

**BULANIK SAYI DİZİLERİNDE  $\beta$ -DERECEDEN  
 $\Delta$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK**

**Hatice GİDEMEN**

**Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Tez Danışman: Doç. Dr. Hıfı ALTINOK**

**TEMMUZ 2013**

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNDE  $\beta$ -DERECEDEN  
 $\Delta$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Hatice GİDEMEN  
(111121111)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Haziran 2013  
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Temmuz 2013

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Hıfı ALTINOK  
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Rifat ÇOLAK  
: Doç.Dr. Mahmut IŞIK

TEMMUZ-2013

## ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Doç. Dr. Hıfı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Hatice GİDEMEN

ELAZIĞ-2013

## İÇİNDEKİLER

Sayfa No

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖNSÖZ .....                                                                              | I   |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                        | II  |
| ÖZET .....                                                                               | III |
| SUMMARY .....                                                                            | IV  |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                                                                   | V   |
| SEMBOLLER LİSTESİ .....                                                                  | VI  |
| 1. GİRİŞ .....                                                                           | 1   |
| 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....                                                        | 3   |
| 3. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ .....                                        | 7   |
| 3.1. Bulanık Kümeler .....                                                               | 7   |
| 3.2. Bulanık Sayılar .....                                                               | 9   |
| 3.3. Bulanık Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri .....                                     | 14  |
| 4. BULANIK SAYI DİZİLERİNDE $\beta$ -DERECEDEN $\Delta$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ..... | 21  |
| 5. MODÜLÜS FONKSİYONU VE $\Delta$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK .....                       | 33  |
| KAYNAKLAR .....                                                                          | 35  |

## ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde bulanık sayıların kısa bir tarihçesinden bahsedilmiş ve konunun daha iyi anlaşılması için günlük hayattan örnekler verilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiş, üçüncü bölümde bulanık sayı, bulanık küme ve bulanık sayı dizisi kavramları tanımlanarak bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı, sınırlılığı, istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilme gibi bazı özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, bulanık sayı dizilerinde  $\beta$ -dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaklık ve  $\beta$ -dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilme kavramları tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir. Son bölümde ise bir  $f$  modülüs fonksiyonu kullanılarak  $\beta$ -dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir ve  $\beta$ -dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak dizi sınıfları arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Modülüs fonksiyonu, Fark dizileri

## SUMMARY

### $\Delta$ –Statistical Convergence of Order $\beta$ in Sequences of Fuzzy Numbers

In the introduction of this thesis that consist of five chapters, we mention a short history of the fuzzy numbers. Moreover, we give examples from daily life in order to understand the topic. In the second chapter, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the next chapters. In the third chapter, we give the concepts of fuzzy set, fuzzy number and sequence of fuzzy numbers and mention convergence, boundedness, statistical convergence and strongly  $p$ –Cesaro summability in the sequences of fuzzy numbers. In the fourth chapter, we define the concepts of  $\Delta$ –statistical convergence of order  $\beta$  and strongly  $p$ –Cesaro summability of order  $\beta$  for sequences of fuzzy numbers and give relations among them. In the last chapter, we give some inclusion relations between sequence classes which are strongly  $p$ –Cesaro summable of order  $\beta$  and  $\Delta$ –statistically convergent of order  $\beta$  using a modulus function  $f$ .

**Keywords:** Sequence of fuzzy numbers, Statistical convergence, Cesaro summability, Modulus function, Difference sequences

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1.1. Bir bulanık küme .....                                                                                                           | 1  |
| Şekil 3.1. Bir bulanık sayı .....                                                                                                           | 11 |
| Şekil 3.2. $(X_k)$ bulanık sayı dizisinin $X_0$ bulanık sayısına yakınsaması .....                                                          | 15 |
| Şekil 3.3. $(X_k)$ bulanık sayı dizisinin $X_0$ bulanık sayısına istatistiksel yakınsaması ..                                               | 17 |
| Şekil 3.4. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir bulanık sayı dizisi ..                                                    | 18 |
| Şekil 3.5. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi .....                                                     | 19 |
| Şekil 3.6. $(X_k)$ bulanık sayı dizisi $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir20                                            |    |
| Şekil 4.1. $\beta > 1$ için $(X_k)$ dizisi hem $l_1$ hem de $l_2$ ye $\beta$ —dereceden $\Delta$ —istatistiksel yakınsaktır.....            | 25 |
| Şekil 4.2. $(X_k)$ dizisi $X_0$ sayısına $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $\beta$ —dereceden $\Delta$ —istatistiksel yakınsaktır.....      | 30 |
| Şekil 4.3. $(X_k)$ dizisi sınırlıdır ve $\bar{0}$ sayısına $\beta$ —dereceden $\Delta$ —istatistiksel yakınsak ve $\Delta$ —sınırlıdır..... | 32 |

## SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

|                                    |   |                                                                                         |
|------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                       | : | Doğal sayılar kümesi                                                                    |
| $\mathbb{R}$                       | : | Reel sayılar kümesi                                                                     |
| $\mathbb{R}^n$                     | : | $n$ –boyutlu Öklid uzay                                                                 |
| $\mathbb{C}$                       | : | Kompleks sayılar kümesi                                                                 |
| $L(\mathbb{R})$                    | : | Reel bulanık sayılar kümesi                                                             |
| $L(\mathbb{R}^n)$                  | : | $n$ –boyutlu reel bulanık sayılar kümesi                                                |
| $A^\alpha$                         | : | $A$ bulanık kümesinin $\alpha$ –kesimi                                                  |
| $cl(A)$                            | : | $A$ kümesinin kapanışı                                                                  |
| $\text{supp } A$                   | : | $A$ bulanık kümesinin desteği (support)                                                 |
| $h.h.k$                            | : | hemen hemen her $k$                                                                     |
| $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p)$ | : | $\beta$ dereceden kuvvetli $\Delta_p$ –Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizileri kümesi |
| $S(\Delta_{\mathcal{F}})$          | : | $\Delta$ –istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri kümesi                           |
| $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}})$    | : | $\beta$ dereceden $\Delta$ –istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri kümesi         |

## GİRİŞ

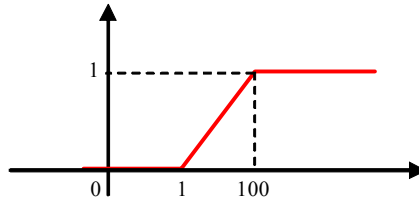
1965’de Zadeh [1] doğruluk derecesi olası olan çok değerli bir mantığı büyük bir titizlikle hazırladı. Zadeh tarafından yayınlanan bu makale modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Zadeh, bu makalede kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu bulanık küme teorisini ortaya koydu.

Bulanık kümeler, boş olmayan bir  $X$  kümesinin ilgili elemanlarına göre göz önüne alınır. Temel düşünce, her bir  $x \in X$  elemanının  $[0, 1]$  aralığında değerler alan bir  $u(x)$  üyelik derecesine atanmasıdır. Burada  $u(x) = 0$ , üyeliğin olmamasına;  $0 < u(x) < 1$  kısmi üyeliğe ve  $u(x) = 1$  de tam üyeliğe karşılık gelir. Zadeh’e göre  $X$  ’in bir bulanık alt kümesi en az bir  $u : X \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu için  $X \times [0, 1]$  kümesinin boş olmayan bir  $\{(x, u(x)) : x \in X\}$  alt kümesidir.

Örneğin

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{99}(x - 1) & 1 \leq x \leq 100 \text{ ise} \\ 1 & 100 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu reel  $x > 1$  sayılarının bulanık kümesine bir örnek olarak verilebilir (Şekil 1.1). Şüphesiz üyelik derece fonksiyonunun pek çok farklı uygun seçimleri vardır.



Şekil 1.1 Bir fuzzy küme

$X$  ’in adi bir  $A$  alt kümesi için üyelik ihtimalleri sadece üyesizlik ve tam üyeliktir. Buna göre böyle bir küme, kendisinin  $f_A : X \rightarrow [0, 1]$  karakteristik fonksiyonuyla  $X$  kümesi üzerinde verilen bir bulanık kümesiyle tanımlanabilir, yani

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \text{ ise} \\ 1 & x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanabilir.

Bulanık kümeler bizim günlük hayatımızda sık sık kullandığımız belirsizlikle ilgilenmenin daha zeki bir yoludur. Örneğin, araba kullanan birisine frene basma zamanı hakkında bir tavsiyede bulunacaksınız. Tavsiyeniz: "Yaya geçidine 25 metre mesafe kala fren yapmaya başla" yoksa "Yaya geçidine yaklaşırken frene basmaya başla" şeklinde mi olurdu? Elbette ikincisi olurdu. Çünkü ilk talimat kolayca yerine getirilemeyecek kadar kesindir.

