

**ÖKLİDSEL OLMAYAN UZAYLARDA REGLE YÜZEYLERİN
EĞRİLİKLERİ İÇİN BAZI KARAKTERİZASYONLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer Merve PEKER

(101121125)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)

HAZİRAN-2015

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİDSEL OLMAYAN UZAYLARDA REGLE YÜZEYLERİN
EĞRİLİKLERİ İÇİN BAZI KARAKTERİZASYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hacer Merve PEKER

(101121125)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26/05/2015

Tezin Savunulduğu Tarih : 11/06/2015

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (İ.Ü)

HAZİRAN-2015

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Lorentz, Galilean ve pseudo-Galilean uzaylarının temel tanım ve teoremleri verildi.

İkinci bölümde; 3-boyutlu Lorentz uzayında, Galilean uzayında ve pseudo-Galilean uzayında regle yüzeyler hakkında bazı önemli kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde; 3-boyutlu Lorentz uzayında regle yüzeyler için Lamarle formülü verildi.

Dördüncü bölümde; Galilean ve pseudo-Galilean uzaylarında regle yüzeylerin Gauss eğriliği ve dağılma parametresi arasındaki ilişki verildi.

Beşinci bölümde ise; çalışmayla ilgili örneklere yer verildi.

SUMMARY

Some Characterications for The Curvatures of Ruled Surfaces in Non-Eucledian Spaces

This study is consisted of five chapters:

In the first chapter, some basic definitions and theorems of 3-dimensionel Lorentz, Galilean and pseudo-Galilean spaces are given.

In chapter second, some basic definitions of ruled surfaces in 3-dimensional Lorentz, Galilean and pseudo-Galilean spaces are given.

In chapter third, Lamarle Formula for the ruled surfaces in 3-dimensional Lorentz space are given.

In chapter fourth, the relation between Gaussian curvature and distribution parameter of a ruled surface in 3-dimensional Galilean and pseudo-Galilean spaces are given.

In chapter fifth, some examples which concerning this study are given.

SEMBOLLER LİSTESİ

R_1^3	: 3-boyutlu Lorentz uzayı
G^3	: 3-boyutlu galilean uzayı
G_1^3	: 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayı
K	: Gauss eğriliği
D	: Dağılma parametresi
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon
$\varphi(u, v)$	: Regle Yüzey

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam sayın; Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ' e şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Hacer Merve PEKER

Elazığ - 2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
Özet	I
Summary	II
Semboller Listesi	III
Teşekkür	IV
İçindekiler	V
Giriş	VI
I. Bölüm	
1.1. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar	1
1.2. Galilean Uzayında Temel Kavramlar	4
1.3. Pseudo-Galilean Uzayında Temel Kavramlar	5
II. Bölüm	
2.1. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler	6
2.2. 3- Boyutlu Galilean Uzayında Regle Yüzeyler	7
2.3. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeyler	10
III. Bölüm 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler İçin Lamarle Formülü	
3.1. Spacalike Regle Yüzeyler İçin Lamarle Formülü	12
3.2. Spacelike Dayanak Eğrili ve Timelike Rulingli Timelike Regle Yüzeyler için Lamarle Formülü	17
3.3. Timelike Dayanak Eğrili ve Spacelike Rulingli Timelike Regle Yüzeyler için Lamarle Formülü	21
IV.Bölüm Galilean ve Pseudo-Galilean Uzaylarında Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği ve Dağılma Parametresi Arasındaki İlişki	26
V.Bölüm Örnekler	28
Kaynaklar	31
Özgeçmiş	32

GİRİŞ

Yüzeylerin diferansiyel geometrisi geometri alanının önemli inceleme alanlarından birisidir. Bu alanda Öklid uzayında ve Öklidsel olmayan uzaylardaki yüzeyler daha çok diferansiyel integral hesabın metodları kullanılarak incelenir [1,3,5]. Geometri alanında birçok araştırmacı yüzeyleri çok farklı açılardan incelemiştir.

Bu yüzeyler arasında Regle yüzeyler önemli rol oynamıştır. 3-boyutlu Minkowski uzayında Time-like Regle yüzeyler, Weingarten Regle yüzeyler, Space-like Regle yüzeyler ve eğilim çizgileri bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [2,4,6,8].

Son zamanlarda birçok uzayda Lamarle formülü incelenmiştir. Bir yüzeyin Gauss eğriliği ile dağılma parametresi arasındaki ilişkiyi tanımlayan eşitlik regle yüzey için Lamarle formülü olarak adlandırılır. 3-boyutlu Lorentz uzayında da Lamarle formülü bazı araştırmacılar tarafından incelenmiştir [7].

Ayrıca öklidsel olmayan uzaylarda araştırmacılara son zamanlarda Galilean ve pseudo-Galilean uzayda ilham kaynağı olmuştur. Öklid uzayında çalışılan bazı araştırmaların bu uzaylardaki karşılıkları da bulunmaya çalışılmıştır [9,10,11,12,13].

Bu çalışmada öncelikle Lorentz uzayında Lamarle formülü detaylıca ele alınmış ve ardından Galilean ve pseudo-Galilean uzaylarında da karşılıkları araştırılmıştır. Bu alanda ele alınan bazı araştırmalardan elde edilen çalışmaların sonuçları verilmiştir.

I. BÖLÜM

1.1. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1: $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında standart metrik; $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ ün dik koordinat sistemi olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$

ile verilir. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında bir $\vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörü

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \quad \text{veya} \quad \vec{v} = 0 \quad \text{ise} \quad \text{spacelike,}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0 \quad \text{ise} \quad \text{timelike,}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \vec{v} \neq 0 \quad \text{ise} \quad \text{null(lightlike)} \quad \text{olarak} \quad \text{adlandırılır.}$$

Benzer şekilde bir $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s) \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi de bütün hız vektörleri $\vec{\alpha}'(s)$ ler spacelike, timelike veya null(lightlike) ise sırasıyla spacelike, timelike ya da null eğri olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.2: $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayı olmak üzere; $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ için $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ise $\vec{u}, \vec{v}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir [1].

Sonuç 1.1.1: Her ikisi de timelike veya spacelike olan iki vektör birbirine dik olamaz [2].

Tanım 1.1.3: $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayı olmak üzere; $\vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörünün normu;

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem 1.1.1: $\vec{v} \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere;

- i) $\|\vec{v}\| > 0$ dır.
- ii) $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ bir null vektördür.
- iii) $\vec{v}$ bir timelike vektör olsun. Bu durumda,
$$\|\vec{v}\|^2 = -\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

olur.

iv) $\vec{v}$ bir spacelike vektör olsun. Bu durumda

$$\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$

olur [2].

Tanım 1.1.4: $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayındaki bütün timelike vektörlerin kümesi ℓ olsun. Bütün $\vec{u} \in \ell$ için

$C(\vec{u}) = \{ \vec{v} \in \ell ; \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle < 0 \}$ kümesi $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayının $\vec{u}$ vektörünü içeren time-konisi olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.5: $\vec{v}$ ve $\vec{w}$, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayında iki timelike vektör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \geq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| .$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ lineer bağımlı olduğunda gerçekleşir.

