

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SLANT SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ

Sezin AYKURT SEPET

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

KASIM-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SLANT SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ

DOKTORA TEZİ
Sezin AYKURT SEPET
(111121208)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri
Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

KASIM-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SLANT SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ

DOKTORA TEZİ
Sezin AYKURT SEPET
111121208

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14.10.2015

Tezin Savunma Tarihi: 06.11.2015

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut ERGÜT
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ
: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN
: Prof. Dr. Vedat ASİL



KASIM-2015

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, değerli zamanını ayırarak imkanlar sağlayan kıymetli hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e; bilgilerini ve birikimlerini esirgemedi beni yönlendiren değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ, Prof. Dr. Kazım İLARSLAN ve Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir saygılarımı sunarım.

2211-Yurtiçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca manevi olarak her zaman yanımda olan babam Ahmet AYKURT'a, annem Nebahat AYKURT'a ve eşim Hakan SEPET'e saygılarımı ve sevgilerimi sunarım.

Sezin AYKURT SEPET
ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
2.1. Riemann Manifoldlar.....	4
2.2. Vektör Demetleri ve Distribüsyonlar.....	10
2.3. Riemann Submersiyonlar.....	13
2.4. Hemen Hemen Çarpım Riemann Manifoldlar.....	24
2.5. Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar	27
3. ÇARPIM RIEMANN MANİFOLDLARINDA POINTWISE SLANT SUBMERSİYONLAR.....	34
3.1. Hemen Hemen Çarpım Manifoldlarında Pointwise Slant Submersiyonlar	34
3.2. Yerel Çarpım Riemann Manifoldlarda Pointwise Slant Submersiyonlar için Eğrilik İlişkileri.....	43
4. KONTAKT METRİK MANİFOLDLARDA POINTWISE SLANT SUBMERSİYONLAR.....	53
4.1. Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlarda Pointwise Slant Submersiyonlar	53
4.2. $\xi \in \Gamma(\zeta \eta \pi_*)$ için Pointwise Slant Submersiyonlar.....	55
4.3. $\xi \in \Gamma((\zeta \eta \pi_*)^\perp)$ için Pointwise Slant Submersiyonlar	63
4.4. Kosimplektik Manifoldlarda Pointwise Slant Submersiyonlar için Eğrilik İlişkileri.....	67
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	81

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm; konunun tarihsel gelişimi ve bu çalışmada ele alınan problemlerin tanıtımına ayrıldı.

İkinci bölümde, ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, hemen hemen çarpım Riemann manifoldlardan Riemann manifoldlara pointwise slant submersiyon (noktasal eğik submersiyon) tanımlanıp bir örnek üzerinde incelendi. Ayrıca, yerel çarpım Riemann manifoldlardan Riemann manifoldlarına tanımlı pointwise slant submersiyonların harmonik ve tamamen geodezik olma durumları incelenip liflerin total geodezikliği için gerek ve yeter şart elde edildi. Daha sonra yerel çarpım Riemann manifoldlardan Riemann manifoldlara pointwise slant submersiyonların total uzay, baz uzay ve liflerinin kesit eğrilikleri arasındaki ilişki araştırıldı.

Dördüncü bölümde ise hemen hemen kontakt metrik manifoldlardan Riemann manifoldlara pointwise slant submersiyon tanımlandı ve örnekler verildi. Ayrıca karakteristik vektör alanının durumuna göre kosimplektik manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı pointwise slant submersiyonun harmonik ve tamamen geodezik olma durumları incelendi. Daha sonra karakteristik vektör alanının durumuna göre bu submersiyonların total uzay, baz uzay ve liflerinin kesit eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Riemann Submersiyon, Hemen Hemen Çarpım Riemann Manifold, Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifold, Kosimplektik Manifold, Pointwise Slant Submersiyon.

SUMMARY

GEOMETRY OF SLANT SUBMERSIONS

This work consists of four chapters.

The first chapter is devoted presentation of the problems and their background.

In the second chapter, preliminaries, some necessary definitions, lemmas and theorems that will be needed for later use are given.

In the third chapter, the concept of pointwise slant submersion from almost product Riemannian manifolds onto Riemannian manifolds is defined and is investigated with an example. Also, the harmonicity and totally geodesic of pointwise slant submersion from local product Riemannian manifolds onto Riemannian manifolds are investigated. Then necessary and sufficient conditions for the maps to have totally geodesic fibers are obtained. Also, the curvature relations between the total manifold and the base manifold for such submersions are given.

In the four chapter, pointwise slant submersion from almost contact metric manifolds onto Riemannian manifolds is defined and examples are given. Also, the harmonicity of pointwise slant submersion from cosymplectic manifolds onto Riemannian manifolds according to the state to be vertical or horizontal of characteristic vector field is investigated and necessary and sufficient conditions for the maps to have totally geodesic fibers are given. Then, the curvature relations between the total manifold and the base manifold for such submersions according to the state to be vertical or horizontal of characteristic vector field are obtained.

Keywords: Riemannian Submersion, Almost Product Riemannian Manifold, Almost Contact Metric Manifold, Cosymplectic Manifold, Pointwise Slant Submersion.