Veri yapılarının bulanık yorumları, çeşitli problemleri çözmenin ve bunları formüle dökmenin doğal ve akla mantığa çok uygun bir yoludur. Kesin kümeler, üyelik için gereken kesin özellikleri sağlayan nesneleri ihtiva eder. 6 'dan 8 'e kadar olan sayılardan oluşan bir  $H$  kümesini  $H = \{r \in \mathbb{R} : 6 \leq r \leq 8\}$  şeklinde yazabiliriz. Bu yazım biçimine denk olarak  $H$ ,

$$f_H(r) = \begin{cases} 1, & 6 \leq r \leq 8 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı  $f_H : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  üyelik (veya karakteristik) fonksiyonuyla tanımlanır. Her  $r$  reel sayısı ya  $H$  'a aittir yada değildir.  $f_H$  tüm  $r \in \mathbb{R}$  reel sayılarını  $\{0, 1\}$  gibi iki noktaya dönüştürdüğü için kesin kümeler iki değerli mantığa karşılık gelir: "aittir veya ait değildir, açık veya kapalı, siyah veya beyaz, 1 veya 0 ". Mantıkta,  $f_H$  'ın değerleri " $r, H$  'a ait midir?" sorusu için iki değerlidir denilir. Cevabın evet olması için gerek ve yeter şart  $f_H(r) = 1$  olmasıdır. Aksi halde cevap hayırdır.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 2.1.** ([2])  $K \subset \mathbb{N}$  olmak üzere bir  $K$  kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $|\{k \leq n : k \in K\}|$  ifadesi  $K$  kümesinin  $n$  den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer  $\delta(K) = 0$  ise  $K$  kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

**Tanım 2.2.** ([3]) Herhangi bir  $x = (x_k)$  dizisinin terimleri bir  $P$  özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün  $k$  lar için sağlıyorsa,  $(x_k)$  dizisi hemen hemen her  $k$  için  $P$  özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k” biçiminde gösterilir.

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

**Tanım 2.3.** ([3])  $x = (x_k)$  kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya h.h.k için  $|x_k - L| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve  $S - \lim x_k = L$  veya  $x_k \xrightarrow{s} L$  biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı  $S$  ile gösterilir. Eğer özel olarak  $L = 0$  ise  $x = (x_k)$  dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi  $S_0$  ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \exists L \in \mathbb{C} \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani  $\lim x_k = L$  ise  $S - \lim x_k = L$  dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış  $x = (x_k)$  dizisini göz önüne alalım. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu  $S - \lim x_k = 0$  olduğu anlamına gelir. Ancak  $(x_k)$  yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani  $\ell_\infty$  ve  $S$  uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 1, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $x = (x_k)$  dizisi için  $S - \lim x_k = 1$  dir, ancak  $x \notin \ell_\infty$  dir.  $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$  dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani  $S - \lim x_k = L_1$ ,  $S - \lim x_k = L_2$  ise  $L_1 = L_2$  dir.

**Tanım 2.4.** ([3]) Bir  $x = (x_k)$  kompleks terimli dizisini göz önüne alalım.  $\varepsilon > 0$  verilsin. Eğer  $h.h.k$  için  $|x_k - x_N| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

**Teorem 2.5.** ([4])  $S - \lim x_k = a$ ,  $S - \lim y_k = b$  ve  $c$  bir reel sayı olsun. Bu taktirde

- i)  $S - \lim cx_k = ca$  dır,
- ii)  $S - \lim (x_k + y_k) = a + b$  dir.

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

**Teorem 2.6.** (4) Aşağıdaki önermeler denktir.

- i)  $x$  dizisi istatistiksel yakınsaktır,

ii)  $x$  dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,

iii)  $h.h.k$  için  $x_k = y_k$  olacak şekilde yakınsak bir  $y = (y_k)$  dizisi vardır.

**Tanım 2.7.** ([5]) Aşağıdaki şartları sağlayan bir  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir:

i)  $f(x) = 0$  ancak ve ancak  $x = 0$ ,

ii)  $x, y \geq 0$  için  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ ,

iii)  $f$  artandır,

iv)  $f$  fonksiyonu  $x = 0$  noktasında sağdan süreklidir.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin,  $f(x) = x^p$ , ( $0 < p \leq 1$ ) sınırsız ve  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  sınırlıdır.

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [6] tarafından tanımlanmıştır.

**Tanım 2.8.** ([6])  $x = (x_k)$  kompleks terimli bir dizi ve  $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$  olmak üzere  $\ell_\infty(\Delta)$ ,  $c(\Delta)$  ve  $c_0(\Delta)$  dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz, bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK-uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [7], Çolak ve Et [8]  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^0 x = (x_k)$ ,  $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ ,  $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ,  $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$  olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\},$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\},$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

normu ile birer BK–uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [9],  $X$  herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını  $X(\Delta^m)$  dizi uzaylarına genişleterek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Fark dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz.

**Teorem 2.9.** ([9]) *Eğer  $X$  bir lineer uzay ise  $X(\Delta^m)$  de bir lineer uzaydır.*

**Teorem 2.10.** ([9]) *Eğer  $X \subset Y$  ise  $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$  dir.*

**Teorem 2.11.** ([9]) *Eğer  $X$ ,  $\|\cdot\|$  normu ile bir Banach uzay ise  $X(\Delta^m)$  uzayı da*

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

*normu ile bir Banach uzaydır.*

**Tanım 2.12.** ([9])  $x = (x_k)$  kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani *h.h.k* için  $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$  ise  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  sayısına  $\Delta^m$ –istatistiksel yakınsaktır denir.  $\Delta^m$ –istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı  $S(\Delta^m)$  ile gösterilir. Özel olarak  $L = 0$  olması halinde  $S_0(\Delta^m)$ , yani sıfıra  $\Delta^m$ –istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir.

**Sonuç 2.13.**  $S(\Delta^m)$  uzayı bir lineer uzaydır.

### 3. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ

Bu bölümün ilk kısmında bulanık kümenin tanımı ve bazı özellikleri verildi. İkinci kısımda bulanık sayılar arasındaki bazı cebirsel işlemlerden ve bu sayıların oluşturduğu  $L(\mathbb{R})$  bulanık sayılar kümesinin üzerinde tanımlanan metriğin yapısından bahsedildi. Üçüncü kısımda ise bulanık sayı dizisi ve bu dizilerin bazı temel özellikleri verilip bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı, istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli  $p$ -Cesaro yakınsaklığı gibi kavramlar hakkında kısa bir bilgi sunuldu ve konunun daha iyi anlaşılabilmesi için örnekler eklendi.

#### 3.1. Bulanık Kümeler

Bulanık kümeyi tanımlamadan önce bir kümenin karakteristik fonksiyonunu tanımlamak gerekir. Karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 3.1.1.**  $X$  herhangi bir küme ve  $A$ ,  $X$  in bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna  $A$  kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Buna göre  $X$  in bir  $A$  alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Karakteristik fonksiyonu kullanarak  $X$  in herhangi bir elemanının  $A$  kümesinin elemanı olup olmadığını kesin olarak anlayabiliriz.

Zadeh [1] tarafından tanımlanan bazı tanımlar aşağıda verilmiştir:

**Tanım 3.1.2.**  $\chi$ , elemanları  $x$  ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun.  $\chi$  kümesinde bir  $A$  bulanık kümesi,  $\chi$  deki her bir noktayı  $[0, 1]$  aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir  $X_A(x)$  karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir.

$\chi$  deki bir  $A$  bulanık kümesinden bahsedilirken  $X_A : \chi \rightarrow [0, 1]$  şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon  $x \in A$  için  $X_A(x) \in (0, 1]$ ,  $x \notin A$

için  $X_A(x) = 0$  biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanmış karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu diyeceğiz.

Üyelik fonksiyonunun tanımından yararlanarak bir  $A$  bulanık kümesini

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in (0, 1]\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada  $X_A(x)$  in değeri  $A$  bulanık kümesindeki  $x$  noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre  $X_A(x)$  in 1 e en yakın değeri,  $A$  bulanık kümesindeki  $x$  in en yüksek üyelik derecesidir. Eğer  $A$  kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada  $X_A(x) = 1$  veya  $X_A(x) = 0$  olması  $x$  in  $A$  ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre  $X_A(x)$ ,  $A$  kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur.

**Tanım 3.1.3.** Bir  $A$  bulanık kümesinin normal olması için gerek ve yeter şart  $X(x_0) = 1$  olacak şekilde en az bir  $x_0 \in \chi$  olmasıdır.

**Örnek 3.1.4.**

$$X(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{5}, & x \in [\frac{5}{2}, 5] \text{ ise} \\ \frac{-2x+15}{5}, & x \in [5, \frac{15}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık kümesi  $x = 5$  için 1 değerini aldığından normaldir.

**Tanım 3.1.5.**  $A$  bir bulanık küme olsun ve  $\alpha \in (0, 1]$  verilsin.  $A$  bulanık kümesinin  $\alpha$ -kesimi  $A^\alpha$  ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak 0-kesim kümesi  $cl \{x \in \mathbb{R} : X_A(x) > 0\}$  şeklinde tanımlanır.

Bu tanımın benzeri olan ve bulanık kümelerde sık kullanılan "Destek" kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz.