Eğer $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ timelike vektörleri aynı time-konisinin elemanı ise

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Buradaki θ sayısı timelike vektörler arasındaki açı olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.6: $\vec{v}$ ve $\vec{w}$, $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında bir spacelike alt uzayı geren iki spacelike vektör olsun. Bu durumda, eşitlik durumu ancak ve ancak $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ lineer bağımlılığıyla gerçekleşen aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz;

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| .$$

Dolayısıyla

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır ki; θ , $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ spacelike vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı olarak adlandırılır [3].

Tanım 1.1.7: $\vec{v}$ ve $\vec{w}$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir timelike alt uzayı geren iki spacelike vektör olsun. Bu durumda

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| > \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

olur. Dolayısıyla bir tek $\theta > 0$ sayısı için

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cosh \theta$$

dır. Burada θ , $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ spacelike vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açısı olarak adlandırılır [3].

Tanım 1.1.8: 3-boyutlu Lorentz uzayında $\vec{v}$ spacelike, $\vec{w}$ ise bir timelike vektör olsun. Bu durumda bir tek $\theta \geq 0$ sayısı için

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sinh \theta$$

yazılır. θ , $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açısı olarak adlandırılır [3].

Tanım 1.1.9: Herhangi iki $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}_1^3$ vektörlerinin Lorentzian vektörel çarpımı

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_2 w_1 - v_1 w_2)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Sonuç 1.1.2: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

- i) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,
- ii) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}$,
- iii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = 0$,
- iv) $\langle \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = 0$ dır [2].

1.2. 3-Boyutlu Galilean Uzayında Temel Kavramlar

G_3 Galilean uzayı, 3-boyutlu P_3 kompleks projektif uzayının w ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini $f \subset w$ ideal doğruların bir reel doğrusunu ve $I_1, I_2 \in f$ gibi ideal

noktalardan iki tanesini içeren $\{w, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahip olan bir halidir. Galilean geometri, projektif işareti $(0,0,+,+)$ olan reel Cayley-Klein Geometrilerinden biridir.

Tanım 1.2.1: $X(x,y,z)$, G_3 3-boyutlu Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer $X(x,y,z)$ vektörü için $x = 0$ ise $X(x,y,z)$ vektörü izotropik vektör olarak adlandırılır [11].

Tanım 1.2.2: $X(x,y,z)$, G_3 3-boyutlu Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer $X(x,y,z)$ vektörü için $x \neq 0$ ise $X(x,y,z)$ vektörü non-izotropik vektör olarak adlandırılır [11].

Tanım 1.2.3: $X(x,y,z)$, G_3 3-boyutlu Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer $x=1$ ise $X(x,y,z)$ vektörüne birim non-izotropik vektör denir. Yani bütün birim non-izotropik vektörler $X(1,y,z)$ formundadır [11].

Tanım 1.2.4: 3-boyutlu Galilean uzayı G_3 olsun.

$\forall X_1(x_1, y_1, z_1), X_2(x_2, y_2, z_2) \in G_3$ vektörü için Galilean iç çarpımı;

$$g : G_3 \times G_3 \rightarrow R$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow g(X_1, X_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & , x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 + z_1 z_2 & , x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 1.2.5: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X(0,y,z)$ izotropik vektörünü göz önüne alalım. Eğer $y^2 + z^2 = 1$ ise bu $X(0,y,z)$ izotropik vektörü birim vektör olarak adlandırılır [11].

Tanım 1.2.6: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X(x,y,z)$ vektörünün normu;

$$\|X\| = \begin{cases} x & , x \neq 0 \text{ ise} \\ \sqrt{y^2 + z^2} & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir [11].

1.3. Pseudo-Galilean Uzayında Temel Kavramlar

Pseudo-Galilean geometri de projektif işareti $(0,0,+,-)$ olan reel Cayley-Klein Geometrilerinden biridir.

Tanım 1.3.1: $X(x, y, z)$, G_3^1 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer $X(x, y, z)$ vektörü için $x = 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörü izotropik vektör olarak adlandırılır [11].

Tanım 1.3.2: $X(x, y, z)$, G_3^1 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer $X(x, y, z)$ vektörü için $x \neq 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörü non-izotropik vektör olarak adlandırılır [11].

Tanım 1.3.3: $X(x, y, z)$, G_3^1 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer $x = 1$ ise $X(x, y, z)$ vektörüne birim non-izotropik vektör denir. Yani bütün birim non-izotropik vektörler $X(l, y, z)$ formundadır [11].

Tanım 1.3.4: 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayı G_3^1 olsun.

$\forall X_1(x_1, x_2, x_3), X_2(x_1, x_2, x_3) \in G_3^1$ vektörü için iç çarpım;

$$g: G_3^1 \times G_3^1 \rightarrow R$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow g(X_1, X_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & , x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 - z_1 z_2 & , x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 1.3.5: G_3^1 , 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında bir $X(0, y, z)$ izotropik vektörünü göz önüne alalım. Eğer $|y^2 - z^2| = 1$ ise bu $X(0, y, z)$ izotropik vektörü birim vektör olarak adlandırılır [11].

Tanım 1.3.6: 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörünün normu;

$$\|X\| = \begin{cases} x & , x \neq 0 \text{ ise} \\ \sqrt{y^2 - z^2} & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir [11].

II. BÖLÜM

2.1. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 2.1.1: $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha'}$ hiçbir zaman sıfır olmamak üzere, $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında iki eğri olsun. $\mathbb{R}_1^3$ te bir M regle yüzeyi ;

$$\varphi: (I \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v \vec{\gamma}(u)$$

parametrizasyonuna sahip regüler bir yüzeydir. Burada α dayanak eğrisi olarak adlandırılır. Regle yüzeyin doğrultmanları ise

$$v \rightarrow \vec{\alpha}(u) + v \vec{\gamma}(u)$$

doğrularıdır [4].

Tanım 2.1.2: $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir [8].

Tanım 2.1.3: $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzeyin ana doğrularının herbirini dik olarak kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir [8].

Tanım 2.1.4: $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir [8].

Tanım 2.1.5: 3-boyutlu Lorentz uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin ana doğrusu , dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz (striksiyon) eğrisi denir [8].

Bir regle yüzeydeki striksiyon noktalarının kümesi striksiyon eğrisini oluşturur. $\beta(u)$ sitriksiyon eğrisi $\alpha(u)$ dayanak eğrisi cinsinden ;

$$\vec{\beta}(u) = \vec{\alpha}(u) - \frac{\langle \vec{\alpha'}(u), \vec{\gamma'}(u) \rangle}{\langle \vec{\gamma'}(u), \vec{\gamma'}(u) \rangle} \vec{\gamma}(u)$$

şeklinde yazılabilir [4].

Tanım 2.1.6: $\mathbb{R}_1^3$ te $\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v \vec{\gamma}(u)$ yüzeyi verilsin. $\vec{\gamma} \wedge \vec{\gamma}'$ hiç bir yerde sıfır olmuyorsa regle yüzeye silindirik olmayan regle yüzey denir. Silindirik olmayan bir regle yüzey daima aşağıdaki formda bir parametrizasyona sahiptir:

$$\tilde{\varphi}(u, v) = \vec{\beta}(u) + v \vec{e}(u) .$$

Burada $\vec{e}(u) = \frac{\vec{\gamma}(u)}{\|\vec{\gamma}(u)\|}$, $\|\vec{e}\| = 1$, $\langle \vec{\beta}'(u), \vec{e}(u) \rangle = 0$

ve $\vec{\beta}(u)$, $\tilde{\varphi}$ nın striksiyon eğrisidir [5].

