve Frenet denklemleri tanımlansın.

Frenet denklemleri,

$$L' = KW, \quad N' = (\tau + p)U + pW,$$

$$U' = (\tau + p)L, \quad W' = pL + KN$$

ve

$$L' = KW, \quad N' = -(\tau - p)U + pW,$$

$$U' = -(\tau - p)L, \quad W' = pL + KN$$

dir. Burada, $\mathbb{R}_1^4$ de β eğrisinin birinci eğriliği K , $\mathbb{R}_1^3$ de γ eğrisinin birinci eğriliği k dır ve $\mathbb{R}_1^4$ de β eğrisi için ikinci eğriliktir. Gerçekten $K = 1$ ve $k = 1$ bulunur. Ve bu değerler $(K - k) = 0$ sağlar. $\mathbb{R}_1^4$ de $\vec{e}_2$ bir time-like vektör, $\mathbb{R}_1^4$ de bir null kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısı bulunur [16].



3. NULL KUATERNİYONİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde M. Aykut Akgün [18] tarafından Minkowski uzayında bazı eğrilerin karakterizasyonları olarak verilen çalışma $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ uzaylarının alt uzaylarında kalan null kuaterniyonik eğrilere uygulanmıştır.

3.1 $\mathbb{R}_1^3$ Uzayında Null Kuaterniyonik Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması için Karakterizasyonlar

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_{\mathbb{R}_1^3}$ null kuaterniyonik eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{l, n, u\}$ şeklinde Frenet çatısı vardır.

$$\begin{aligned} l' &= ku, \\ n' &= -\tau u, \\ u' &= -\tau l + kn. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada $l = \gamma'(s)$ ve l, n, u karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned} h(l, l) &= h(n, n) = h(l, u) = h(n, u) = 0, \\ h(l, n) &= h(u, u) = 1 \end{aligned}$$

[16].

1. Durum Bir γ null kuaterniyonik eğrisinin $\{l, n\}$ (oskulator düzlem) tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(s) = \lambda(s)l + \mu(s)n \tag{3.2}$$

yazılabilir. Çalışma boyunca $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\vartheta(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları λ , μ ve ϑ olarak ifade edilecektir.

(3.2) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\gamma'(s) = \lambda' l + \mu' n + \lambda l' + \mu n'$$

bulunur. Burada (3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\gamma'(s) = \lambda' l + \mu' n + \lambda k u + \mu(-\tau u)$$

dir. $\gamma'(s) = l$ olduğundan

$$l = \lambda' l + \mu' n + (\lambda k - \mu \tau) u \quad (3.3)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned} \lambda' &= 1, \\ \mu' &= 0, \\ \lambda k - \mu \tau &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\lambda' = 1$ ise $\lambda = s + c_1$ bulunur. Ayrıca $\mu' = 0$ dan $\mu = c_2$ bulunur. Bulunan λ ve μ (3.4) de üçüncü denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (s + c_1) k - c_2 \tau &= 0, \\ \frac{k}{\tau} &= \frac{c_2}{s + c_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1 Bir γ null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^3$ uzayının $\{l, n\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $\frac{k}{\tau} = \frac{c_2}{s+c_1}$ olmak üzere

$$\gamma(s) = (s + c_1)l + c_2 n$$

şeklinde olmasıdır.

2. Durum Bir γ null kuaterniyonik eğrisinin $\{l, u\}$ (rektifiyen düzlem) tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(s) = \lambda l + \mu u \quad (3.5)$$

yazılabilir. (3.5) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\gamma'(s) = \lambda' l + \mu' u + \lambda l' + \mu u'$$

bulunur. Burada (3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\gamma'(s) = \lambda' l + \mu' u + \lambda k u + \mu(-\tau l + kn)$$