**Tanım 3.1.6.**  $A$  bir bulanık küme olsun.  $A$  nın desteği (support), üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktaların kümesidir ve

$$\text{supp}(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Konvekslik kavramı, klasik kümelerdeki pek çok özellik korunacak şekilde bulanık kümelere genişletilebilir. Bu kavram, bulanık sayının tanımını yapabilmek için gerekli olan önemli özelliklerden birisidir.

**Tanım 3.1.7.**  $\chi$ ,  $n$  boyutlu  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayı olsun. Bir  $A$  bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her  $\alpha \in (0, 1]$  için  $A^\alpha$  kümesinin konveks olmasıdır.

Konveksliğin diğer bir tanımını ise şöyle verilebilir.

**Tanım 3.1.8.** Bir  $A$  bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her  $\lambda \in [0, 1]$  ve her  $x_1, x_2 \in \chi$  için

$$X_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

### 3.2. Bulanık Sayılar

Bulanık sayının tanımını vermeden önce reel sayılarda aralık kavramını tanımlayalım.

**Tanım 3.2.1.**  $a$  ve  $b$  iki reel sayı olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine kapalı bir aralık denir.

$A$  bir aralık olmak üzere bu aralığın uç noktalarını  $\underline{A}$  ve  $\overline{A}$  ile göstereceğiz. Yani  $A = [\underline{A}, \overline{A}]$  şeklinde bir gösterim kullanacağız. Ayrıca bir  $[a, a]$  aralığını  $a$  reel sayısına karşılık getireceğiz.

$A$  ve  $B$  yukarıdaki şekilde tanımlanmış iki aralık olmak üzere reel sayılar için tanımlanmış olan “ $\leq$ ” ve “ $<$ ” sıralama bağıntılarını aralıklar için aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \overline{A} \leq \overline{B}$$

$$A < B \Leftrightarrow \underline{A} < \underline{B} \text{ ve } \overline{A} < \overline{B}.$$

$A$  ve  $B$  aralıkları birer sayı gibi düşünölebileceği için bu aralıkların oluşturduğu kümede toplama işlemi  $A = [\underline{A}, \overline{A}]$  ve  $B = [\underline{B}, \overline{B}]$  olmak üzere

$$[\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre iki aralığın toplamı yine bir aralıktır.

$A$  ve  $B$  aralıkları arasındaki çıkarma işlemi de

$$[\underline{A}, \overline{A}] - [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}]$$

şeklinde tanımlanır.

Reel sayılar doğrusu üzerindeki bütün kapalı ve sınırlı  $[\underline{A}, \overline{A}]$  aralıklarının kümesini  $D$  ile gösterelim. Herhangi iki  $A, B \in D$  için

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|)$$

şeklinde tanımlanmış bir  $d$  fonksiyonunun  $D$  üzerinde bir metrik tanımladığı ve  $(D, d)$  nin de bir tam metrik uzay olduğu kolayca gösterilebilir [10]. Ayrıca “ $\leq$ ” bağıntısı  $D$  üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

**Tanım 3.2.2.**([11]) Bir reel bulanık sayı aşğıdaki şartları sağlayan bir  $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonudur.

- i)  $X$  normaldir, yani  $X(x_0) = 1$  olacak şekilde bir  $x_0 \in \mathbb{R}$  mevcuttur,
- ii)  $X$  bulanık konvektir, yani herhangi  $x, y \in \mathbb{R}$  ve  $0 \leq \lambda \leq 1$  için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

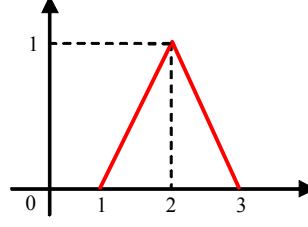
- iii)  $X$  üst-yarı-sürekli

- iv)  $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$  kümesinin kapanışı kompakttır.

**Örnek 3.2.3.**

$$X(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [1, 2] \text{ ise} \\ -x + 3, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonu, bir bulanık sayıdır ve grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1. Bir bulanık sayı

Bütün reel bulanık sayılar kümesini  $L(\mathbb{R})$  ile göstereceğiz.  $L(\mathbb{R})$  kümesinde  $\alpha$ -kesim kümeleri için bazı aritmetik işlemler şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$  bulanık sayılarının toplamı ve farkı sırasıyla

$$(X + Y)(x) = \sup_{x=y+z} \min \{X(y), Y(z)\}$$

ve

$$(X - Y)(x) = \sup_{x=y-z} \min \{X(y), Y(z)\}$$

şeklindedir [12].

$X$  ve  $Y$  gibi iki bulanık sayının  $\alpha$ -kesim kümelerine göre toplamı ve farkı ise şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$  ve bunların  $\alpha$ -kesim kümeleri  $\alpha \in [0, 1]$  için  $[X]^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$  ve  $[Y]^\alpha = [\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha]$  olsun. Bu takdirde

$$[X + Y]^\alpha = [\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha],$$

$$[X - Y]^\alpha = [\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha],$$

dir.

Bir  $X$  bulanık sayısının bir  $k \in \mathbb{R}$  reel sayısı ile çarpımı da

$$[k \cdot X]^\alpha = \begin{cases} [k \cdot \underline{X}^\alpha, k \cdot \overline{X}^\alpha], & k \geq 0 \text{ ise} \\ [k \cdot \overline{X}^\alpha, k \cdot \underline{X}^\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada  $[X \pm Y]^\alpha = [X]^\alpha \pm [Y]^\alpha$  ve  $[k \cdot X]^\alpha = k[X]^\alpha$  yazılabilir. Bunu aşağıdaki gibi basit cebirsel işlemler yaparak gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
[X]^\alpha + [Y]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} + \{x \in \mathbb{R} : Y(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : X(x) + Y(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (X + Y)(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\
&= [X + Y]^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[k \cdot X]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : (kX)(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : kX(x) \geq \alpha\} \\
&= k \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} \\
&= k [X]^\alpha
\end{aligned}$$

dir.

Her bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebilir. Ayrıca bulanık sayının tanımına göre her bir karakteristik fonksiyon bir bulanık sayı olur. Yani  $r \in \mathbb{R}$  için  $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$  bulanık sayısı

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & x = r \text{ ise} \\ 0, & x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her  $r$  reel sayısı için  $\bar{r} = [r, r]$  şeklinde bir gösterim vardır. Bu düşünceden hareketle  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesi,  $L(\mathbb{R})$  bulanık sayılar kümesine gömülebilir [13].

Bulanık sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı, reel aralıklar arasındaki sıralama bağıntısına benzerlik gösterir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$  için " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha \text{ ve } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha$$

şeklinde tanımlanır [14].

**Tanım 3.2.4.** ([15])  $A \subset L(\mathbb{R})$  kümesi verilsin. Her  $X \in A$  bulanık sayısı için  $X \leq U$  olacak şekilde bir  $U$  bulanık sayısı varsa  $A$  kümesine üstten sınırlıdır ve  $U$  bulanık sayısına da  $A$  kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer  $A$  kümesinin her  $\mu$  üst sınırı için

$U \leq \mu$  ise  $U$  bulanık sayısına  $A$  kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Bir küme için alttan sınırlılık ve infimum kavramları da benzer şekilde tanımlanır.

$L(\mathbb{R})$  üzerinde  $X$  ve  $Y$  gibi iki bulanık sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$\begin{aligned}\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(X^\alpha, Y^\alpha)\end{aligned}$$

metriği kullanılacaktır. Burada  $d_H$  Hausdorff metriğidir ve

$$d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max(|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|)$$

şeklinde tanımlanır.  $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ , bir tam metrik uzaydır [16]. Bu metrik,  $\mathbb{R}$  üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

$C(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathbb{R}^n$  öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini gösterebilir. Bu takdirde  $C(\mathbb{R}^n)$  üzerinde toplama ve skalerle çarpma her  $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$  için

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

ve her  $A \in C(\mathbb{R}^n)$  ve  $\lambda \in \mathbb{R}$  için

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x, x \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri  $C(\mathbb{R}^n)$  üzerinde bir lineer yapı üretir.

$A$  ve  $B$  kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_\infty(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

Hausdorff metriğiyle tanımlanır. Burada  $\|\cdot\|$  sembolü ile  $\mathbb{R}^n$  deki alışılmış Öklid normu gösterilmektedir.  $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$  uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir.

Bir bulanık sayının tanımı aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

**Tanım 3.2.5.**  $n$ -boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{R}^n$  üzerindeki bir bulanık sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonudur:

- i)  $X$  normaldir, yani  $X(x_0) = 1$  olacak şekilde en az bir  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mevcuttur,
- ii)  $X$  bulanık konvektir, yani herhangi  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ve  $0 \leq \lambda \leq 1$  için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlar,

iii)  $X$  üst-yarı-süreklidir,

iv)  $X^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : X(x) > 0\}$  kümesinin kapanışı kompaktır.

$\mathbb{R}^n$  üzerindeki bütün bulanık sayıların kümesi  $L(\mathbb{R}^n)$  ile gösterilir.