Silindirik olmayan regle yüzeyin dağılma parametresi (Drall) ise $\vec{\beta}$ regle yüzeyin striksiyon eğrisi ve $\vec{e}$ de doğrultmanı olmak üzere

$$D = \frac{\det(\vec{\beta}', \vec{e}, \vec{e}')}{\langle \vec{e}', \vec{e}' \rangle}$$

şeklinde tanımlanır [6].

$\tilde{\varphi}(u, v)$ silindirik olmayan regle yüzeyinin I. Temel form katsayıları E, F ve G; II. Temel form katsayıları da L, M, N olmak üzere Gauss eğriliği

$$K = \langle \vec{\eta}, \vec{\eta} \rangle \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

olarak tanımlıdır. Burada $\vec{\eta}(u, v) = \frac{\langle \tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_v \rangle}{\|\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_v\|}$ silindirik olmayan regle yüzey üzerinde bir birim normal vektördür [6].

2.2. 3-Boyutlu Galilean Uzayında Regle Yüzeyler

G_3 3-boyutlu Galilean uzayında regle yüzeyin genel denklemi,

$$\varphi(t, v) = r(t) + v . a(t)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda,

$$\varphi_t \neq 0, \quad \varphi_v \neq 0, \quad \varphi_t \times \varphi_v \neq 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa regle yüzeye regülerler denir. G_3 3-boyutlu Galilean uzayında üç tip regle yüzey vardır.

Tanım 2.2.1: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında A-tipli regle yüzey,

$$\begin{cases} \varphi(x, v) = (x, y(x), z(x)) + v (1, a_2(x), a_3(x)) \\ y, z, a_2, a_3 \in C^3, x \in I \subseteq R, v \in R \end{cases},$$

denklemleri ile verilir [12].

Bu tip regle yüzeyler için eğrilik ve torsiyon,

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \sqrt{a_2'^2(x) + a_3'^2(x)} \\ \tau(x) &= \frac{a_2'(x).a_3''(x) - a_2''(x).a_3'(x)}{\kappa^2(x)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup,

$$\begin{aligned} T(x) &= a(x) = (1, a_2(x), a_3(x)) \\ N(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} a'(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, a_2'(x), a_3'(x)) \\ B(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} (0, -a_3'(x), a_2'(x)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 2.2.2: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında B-tipli regle yüzey,

$$\begin{cases} \varphi(u, v) = (0, y(u), z(u)) + v(1, a_2(u), a_3(u)), \\ y, z, a_2, a_3 \in C^3, u \in I \subset R, v \in R \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases},$$

denklemleri ile verilir [12].

Bu tip regle yüzeyler için eğrilik ve torsiyon,

$$\begin{aligned} \kappa(u) &= -\frac{a_2'(u)}{z'(u)} \\ \tau(u) &= \frac{y''(u)}{z'(u)} \end{aligned}$$

şeklinde olup,

$$T(u) = a(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$$

$$N(u) = (0, -z'(u), y'(u))$$

$$B(u) = (0, y'(u), z'(u))$$

ve

$$T' = \kappa N$$

$$N' = \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 2.2.3: G_3 3-boyutlu Galilean uzayında C-tipli regle yüzey,

$$\begin{cases} \varphi(u, v) = (u, y(u), 0) + v(0, a_2(u), a_3(u)), \\ y, a_2, a_3 \in C^3, \quad u \in I \subset R, \quad v \in R \\ a_2^2 + a_3^2 = 1 \end{cases}$$

denklemleri ile verilir [12].

Bu tip regle yüzeyler için eğrilik ve torsiyon,

$$\kappa(u) = y''(u)$$

$$\delta(u) = -\frac{a_3(u)}{a_2'(u)}$$

şeklinde olup,

$$T(u) = r'(u) = (1, y'(u), 0)$$

$$N(u) = a(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$$

$$B(u) = (0, -a_3(u), a_2(u))$$

ve

$$T' = (0, y''(u), 0) = \kappa(N \cos \psi(u) - B \sin \psi(u))$$

$$N' = \frac{1}{\delta} B$$

$$B' = -\frac{1}{\delta} N$$

şeklinde ifade edilir.

2.3. 3-Boyutlu Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 2.3.1: G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında verilen bir l doğrusunun verilen bir $\mathbf{r}$ eğrisi boyunca hareketiyle bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen l doğrusuna, regle yüzeyin anadoğrusu ve verilen $\mathbf{r}$ eğrisine de regle yüzeyin dayanak eğrisi denir [11].

G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında C^3 sınıfından bir regle yüzey

$$X(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x), \quad \mathbf{r}, \mathbf{a} \in C^3, \quad v \in R;$$

şeklinde olsun.

Burada pseudo-Galilean yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\mathbf{r}$ eğrisi pseudo-Euclidean düzlemde yatmaz ve bir dayanak eğrisi olarak adlandırılır. Bu $\mathbf{r}$ eğrisi

$$\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x))$$

şeklinde dir.

Ayrıca $\mathbf{a}(x)$ anadoğrusu

$$\mathbf{a}(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$$

veya

$$\mathbf{a}(x) = (0, a_2(x), a_3(x)), \quad |a_2^2(x) - a_3^2(x)| = 1$$

formundadır.

Tanım 2.3.2: G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir [13].

Tanım 2.3.4: G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas doğrusu üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir [13].

Tanım 2.3.5: G_3^1 , 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin anadoğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz (merkez) çizgisi (eğrisi) denir [13].

Tanım 2.3.6: G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında

$$X(x, v) = \mathbf{r}(x) + v\mathbf{a}(x), \quad \mathbf{r}, \mathbf{a} \in C^3, \quad v \in R;$$

şeklinde verilen bir regle yüzey için eğer

$$X_x \neq 0, X_v \neq 0 \text{ ve } X_x \times X_v \neq 0$$

şartları sağlanıyorsa regle yüzey regülerdir denir [11].

G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında I, II, III olmak üzere regle yüzeylerin üç tipi vardır.

Tip I : G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında I. tip bir regle yüzey aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{cases} X(x, v) = (x, y(x), z(x)) + v (1, a_2(x), a_3(x)) \\ y, z, a_2, a_3 \in C^3, x \in I \subseteq R, v \in R \end{cases}$$

Tanım 2.3.6: G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açığa oranının limitine regle yüzeyin dağılma parametresi denir [11].

Tanım 2.3.7: G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında I. tip bir regle yüzeyin dağılma parametresi (drall)

$$d = \frac{\det(r', a, a')}{|a_2'^2 - a_3'^2|}$$

dir.

G_3^1 te I. tip regle yüzeyin çatısı

$$e_1(x) = a(x), e_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)} a'(x), e_3(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, a_3'(x), a_2'(x))$$

şeklinde tanımlıdır. Bu yüzeyin eğriliği $\kappa(x)$ ve torsiyonu $\tau(x)$ ise

$$\kappa(x) = \sqrt{|a_2'^2 - a_3'^2|} \text{ ve } \tau(x) = \frac{\det(a, a', a'')}{\kappa^2}$$

olarak verilir. Frenet formülleri ise aşağıdaki şekilde verilir:

$$e_1'(u) = \kappa(u) e_2(u) ,$$

$$e_2'(u) = \tau(u) e_3(u) ,$$

$$e_3'(u) = \tau(u) e_2(u) .$$

III. BÖLÜM

3. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler İçin Lamarle Formülü

3.1. Spacelike Regle Yüzeyler İçin Lamarle Formülü

3-boyutlu Lorentz uzayında

$$\varphi_1 : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi_1(u, v) = \vec{\alpha}_1(u) + v \vec{e}_1(u)$$

şekilde parametrelendirilmiş bir spacelike regle yüzey M_1 olsun.