dir. $\gamma'(s) = l$ olduğundan

$$l = (\lambda' - \mu\tau) l + (\mu' + \lambda k) u + \mu kn \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned} \lambda' - \mu\tau &= 1, \\ \mu' + \lambda k &= 0, \\ \mu k &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Eğer $\mu = 0$ ve $k = 0$ ise ilk denklemden $\lambda = s + c$ olarak bulunur. Eğer $k = 0$ ise ikinci denklemden $\mu = c_1$ elde edilir. Ayrıca ilk denklemden $\lambda = \int (1 + c_1\tau) ds$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2 Bir γ null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^3$ uzayının $\{l, u\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart

i) $\mu = 0$ ve $k = 0$ olmak üzere

$$\gamma(s) = (s + c)l,$$

ii) $k = 0$ olmak üzere

$$\gamma(s) = \left(\int (1 + c_1\tau) ds \right) l + c_1 u$$

şeklinde olmasıdır.

3. Durum Bir γ null kuaterniyonik eğrisinin $\{u, n\}$ (normal düzlem) tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(s) = \lambda u + \mu n \quad (3.8)$$

yazılabilir. (3.8) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\gamma'(s) = \lambda' u + \mu' n + \lambda u' + \mu n'$$

bulunur. Burada (3.1) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\gamma'(s) = \lambda' l + \mu' n + \lambda(-\tau l + kn) + \mu(-\tau u)$$

dir. $\gamma'(s) = l$ olduğundan

$$l = (\lambda' - \mu\tau) u + (\mu' + \lambda k) n - \lambda\tau l \quad (3.9)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned} -\lambda\tau &= 1, \\ \lambda' - \mu\tau &= 0, \\ \mu' + \lambda k &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada (3.10) denklemlerinin ortak bir çözümü yoktur. Dolayısıyla γ null kuaterniyonik eğrisi $\{u, n\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalamaz.

3.2. $\mathbb{R}_1^4$ Uzayında Null Kuaterniyonik Eğrilerin Bazı Alt Uzaylarda Kalması için Karakterizasyonlar

$\mathbb{R}_1^4$ uzayında $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q_{\mathbb{R}_1^4}$ null kuaterniyonik eğrisinin aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlayan $\{L, N, U, W\}$ şeklinde Frenet çatısı vardır.

$$\begin{aligned} L' &= KW, \\ N' &= (\tau + p)U + pW, \\ U' &= (\tau + p)L, \\ W' &= pL + KN. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Burada $L = \beta'(s)$ ve L, N, U, W karşılıklı ortogonal vektörleri aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} h(L, L) &= h(N, N) = h(L, U) = h(N, U) = h(W, U) \\ &= h(N, W) = h(L, W) = 0, \\ h(U, U) &= h(W, W) = 1, \\ h(L, N) &= -1 \end{aligned}$$

[16].

1. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{L, N\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda L + \mu N \tag{3.12}$$

yazılabilir. (3.12) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' N + \lambda L' + \mu N'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' N + \lambda KW + \mu(\tau + p)U + \mu pW$$

dır. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = \lambda' L + \mu' N + (\lambda K + \mu p)W + \mu(\tau + p)U \tag{3.13}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\begin{aligned}\lambda' &= 1, \\ \mu' &= 0, \\ \lambda K + \mu p &= 0, \\ \mu(\tau + p) &= 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

$\mu = 0$ ve $(\tau + p) \neq 0$ ise $\lambda' = 1$ eşitliğinde integral alınarak $\lambda = s + c$ ve ayrıca $K = 0$ bulunur. Eğer $\mu \neq 0$ ise $\mu = c_1$ ve son denklemden $\tau = -p$ olur. λ ve μ üçüncü denklemde yerine yazılırsa $\frac{K}{\tau} = \frac{c_1}{s+c}$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{L, N\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter koşul

i) $\mu = 0$ ve $(\tau + p) \neq 0$ ve $K = 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = (s + c)L,$$

ii) $\mu \neq 0$ ve $\tau = -p$ ve $\frac{K}{\tau} = \frac{c_1}{s+c}$ olmak üzere

$$\beta(s) = (s + c)L + c_1N$$

şeklinde olmasıdır. Burada c, c_1 sabittir.

2. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{L, U\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda L + \mu U\tag{3.15}$$

yazılabilir. (3.15) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' U + \lambda L' + \mu U'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' U + \lambda KW + \mu(\tau + p)L$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = [\lambda' + \mu(\tau + p)]L + \mu'U + \lambda KW\tag{3.16}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}\lambda' + \mu(\tau + p) &= 1, \\ \mu' &= 0, \\ \lambda K &= 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

$K \neq 0$ olmak üzere $\lambda = 0$ dır. Dolayısıyla ilk denklemden $\mu = \frac{1}{\tau+p}$ bulunur. Eğer $K = 0$ ise ikinci denklemden $\mu = c$ bulunur ve ilk denklemde yerine yazılırsa $\lambda = \int (1 - c(\tau + p)) ds$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{L, U\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart

i) $K \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{1}{\tau + p}U,$$

ii) $K = 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \left[\int (1 - c(\tau + p)) ds \right] L + cU$$

şeklinde olmasıdır. Burada c sabittir.

3. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{L, W\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda L + \mu W \tag{3.18}$$

yazılabilir. (3.18) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' W + \lambda L' + \mu W'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' W + \lambda KW + \mu(pL + KN)$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = (\lambda' + \mu p) L + (\mu' + \lambda K) W + \mu KN \tag{3.19}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}\lambda' + \mu p &= 1, \\ \mu' + \lambda K &= 0, \\ \mu K &= 0.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Son denklemden dolayı $\mu = 0$ olsun. O halde birinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda = s + c$ bulunur. Eğer son denklemde $K = 0$ alınırsa ikinci denklemden dolayı $\mu = c_1$ dir. Bilinenler birinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda = (1 - c_1 p) s + c_2$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{L, W\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

i) $\mu = 0$ ve $K \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = (s + c) L$$

ii) $K = 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = [(1 - c_1 p) s + c_2] L + c_1 W$$

şeklinde olmasıdır.

4. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{N, U\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda N + \mu U \tag{3.21}$$

yazılabilir. (3.21) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' N + \mu' U + \lambda N' + \mu U'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' N + \mu' U + \lambda [(\tau + p) U + p W] + \mu (\tau + p) L$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = \lambda' N + [\mu' + \lambda(\tau + p)] U + \lambda p W + \mu(\tau + p) L \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}\mu(\tau + p) &= 1, \\ \lambda' &= 0, \\ \mu' + \lambda(\tau + p) &= 0, \\ \lambda p &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Eğer son denklemden $\lambda = 0$ ve $p \neq 0$ ise ilk denklemden $\mu = \frac{1}{\tau+p}$ bulunur. Eğer $p = 0$ ise ilk denklemden $\mu = \frac{1}{\tau}$ bulunur μ nün s ye türevi alınır $\mu' = -\frac{\tau'}{\tau^2}$ elde edilir. Bilinenler üçüncü denklemden yerine yazılırsa $\lambda = \frac{\tau'}{\tau^3}$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{N, U\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için gerek ve yeter şart

i) $\lambda = 0$ ve $p \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{1}{\tau + p}U,$$

ii) $p = 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{\tau'}{\tau^3}N + \frac{1}{\tau}U$$

şeklinde olmasıdır.

5. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{N, W\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda N + \mu W\tag{3.24}$$

yazılabilir. (3.24) denkleminde s ye göre türev alınır;

$$\beta'(s) = \lambda' N + \mu' W + \lambda N' + \mu W'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' N + \mu' W + \lambda[(\tau + p)U + pW] + \mu(pL + KN)$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = \mu p L + (\lambda' + \mu K)N + \lambda(\tau + p)U + (\mu' + \lambda p)W\tag{3.25}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}\mu p &= 1, \\ \lambda' + \mu K &= 0, \\ \lambda(\tau + p) &= 0, \\ \mu' + \lambda p &= 0.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Burada ilk denklemden $\mu = \frac{1}{p}$ bulunur. Üçüncü denklemden $\lambda = 0$ ve $(\tau + p) \neq 0$ ise $K = 0$ olmak üzere bilinenler tüm denklemleri sağlar. Ayrıca $(\tau + p) = 0$ ise son denklemden $\lambda = \frac{p'}{p^3}$ bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.5 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{N, W\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart

i) $\lambda = 0$, $(\tau + p) \neq 0$, $K = 0$ ve $p \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{1}{p}W,$$

ii) $\tau = -p$ ve $p \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{p'}{p^3}N + \frac{1}{p}W$$

şeklinde olmasıdır.

6. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{U, W\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ ve μ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda U + \mu W\tag{3.27}$$

yazılabilir. (3.27) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda'U + \mu'W + \lambda U' + \mu W'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda'U + \mu'W + \lambda(\tau + p)L + \mu(pL + KN)$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = [\lambda(\tau + p) + \mu p]L + \mu KN + \lambda'U + \mu'W\tag{3.28}$$

elde edilir. Bu eşitliğe göre aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}\lambda' &= 0, \\ \mu' &= 0, \\ \lambda(\tau + p) + \mu p &= 1, \\ \mu K &= 0.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Buradan eğer $\mu = 0$ ve $K \neq 0$ ise üçüncü denklemden $\lambda = \frac{1}{\tau+p}$ bulunur. Eğer $K = 0$ ise ilk denklemden $\lambda = c_1$ ve ikinci denklemden $\mu = c_2$ elde edilir. λ ve μ üçüncü denklemde yerine konulursa $c_1 = \frac{1-c_2p}{\tau+p}$ eşitliği bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.6 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{U, W\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart

i) $\mu = 0$ ve $K \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{1}{\tau + p}U,$$

ii) $K = 0$ ve $c_1 = \frac{1-c_2p}{\tau+p}$ olmak üzere

$$\beta(s) = c_1U + c_2W$$

şeklinde olmasıdır.

7. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{L, N, U\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve ϑ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda L + \mu N + \vartheta U\tag{3.30}$$

yazılabilir. (3.30) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' N + \vartheta' U + \lambda L' + \mu N' + \vartheta U'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' N + \vartheta' U + \lambda KW + \mu[(\tau + p)U + pW] + \vartheta(\tau + p)L$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = \left[\lambda' + \vartheta(\tau + p) \right] L + \mu' N + \left[\vartheta' + \mu(\tau + p) \right] U + (\lambda K + \mu p) W \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu son eşitliğe göre aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned} \lambda' + \vartheta(\tau + p) &= 1, \\ \vartheta' + \mu(\tau + p) &= 0, \\ \mu' &= 0, \\ \lambda K + \mu p &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Burada $\mu' = 0$ olduğundan $\mu = c$ dir. Son denklemde yerine yazılırsa $K \neq 0$ olmak üzere $\lambda = -c \frac{p}{K}$ bulunur. Ayrıca $\mu = c$ ikinci denklemde yazılırsa $\vartheta = -c \int (\tau + p) ds + c_1$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.7 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{L, N, U\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart K sıfırdan farklı olmak üzere

$$\beta(s) = -c \frac{p}{K} L + cN + \left[-c \int (\tau + p) ds + c_1 \right] U$$

şeklinde olmasıdır.

8. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{L, N, W\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve ϑ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda L + \mu N + \vartheta W \quad (3.33)$$

yazılabilir. (3.33) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' N + \vartheta' W + \lambda L' + \mu N' + \vartheta W'$$

elde edilir. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' N + \vartheta' W + \lambda K W + \mu [(\tau + p) U + p W] + \vartheta (p L + K N)$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = \left(\lambda' + \vartheta p \right) L + \left(\mu' + \vartheta K \right) N + \mu(\tau + p) U + \left(\vartheta' + \lambda K + \mu p \right) W \quad (3.34)$$