$0 \leq \alpha \leq 1$  için  $X^\alpha$  kesim kümesini göz önüne alalım. Tanımdan,  $X^\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$  olduğu açıktır.  $L(\mathbb{R}^n)$  deki toplama ve skaler ile çarpma  $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$  ve  $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$[X + Y]^\alpha = X^\alpha + Y^\alpha \text{ ve } [kX]^\alpha = kX^\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, herbir  $1 \leq q < \infty$  için

$$d_q(X, Y) = \left( \int_0^1 \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım.  $q \leq s$  için  $d_q \leq d_s$  olmak üzere

$$d_\infty(X, Y) = \lim_{q \rightarrow \infty} d_q(X, Y)$$

olduğu açıktır.  $(C(\mathbb{R}^n), d_q)$  metrik uzayı tamdır [17].

Bundan sonraki kısımlarda  $d_q$  yerine  $d$  notasyonu kullanılacaktır.

Açıkça  $n = 1$  için  $L(\mathbb{R}^n)$  kümesinden  $L(\mathbb{R})$  ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir.

### 3.3. Bulanık Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri

Bulanık sayı dizisi ilk defa 1986 yılında Matloka [18] tarafından tanımlanmış ve diziyle ilgili temel kavramları aşağıdaki gibi vermiştir.

**Tanım 3.3.1.** Bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi, doğal sayılar kümesinden  $L(\mathbb{R}^n)$  içine tanımlı bir  $X$  fonksiyonudur. Bu durumda her bir  $k$  pozitif tamsayısına bir  $X(k)$  bulanık sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde  $X(k)$  yerine  $X_k$  yazacağız.

**Tanım 3.3.2.**  $X_0 \in L(\mathbb{R}^n)$  ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Buna göre  $X_0$  bulanık sayısının  $\varepsilon$ -komşuluğu  $d(X, X_0) < \varepsilon$  olacak şekilde bütün  $X$  bulanık sayılarının kümesidir. Bir  $X_0$  bulanık sayısının  $\varepsilon$ -komşuluğu  $K(X_0, \varepsilon)$  ile gösterilir.

**Tanım 3.3.3.**  $X = (X_k)$  bir bulanık sayı dizisi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $k > N$  iken  $d(X_k, X_0) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N$  sayısı mevcut ise  $(X_k)$  dizisi yakınsaktır ve limiti  $X_0$  dır denir. Bu durumda  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$  yazılır. Eğer  $\lim X_k$  mevcut değilse  $(X_k)$  dizisi ıraksaktır denir.

Bütün yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini  $c(\mathcal{F})$  ile göstereceğiz.

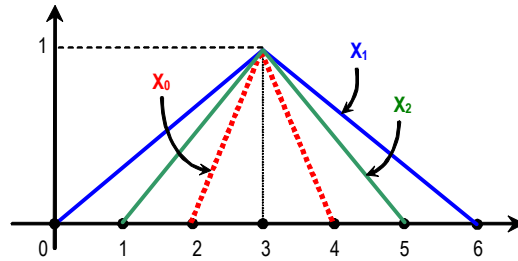
**Örnek 3.3.4.**

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in [\frac{2k-2}{k}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in [3, \frac{4k+2}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x + 4, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık sayısıdır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2.  $(X_k)$  bulanık sayı dizisinin  $X_0$  bulanık sayısına yakınsaması

**Teorem 3.3.5.** Yakınsak bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisinin limiti tektir.

**Teorem 3.3.6.**  $X = (X_k)$  ve  $Y = (Y_k)$  bulanık sayı dizilerinin limitleri sırasıyla  $X_0$  ve  $Y_0$  olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$ ,
- ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$ ,
- iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$ ,
- iv)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}$ , (Eğer bütün  $k$  lar için  $0 \notin \text{supp} Y_k$  ve  $0 \notin \text{supp} Y_0$ ).

**Tanım 3.3.7.** Her  $\varepsilon > 0$  için  $k, m > N$  olduğunda  $d(X_k, X_m) < \varepsilon$  olacak şekilde pozitif bir  $N$  tamsayısı mevcutsa  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Reel sayı dizilerinde olduğu gibi yakınsak her bulanık sayı dizisi aynı zamanda bulanık Cauchy dizisidir.

**Tanım 3.3.8.** Her  $k \in \mathbb{N}$  sayısı için  $L \leq X_k \leq U$  olacak şekilde  $L$  ve  $U$  bulanık sayıları mevcut ise  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir. Bütün sınırlı bulanık sayı dizilerinin kümesini  $\ell_\infty(\mathcal{F})$  ile göstereceğiz.

**Teorem 3.3.9.** Yakınsak her bulanık sayı dizisi sınırlıdır.

**Tanım 3.3.10.** Bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini ve doğal sayıların artan bir  $\{k_n\}$  dizisini göz önüne alalım. Bu durumda  $(X_{k_n})$  dizisine  $(X_k)$  dizisinin bir alt dizisi denir.

**Teorem 3.3.11.** Yakınsak bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizinin limiti  $X = (X_k)$  dizisinin limiti ile aynıdır.

**Tanım 3.3.12.** ([19])  $X = (X_k)$  bir bulanık sayı dizisi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir  $X_0$  bulanık sayısı mevcut ise, yani *h.h.k* için  $d(X_k, X_0) < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan bir  $X_0$  bulanık sayısı varsa  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.  $(X_k)$  dizisi  $X_0$  bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise  $S(\mathcal{F}) - \lim X_k = X_0$  veya  $X_k \rightarrow X_0 (S(\mathcal{F}))$  yazılır.

$S(\mathcal{F})$  ile istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz. Özel olarak  $X_0 = \bar{0}$  alınırsa  $S(\mathcal{F})$  yerine  $S_0(\mathcal{F})$  yazacağız.

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı  $c(\mathcal{F}) \subset S(\mathcal{F})$  kapsamı açıktır. Bu kapsamın kesin olduğunu da aşağıdaki örnekte görebiliriz.

**Örnek 3.3.13.**  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} 2x - (2k - 1), & x \in [k - \frac{1}{2}, k] \text{ ise} \\ -2x + (2k + 1), & x \in [k, k + \frac{1}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{matrix}$$

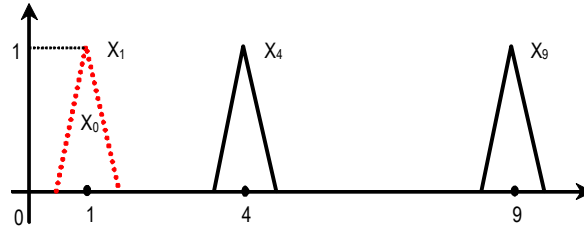
olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her  $\varepsilon > 0$  için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{4, 9, 16, \dots\}$$

olduğundan  $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$  dır. Bu nedenle  $X = (X_k)$  dizisi  $X_0$  a istatistiksel yakınsaktır. Ancak  $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$  kümesi sonlu olmadığı için  $(X_k)$  dizisi  $X_0$  a yakınsak değildir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3.  $(X_k)$  bulanık sayı dizisinin  $X_0$  bulanık sayısına istatistiksel yakınsaması

$S(\mathcal{F})$  ve  $\ell_\infty(\mathcal{F})$  uzayları birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

**Örnek 3.3.14.**

$$U_1(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

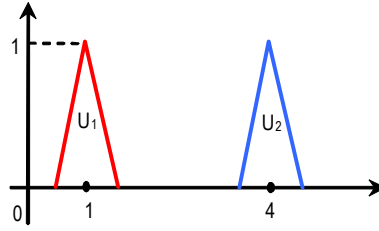
ve

$$U_2(x) = \begin{cases} 2x - 7, & x \in [\frac{7}{2}, 4] \text{ ise} \\ -2x + 9, & x \in [4, \frac{9}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k \text{ tek ise} \\ U_2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $(X_k)$  bulanık sayı dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir bulanık sayı dizisi

Yakınsak her bulanık sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan  $S(\mathcal{F}) \cap \ell_\infty(\mathcal{F}) \neq \emptyset$  dir. Hatta  $c(\mathcal{F}) \subset S(\mathcal{F}) \cap \ell_\infty(\mathcal{F})$  kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

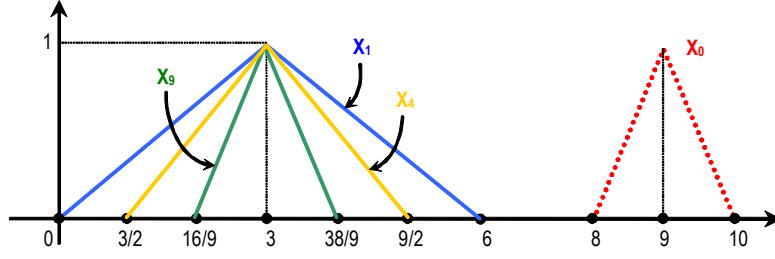
**Örnek 3.3.15.**  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in [\frac{2k-2}{k}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in [3, \frac{4k+2}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{matrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 8, & x \in [8, 9] \text{ ise} \\ -x + 10, & x \in [9, 10] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup  $X = (X_k)$  dizisi hem sınırlıdır hem de  $X_0$  bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak bu dizi yakınsak değildir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi

**Teorem 3.3.16.** ([20])  $X = (X_k)$  bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu durumda  $h.h.k.$  için  $X_k = Y_k$  olacak şekilde yakınsak bir  $Y = (Y_k)$  dizisi varsa  $X$  dizisi istatistiksel yakınsaktır.