SEMBOLLER LİSTESİ

M	: Manifold
g	: Riemann metriği
$T_p M$	: M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$	: M manifoldunun vektör alanlarının uzayı
π_*	: Türev dönüşümü
π^*	: Adjoint dönüşümü
D	: Distribüsyon
∇	: Lineer konneksiyon
$\nabla \pi_*$	: Dönüşümün ikinci temel formu
∇^π	: π -dönüşümü boyunca pullback (geri çekme) konneksiyonu
R	: Riemann Christoffel eğrilik tensörü
K	: Kesit eğriliği
$[,]$	: Lie Braket (Parantez) Operatörü
Φ	: Temel 2-form
$\ \, \ $	: Norm
$\mathcal{A}$	: Yatay tensör alanı
$\mathcal{T}$	: Dikey tensör alanı
F	: Hemen hemen çarpım yapı
ϕ	: $(1,1)$ -tipinde tensör alanı
ξ	: Karakteristik vektör alanı
η	: 1 -form

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride manifoldlar arasındaki dönüşümler manifoldların geometrisinin incelenmesinde önemli bir yere sahiptir. Bu dönüşümlerin en önemlilerinden biri izometrik immersiyonlardır. İzometrik immersiyonlar kavramı ilk olarak, Gauss'un Yüzeylerin Diferansiyel Geometrisi üzerine yaptığı çalışmalarda görüldü. Yüzeyler teorisinin geliştirilmesiyle altmanifoldlar tanımlandı. Ancak altmanifoldlar için yüzeyler teorisinde kullanılan pek çok yöntem yeterli bulunmadı. Kompleks manifoldun altmanifoldunun tanımlanması, altmanifoldlar üzerine yapılan en önemli çalışmalardan biridir. Bu altmanifoldlar invariant ve anti-invariant altmanifoldlar olmak üzere iki sınıfa ayrılarak incelendi. Chen [17] bu altmanifoldları geliştirerek slant altmanifoldları tanımladı ve inceledi. $\mathbb{C}^2$ ve $\mathbb{C}^4$ kompleks manifoldlarda slant altmanifoldların örnekleri Chen ve Tazawa tarafından verildi [17,18]. Daha sonra birçok uzayda slant altmanifoldların geometrisi üzerine çalışmalar yapıldı [5-8,14,15,44,45].

Slant altmanifoldların bir geliştirmesi olarak pointwise slant altmanifoldlar, kuasi-slant altmanifoldlar adı altında ilk olarak Etayo [24] tarafından tanımlandı. Bu çalışmada, Etayo, böyle altmanifoldların geometrisini inceledi ve bazı sonuçlar verdi. Chen ve Garay ise pointwise slant altmanifoldların geometrik ve topolojik özelliklerini araştırdı [19]. Ayrıca Park [56] hemen hemen kontakt metrik manifoldlarda pointwise slant ve pointwise semi-slant altmanifoldları inceledi ve bazı örnekler elde etti.

İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonlar, manifoldlar teorisi ve matematiksel fizikte önemli rol oynar. Bu dönüşümler Kaluza Klein [13,37] ve Yang Mills [12] teorilerinde pek çok uygulama alanına sahiptir. Riemann submersiyonlar ilk olarak O'Neill [50] ve Gray [29] tarafından bağımsız olarak tanımlandı. O'Neill, makalesinde immersiyonlardaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık olarak Riemann submersiyonlar için $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ tensörlerini tanımladı ve bunların temel özelliklerini inceledi. Ayrıca O'Neill immersiyonlarda tanımlanan Gauss ve Codazzi denklemlerinin Riemann submersiyonlardaki karşılıklarını araştırdı.

Watson, 1976 yılında hemen hemen Hermityen manifoldlar arasında hemen hemen Hermityen submersiyonları tanımladı ve baz manifoldun ve her bir lifin çoğu durumda aynı çeşit yapıya sahip olacağını gösterdi [67]. Böyle submersiyonlar daha sonra hemen

hemen kontakt manifoldlarda [20,40], lokal konformal Kaehler manifoldlarında [47] ve kuaterniyon Kaehler manifoldlarında [38,39,65] çalışıldı.

Şahin, hemen hemen Hermityen manifoldlarından Riemann manifoldlarına anti-invariant [42,58] ve yarı-invariant submersiyonları [62] tanımladı ve bu dönüşümlerin geometrik yapılarını inceledi. Bu submersiyonların geometrisi daha sonra pekçok yazar tarafından çalışıldı [1,2,33,48,63,64]. 2011 yılında Şahin [59], hemen hemen Hermityen manifoldlarından Riemann manifoldlarına slant submersiyonları aşağıdaki gibi tanımladı:

π , bir (M, g_M, J) hemen hemen Hermityen manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlı bir Riemann submersiyon olsun. Herhangi bir sıfırdan farklı $X \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için JX ve $(\text{çek}\pi_*)$ uzayı arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit ise yani $p \in M$ noktasının ve $(\text{çek}\pi_*)$ daki X teğet vektörünün seçiminden bağımsız ise π ye slant submersiyon denir. Bu durumda θ açısı slant submersiyonun slant açısıdır.