Eğer

$$\|\vec{e}_1\| = 1, \quad \vec{n}_1 = \frac{\vec{e}_1'}{\|\vec{e}_1'\|}, \quad \vec{\xi}_1 = \frac{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1'}{\|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1'\|}$$

şeklinde seçilirse $\{\vec{e}_1, \vec{n}_1, \vec{\xi}_1\}$ ortonormal çatı alanı elde edilir. Ortonormal çatı alanının $\{\text{spacelike}, \text{timelike}, \text{spacelike}\}$ tipinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 1, \quad \langle \vec{n}_1, \vec{n}_1 \rangle = -1, \quad \langle \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1 \rangle = 1$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{n}_1 \rangle = \langle \vec{n}_1, \vec{\xi}_1 \rangle = \langle \vec{\xi}_1, \vec{e}_1 \rangle = 0$$

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{n}_1 = \vec{\xi}_1, \quad \vec{n}_1 \wedge \vec{\xi}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{\xi}_1 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{n}_1$$

olduğu görülür.

Bu ortonormal çatının Frenet formülleri

$$\vec{e}_1' = \kappa_1 \vec{n}_1$$

$$\vec{n}_1' = \kappa_1 \vec{e}_1 + \tau_1 \vec{\xi}_1$$

$$\vec{\xi}_1' = \tau_1 \vec{n}_1$$

şeklindedir [7].

3-boyutlu Lorentz uzayında M_1 spacelike regle yüzeyinin bir striksiyon eğrisi $\vec{\beta}_1(u)$ olsun. O halde

$$\langle \vec{\beta}'_1, \vec{e}'_1 \rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla $\langle \vec{\beta}'_1, \kappa_1 \vec{n}_1 \rangle = 0$ dır. Bu ise $\vec{\beta}'_1$ teğet vektörünün $\vec{e}_1$ ve $\vec{\xi}_1$ tarafından gerilen düzlemde yattığını verir.

Ayrıca $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle \langle \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1 \rangle - \langle \vec{e}_1, \vec{\xi}_1 \rangle^2 > 0$ olduğundan $\vec{e}_1$ ve $\vec{\xi}_1$ tarafından gerilen düzlem spacelike olur ve $\vec{\beta}'_1$ ve $\vec{e}_1$ spacelike vektörleri arasındaki açı Lorentzian spacelike açıdır. $\vec{\beta}'_1$ ve $\vec{e}_1$ arasındaki açı σ_1 olarak alınırsa M_1 in striksiyon eğrisinin teğet vektörü

$$\vec{\beta}'_1 = \cos \sigma_1 \vec{e}_1 + \sin \sigma_1 \vec{\xi}_1$$

şeklinde yazılır ve M_1 in striksiyon eğrisi de

$$\vec{\beta}_1 = \int (\cos \sigma_1 \vec{e}_1 + \sin \sigma_1 \vec{\xi}_1) du$$

olarak bulunur.

Silindirik olmayan M_1 spacelike regle yüzeyi,

$$\tilde{\varphi}_1(u, v) = \int (\cos \sigma_1 \vec{e}_1 + \sin \sigma_1 \vec{\xi}_1) du + v \vec{e}_1$$

şeklinde yeniden parametrelendirilmiştir.

M_1 in dağılma parametresi (Drall) ise

$$D = \frac{\det(\cos \sigma_1 \vec{e}_1 + \sin \sigma_1 \vec{\xi}_1, \vec{e}_1, \kappa_1 \vec{n}_1)}{\langle \kappa_1 \vec{n}_1, \kappa_1 \vec{n}_1 \rangle} = -\frac{\sin \sigma_1}{\kappa_1}$$

olarak hesaplanır.

Burada $\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1}$ yazılırsa dağılma parametresi

$$D = -\rho_1 \sin \sigma_1$$

olarak elde edilir.

Gerekli hesaplamalar yapıldığında M_1 silindirik olmayan spacelike regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$\vec{\eta}_1 = - \frac{\sin\sigma_1 \vec{n}_1 + v\kappa_1 \vec{\xi}_1}{\sqrt{|-\sin^2\sigma_1 + v^2\kappa_1^2|}}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1}$ ve $D = -\rho_1 \sin\sigma_1$ eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\vec{\eta}_1 = \frac{D\vec{n}_1 - v\vec{\xi}_1}{\sqrt{|-D^2 + v^2|}}$$

şeklinde yazılabilir.

Spacelike M_1 regle yüzeyinin birim normal vektörü $\vec{\eta}_1$, timelike olduğundan

$$-D^2 + v^2 < 0$$

ve dolayısıyla

$$|v| < |D|$$

olur.

$\tilde{\varphi}_1$ 'nin u ve v ye göre kısmi türevleri alınır

$$\tilde{\varphi}_{1u} = \cos\sigma_1 \vec{e}_1 + \sin\sigma_1 \vec{\xi}_1 + v\kappa_1 \vec{n}_1 ,$$

$$\tilde{\varphi}_{1v} = \vec{e}_1$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan M_1 in birinci temel form katsayıları

$$E = \langle \tilde{\varphi}_{1u}, \tilde{\varphi}_{1u} \rangle = \cos^2\sigma_1 + \sin^2\sigma_1 - v^2\kappa_1^2 = 1 - v^2\kappa_1^2 ,$$

$$F = \langle \tilde{\varphi}_{1u}, \tilde{\varphi}_{1v} \rangle = \cos\sigma_1 ,$$

$$G = \langle \tilde{\varphi}_{1v}, \tilde{\varphi}_{1v} \rangle = 1$$

olarak bulunur.

Ayrıca $\tilde{\varphi}_1$ in ikinci dereceden kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{1uu} &= (-\sigma'_1 \sin \sigma_1 + v \kappa_1^2) \vec{e}_1 + (\kappa_1 \cos \sigma_1 + \tau_1 \sin \sigma_1 + v \kappa'_1) \vec{n}_1 \\ &\quad + (\sigma'_1 \cos \sigma_1 + v \kappa_1 \tau_1) \vec{\xi}_1,\end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_{1uv} = \kappa_1 \vec{n}_1,$$

$$\tilde{\varphi}_{1vv} = 0$$

elde edilir.

Bu eşitlikler yardımıyla M_1 in ikinci temel form katsayıları

$$L = \langle \tilde{\varphi}_{1uu}, \vec{\eta}_1 \rangle = \frac{\kappa_1 \cos \sigma_1 \sin \sigma_1 + \tau_1 \sin^2 \sigma_1 + v \kappa'_1 \sin \sigma_1 - \sigma'_1 \cos \sigma_1 v \kappa_1 - v^2 \kappa_1^2 \tau_1}{\sqrt{|-\sin^2 \sigma_1 + v^2 \kappa_1^2|}},$$

$$M = \langle \tilde{\varphi}_{1uv}, \vec{\eta}_1 \rangle = \frac{\kappa_1 \sin \sigma_1}{\sqrt{|-\sin^2 \sigma_1 + v^2 \kappa_1^2|}},$$

$$N = \langle \tilde{\varphi}_{1vv}, \vec{\eta}_1 \rangle = 0$$

olarak bulunur.