**Tanım 3.3.17.** ([21])  $X = (X_k)$  bir bulanık sayı dizisi ve  $p$  bir pozitif reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir  $X_0$  bulanık sayısı varsa  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini  $w(\mathcal{F}, p)$  ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$w(\mathcal{F}, p) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_k, X_0)]^p = 0, \text{ en az bir } X_0 \text{ için} \right\}$$

dir.  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsak ise  $X_k \rightarrow X_0 (w(\mathcal{F}, p))$  yazacağız.

**Teorem 3.3.18.** ([21])  $0 < p < \infty$  olsun. Eğer bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsak ise aynı zamanda  $X_0$  bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

**Teorem 3.3.19.** ([21])  $0 < p < \infty$  olsun. Eğer sınırlı bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise bu takdirde  $X_0$  bulanık sayısına kuvvetli  $p$ -Cesàro yakınsaktır.

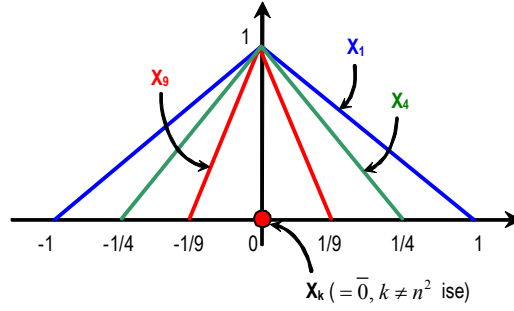
**Örnek 3.3.20.**  $(X_k)$  bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi göz önüne alalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \in [-\frac{1}{k}, 0] \text{ ise} \\ -kx + 1, & x \in [0, \frac{1}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \bar{0}, \text{ diğer durumlarda} \end{matrix}$$

Bu dizinin  $\alpha$ -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\frac{\alpha-1}{k}, \frac{1-\alpha}{k}], & k = n^2 \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan  $p = 1$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [d(X_k, X_0)]^p = 0$  olup  $(X_k)$  bulanık sayı dizisinin  $\bar{0}$  bulanık sayısına kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilir olduğu anlaşılır (Şekil 3.6).



Şekil 3.6.  $(X_k)$  bulanık sayı dizisi  $\bar{0}$  bulanık sayısına kuvvetli  $p$ -Cesaro toplanabilmektedir

#### 4. BULANIK SAYI DİZİLERİNDE $\beta$ -DERECEDEN $\Delta$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Sayı dizileri için  $\beta$ -dereceden istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilme kavramları Çolak [22] tarafından, bulanık sayı dizileri için aynı kavramlar Altınok v.d. [23] tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde Altınok v.d. [23] tarafından verilen sonuçlar fark dizilerine uygulanmıştır.

**Tanım 4.1.** ([24])  $X = (X_k)$  bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer  $\{\Delta X_k : k \in \mathbb{N}\}$  bulanık sayılar kümesi sınırlı ise  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisine  $\Delta$ -sınırlıdır denir. Bu durumda her  $k \in \mathbb{N}$  için  $K \leq \Delta X_k \leq M$  olacak şekilde  $K$  ve  $M$  bulanık sayıları mevcuttur.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve her  $k > N$  için  $d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$  olacak şekilde pozitif bir  $N$  tamsayısı mevcut ise  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\Delta$ -yakınsaktır denir. Burada  $\Delta X = (X_k - X_{k+1})$  dir.  $\ell_\infty(\Delta, \mathcal{F})$ ,  $c(\Delta, \mathcal{F})$  ve  $c_0(\Delta, \mathcal{F})$  ile sırasıyla bütün  $\Delta$ -sınırlı,  $\Delta$ -yakınsak ve sıfıra  $\Delta$ -yakınsak bulanık sayı dizilerinin sınıflarını göstereceğiz.

$\ell_\infty(\Delta, \mathcal{F})$ ,  $c(\Delta, \mathcal{F})$  ve  $c_0(\Delta, \mathcal{F})$  bulanık dizi sınıfları sınırsız ve yakınsak olmayan bulanık dizileri de ihtiva eder. Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim:

**Örnek 4.2.**

$$X_k(x) = \begin{cases} x - k + 1, & x \in [k - 1, k] \text{ ise} \\ -x + k + 1, & x \in [k, k + 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık sayı dizisini göz önüne alalım.  $(X_k)$  dizisi  $\Delta$ -sınırlı ve  $\Delta$ -yakınsak bir dizidir. Ancak bu dizi ne sınırlı ne de yakınsaktır.

Gerçekten,  $(X_k)$  bulanık sayı dizisinin  $\alpha$ -kesim kümesi  $\alpha \in (0, 1]$  için

$$[X_k]^\alpha = [k - 1 + \alpha, k + 1 - \alpha]$$

olup buradan

$$[\Delta X_k]^\alpha = [-3 + 2\alpha, 1 - 2\alpha]$$

elde edilir. Bu takdirde  $[X_0]^\alpha = [-3 + 2\alpha, 1 - 2\alpha]$  olmak üzere  $(\Delta X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına yakınsaktır. Ayrıca bu dizi sınırlı bir dizidir.

Buna göre  $\Delta$ -sınırlı diziler sınıfı ve  $\Delta$ -yakınsak dizilerin sınıfları, sınırlı ve yakınsak bulanık dizi sınıflarından daha geneldir.

Ayrıca  $c_0(\Delta, \mathcal{F}) \subset c(\Delta, \mathcal{F}) \subset \ell_\infty(\Delta, \mathcal{F})$  olup bu kapsama kesindir.

### Örnek 4.3.

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x - 2, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x + 4, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k \text{ tek ise}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x - 5, & x \in [5, 6] \text{ ise} \\ -x + 7, & x \in [6, 7] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k \text{ çift ise}$$

bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi  $\Delta$ -sınırlı olduğu halde  $\Delta$ -yakınsak değildir. Gerçekten,  $(X_k)$  bulanık sayı dizisi için  $\alpha$ -kesim kümesi  $\alpha \in (0, 1]$  olmak üzere

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [2 + \alpha, 4 - \alpha], & k \text{ tek ise} \\ [5 + \alpha, 7 - \alpha], & k \text{ çift ise} \end{array} \right.$$

olup buradan

$$[\Delta X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [2\alpha - 5, -1 - 2\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha], & k \text{ çift ise} \end{array} \right.$$

elde edilir. Bu takdirde  $(\Delta X_k)$  dizisi sınırlıdır, ancak yakınsak değildir.

**Tanım 4.4.** ([24])  $X = (X_k)$  bir bulanık sayı dizisi olsun.  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir  $X_0$  bulanık sayısı mevcut ise, yani  $h.h.k$  için  $d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan bir  $X_0$  bulanık sayısı varsa  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır denir.  $(X_k)$  dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak ise  $S(\mathcal{F})$ -lim  $\Delta X_k = X_0$  veya  $\Delta X_k \rightarrow X_0 (S(\mathcal{F}))$  yazılır. Tüm  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini  $S(\Delta_{\mathcal{F}})$  ile göstereceğiz.

Klasik kümeler için  $(x_k)$  dizisi  $\ell$  'ye istatistiksel yakınsarken  $(\Delta x_k)$ ,  $0$  'a istatistiksel yakınsar (yani  $x_k \xrightarrow{s} \ell$  ise  $\Delta x_k \xrightarrow{s} 0$ ). Aşağıdaki örnek bunun bulanık sayı dizileri için geçerli olmadığını gösterir.

**Örnek 4.5.**  $(X_k)$  bulanık sayı dizisi aşağıdaki gibi olsun:

$$X_k(x) = \begin{cases} \begin{cases} x - k, & k \leq x \leq k + 1 \\ -x + k + 2, & k + 1 < x \leq k + 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k = n^2 \text{ ise} \\ \begin{cases} x - 2, & 2 \leq x \leq 3 \\ -x + 4, & 3 < x \leq 4 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Buradan

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [k + \alpha, k + 2 - \alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [2 + \alpha, 4 - \alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [k - 4 + 2\alpha, k - 2\alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [-k - 1 + 2\alpha, -k + 3 - 2\alpha], & k + 1 = n^2, \text{ ise } (n > 1) \\ [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece  $[\ell_1]^\alpha = [2 + \alpha, 4 - \alpha]$  olmak üzere  $X_k \xrightarrow{s} \ell_1$  dir ve  $[\ell_2]^\alpha = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha]$  olmak üzere  $\Delta X_k \xrightarrow{s} \ell_2$  dir. Burada  $[\ell_2]^\alpha = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha] \neq \bar{0}$  dir.