bulunur. (3.34) eşitliğinden aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}
\lambda' + \vartheta p &= 1, \\
\mu' + \vartheta K &= 0, \\
\mu(\tau + p) &= 0, \\
\vartheta' + \lambda K + \mu p &= 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$\mu(\tau + p) = 0$ denkleminde $\mu = 0$ ise yukarıdaki denklemlerden çözüm olmadığı görülür. $\mu \neq 0$, $(\tau + p) = 0$ ve $K \neq 0$ iken son denklemde s ye göre türev alınırsa;

$$\vartheta'' + \lambda' K + \mu' p = 0$$

elde edilir. Ayrıca ilk denklemden $\lambda' = 1 - \vartheta p$ ve ikinci denklemden $\mu' = -\vartheta K$ eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\vartheta'' + (1 - \vartheta p) K + (-\vartheta K) p &= 0, \\
\vartheta'' + K - \vartheta p K - \vartheta K p &= 0, \\
\vartheta'' - 2pK\vartheta + K &= 0,
\end{aligned}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözülerek $p \neq 0$ olmak üzere

$$\vartheta = c_1 e^{\sqrt{2pK}s} + c_2 e^{-\sqrt{2pK}s} + \frac{1}{2p}$$

bulunur. O halde $\lambda' = 1 - \vartheta p$ eşitliğinde ϑ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\lambda' &= 1 - \left(c_1 e^{\sqrt{2pK}s} + c_2 e^{-\sqrt{2pK}s} + \frac{1}{2p} \right) p \\
\lambda' &= \frac{1}{2} - c_1 p e^{\sqrt{2pK}s} - c_2 p e^{-\sqrt{2pK}s} \\
\lambda &= \int \left(\frac{1}{2} - c_1 p e^{\sqrt{2pK}s} - c_2 p e^{-\sqrt{2pK}s} \right) ds + c_3
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde $\mu' = -\vartheta K$ eşitliğinde ϑ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\mu' &= - \left(c_1 e^{\sqrt{2pK}s} + c_2 e^{-\sqrt{2pK}s} + \frac{1}{2p} \right) K \\
\mu' &= -c_1 K e^{\sqrt{2pK}s} - c_2 K e^{-\sqrt{2pK}s} - \frac{K}{2p} \\
\mu &= \int \left(-c_1 K e^{\sqrt{2pK}s} - c_2 K e^{-\sqrt{2pK}s} - \frac{K}{2p} \right) ds + c_4
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.8 Bir β null katerniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{L, N, W\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart $\tau + p = 0$ ve K sıfırdan farklı olmak üzere

$$\begin{aligned}\beta(s) = & \left[\int \left(\frac{1}{2} - c_1 p e^{\sqrt{2pK}s} - c_2 p e^{-\sqrt{2pK}s} \right) ds + c_3 \right] L \\ & + \left[\int \left(-c_1 K e^{\sqrt{2pK}s} - c_2 K e^{-\sqrt{2pK}s} - \frac{K}{2p} \right) ds + c_4 \right] N \\ & + \left[c_1 e^{\sqrt{2pK}s} + c_2 e^{-\sqrt{2pK}s} + \frac{1}{2p} \right] W\end{aligned}$$

şeklinde olmasıdır.

9. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{L, U, W\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve ϑ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda L + \mu U + \vartheta W \quad (3.36)$$

yazılabilir. (3.36) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' U + \vartheta' W + \lambda L' + \mu U' + \vartheta W'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda' L + \mu' U + \vartheta' W + \lambda K W + \mu(\tau + p) L + \vartheta(pL + KN)$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = \left[\lambda' + \mu(\tau + p) + \vartheta p \right] L + \mu' U + \left(\vartheta' + \lambda K \right) W + \vartheta K N \quad (3.37)$$

elde edilir. (3.37) eşitliğinden aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}\lambda' + \mu(\tau + p) + \vartheta p &= 1, \\ \mu' &= 0, \\ \vartheta' + \lambda K &= 0, \\ \vartheta K &= 0.\end{aligned} \quad (3.38)$$