Birinci ve ikinci temel form katsayılarını kullanarak M_1 spacelike regle yüzeyinin Gauss eğriliği için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1: $M_1, \mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında silindirik olmayan bir spacelike regle yüzey olsun. M_1 yüzeyinin Gauss eğriliği (K), yüzeyin dağılma parametresi (D) cinsinden

$$K = \frac{D^2}{(D^2 - v^2)^2}$$

ile verilir ki; burada $|v| < |D|$ dir [7].

İspat : Birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$K = \langle \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1 \rangle \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

eşitliğinde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K = \langle \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_1 \rangle \frac{\kappa_1^2 \sin^2 \sigma_1}{(\sin^2 \sigma_1 - v^2 \kappa_1^2)^2}$$

bulunur. Burada $\vec{\eta}_1$, spacelike M_1 regle yüzeyinin timelike birim normal vektörüdür.

$\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1}$ ve $D = -\rho_1 \sin \sigma_1$ eşitlikleri kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1 ile verilen ve M_1 yüzeyinin Gauss eğriliği ile dağılma parametresi arasındaki ilişkiyi tanımlayan eşitlik silindirik olmayan spacelike regle yüzey M_1 için Lorentzian Lamarle formülü olarak adlandırılır.

Ayrıca silindirik olmayan spacelike regle yüzey M_1 için $\{\vec{e}_1, \vec{n}_1, \vec{\xi}_1\}$ ortonormal çatı alanı $\{\text{spacelike}, \text{spacelike}, \text{timelike}\}$ tipinde seçilirse $\vec{e}_1$ ve $\vec{\xi}_1$ tarafından gerilen düzlem timelike olur. Sitriksiyon eğrisinin teğeti $\vec{\beta}'_1$ ile $\vec{e}_1$ arasındaki açı σ_1 ise hiperbolik olur. Dolayısıyla M_1 aşağıdaki biçimde parametrelendirilebilir:

$$\vec{\varphi}_1(u, v) = \int (\cosh \sigma_1 \vec{e}_1 + \sinh \sigma_1 \vec{\xi}_1) du + v \vec{e}_1.$$

Benzer işlemler yapıldığında M_1 in Gauss eğriliği Teorem 3.1.1 de verilen eşitlikle aynı olarak elde edilir ve silindirik olmayan spacelike regle yüzey için Lorentzian Lamarle formülü değişmeden kalır. Dolayısıyla aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.1.1: $M_1, \mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında D dağılma parametresi ve K Gauss eğriliğine sahip silindirik olmayan bir spacelike regle yüzey olsun.

1. $v \rightarrow \mp D$ için Gauss eğriliği $K(u, v) \rightarrow \infty$ olur.
2. $K(u, v) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $D = 0$ olmasıdır.
3. Eğer dağılma parametresi D özdeş olarak sıfır olmuyorsa $K(u, v)$ süreklidir ve $v=0$ iken yani her doğrultmanın merkez noktasında $K(u, v)$ en küçük değerini alır [7].

3.2. Spacelike Dayanak Eğrili ve Timelike Doğrultmanlı Timelike Regle Yüzeyler İçin LamarleFormülü

$M_2, \mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında spacelike dayanak eğrili ve timelike doğrultmanlı timelike bir regle yüzey olsun. Dolayısıyla bu regle yüzey aşağıdaki şekilde parametrelendirilmiştir.

$$\varphi_2 : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi_2(u, v) = \vec{\alpha}_2(u) + v \vec{e}_2(u).$$

$$\|\vec{e}_2\| = 1, \quad \vec{n}_2 = \frac{\vec{e}_2'}{\|\vec{e}_2'\|}, \quad \vec{\xi}_2 = \frac{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2'}{\|\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2'\|} \quad \text{olarak seçildiğinde}$$

$\{\vec{e}_2, \vec{n}_2, \vec{\xi}_2\}$ ortonormal çatı alanı elde edilir. Bu çatı alanı {timelike, spacelike, spacelike} tipindedir. Bu nedenle

$$-\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{n}_2, \vec{n}_2 \rangle = \langle \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_2 \rangle = 1,$$

$$\langle \vec{e}_2, \vec{n}_2 \rangle = \langle \vec{n}_2, \vec{\xi}_2 \rangle = \langle \vec{\xi}_2, \vec{e}_2 \rangle = 0 \quad \text{ve}$$

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{n}_2 = \vec{\xi}_2, \quad \vec{n}_2 \wedge \vec{\xi}_2 = -\vec{e}_2, \quad \vec{\xi}_2 \wedge \vec{e}_2 = \vec{n}_2 \quad \text{olur.}$$

Bu ortonormal sistemin Frenet formülleri

$$\vec{e}_2' = \kappa_2 \vec{n}_2,$$

$$\vec{n}_2' = \kappa_2 \vec{e}_2 - \tau_2 \vec{\xi}_2,$$

$$\vec{\xi}_2' = \tau_2 \vec{n}_2$$

dir.

$\mathbb{R}_1^3$ te M_2 spacelike regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\vec{\beta}_2(u)$ olsun. $\vec{\beta}_2(u)$ spacelike bir eğridir ve teğet vektörü $\vec{\beta}_2', (\vec{e}_2, \vec{\xi}_2)$ tarafından gerilen timelike düzlemde yatar. $\vec{\beta}_2'$ ve $\vec{e}_2$ arasındaki hiperbolik açı σ_2 olmak üzere

$$\vec{\beta}_2' = \sinh \sigma_2 \vec{e}_2 + \cosh \sigma_2 \vec{\xi}_2$$

yazılabilir. Bu son eşitlikten M_2 nin sitriksiyon eğrisi

$$\vec{\beta}_2 = \int (\sinh \sigma_2 \vec{e}_2 + \cosh \sigma_2 \vec{\xi}_2) du$$

olarak elde edilir.

3-boyutlu Lorentz uzayında spacelike dayanak eğrili ve timelike doğrultmanlı silindirik olmayan bir timelike regle yüzey M_2 olsun. Bu durumda M_2 ,

$$\vec{\varphi}_2(u, v) = \int (\sinh \sigma_2 \vec{e}_2 + \cosh \sigma_2 \vec{\xi}_2) du + v \vec{e}_2$$

şeklinde parametrelendirilmiştir.

M_2 nin dağılma parametresi (Drall)

$$D = \frac{\det(\sinh \sigma_2 \vec{e}_2 + \cosh \sigma_2 \vec{\xi}_2, \vec{e}_2, \kappa_2 \vec{n}_2)}{\langle \kappa_2 \vec{n}_2, \kappa_2 \vec{n}_2 \rangle} = \frac{\cosh \sigma_2}{\kappa_2}$$

olarak hesaplanır.

$\kappa_2 = \frac{1}{\rho_2}$ alınırsa M_2 nin dağılma parametresi

$$D = \rho_2 \cosh \sigma_2$$

olarak yazılır.

Gerekli işlemler yapıldığında silindirik olmayan timelike regle yüzey M_2 nin birim normal vektörü

$$\vec{\eta}_2 = \frac{\cosh \sigma_2 \vec{n}_2 + v \kappa_2 \vec{\xi}_2}{\sqrt{|\cosh^2 \sigma_2 + v^2 \kappa_2^2|}}$$

olarak bulunur.

$$\kappa_2 = \frac{1}{\rho_2} \quad \text{ve} \quad D = \rho_2 \cosh \sigma_2$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\vec{\eta}_2 = \frac{D \vec{n}_2 - v \vec{\xi}_2}{\sqrt{D^2 + v^2}}$$

elde edilir.