**Tanım 4.6.**  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesinin bir  $A$  alt kümesinin  $\beta$ -yoğunluğu Çolak [22] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$\beta \in (0, 1]$  herhangi bir reel sayı olsun. Bu takdirde bir  $A \subset \mathbb{N}$  kümesinin  $\beta$ -yoğunluğu

$$\delta_\beta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada,  $|\{k \leq n : k \in A\}|$  ifadesi  $A$  'nın  $n$ 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Açıktır ki  $\beta = 1$  için  $\mathbb{N}$  'nin herhangi bir sonlu alt kümesi  $\beta$ -yoğunluğa sahiptir ve  $\delta_\beta(A^c) = 1 - \delta_\beta(A)$  'dir, fakat eşitlik genelde  $\beta \in (0, 1)$  için sağlanmaz. Ayrıca herhangi bir kümenin  $\beta$ -yoğunluğu  $\beta = 1$  için doğal yoğunluğa indirgenir.

**Tanım 4.7.** ([24])  $X = (X_k)$  bir bulanık sayı dizisi,  $\Delta$  fark operatörü ve  $\beta \in (0, 1]$  olsun. Bu durumda her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu takdirde  $S^\beta(\mathcal{F}) - \lim \Delta X_k = X_0$  yazılır. Bütün  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}})$  ile göstereceğiz.

Açıktır ki  $(X_k)$  bulanık sayı dizisinin  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden seviye  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $S^\beta(\mathcal{F}) - \lim_{k \rightarrow \infty} [\underline{\Delta X}_k]^\alpha = [\underline{X}_0]^\alpha$  ve  $S^\beta(\mathcal{F}) - \lim_{k \rightarrow \infty} [\overline{\Delta X}_k]^\alpha = [\overline{X}_0]^\alpha$ , her  $\alpha \in [0, 1]$  ve  $\beta \in (0, 1]$  olmasıdır. Yani  $n \rightarrow \infty$  için ve her  $\alpha \in [0, 1]$  için  $\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d([\Delta X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha) \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$  dr.

$\beta = 1$  için  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaklık ile  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaklık aynıdır.  $\beta \in (0, 1]$  için  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı olduğu halde  $\beta > 1$  için iyi tanımlı değildir (Bkz. Örnek 4.8).

**Örnek 4.8.**

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -x + 2, & 1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \\ x - 3, & 3 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ -x + 5, & 4 \leq x \leq 5 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} k \text{ tek ise} \\ \\ \\ k \text{ çift ise} \end{array}$$

bulanık sayı dizisini alalım. Bu takdirde  $(X_k)$  ve  $(\Delta X_k)$  dizilerinin  $\alpha$ -seviye kümelerini sırasıyla

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [\alpha, 2 - \alpha], & k \text{ tek ise} \\ [3 + \alpha, 5 - \alpha], & k \text{ çift ise} \end{array} \right.$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [-5 + 2\alpha, -1 - 2\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha], & k \text{ çift ise} \end{array} \right.$$

şeklinde hesaplayabiliriz.

Buradan  $\beta > 1$  için

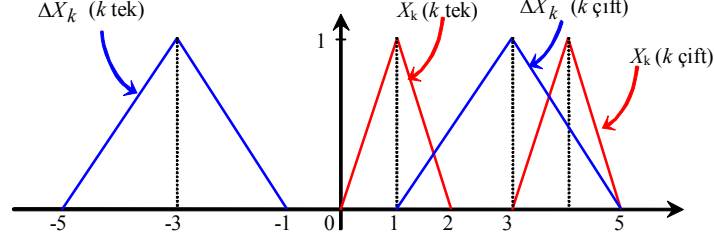
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d([\Delta X_k]^\alpha, [l_1]^\alpha) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\beta} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d([\Delta X_k]^\alpha, [l_2]^\alpha) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\beta} = 0$$

elde edilir.  $[l_1]^\alpha = [-5 + 2\alpha, -1 - 2\alpha]$  ve  $[l_2]^\alpha = [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha]$  olmak üzere  $X = (X_k)$  dizisi  $l_1$  ve  $l_2$  sayılarının ikisine de  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak olur (Şekil 4.1).

Bu ise  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaklık tanımı gereğince mümkün değildir.



Şekil 4.1.  $\beta > 1$  için  $(X_k)$  dizisi hem  $l_1$  hem de  $l_2$  ye  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır

**Teorem 4.9.**  $X = (X_k)$  ve  $Y = (Y_k)$  iki bulanık sayı dizisi ve  $\beta \in (0, 1]$  olsun. Bu takdirde

- (i)  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) - \lim X_k = X_0$  ve  $c \in \mathbb{R}$  ise  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) - \lim cX_k = cX_0$  dir.
- (ii)  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) - \lim X_k = X_0$  ve  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) - \lim Y_k = Y_0$  ise  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) - \lim (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$  dir.

**İspat.** (i)

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(c\Delta X_k, cX_0) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\beta} \left| \left\{ k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|$$

eşitsizliğinden çıkar.

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(\Delta(X_k + Y_k), X_0 + Y_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) + d(\Delta Y_k, Y_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{n^\beta} \left| \left\{ k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{n^\beta} \left| \left\{ k \leq n : d(\Delta Y_k, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden çıkar.

Her  $\Delta$ -yakınsak  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisinin  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -yakınsak olduğunu görmek kolaydır. Fakat tersi doğru değildir, aşağıdaki örnekte bunu görebiliriz.

**Örnek 4.10.**  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi alalım:

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x-3, & 3 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ -x+5, & 4 \leq x \leq 5 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k = m^3 \text{ ise}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -x+2, & 1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k \neq m^3 \text{ ise}$$

Bu durumda  $(X_k)$  ve  $(\Delta X_k)$  dizilerinin  $\alpha$ -seviye kümeleri

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [3 + \alpha, 5 - \alpha], & k = m^3 \text{ ise} \\ [\alpha, 2 - \alpha], & k \neq m^3 \text{ ise} \end{array} \right.$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha], & k = m^3 \text{ ise} \\ [-5 + 2\alpha, -1 - 2\alpha], & k + 1 = m^3 \text{ ise} \\ [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right.$$

şeklindedir. Buradan  $\beta > \frac{1}{3}$  için  $[X_0]^\alpha = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha]$  olmak üzere  $X = (X_k)$  dizisinin  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak olduğu görülebilir fakat  $\Delta$ -yakınsak değildir.

Çolak [22] tarafından sayı dizileri için benzeri verilen tanımı aşağıda bulanık sayı dizileri için vereceğiz.

**Tanım 4.11.**  $\beta \in (0, 1]$  ve  $p$  bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir  $X_0$  bulanık sayısı varsa  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilirdir denir.

$\beta = 1$  olması halinde  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilme, kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilmeye indirgenebilir. Bütün  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir dizilerin kümesini  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p)$  ile göstereceğiz.

**Teorem 4.12.**  $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$  olsun. Eğer  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak ise bu takdirde bu dizi  $X_0$  bulanık

sayısına  $\gamma$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır. Yani  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) \subseteq S^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}})$  dir ve bu kapsama  $\beta < \gamma$  olacak şekilde bazı  $\beta$  ve  $\gamma$  değerleri için kesindir.

**İspat.**  $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$  olsun. Bu takdirde her  $\varepsilon > 0$  için

$$\frac{1}{n^\gamma} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

olduğundan  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) \subseteq S^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}})$  elde edilir.

Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Bunun için  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi alalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \begin{cases} x-3, & 3 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ -x+5, & 4 \leq x \leq 5 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k = m^2 \text{ ise} \\ \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ -x+3, & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda  $(X_k)$  ve  $(\Delta X_k)$  dizilerinin  $\alpha$ -seviye kümelerini sırasıyla

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [3+\alpha, 5-\alpha], & k = m^2 \text{ ise} \\ [1+\alpha, 3-\alpha], & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [2\alpha, 4-2\alpha], & k = m^2 \text{ ise} \\ [-4+2\alpha, -2\alpha], & k+1 = m^2 \text{ ise} \\ [-2+2\alpha, 2-2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde buluruz. Buradan  $[X_0]^\alpha = [-2+2\alpha, 2-2\alpha]$  olmak üzere  $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$  için  $(X_k)$  dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\gamma$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır. Fakat  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$  için  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak değildir.

**Sonuç 4.13.**  $\beta \in (0, 1]$  için  $X = (X_k)$  dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak ise bu takdirde bu dizi  $X_0$  bulanık sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır yani  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) \subset S(\Delta_{\mathcal{F}})$  dir ve bu kapsama kesindir.

**Teorem 4.14.**  $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$  ve  $p$  bir pozitif reel sayı olsun.  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplananilir ise bu takdirde bu dizi  $X_0$  sayısına  $\gamma$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplananilirdir. Yani

$w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p) \subseteq w^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}, p)$  dir ve bu kapsama  $\beta < \gamma$  olacak şekilde bazı  $\beta$  ve  $\gamma$  için kesindir.