Slant submersiyonlar üzerine bugüne kadar birçok çalışma yapıldı [22,23,34,52-55,61]. Ayrıca, slant submersiyonların genelleştirmesi olarak pointwise slant submersiyonlar Lee ve Şahin tarafından çalışıldı [43]. Bu çalışmada, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan bu dönüşüm üzerine bazı karakterizasyonlar elde edildi ve örneklerin bulunması için bir metod oluşturuldu.

Bu tezde hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve hemen hemen kontakt metrik manifoldlar üzerinde tanımlı pointwise slant submersiyonlar gözönüne alındı. İkinci bölümde; Riemann manifoldlar, vektör demetleri ve distribüsyonlar ve Riemann submersiyonlar tanıtıldı. Ayrıca hemen hemen çarpım Riemann manifoldlar ve hemen hemen kontakt metrik manifoldlar hakkında genel bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde, hemen hemen çarpım Riemann manifoldundan Riemann manifolduna pointwise slant submersiyon tanımlandı ve örnek üzerinde incelendi. Bu bölümün birinci alt bölümünde total manifoldun yerel çarpım manifoldu olması durumunda submersiyonun harmonik olması ve liflerin total jeodezik altmanifold olması için gerek ve yeter koşullar elde edildi. Ayrıca submersiyonun total geodezik olması durumu incelendi. İkinci alt bölümde ise yerel çarpım Riemann manifoldundan Riemann manifolduna tanımlı olan pointwise slant submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerin kesit eğrilikleri arasında bağıntılar elde edildi.

Dördüncü bölüm, dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, hemen hemen kontakt metrik manifoldundan Riemann manifolduna pointwise slant submersiyon

tanımlandı ve örnekler verildi. İkinci ve üçüncü alt bölümde, total manifoldun kosimplektik olması durumunda, ξ karakteristik vektör alanının dikey veya yatay olmasına göre submersiyonun harmonikliği ve total geodezikliği incelendi. Ayrıca liflerin total geodezik olması için gerek ve yeter koşullar verildi. Dördüncü alt bölümde ise böyle submersiyonların kesit eğrilikleri arasında bağıntılar bulundu.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M , n -boyutlu bir C^∞ manifold ve g , M üzerinde $(0,2)$ mertebeli bir tensör alanı olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için

- i. $g(X, Y) = g(Y, X)$
- ii. $g(X, X) \geq 0$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

özellikleri sağlanıyorsa g ye Riemann metriği ve (M, g) ikilisine de Riemann manifoldu denir [66].

Teorem 2.1.1. M , n -boyutlu bir Riemann manifold ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, M de lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda M üzerindeki metrik tensörün ifadesi

$$\langle, \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

şeklindedir [36].

Tanım 2.1.2. M manifoldu üzerinde iki vektör alanı X ve Y olsun. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunu alalım.

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (2.1.1)$$

ile tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna Lie (parantez) operatörü denir. $f, h \in C^\infty(M)$ ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere bu operatör aşağıdaki özellikleri sağlar [21]:

- (i) $[X, Y] = -[Y, X]$,
- (ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, $a, b \in \mathbb{R}$
- (iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,
- (iv) $[fX, hY] = fh[X, Y] + f(Xh)Y - h(Yf)X$.

Tanım 2.1.3. (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifold ve $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları verilmiş olsun. Her $p \in M$ için

$$X_p = (x_1, \dots, x_n)|_p \in T_p M$$

dır.

$$y_i : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından, yani $y_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ise $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)|_p$

vektör alanı C^∞ sınıfındandır denir. Bu durumda Y nin X e göre kovaryant türevi

$$\nabla_X Y = (X_p[y_1], \dots, X_p[y_n])$$

şeklinde tanımlanır ve $\nabla_X Y$ ile gösterilir [35].

Tanım 2.1.4. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

fonksiyonu

- 1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,
- 2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- 3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
- 4) $\nabla_X (fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y \quad \forall f \in C^\infty(M)$,

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon denir [51].

Tanım 2.1.5. M , n -boyutlu bir manifold ve M üzerindeki konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.1.2)$$

ile tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü denir [35].

Tanım 2.1.6. M , n -boyutlu bir manifold ve M üzerindeki ∇ konneksiyonun torsiyon tensörü T olsun. Eğer $T=0$ ise ∇ konneksiyonuna simetriktir veya sıfır torsiyonludur denir [35].

Tanım 2.1.7. M bir manifold ve ∇ , M üzerinde lineer konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$1) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

$$2) X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde bir Riemann konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir.

M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \quad (2.1.3)$$

Kozsul eşitliği ile belirlenir [51].

Tanım 2.1.8. M ve N , sırasıyla, m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$$\pi: M \rightarrow N$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $p \in M$ ve $V_p \in T_p M$ için

$$(\pi_*)_p: T_p(M) \rightarrow T_{\pi(p)}(N)$$

$$V_p \rightarrow (\pi_*)_p(V_p) = (V_p[\pi_1], \dots, V_p[\pi_n])_{\pi(p)}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme türev dönüşümü denir [59].

$(x^1, x^2, \dots, x^m)$ ve $(y^1, y^2, \dots, y^n)$, sırasıyla, M ve N üzerinde lokal koordinat sistemleri olsunlar. $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$ olmak üzere π dönüşümü için

$$\pi^j = y^j \circ \pi \text{ ve } \pi_i^j = \frac{\partial \pi^j}{\partial x^i}$$

yazılabilir. Buradan

$$d\pi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \pi_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

elde edilir [21].