Eğer $\vartheta = 0$ ve $K \neq 0$ ise üçüncü denklemden $\lambda = 0$ bulunur. Ayrıca bilinenler ilk denklemde yerine yazılırsa $\mu = \frac{1}{\tau+p}$ elde edilir. Eğer $K = 0$ ise üçüncü denklemden $\vartheta = c_1$ ve ikinci denklemden $\mu = c_2$ bulunur. İlk denklemde ϑ ve μ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\lambda' + c_2(\tau + p) + c_1p &= 1 \\ \lambda' &= 1 - c_2(\tau + p) - c_1p \\ \lambda &= \int [1 - c_2(\tau + p) - c_1p] ds + c_3\end{aligned}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.9 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{L, U, W\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart

i) $\vartheta = 0$ ve $K \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{1}{\tau + p}U,$$

ii) $K = 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \left[\int [1 - c_2(\tau + p) - c_1p] ds + c_3 \right] L + c_2U + c_1W$$

şeklinde olmasıdır.

10. Durum Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\{N, U, W\}$ tarafından gerilen alt uzayda kalması için şartlar araştırılacaktır. Bu durumda s parametresine bağlı λ, μ ve ϑ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\beta(s) = \lambda N + \mu U + \vartheta W \quad (3.39)$$

yazılabilir. (3.39) denkleminde s ye göre türev alınırsa;

$$\beta'(s) = \lambda'N + \mu'U + \vartheta'W + \lambda N' + \mu U' + \vartheta W'$$

bulunur. Burada (3.11) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\beta'(s) = \lambda'N + \mu'U + \vartheta'W + \lambda[(\tau + p)U + pW] + \mu(\tau + p)L + \vartheta(pL + KN)$$

dir. $\beta'(s) = L$ olduğundan

$$L = [\mu(\tau + p) + \vartheta p]L + (\lambda' + \vartheta K)N + [\mu' + \lambda(\tau + p)]U + (\vartheta' + \lambda p)W \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.40) eşitliğinden aşağıdaki denklemler yazılabilir;

$$\begin{aligned}\mu(\tau + p) + \vartheta p &= 1, \\ \lambda' + \vartheta K &= 0, \\ \mu' + \lambda(\tau + p) &= 0, \\ \vartheta' + \lambda p &= 0.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Burada üçüncü denklemden $\mu' = -\lambda(\tau + p)$ ve son denklemden $\vartheta' = -\lambda p$ bulunur. Diğer yandan ilk denklemin s ye göre türevi alınırsa

$$\mu'(\tau + p) + \vartheta'p = 0\tag{3.42}$$

olur. μ' ve ϑ' eşitlikleri (3.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda(\tau + p)^2 + \lambda p^2 &= 0 \\ \lambda[(\tau + p)^2 + p^2] &= 0\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\lambda = 0$ ise (3.41) deki ikinci denklemden $\vartheta K = 0$ olur ki burada iki durum incelenecektir.

i) $\vartheta = 0$ ve $K \neq 0$ ise (3.41) deki ilk denklemden $\mu = \frac{1}{\tau + p}$ bulunur.

ii) $K = 0$ ise (3.41) deki üçüncü denklemden $\mu = c_1$ ve son denklemden $\vartheta = c_2$ bulunur.

Diğer yandan $(\tau + p)^2 + p^2 = 0$ ise (3.41) deki denklemlerden çözüm olmadığı görülür. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.10 Bir β null kuaterniyonik eğrisinin $\mathbb{R}_1^4$ uzayının $\{N, U, W\}$ ile gerilen alt uzayında kalması için gerek ve yeter şart

i) $\lambda = 0$, $\vartheta = 0$ ve $K \neq 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = \frac{1}{\tau + p}U,$$

ii) $\lambda = 0$ ve $K = 0$ olmak üzere

$$\beta(s) = c_1U + c_2W$$

şeklinde olmasıdır.

4. SONUÇ

Bu çalışmada 3 ve 4 boyutlu Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğrilerin karakterizasyonları incelenmiştir. Çalışmamızda öncelikle temel geometrik kavramlar ifade edilmiştir ve bu kavramlar yardımıyla ikinci bölümde özellikle $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğriler incelenmiştir. Ardından $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir.