**İspat.** Kabul edelim ki  $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$  iken  $X = (X_k)$  dizisi  $X_0$  sayısına  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir olsun. Bu durumda  $p > 0$  için

$$\frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p \leq \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p$$

yazabiliriz. Buradan  $n \rightarrow \infty$  iken eşitliğin sağ tarafı sıfıra gittiğinden  $X = (X_k)$  dizisi  $X_0$  sayısına  $\gamma$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir. Yani  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p) \subseteq w^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}, p)$  dir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için Teorem 4.12 nin ispatında tanımlanan  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisini göz önüne alalım.  $(\Delta X_k)$  dizisinin  $\alpha$ -seviye kümesi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [2\alpha, 4 - 2\alpha], & k = m^2 \text{ ise} \\ [-4 + 2\alpha, -2\alpha], & k + 1 = m^2 \text{ ise} \\ [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buradan bazı aritmetik işlemlerle

$$\frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p \leq \frac{4\sqrt{n} - 2}{n^\gamma}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da  $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$  için  $[X_0]^\alpha = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha]$  olmak üzere  $X = (X_k)$  dizisinin  $X_0$  bulanık sayısına  $\gamma$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir fakat

$$\frac{4\sqrt{n} - 4}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p$$

olduğundan  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  için  $X = (X_k)$  dizisinin  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir olmadığı anlaşılır.

**Sonuç 4.15.**  $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$  ve  $p > 0$  olsun Bu takdirde

- (i)  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p) = w^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}, p)$  ancak ve ancak  $\beta = \gamma$  dır.
- (ii) Her  $\beta \in (0, 1]$  için  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p) \subseteq w(\Delta_{\mathcal{F}}, p)$  dir.

**Teorem 4.16.**  $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$  ve  $p$  bir pozitif reel sayı olsun. Eğer bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir ise

bu takdirde  $X_0$  bulanık sayısına  $\gamma$  dereceden istatistiksel yakınsaktır, yani  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p) \subseteq S^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}})$  dir.

**İspat.**  $p > 0$  ve  $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$  olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Herhangi bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi için

$$\sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p \geq |\{k \leq n : [d(\Delta X_k, X_0)]^p \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p &\geq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : [d(\Delta X_k, X_0)]^p \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{n^\gamma} |\{k \leq n : [d(\Delta X_k, X_0)]^p \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^p \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece eğer bir  $X = (X_k)$  dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir ise  $X_0$  bulanık sayısına  $\gamma$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır.

Eğer bu teoremden  $\gamma = \beta$  alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.17.**  $\beta \in (0, 1]$  ve  $0 < p < \infty$  olsun. Eğer bir  $(X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir ise bu durumda  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır. Yani  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p) \subset S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}})$  dir ve bu kapsama kesindir.

Bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği verelim:

**Örnek 4.18.**  $p = 1$  olsun.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{k^2} + 1, & -k^2 \leq x \leq 0 \text{ ise} \\ -\frac{x}{k^2} + 1, & 0 \leq x \leq k^2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} & k = m^2 \text{ ise} \\ \left\{ \begin{array}{ll} x - 2, & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ -x + 4, & 3 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda  $(X_k)$  ve  $(\Delta X_k)$  dizilerinin  $\alpha$ -seviye kümeleri sırasıyla

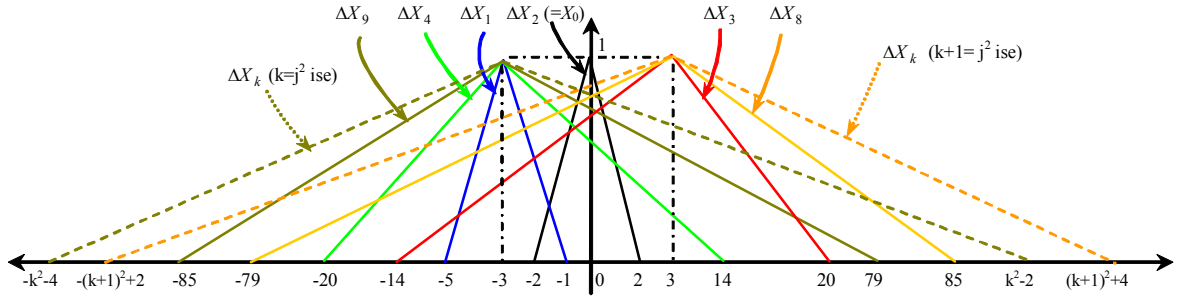
$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [-k^2(1-\alpha), k^2(1-\alpha)], & k = m^2 \text{ ise} \\ [2+\alpha, 4-\alpha], & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [-k^2(1-\alpha) - 4 + \alpha, k^2(1-\alpha) - 2 - \alpha], & k = m^2 \text{ ise} \\ [-(k+1)^2(1-\alpha) + 2 + \alpha, (k+1)^2(1-\alpha) + 4 - \alpha], & k+1 = m^2 \text{ ise} \\ [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Böylece  $[X_0]^\alpha = [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha]$  olmak üzere  $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$  için  $(X_k)$  dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak olur. (Şekil 4.2) Fakat  $p = 1$  için kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir değildir.



Şekil 4.2.  $(X_k)$  dizisi  $X_0$  sayısına  $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$  için  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır

**Sonuç 4.19.**  $\beta \in (0, 1]$  ve  $0 < p < \infty$  olsun. Eğer  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayı dizisine  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir ise  $X_0$  bulanık sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır. Yani  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p) \subset S(\Delta_{\mathcal{F}})$  dir.

**İspat.** Eğer bir  $X = (X_k)$  bulanık sayı dizisi  $X_0$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir ise bu durumda Sonuç 4.17 ve Sonuç 4.13 den bu dizinin  $X_0$  bulanık sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak olduğu görülür. Şimdi tersinin doğru olmadığını gösterelim. Bunun için

$$X_k(x) = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} x-4, & 4 \leq x \leq 5 \text{ ise} \\ -x+6, & 5 \leq x \leq 6 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} & k = m^4 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{ll} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x+3, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} & k \neq m^4 \text{ ise} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Buradan  $(X_k)$  ve  $(\Delta X_k)$  dizilerinin  $\alpha$ -seviye kümeleri sırasıyla

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [4 + \alpha, 6 - \alpha], & k = m^4 \text{ ise} \\ [1 + \alpha, 3 - \alpha], & k \neq m^4 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha], & k = m^4 \text{ ise} \\ [-5 + 2\alpha, -1 - 2\alpha], & k + 1 = m^4 \text{ ise} \\ [-2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d(\Delta X_k, X_0)]^p \leq \frac{6\sqrt[4]{n} - 3}{n^\beta}$$

yazılabilir. Böylece  $p = 1$  ve  $\beta \in (0, \frac{1}{4}]$  için  $(X_k)$  dizisi  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir değildir.

Örnek 4.18 de olduğu gibi  $(X_k)$  dizisinin  $X_0$  bulanık sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak olduğu görülebilir.

**Uyarı 4.20.** Bilinmektedir ki bir  $(X_k)$  bulanık sayı dizisi  $\Delta$ -sınırlı ve  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak ise kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilirdir. Fakat burada  $\beta \in (0, 1)$  için  $(X_k)$  bulanık sayı dizisi  $\Delta$ -sınırlı ve  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak iken  $\beta$  dereceden kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir olamaz. Bunun için  $(X_k)$  bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} x\sqrt{k} + 1, & \frac{-1}{\sqrt{k}} \leq x \leq 0 \text{ ise} \\ -x\sqrt{k} + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}, & k \neq m^2 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{ll} x - 2, & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ -x + 4, & 3 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}, & k = m^2 \text{ ise} \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Bu takdirde  $(X_k)$  ve  $(\Delta X_k)$  dizilerinin  $\alpha$ -seviye kümeleri

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[ \frac{\alpha-1}{\sqrt{k}}, \frac{1-\alpha}{\sqrt{k}} \right], & k \neq m^2 \text{ ise} \\ [2 + \alpha, 4 - \alpha], & k = m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

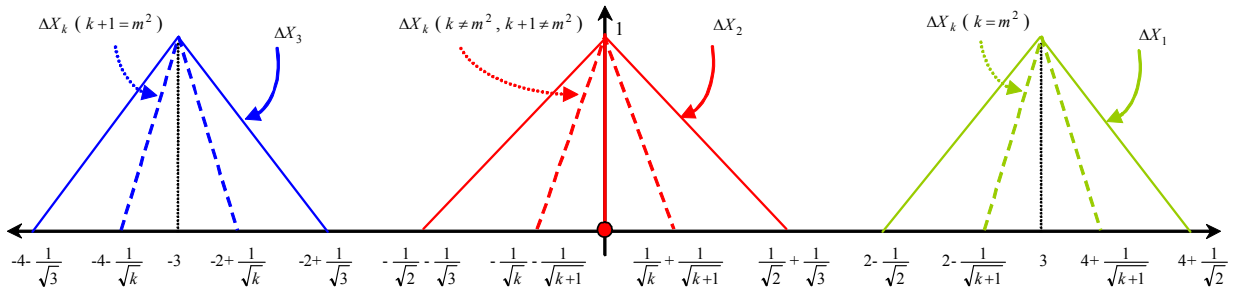
$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[ \frac{2\sqrt{k+1}-1+\alpha(\sqrt{k+1}+1)}{\sqrt{k+1}}, \frac{4\sqrt{k+1}+1-\alpha(\sqrt{k+1}+1)}{\sqrt{k+1}} \right], & k = m^2 \text{ ise} \\ \left[ \frac{-4\sqrt{k}-1+\alpha(\sqrt{k}+1)}{\sqrt{k}}, \frac{-2\sqrt{k}+1-\alpha(\sqrt{k}+1)}{\sqrt{k}} \right], & k+1 = m^2 \text{ ise} \\ \left[ \frac{-\sqrt{k+1}-\sqrt{k}+\alpha(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}, \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}-\alpha(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \right], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.  $\beta \in (0, 1]$  için  $(X_k)$  dizisinin  $\bar{0} = [0, 0]$  bulanık sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak ve dolayısıyla  $\Delta$ -sınırlı olduğu görülebilir (Şekil 4.3). Şimdi de  $(X_k)$  dizisinin kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir olmadığını gösterelim.