Önerme 2.1.1. M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi:M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda π_* dönüşümü lineerdir [60].

Tanım 2.1.9. M ve N , sırasıyla, m ve n boyutlu manifoldlar ve $\pi:M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $X \in \mathcal{X}(M)$, $Y \in \mathcal{X}(N)$ için

$$(\pi_*)_p X_p = Y|_{\pi(p)}$$

ise X vektör alanı Y vektör alanına π -bağlıdır denir [51].

Tanım 2.1.10. M ve N , g_M ve g_N Riemann metrikleri ile verilen iki Riemann manifold olsun. M nin herhangi bir p noktasında $X, Y \in T_p M$ olmak üzere $\pi:M \rightarrow N$ dönüşümü

$$g_M(X, Y) = g_N(\pi_* X, \pi_* Y)$$

eşitliğini sağlıyorsa π dönüşümüne izometrik dönüşüm denir [66].

Önerme 2.1.2. M ve N birer manifold,

$$\pi:M \rightarrow N$$

bir C^∞ dönüşüm ve X, Y ve X', Y' , sırasıyla, M ve N manifoldları üzerinde

$$d\pi(X) = X' \text{ ve } d\pi(Y) = Y'$$

yani, $\forall p \in M$ için

$$d\pi_p(X_p) = X'_{\pi(p)} \text{ ve } d\pi_p(Y_p) = Y'_{\pi(p)}$$

şartlarını sağlayan vektör alanları olsun. Bu durumda

$$d\pi([X, Y]) = [X', Y'] \circ \pi \tag{2.1.4}$$

dir [25].

Tanım 2.1.11. $\pi:M \rightarrow N$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer $(\pi_*)_p(T_p M)$ nin boyutu r ise π dönüşümünün rankı r dir denir [66].

Önerme 2.1.3. M ve N , sırasıyla, m ve n boyutlu manifoldlar ve $\pi: M \rightarrow N$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için $\text{rank}(\pi_*)_p = \text{boy}M = n$ ise $(\pi_*)_p$ birebirdir [66].

Tanım 2.1.12. M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. $\pi: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm ve σ , N üzerinde bir r -form olmak üzere

$$\pi_{*p}: T_p M \rightarrow T_{\pi(p)} N$$

türev dönüşümü için

$$\pi^*: T_{\pi(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$$

$$\pi^*(\sigma_{\pi(p)})(X_p) = \sigma_{\pi(p)}(\pi_*(X_p))$$

şeklinde tanımlı dönüşüme pull-back (geri çağırma) dönüşümü denir [60].

Tanım 2.1.13. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanan R tensör alanına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [32].

Tanım 2.1.14. (M, g) bir Riemann manifold olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} K: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y, Z, W) &\rightarrow K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

ile tanımlanan dördüncü mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir [36].

Önerme 2.1.4. (M, g) bir Riemann manifold ve M üzerindeki Riemann konneksiyonu ∇ olsun. $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar M üzerinde sağlanır [36,41]:

- (i) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$,
- (ii) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$,

$$(iii) \quad K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z),$$

$$(iv) \quad K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y).$$

Tanım 2.1.15. (M, g) bir Riemann manifold ve bir $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayı P olsun. P nin bir bazı $\{X, Y\}$ olmak üzere

$$\bar{K}(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2} = \frac{K(X, Y, X, Y)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2} \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanan $\bar{K}(X, Y)$ reel sayısına P nin kesit eğriliği denir [36].

Teorem 2.1.2. Bir (M, g) Riemann manifoldunun $T_p M$ tanjant uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı P olsun. $P = S_p \{X, Y\}$ ise

$$\bar{K}(X, Y) = \frac{K(X, Y, X, Y)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - g(X, Y)^2}$$

için

$$(i) \quad \bar{K}(X, Y) = \bar{K}(Y, X),$$

$$(ii) \quad \bar{K}(X, Y) = \bar{K}(rX, sY), \quad r \neq 0, \quad s \neq 0, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \quad \bar{K}(X, Y) = \bar{K}(X + tY, Y), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad \bar{K}(X, Y) = \bar{K}(aX + bY, cX + dY), \quad ad - bc \neq 0$$

dır [16,36].

Tanım 2.1.16. (M, g) m -boyutlu bir Riemann manifold olsun. Bu durumda

$$r: \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$r(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i) e_i$$

ile tanımlanan operatöre (M, g) nin Ricci operatörü denir [30].

Tanım 2.1.17. (M, g) , m -boyutlu bir Riemann manifold olsun. Bu durumda

$$\rho: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$\rho(X, Y) = \sum_{i=1}^m g(R(X, e_i)e_i, Y)$$

şeklinde tanımlanan tensör alanına (M, g) nin Ricci tensör alanı denir ve ρ ile gösterilir.

Burada $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, m$, (M, g) de ortonormal bir çatıdır [30].