Üçüncü bölüm ise çalışmanın orijinal kısmı olup $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzaylarında null kuaterniyonik eğrilerin alt uzaylarda kalması için karakterizasyonlar ifade ve ispat edilmiştir.

Yapılan bu çalışmalar sonucunda $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğrilerin mümkün olan 3 farklı alt uzayda kalması için gerekli şartlar ifade edilmiştir. Null kuaterniyonik eğrilerin rektifiyen ve oskületör düzlemlerde kalması için gerekli bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Fakat normal düzlemde kalamayacağı sonucuna varılmıştır.

Benzer yaklaşımla $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayında null kuaterniyonik eğrilerin mümkün olan 10 farklı alt uzayda kalması için gerekli şartlar ifade edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

- [1] **Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyon Teorisi, G.Ü., Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No(=2), Ankara.
- [2] **Bharathi, K. and Nagaraj, M.**, 1987. Regularity For Quaternion Functions Of Several Complex Variables, Ind. J. Pure App. Math., **18**(8) : 697 – 704.
- [3] **Bharathi, K. and Nagaraj, M.**, 1987. Quaternion Valued Function Of a Real Variable Serret-Frenet Formulae, Ind. J. P. App. Math., **18**(6) , 507 – 511.
- [4] **Mercan, Y. ve Karlığa, B.**, 2007. Pseudo Kuaterniyonlar, Pseudo Hiperbolik Uzay ve Pseudo Küresel Uzaylar, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.
- [5] **O'Neill, B.**, 1983. Semi-Riemannian Geometry, Academic Press., New York.
- [6] **Hacısalıhoğlu, H. H.**, 1983. Diferensiyel Geometri, İ.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No=2, Malatya.
- [7] **Duggal, K. L. and Bejancu, A.**, 1996. Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic Publishers.
- [8] **Chen, B. Y.**, 1994. Some Classification Teorems For Submanifolds In Minkowski Space Time, Arch. Math. Vol. 62.
- [9] **Beem, J. K. and Ehrlich, P. E.**, 1981. Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, Inc. New York.
- [10] **Yamada, K.**, 1988. Complete Space Like Surfaces With Constant Mean Curvature in The Minkowski 3-Space, Tokyo, J. Math. Vol. 11. 329-338.
- [11] **Naber, G. L.**, 1992. The Geometry of Minkowski Space Time, Springer Verlag Inc., New York.
- [12] **Ergin, A. A. ve Hacısalıhoğlu, H. H.**, 1989. Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri, Doktora Tezi, Ankara.
- [13] **Ekmekçi, N. ve Hacısalıhoğlu, H. H.**, 1993. Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara.

- [14] **Bharathi, K. and Nagaraj, M.**, 1985. Geometry of Quaternionic and Pseudo Quaternionic Multiplications, Ind. J. Pure. App. Math., **16**(7) : 741 – 756.
- [15] **Aksoy, A. T.**, 2016. Pseudo-Spherical Null Quaternionic Curves in Minkowski Space $\mathbb{R}_1^4$, Acta Physica Polonica A, 259-261, Vol.130.
- [16] **Aksoy, A. T. and Coken, A. C.**, 2015. Serret-Frenet Formulae for Null Quaternionic Curves in Semi Euclidean 4-Space $\mathbb{R}_1^4$, Acta Physica Polonica A, B-293-296, Vol.128.
- [17] **Karadağ, M. ve Sivridağ, A. İ.**, 1999. Kuaterniyonik Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları, Doktora Tezi, Malatya.
- [18] **Aygün, M. A.**, 2015. Minkowski Uzayında Bazı Eğrilerin Karakterizasyonları, Doktora Tezi, Malatya.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında İstanbul 'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi İstanbul 'da tamamladım. 2008 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2013 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl özel kurumlarda Matematik öğretmenliğı yapmaya başladım ve 3 yıl kadar çalışmaya devam ettim. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalında yüksek lisansa başladım.