$\tilde{\varphi}_2$ 'nin u ve v ye göre kısmi türevleri aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\varphi}_{2u} = \sinh\sigma_2 \vec{e}_2 + \cosh\sigma_2 \vec{\xi}_2 + v \kappa_2 \vec{n}_2 ,$$

$$\tilde{\varphi}_{2v} = \vec{e}_2 .$$

Buradan M_2 regle yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E = \langle \tilde{\varphi}_{2u}, \tilde{\varphi}_{2u} \rangle = -\sinh^2\sigma_2 + \cosh^2\sigma_2 + v^2 \kappa_2^2 = 1 + v^2 \kappa_2^2 ,$$

$$F = \langle \tilde{\varphi}_{2u}, \tilde{\varphi}_{2v} \rangle = -\sinh\sigma_2 ,$$

$$G = \langle \tilde{\varphi}_{2v}, \tilde{\varphi}_{2v} \rangle = -1$$

olarak bulunur.

Bunlara ek olarak $\tilde{\varphi}_2$ ikinci dereceden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{2uu} &= (\sigma_2' \cosh\sigma_2 + v \kappa_2^2) \vec{e}_2 + (\kappa_2 \sinh\sigma_2 + \tau_2 \cosh\sigma_2 + v \kappa_2') \vec{n}_2 \\ &\quad + (\sigma_2' \sinh\sigma_2 - v \kappa_2 \tau_2) \vec{\xi}_2 , \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_{2uv} = \kappa_2 \vec{n}_2 ,$$

$$\tilde{\varphi}_{2vv} = 0$$

şeklinde hesaplanır.

Bu eşitlikler yardımıyla M_2 'nin ikinci temel form katsayıları

$$L = \langle \tilde{\varphi}_{2uu}, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\kappa_2 \sinh\sigma_2 \cosh\sigma_2 + \tau_2 \cosh^2\sigma_2 + v \kappa_2' \cosh\sigma_2 - \sigma_2' \sinh\sigma_2 v \kappa_2 + v^2 \kappa_2^2 \tau_2}{\sqrt{\cosh^2\sigma_2 + v^2 \kappa_2^2}} ,$$

$$M = \langle \tilde{\varphi}_{2uv}, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\kappa_2 \cosh\sigma_2}{\sqrt{\cosh^2\sigma_2 + v^2 \kappa_2^2}} ,$$

$$N = \langle \tilde{\varphi}_{2vv}, \vec{n}_2 \rangle = 0$$

olarak elde edilir.

Birinci ve ikinci temel form katsayılarını kullanarak M_2 timelike regle yüzeyinin Gauss eğriliği için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1: M_2 , 3-boyutlu Lorentz uzayında spacelike dayanak eğrili ve timelike doğrultmanlı silindirik olmayan timelike bir regle yüzey olsun. M_2 nin Gauss eğriliği K ; dağılma parametresi D olmak üzere

$$K = \frac{D^2}{(D^2 + v^2)^2}$$

dir [7].

İspat : Birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$K = \langle \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_2 \rangle \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

eşitliğinde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında M_2 nin Gauss eğriliği K ; $\vec{\eta}_2$, timelike M_2 yüzeyinin spacelike birim normal vektörü olmak üzere

$$K = \langle \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_2 \rangle \frac{\kappa_2^2 \cosh^2 \sigma_2}{(\cosh^2 \sigma_2 + v^2 \kappa_2^2)^2}$$

olarak bulunur.

$$\kappa_2 = \frac{1}{\rho_2} \quad \text{ve} \quad D = \rho_2 \cosh \sigma_2$$

eşitlikleri kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.1 ile verilen ve M_2 yüzeyinin Gauss eğriliği ile dağılım parametresi arasındaki ilişkiyi tanımlayan eşitlik spacelike dayanak eğrili ve timelike doğrultmanlı silindirik olmayan timelike regle yüzey için Lorentzian Lamarle formülü olarak adlandırılır.

3-boyutlu Lorentz uzayında timelike regle yüzey için Lamarle formülü negatif değildir. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.2.1: M_2 , 3-boyutlu Lorentz uzayında spacelike dayanak eğrili ve timelike doğrultmanlı silindirik olmayan timelike regle yüzeyinin dağılma parametresi D ve Gauss eğriliği K olsun. Bu durumda

1. $v \rightarrow \mp\infty$ için Gauss eğriliği $K(u, v) \rightarrow 0$ dır.
2. $K(u, v) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $D = 0$ olmasıdır.
3. Eğer dağılma parametresi D özdeş olarak sıfır olmuyorsa $K(u, v)$ süreklidir ve $v = 0$ iken yani her doğrultmanın merkez noktesında $K(u, v)$ en büyük değerini alır [7].

3.3 Timelike Dayanak Eğrili ve Spacelike Doğrultmanlı Timelike Regle

Yüzeyler İçin Lamarle Formülü

3-boyutlu Lorentz uzayında timelike dayanak eğrili ve spacelike doğrultmanlı timelike bir regle yüzey M_3 ,

$$\varphi_3 : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi_3(u, v) = \vec{\alpha}_3(u) + v \vec{e}_3(u)$$

şekilde parametrelendirilmiş olsun.

$$\|\vec{e}_3\| = 1, \quad \vec{n}_3 = \frac{\vec{e}_3'}{\|\vec{e}_3'\|}, \quad \vec{\xi}_3 = \frac{\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3'}{\|\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3'\|}$$

olarak seçildiğinde $\{\vec{e}_3, \vec{n}_3, \vec{\xi}_3\}$ ortonormal çatı alanı elde edilir. Bu ortonormal çatı alanının $\{\text{spacelike}, \text{spacelike}, \text{timelike}\}$ şeklinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{n}_3, \vec{n}_3 \rangle = -\langle \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_3 \rangle = 1$$

$$\langle \vec{e}_3, \vec{n}_3 \rangle = \langle \vec{n}_3, \vec{\xi}_3 \rangle = \langle \vec{\xi}_3, \vec{e}_3 \rangle = 0$$

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{n}_3 = \vec{\xi}_3, \quad \vec{n}_3 \wedge \vec{\xi}_3 = -\vec{e}_3, \quad \vec{\xi}_3 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{n}_3$$

yazılır.

Bu ortonormal sistemin Frenet formülleri

$$\vec{e}'_3 = \kappa_3 \vec{n}_3, \quad \vec{n}'_3 = -\kappa_3 \vec{e}_3 + \tau_3 \vec{\xi}_3, \quad \vec{\xi}'_3 = \tau_3 \vec{n}_3$$

şeklindedir.

3-boyutlu Lorentz uzayında M_3 timelike regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\vec{\beta}_3(u)$ olsun. $\vec{\beta}_3(u)$ timelike bir eğridir ve teğet vektörü $\vec{\beta}'_3$, $(\vec{e}_3, \vec{\xi}_3)$ tarafından gerilen timelike düzlemde yatar. $\vec{\beta}'_3$ ve $\vec{e}_3$ arasındaki hiperbolik açı σ_3 alınır

$$\vec{\beta}'_3 = \sinh \sigma_3 \vec{e}_3 + \cosh \sigma_3 \vec{\xi}_3$$

yazılabilir. Son eşitlikte M_3 ün striksiyon eğrisi

$$\vec{\beta}_3 = \int (\sinh \sigma_3 \vec{e}_3 + \cosh \sigma_3 \vec{\xi}_3) du$$

olarak bulunur.