Tanım 2.1.18. (M, g) , m -boyutlu bir Riemann manifold ve $\tau \in C^\infty(M)$ olsun. $p \in M$ olmak üzere $T_p M$ nin 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına skaler eğrilik denir ve

$$\tau = \sum_{j=1}^m \rho(e_j, e_j) = \sum_{i,j=1}^m g(R(e_i, e_j)e_j, e_i) = \sum_{i,j=1}^m K(e_i, e_j)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_i, e_j\}$, (M, g) de ortonormal bir çatıdır [26].

Teorem 2.1.3. M sabit c eğrilikli uzay olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ için

$$R(X, Y)Z = c[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

dir [26].

2.2. Vektör Demetleri ve Distribüsyonlar

Tanım 2.2.1. E, B ve F, C^∞ manifoldlar ve $\pi: E \rightarrow B$ bir C^∞ dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (I indis cümlesi) olmak üzere eğer

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, y \in F$$

olacak biçimde

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$$

difeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ailesi varsa π , F ye göre lokal çarpım özelliğine sahiptir denir ve $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemine de π nin lokal ayrışması denir [57].

Tanım 2.2.2. $\pi: E \rightarrow B$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lif demeti adı verilir.

Bir lif demetinde E manifolduna total uzay, B manifolduna baz (taban) uzay, F manifolduna lif modeli ve π ye de projeksiyon (fibrasyon) adı verilir [60].

Tanım 2.2.3. $\pi : E \rightarrow B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{p \in E \mid \pi(p) = x\}$$

cümlesine x üzerinde bir lif denir. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayını verir. Yani

$$E = \bigcup_{x \in B} F_x$$

dir [57].

Tanım 2.2.4. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. π nin D lokal ayrışmasına ζ lif demetinin lokal koordinat temsilcisi denir [3].

$\zeta = (E, \pi, B, F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisini göz önüne alalım. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\psi_{\alpha, x} : F \rightarrow F_x$$

dönüşümü $y \in F$ için

$$\psi_{\alpha, x}(y) = \psi_\alpha(x, y)$$

şeklinde tanımlanırsa ψ_α lar difeomorfizm olduklarından $\psi_{\alpha, x}$ ler de birebir, örten bir difeomorfizmdir [57].

Tanım 2.2.5. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ bir diferensiyellenebilir lif demeti olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa ζ ya bir vektör demeti denir [3]:

i) $\forall x \in B$ için F ve F_x bir K cismi üzerinde vektör uzayıdır.

ii) $\forall x \in B$ için $\psi_{\alpha, x} : F \rightarrow F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak şekilde ζ nın bir $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi vardır.

Tanım 2.2.6. $\zeta = (E, \pi, B, F)$ ve $\zeta' = (E', \pi', B', F')$ iki vektör demeti olsun. Eğer

i) $B = B'$,

ii) $\forall x \in B'$ için F'_x lifi, F_x lifinin bir alt vektör uzayı,

iii) $i: E' \rightarrow E$ inclusion dönüşümü diferensiyellenebilir

şartları sağlanıyor ise ζ' vektör demetine ζ vektör demetinin bir alt vektör demeti denir [57].

Tanım 2.2.7. $\pi: E \rightarrow B$ bir C^∞ lif demeti olsun. Bu durumda

$$\pi \circ S = I \quad (I, B \text{ nin birim dönüşümü})$$

olacak şekilde

$$S: B \rightarrow E$$

C^∞ dönüşümüne lif demetinin kesiti denir. Burada I, B üzerindeki birim dönüşümdür. Lif demeti kesitlerinin cümlesi $\Gamma(E)$ ile gösterilir [60].

Tanım 2.2.8. (E, π, B, F) bir vektör demeti olsun. $\forall p \in B$ için $T_p B$ tanjant uzayına bir X_p vektörünü taşıyan dönüşüme vektör demetinin kesiti denir. E nin $\Gamma(E)$ kesitlerinin uzayı K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör demetinin kesitine ise M üzerinde bir alan denir. TM tanjant demetinin kesitine M üzerinde bir vektör alanı denir [3].

Tanım 2.2.9. M, m -boyutlu bir manifold olsun. Herhangi bir $x \in M$ noktasında

$$D: M \rightarrow T_x M$$

$$x \rightarrow D_x \subset T_x M, \quad \text{boy}(D_x) = r$$

şeklinde tanımlı D dönüşümüne bir r -boyutlu distribüsyon denir.

$X \in \chi(M)$ için ve $x \in M$ için $X_x \in D_x$ ise M üzerindeki X vektör alanı D ye aittir denir ve $X \in \Gamma(D)$ şeklinde gösterilir [10].

Tanım 2.2.10. D, M manifoldu üzerinde r -boyutlu bir distribüsyon olsun. Her $x \in M$ noktası için D ye ait r -tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir [10].

Tanım 2.2.11. M bir C^∞ manifold, D , M manifoldu üzerinde q -boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve N , M nin altmanifoldu olsun. D_x , x noktasında N ye teğet olan uzaya eşit ise N ye D nin integral manifoldu denir. Yani

$$\pi: N \rightarrow M$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in N$ için

$$\pi_*(T_x N) = D_x$$

dir. Eğer D nin N yi kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa N ye D nin bir maksimal integral manifoldu denir [10].

Tanım 2.2.12. M , C^∞ manifold ve N , M nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall x \in N$ için D nin x i kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D ye integrallenebilirdir denir [3].