Bunun için  $H_n = \{k \leq n : k = m^2, m \in \mathbb{N}\}$  ve  $M_n = \{k \leq n : k+1 = m^2, m \in \mathbb{N}\}$  kümelerini tanımlayalım. Buradan  $p = 1$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d([\Delta X_k]^\alpha, \bar{0})]^p &= \frac{1}{n^\beta} \sum_{k \in H_n} [d([\Delta X_k]^\alpha, \bar{0})]^p + \frac{1}{n^\beta} \sum_{k \in M_n} [d([\Delta X_k]^\alpha, \bar{0})]^p \\ &\quad + \frac{1}{n^\beta} \sum_{\substack{k \notin H_n \\ k \notin M_n}} [d([\Delta X_k]^\alpha, \bar{0})]^p \\ &= \frac{1}{n^\beta} \sum_{k \in H_n} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + \frac{1}{n^\beta} \sum_{k \in M_n} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{n^\beta} \sum_{\substack{k \notin H_n \\ k \notin M_n}} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &> \frac{1}{n^\beta} \sqrt{n} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$  için  $(X_k)$  dizisi kuvvetli  $\Delta_p$ -Cesàro toplanabilir değildir.



Şekil 4.3.  $(X_k)$  dizisi  $\bar{0}$  sayısına  $\beta$  dereceden  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır ve  $\Delta$ -sınırlıdır

## 5. MODÜLÜS FONKSİYONU VE $\Delta$ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu kısımda bir  $f$  modülüs fonksiyonu ve  $\Delta$ -fark operatörü kullanarak  $\beta$ -dereceden kuvvetli  $p$ -Cesàro toplanabilme ve  $\beta$ -dereceden istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler verilmiştir.

**Tanım 5.1.**  $f$  bir modülüs fonksiyonu,  $\Delta$  fark operatörü,  $p = (p_k)$  kesin pozitif reel sayı dizisi ve  $\beta \in (0, 1]$  herhangi bir reel sayı olsun.  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p)$  dizi sınıfını

$$w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k \in I_n} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} = 0, \exists X_0 \in L(\mathbb{R}) \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Aşağıdaki teoremlerde  $p = (p_k)$  dizisini sınırlı ve  $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$  olarak alacağız.

**Teorem 5.2.**  $\beta \leq \alpha$  olacak şekilde herhangi  $\beta, \alpha \in (0, 1]$  reel sayılarını alalım ve  $f$  bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p) \subset S^\alpha(\Delta_{\mathcal{F}})$  dir.

**İspat.**  $X \in w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p)$  olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Bu takdirde  $n^\beta \leq n^\alpha$  olduğundan her bir  $n$  için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k \in I_n} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} &= \frac{1}{n^\beta} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\ &\quad + \frac{1}{n^\beta} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon}} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\ &\quad + \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon}} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [f(\varepsilon)]^{p_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \min \left( [f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right) \\
&\geq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \in I_n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \min \left( [f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $X \in w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p)$  olduğundan  $n \rightarrow \infty$  iken yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı sıfıra yaklaşır.  $\min \left( [f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right) > 0$  olduğundan  $n \rightarrow \infty$  iken yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşır. Bu da  $w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p) \subset S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}})$  olduğunu gösterir.

**Teorem 5.3.**  $\beta \leq \alpha$  olacak şekilde herhangi  $\beta, \alpha \in (0, 1]$  reel sayılarını alalım. Eğer  $f$  modülüs fonksiyonu sınırlı ise bu takdirde  $S^\alpha(\Delta_{\mathcal{F}}) \subset w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p)$  dir.

**İspat.**  $X \in S^\alpha(\Delta_{\mathcal{F}})$  olsun ve  $f$  'in sınırlı olduğunu kabul edelim.  $\varepsilon > 0$  verilsin ve  $\sum_1$  ve  $\sum_2$  toplamaları sırasıyla  $k \in I_n, d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon$  ve  $k \in I_n, d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$  ifadelerini gösterebiliriz.  $f$  sınırlı olduğundan her  $X \geq 0$  için  $f(X) \leq K$  olacak şekilde bir  $K$  tamsayısı vardır. Bu takdirde her bir  $n$  için  $n^\alpha \leq n^\beta$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^\beta} \sum_{k \in I_n} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} &\leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k \in I_n} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\
&= \frac{1}{n^\alpha} \left( \sum_1 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} + \sum_2 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \right) \\
&\leq \frac{1}{n^\alpha} \left( \sum_1 \max(K^h, K^H) + \sum_2 [f(\varepsilon)]^{p_k} \right) \\
&\leq \max(K^h, K^H) \frac{1}{n^\alpha} |\{k \in I_n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \max(f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H)
\end{aligned}$$

yazabiliriz.  $X \in S^\alpha(\Delta_{\mathcal{F}})$  olduğundan  $n \rightarrow \infty$  iken yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfıra yaklaşır ve ikinci terim istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu nedenle yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı da sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla  $X \in w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p)$  dir.

**Teorem 5.4.** Herhangi bir  $\alpha \in (0, 1]$  reel sayısı verilsin. Bu takdirde  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) = w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p)$  dir ancak ve ancak  $f$  sınırlıdır.

**İspat.**  $f$  sınırlı olsun. Teorem 5.2 ve Teorem 5.3 ten  $S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}) = w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, f, p)$  elde edilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy sets, Inform and Control, 8, 338-353.
- [2] Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
- [3] Fridy, J.A., 1985, On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.
- [4] Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
- [5] Nakano, H. Concave modulars, 1953, J. Math. Soc. Japan, 5, 29-49.
- [6] Kızmaz, H., 1981, On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., 24, 169-176.
- [7] Et, M. and Çolak, R., 1995, On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math., 21, 377- 386.
- [8] Çolak, R. and Et, M. 1997, On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations. Hokkaido Math. J. 26 (3), 483-492.
- [9] Et, M. and Nuray, F., 2001,  $\Delta^m$ -Statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (6) 961-969.
- [10] Moore, R.E., 1979, Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM Philadelphia.
- [11] Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A., 1972, On fuzzy mapping and Control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.
- [12] Dubois, D. and Prade, H., 1980, Fuzzy Sets Syst., Academic Press, New York.
- [13] Kaufmann, A. and Gupta, M.M., 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold.
- [14] Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
- [15] Nanda, S., 1989, On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 33, 123-126.

- [16] Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1983, Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91, 552-558.
- [17] Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1986, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl., 114, 409-422.
- [18] Matloka, M., 1986, Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28, 28-37.
- [19] Nuray, F. and Savaş, E., 1995, Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3), 269-273.
- [20] Mursaleen, M. and Başarır, M., 2003, On some new sequence spaces of fuzzy numbers, Indian J. Pure Appl. Math., 34 (9), 1351-1357.
- [21] Kwon, J.S., 2000, On statistical and  $p$ -Cesàro convergence of fuzzy numbers, Korean J. Comput.&Appl. Math. 7 (1), 195-203.
- [22] Çolak, R., 2010, Statistical convergence of order  $\alpha$ , Modern Methods in Analysis and its Applications, (Anamaya Publ. New Delhi, India), 121-129.
- [23] Altınok, H., Altın, Y. and Işık, M., 2012, Statistical convergence and strong  $p$ -Cesàro summability of order  $\beta$  in sequences of fuzzy numbers, Iranian J. of Fuzzy Systems 9(2), 65-75.
- [24] Altın, Y., Et, M. and Başarır, M., 2007, On some generalized difference sequences of fuzzy numbers, Kuwait J. Sci. Eng. 34 (1A) 1-14.

## ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Hatay’da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Hatay’da tamamladım. 2007 yılında Fırat Üniversitesi, Fen fakültesi, Matematik bölümüne girdim. 2011 yılında Matematik bölümünden mezun olarak aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2011 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir özel eğitim kurumunda matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.