M_3 timelike dayanak eğrili ve spacelike doğrultmanlı timelike silindirik olmayan regle yüzeyi

$$\tilde{\varphi}_3(u, v) = \int (\sinh \sigma_3 \vec{e}_3 + \cosh \sigma_3 \vec{\xi}_3) du + v \vec{e}_3$$

şeklinde verilsin.

Bu durumda M_3 regle yüzeyinin dağılma parametresi (Drall) ,

$$D = \frac{\det(\sinh \sigma_3 \vec{e}_3 + \cosh \sigma_3 \vec{\xi}_3, \vec{e}_3, \kappa_3 \vec{n}_3)}{\langle \kappa_3 \vec{n}_3, \kappa_3 \vec{n}_3 \rangle} = -\frac{\cosh \sigma_3}{\kappa_3}$$

olarak bulunur.

$\kappa_3 = \frac{1}{\rho_3}$ yazılırsa M_3 regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$D = -\rho_3 \cosh \sigma_3$$

olarak elde edilir.

Gerekli işlemler yapıldığında M_3 ün birim normal vektörü

$$\vec{\eta}_3 = - \frac{\cosh\sigma_3 \vec{n}_3 + v\kappa_3 \vec{\xi}_3}{\sqrt{|\cosh^2\sigma_3 - v^2\kappa_3^2|}}$$

olarak bulunur.

$$\kappa_3 = \frac{1}{\rho_3} \quad \text{ve} \quad D = -\rho_3 \cosh\sigma_3 \quad \text{eşitliklerinden}$$

$$\vec{\eta}_3 = \frac{D\vec{n}_3 - v\vec{\xi}_3}{\sqrt{|D^2 - v^2|}}$$

elde edilir.

Bunlara ek olarak timelike regle yüzey M_3 ün birim normal vektörü $\vec{\eta}_3$ spacelike olduğundan;

$$D^2 - v^2 > 0 \quad , \quad \text{yani} \quad |D| > |v| \quad \text{dir.}$$

$\tilde{\varphi}_3$ nın u ve v ye göre kısmi türevleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\varphi}_{3u} = \sinh\sigma_3 \vec{e}_3 + \cosh\sigma_3 \vec{\xi}_3 + v \kappa_3 \vec{n}_3 \quad ,$$

$$\tilde{\varphi}_{3v} = \vec{e}_3 \quad .$$

Buradan M_3 regle yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E = \langle \tilde{\varphi}_{3u}, \tilde{\varphi}_{3u} \rangle = \sinh^2\sigma_3 - \cosh^2\sigma_3 + v^2\kappa_3^2 = -1 + v^2\kappa_3^2,$$

$$F = \langle \tilde{\varphi}_{3u}, \tilde{\varphi}_{3v} \rangle = \sinh\sigma_3,$$

$$G = \langle \tilde{\varphi}_{3v}, \tilde{\varphi}_{3v} \rangle = 1$$

olarak hesaplanır.

Bunlara ek olarak $\tilde{\varphi}_3$ nın ikinci dereceden kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{3uu} = & (\sigma_3' \cosh\sigma_3 - v\kappa_3^2) \vec{e}_3 + (\kappa_3 \sinh\sigma_3 + \tau_3 \cosh\sigma_3 + v\kappa_3') \vec{n}_3 \\ & + (\sigma_3' \sinh\sigma_3 + v \kappa_3 \tau_3) \vec{\xi}_3, \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_{3uv} = \kappa_3 \vec{n}_3 \quad ,$$

$$\tilde{\varphi}_{3vv} = 0$$

şeklinde hesaplanır.

Bu eşitlikler yardımıyla M_3 regle yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$L = \langle \tilde{\varphi}_{3uu}, \vec{\eta}_3 \rangle = \frac{-\kappa_3 \sinh \sigma_3 \cosh \sigma_3 - \tau_3 \cosh^2 \sigma_3 - v \kappa'_3 \cosh \sigma_3 + \sigma'_3 \sinh \sigma_3 v \kappa_3 + v^2 \kappa_3^2 \tau_3}{\sqrt{|\cosh^2 \sigma_3 - v^2 \kappa_3^2|}},$$

$$M = \langle \tilde{\varphi}_{3uv}, \vec{\eta}_3 \rangle = \frac{\kappa_3 \cosh \sigma_3}{\sqrt{|\cosh^2 \sigma_3 - v^2 \kappa_3^2|}},$$

$$N = \langle \tilde{\varphi}_{3vv}, \vec{\eta}_3 \rangle = 0$$

olarak elde edilir.

Birinci ve ikinci temel form katsayılarını kullanarak M_3 regle yüzeyinin Gauss eğriliği için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1: M_3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike dayanak eğrili ve spacelike doğrultmanlı silindirik olmayan bir timelike regle yüzey olsun. M_3 regle yüzeyinin Gauss eğriliği K , dağılma parametresi D olmak üzere

$$K = \frac{D^2}{(D^2 - v^2)^2}$$

dir, burada $D^2 - v^2 > 0$ dır [7].

İspat : M_3 yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları hesaplanarak

$$K = \langle \vec{\eta}_3, \vec{\eta}_3 \rangle \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

eşitliğinde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa M_3 regle yüzeyinin Gauss eğriliği; $\vec{\eta}_3$, timelike M_3 yüzeyinin spacelike birim normal vektörü olmak üzere

$$K = \langle \vec{\eta}_3, \vec{\eta}_3 \rangle \frac{\kappa_3^2 \cosh^2 \sigma_3}{(\cosh^2 \sigma_3 - v^2 \kappa_3^2)^2}$$

olarak bulunur.

$\kappa_3 = \frac{1}{\rho_3}$ ve $D = \rho_3 \cosh \sigma_3$ eşitlikleri kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1 ile verilen ve M_3 yüzeyinin Gauss eğriliği ile dağılım parametresi arasındaki ilişkiyi tanımlayan eşitlik timelike dayanak eğrili ve spacelike doğrultmanlı silindirik olmayan timelike regle yüzey için Lorentzian Lamarle formülü olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike regle yüzey için Lamarle formülü negatif değildir. Böylece aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

Sonuç 3.3.1: M_3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike dayanak eğrili ve spacelike doğrultmanlı silindirik olmayan timelike regle yüzeyinin dağılma parametresi D ve Gauss eğriliği K olsun. Bu durumda

1. $v \rightarrow \mp D$ için Gauss eğriliği $K(u, v) \rightarrow \infty$ dır.
2. $K(u, v) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $D = 0$ olmasıdır.
3. Eğer dağılma parametresi D özdeş olarak sıfır olmuyorsa $K(u, v)$ süreklidir ve $v = 0$ iken yani her doğrultmanın merkez noktasında $K(u, v)$ en küçük değerini alır [7].

IV. BÖLÜM

Bu bölümde Galilean ve Pseudo-Galilean uzaylarında regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri ile dağılma parametreleri arasındaki ilişki bulundu. Bu ilişkiye dayanarak bazı sonuçlara erişildi.

4.1. Galilean Uzayında Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği ve Dağılma Parametresi Arasındaki İlişki

Teorem 4.1.1: G^3 3-boyutlu Galilean uzayında A tipli bir regle yüzeyin K Gauss eğriliği, D dağılma parametresi (drall) cinsinden

$$K = -\frac{D^2}{(D^2+v^2)^2}$$

şekilde yazılabilir [10].