Tanım 2.2.13. M bir Riemann manifold ve ∇ , M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonuna ∇ ya göre paraleldir denir [10].

2.3. Riemann Submersiyonlar

Tanım 2.3.1. (M, g) ve (B, g') , sırasıyla, m ve n boyutlu Riemann manifoldlar olmak üzere

$$\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir örten C^∞ dönüşümü $\forall x \in M$ için

$$\text{rank } d\pi_x = \text{boy } B$$

ise π ye M üzerinde bir submersiyon adı verilir.

m ve n pozitif doğal sayılar ve $n < m$ olsun.

$$\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümü

$$\pi: (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

ile verilsin. Bir x noktasında

$$d\pi_x(v_1, \dots, v_m) = (v_1, \dots, v_n) \quad (2.3.1)$$

olduğundan $d\pi_x$ diferensiyeli örtendir. Bu durumda projeksiyon dönüşümü bir submersiyondur [25].

Tanım 2.3.2. Herhangi bir $x \in B$ için $F_x = \pi^{-1}(x)$ üzerindeki lif, (M, g) manifoldunun $r = (m - n)$ -boyutlu bir altmanifoldudur. $\pi^{-1}(x)$ altmanifoldlarına submersiyonun lifleri denir [60].

Tanım 2.3.3. Herhangi bir $p \in M$ için (M, g) deki $\mathcal{V}$ integrallenebilir distribüsyonu

$$\mathcal{V}_p = \text{çek} \pi_{*p}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{V}_p$ ye submersiyonun dikey distribüsyonu denir. Burada $\text{çek} \pi_{*p} = \{X \in \mathcal{V}_p \mid \pi_{*p}(X) = 0\}$ dir.

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^\perp$$

ile tanımlanan distribüsyona ise submersiyonun yatay distribüsyonu denir [25].

Teorem 2.3.1. $\pi: M \rightarrow B$ bir submersiyon ve M nin dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ olsun. Bu durumda, $\pi(p) = x$ ve $p \in M$ için her $\mathcal{V}_p$ dikey distribüsyonu $\pi^{-1}(x)$ in tanjant uzayı ile çakışır [25].

Tanım 2.3.4. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $x \in M$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\pi) = \text{çek} d\pi_x = \{X \in T_x M \mid d\pi_x(X) = 0\} \subset T_x M$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x(\pi) = \mathcal{V}_x^\perp \subset T_x M$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{V}_x$ uzayına π nin x noktasındaki dikey uzayı denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_x$ uzayına ise π nin x noktasındaki yatay uzayı denir [31].

Buna göre, M Riemann manifoldu herhangi bir $x \in M$ noktasında

$$T_x M = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x$$

ortogonal ayrışımına sahiptir [25].

Tanım 2.3.5. M üzerindeki bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise yatay vektör alanı olarak adlandırılır ve yatay vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ nin $\chi^h(M)$ alt uzayı ile belirtilir [31].

Tanım 2.3.6. M üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise dikey vektör alanı olarak adlandırılır ve dikey vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ nin $\chi^v(M)$ alt uzayı ile belirtilir [31].

Herhangi bir $E \in \chi(M)$ vektör alanı için, $\mathcal{V}E$ ve $\mathcal{H}E$, E nin, sırasıyla, dikey ve yatay bileşenlerini gösterir.

Tanım 2.3.7. (M, g) ve (B, g') iki Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow B$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda M üzerinde izdüşürülebilir (projectable) vektör alanlarının uzayı olan $\chi^c(M)$ nin her elemanı, M üzerinde bir vektör alanı olup B üzerindeki bir vektör alanına π -bağlıdır [25].

Tanım 2.3.8. M ve B Riemann manifoldlar olsun. Eğer M üzerindeki X vektör alanı yatay ve B üzerindeki X' vektör alanına π -bağlı ise X e temel (basic) vektör alanı denir.

Temel vektör alanlarının uzayı

$$\chi^b(M) = \chi^c(M) \cap \chi^h(M)$$

şeklinde gösterilir [60].

Tanım 2.3.9. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için $U, V \in T_p M$ olmak üzere

$$g(U, V) = g'(\pi_*(U), \pi_*(V)) \quad (2.3.2)$$

ise yani metrik tensörler korunuyorsa π ye M den B ye bir izometri denir [51].

Tanım 2.3.10. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$ bir C^∞ -submersiyon olsun. M nin her p noktasında π_{*p} , yatay vektörlerin uzunluğunu koruyorsa π ye Riemann submersiyon denir.

Bu durumda

$$g_p(u, v) = g'_{\pi(p)}(\pi_{*p}u, \pi_{*p}v), \quad u, v \in \mathcal{H}_p, \quad p \in M \quad (2.3.3)$$

dır. Bu ise bir $p \in M$ noktasında π_* türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi(p)}B$ üzerine bir lineer izometri olduğunu gösterir [25].