Buradan aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 4.1.1: $X(x, v)$, G^3 3-boyutlu Galilean uzayında D dağılma parametresi ve K Gauss eğriliğine sahip A tipi bir regle yüzey olsun. Bu durumda

1. $v \rightarrow \mp D$ için Gauss eğriliği $K(u, v) \rightarrow 0$ olur.
2. $K(u, v) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $D = 0$ olmasıdır.
3. Eğer dağılma parametresi D özdeş olarak sıfır olmuyorsa $K(u, v)$ süreklidir ve $v=0$ iken yani her doğrultmanın merkez noktasında $K(u, v)$ en küçük değerini alır.

4.2. Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeylerin Gauss Eğriliği ve Dağılma Parametresi Arasındaki İlişki

Teorem 4.2.1: G_3^1 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında I. tip bir regle yüzeyin K Gauss eğriliği, D dağılma parametresi (drall) cinsinden

$$K = -\frac{D^2}{(D^2 - v^2)^2}$$

şeklinde yazılabilir [9].

Dolayısıyla aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 4.2.1: $X(x, v)$, G_3^1 3-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında D dağılma parametresi ve K Gauss eğriliğine sahip I. tip bir regle yüzey olsun. Bu durumda

1. $v \rightarrow \mp D$ için Gauss eğriliği $K(u, v) \rightarrow -\infty$ olur.
2. $K(u, v) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $D = 0$ olmasıdır.
3. Eğer dağılma parametresi D özdeş olarak sıfır olmuyorsa $K(u, v)$ süreklidir ve $v=0$ iken yani her doğrultmanın merkez noktasında $K(u, v)$ en küçük değerini alır.

V. BÖLÜM

5. ÖRNEKLER

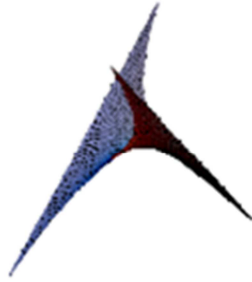
Örnek 5.1 : 3-boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{R}_1^3$ te aşağıdaki şekilde silindirik olmayan bir regle yüzey tanımlayalım;

$$\varphi(u,v) = (-vcoshu, u, -vsinh u) .$$

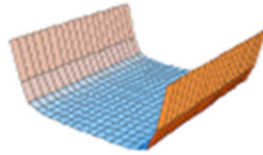
Bu ikinci tip bir helisoiddir ve $-1 < v < 1$ iken spacelike bir yüzeydir. Bu yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{(1-v^2)^2} , |v| < 1 \text{ dir.}$$

Gerçekten yüzeyin dağılım parametresi $D = 1$ olduğundan Lorentzian Lamarle formülü yardımıyla Gauss eğriliği bulunur [7].



Şekil 5.1. 2. Tip Helisoid



Şekil 5.2. 2. Tip Helisoidin Gauss Eğriliği

Örnek 5.2: 3-boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{R}_1^3$ te 3. tip helisoid olan

$$\varphi(u,v) = (-v \sinh u, u, -v \cosh u)$$

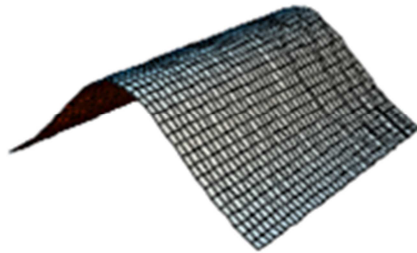
yüzeyini tanımlayalım. Bu spacelike dayanak eğrili ve timelike doğrultmanlı silindirik olmayan bir timelike regle yüzeydir. Yüzeyin Gauss eğriliği ise $D = 1$ olmak üzere Lamarle formülünden

$$K = \frac{1}{(1 + v^2)^2}$$

olarak elde edilir [7].



Şekil 5.3. 3. Tip Helisoid



Şekil 5.4. 3. Tip Helisoidin Gauss Eğriliği

Örnek 5.3: 1. Tiphelisoidi

$$\varphi(u,v) = (-v\cos u, -v\sin u, u)$$

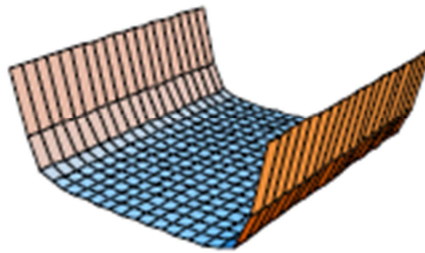
şeklinde parametrelendirelim. Bu yüzey 3-boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{R}_1^3$ te timelike dayanak eğrili ve spacelike doğrultmanlı silindirik olmayan timelike bir regle yüzeydir ve $-1 < v < 1$ dir .

Lamarle formülü yardımıyla bu yüzeyin Gauss eğriliği $D = 1$ üzere

$$K = \frac{1}{(1-v^2)^2}, \quad |v| < 1 \text{ şeklinde elde edilir [7].}$$



Şekil 5.5. 1. Tip Helisoid



Şekil 5.6. 1. Tip Helisoidin Gauss Eğriliği

KAYNAKLAR

- [1] B.O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press , New York ,1983.
- [2] EKMEKÇİ, N. , Lorentz Manifoldsı Üzerinde Eğilim Çizgileri, *Doktora Tezi*, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 1991.
- [3] J.G. RATCLIFFE, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Department of Mathematics, Vanderbilt University, 1994.
- [4] A.TURGUT , H.H. HACISALİHOĞLU, *Time-like ruled surfaces in the Minkowski 3-space*, Far East J. Math.Sci. **5** (1997) , 83-90.
- [5] A. GRAY, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [6] F. DILLEN, W. KÜHNEL, *Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space*, Manuscripta Math. **98**(1999), 307-320 .
- [7] S. ERSOY, M. TOSUN, *Lamarla Formula in 3-dimensional Lorentz space*, Math. Commun. , **16**(2011), 593-607.
- [8] A.TURGUT, *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*, Doktora Tezi, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 1995.
- [9] B. DIVJAK, Z. SIPUS, *Minding isometries of ruled surfaces in pseudo-Galilean space*, Journal of Geometry, 77(2003), 35-47.
- [10] I. KAMENAROVİĆ, *Existence Theorems for Ruled Surfaces in the Galilean Space G_3* , Rad Hrvatske Akad. Znan Umj. Mat. [456] **10** (1991), 183-196.
- [11] Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., *Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces*, Acta Math. Hungar., 98(3), (2003), 203-215.
- [12] Röschel, O., *Die Geometrie Des Galileischen Raumes*, Berichte der Math.-Stat. Sektion im Forschungszentrum Graz, Ber.256,(1986), 1-20.
- [13] Öğrenmiş, A.O., *Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeyler*, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Ordu’da doğdum. Orta öğrenimimi İskilip(Çorum) Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesinde tamamlayıp 2000 yılında mezun oldum. 2000-2005 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2005-2010 yıllarında çeşitli özel dershanelerde matematik öğretmenliği yaptım. Şubat 2010’ da Tunceli Üniversitesi Tunceli MYO’ da öğretim görevlisi olarak göreve başladım. Halen Tunceli Üniversitesi Tunceli MYO’ da öğretim görevlisi olarak çalışmaktayım.

Hacer Merve PEKER