Örnek 2.3.1. (M, g) ve (B, g') birer Riemann manifold, $M \times B$ de bunların ürettiği bir çarpım manifoldu olsun.

$$\pi_1: M \times B \rightarrow M$$

$$\pi_2: M \times B \rightarrow B$$

projeksiyonları için $X, Y \in \chi(M \times B)$ olmak üzere

$$g_{M \times B}(X, Y) = \pi_1^* g(X, Y) + \pi_2^* g'(X, Y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu ifade

$$g_{M \times B}(X, Y) = g(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) + g'(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g_{M \times B}$, simetrik bilineer bir fonksiyondur. Diğer taraftan kabul edelim ki $V \neq 0$ için

$$g_{M \times B}(V, V) = 0, \quad E \in \chi(M \times B)$$

olsun. Halbuki

$$\begin{aligned} g_{M \times B}(V, d\pi_1(V)) &= g(d\pi_1(V), d\pi_1(V)) = 0 \\ &\Rightarrow d\pi_1(V) = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g_{M \times B}(V, d\pi_2(V)) &= g(d\pi_2(V), d\pi_2(V)) = 0 \\ \Rightarrow d\pi_2(V) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ifadelerden $V=0$ olup kabulümüzle çelişir. Bu ise $g_{M \times B}$ nin pozitif tanımlı olduğunu gösterir.

O halde

$$\pi_1 : (M \times B, g_{M \times B}) \rightarrow (M, g)$$

ve

$$\pi_2 : (M \times B, g_{M \times B}) \rightarrow (B, g')$$

projeksiyonları birer Riemann submersiyondur [31].

Örnek 2.3.2. $\mathbb{R}^4$ üzerinde bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olsun. $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

olmak üzere $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü;

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cos \alpha - x_3 \sin \alpha, x_2 \cos \alpha - x_4 \sin \alpha)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$\pi_* = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $\text{rank} \pi_* = \text{boy}(\mathbb{R}^2) = 2$ dir. Yani π bir submersiyondur. Diğer taraftan

$$\zeta \pi_* = \mathcal{V} = \left\{ V_1 = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_3}, V_2 = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ve

$$(\zeta \pi_*)^\perp = \mathcal{H} = \left\{ H_1 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_3}, H_2 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, $\mathbb{R}^2$ nin bir koordinat sistemi $\{y_1, y_2\}$ olmak üzere

$$\pi_*(H_1) = \frac{\partial}{\partial y_1} \quad \text{ve} \quad \pi_*(H_2) = \frac{\partial}{\partial y_2}$$

yazılır. Böylece $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g(H_1, H_1) = g'(\pi_*(H_1), \pi_*(H_1)) = 1$$

ve

$$g(H_2, H_2) = g'(\pi_*(H_2), \pi_*(H_2)) = 1$$

bulunur. Bu ise π nin bir Riemann submersiyon olduğunu gösterir.

Önerme 2.3.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar,

$$\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyon ve M ve B nin Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla, ∇ ve ∇' olsun. M üzerindeki X, Y temel vektör alanları X', Y' vektör alanlarına π -bağlı olmak üzere:

$$(i) \quad g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi,$$

$$(ii) \quad \mathcal{H}[X, Y] \text{ temel vektör alanı, } [X', Y'] \text{ vektör alanına } \pi\text{-bağlıdır,}$$

$$(iii) \quad \mathcal{H}(\nabla_X Y) \text{ temel vektör alanı ve } \nabla'_X Y' \text{ } \pi\text{-bağlıdır,}$$

$$(iv) \quad \text{Herhangi bir } V \in \chi^v(M) \text{ için, } [X, V] \text{ dikey vektör alanıdır [25,60].}$$

İspat.

$$i. \quad p \in M, \quad X, Y \in \chi^b(M) \text{ için (2.3.3) eşitliğinden}$$

$$g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi$$

elde edilir.

$$ii. \quad \text{Herhangi } X, Y \in \chi^b(M), \quad X', Y' \text{ e } \pi\text{-bağlı olsun.}$$

$$\pi_*([X, Y]) = \pi_*(\mathcal{H}[X, Y]) + \pi_*(\mathcal{V}[X, Y])$$

yazılabildiğinden

$$\pi_*([X, Y]) = \pi_*(\mathcal{H}[X, Y])$$

bulunur. Böylece

$$\pi_*(\mathcal{H}[X, Y]) = [\pi_*(X), \pi_*(Y)]$$

veya

$$\pi_*(\mathcal{H}[X, Y]) = [X', Y'] \circ \pi$$

olur. Yani $\mathcal{H}[X, Y]$ temel vektör alanı $[X', Y']$ vektör alanına π -bağlıdır.

$$iii. \quad \pi \text{ bir izometri olduğundan}$$

$$X(g(Y, Z)) = X'(g'(Y', Z')) \circ \pi$$

olur. $[X, Y]$ ile $[X', Y']$ vektör alanları π -bağlı ve X', Y', Z' vektör alanlarının yatay liftleri X, Y, Z temel vektör alanları olmak üzere

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X'(g'(Y', Z')) + Y'(g'(X', Z')) - Z'(g'(X', Z')) \\ + g'([X', Y'], Z') + g'([Z', X'], Y') - g'([Y', Z'], X')$$

dir. Buradan

$$g'(\pi_*(\mathcal{H}\nabla_X Y), Z') \circ \pi = g(\mathcal{H}\nabla_X Y, Z) = g'(\nabla_{X'} Y', Z') \circ \pi$$

elde edilir.

iv. Herhangi bir $V \in \mathcal{X}^v(M)$ ve $X \in \mathcal{X}^b(M)$ için X temel vektör alanı X' vektör alanına π -bağlı olsun. Bu durumda

$$\pi_*([X, V]) = 0$$

bulunur. Bu ise $[X, V] \in \Gamma(\mathcal{V})$ demektir.

Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.3.11. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyon olsun. ∇ , M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $(1, 2)$ mertebeli $\mathcal{T}$ temel tensör alanı $E, F \in \Gamma(TM)$ için

$$\mathcal{T}(E, F) = \mathcal{T}_E F = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E} \mathcal{V}F + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E} \mathcal{H}F, \quad (2.3.4)$$

şeklinde tanımlanır.

$E \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $\mathcal{T}$ temel tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. $\mathcal{T}_E$ anti simetrik ve lineer operatördür.
- ii. $\mathcal{T}_E$ yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.
- iii. $\mathcal{T}_E$ dikey tensör alanıdır. Yani $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_{\mathcal{V}E}$ dir.
- iv. $\mathcal{T}$, dikey vektör alanları için simetriktr. Yani $V, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ olmak üzere

$$\mathcal{T}_V W = \mathcal{T}_W V \quad (2.3.5)$$

dir [66].

Tanım 2.3.12. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: M \rightarrow B$$

bir Riemann submersiyon olsun. ∇ , M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $(1, 2)$ mertebeli $\mathcal{A}$ temel tensör alanı

$$\mathcal{A}_E F = \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{H}E}) \mathcal{V}F + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E} \mathcal{H}F \quad (2.3.6)$$

şeklinde tanımlanır.

$E \in \Gamma(TM)$ olmak üzere $\mathcal{A}$ temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i. $\mathcal{A}_E$ anti-simetrik ve lineer operatördür.
- ii. $\mathcal{A}_E$ yatay ve dikey altuzaylarının rollerini değiştirir.
- iii. $\mathcal{A}$ yatay tensör alanıdır. Yani $\mathcal{A}_E = \mathcal{A}_{\mathcal{H}E}$ dir.
- iv. $\mathcal{A}$, yatay vektör alanları için alterneleyendir. Yani $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$\mathcal{A}_X Y = -\mathcal{A}_Y X \quad (2.3.7)$$

dir [66].

Önerme 2.3.2. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: M \rightarrow B$$

bir Riemann submersiyon olsun. X ve Y , M üzerinde yatay vektör alanları olmak üzere

$$\mathcal{A}_X Y = \frac{1}{2} \mathcal{V}[X, Y]$$

dir [66].

Teorem 2.3.2. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: M \rightarrow B$$

bir Riemann submersiyon olsun. O halde $E, F, G \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\mathcal{T}_E F, G) = -g(\mathcal{T}_E G, F) \quad (2.3.8)$$

$$g(\mathcal{A}_E F, G) = -g(\mathcal{A}_E G, F) \quad (2.3.9)$$

dir [25].

Bir Riemann submersiyonda yatay distribüsyonun integrallenebilirliği için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3.3. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: M \rightarrow B$$

bir Riemann submersiyon olsun. M manifoldu üzerindeki $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A} = 0$ olmasıdır [60].

Tanım 2.3.13. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: M \rightarrow B$$

bir Riemann submersiyon olsun. O halde $\mathcal{T}$ temel tensör alanı sıfır ise π nin herhangi bir lifine M nin total geodezik altmanifoldudur denir [60].

$\hat{\nabla}$, (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir lif boyunca indirgenmiş metriğe göre bir Riemann konneksiyon olsun. V ve W dikey vektör alanları için

$$\hat{\nabla}_V W = \mathcal{V} \nabla_V W \quad (2.3.10)$$

dir. (2.3.4), (2.3.5) ve (2.3.8) eşitliklerinden aşağıdaki Lemma elde edilir.

Lemma 2.3.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: M \rightarrow B$$

bir Riemann submersiyon olsun. $X, Y \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için

$$\nabla_V W = \mathcal{T}_V W + \hat{\nabla}_V W \quad (2.3.11)$$

$$\nabla_V X = \mathcal{H} \nabla_V X + \mathcal{T}_V X \quad (2.3.12)$$

$$\nabla_X V = \mathcal{A}_X V + \mathcal{V} \nabla_X V \quad (2.3.13)$$

$$\nabla_X Y = \mathcal{H} \nabla_X Y + \mathcal{A}_X Y \quad (2.3.14)$$

ve X temel vektör alanı ise

$$\mathcal{H} \nabla_V X = \mathcal{A}_X V \quad (2.3.15)$$

dir [60].

Önerme 2.3.3. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$ bir

Riemann submersiyon olsun. Bu durumda $E \in \Gamma(TM)$, $X, Y \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ ve

$U, V, W \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için

$$g((\nabla_E \mathcal{T})_V W, X) = g((\nabla_E \mathcal{T})_W V, X)$$

ve

$$g((\nabla_E \mathcal{A})_X Y, V) = -g((\nabla_E \mathcal{A})_Y X, V)$$

dir. Yani $\nabla \mathcal{T}$, dikey distribüsyon üzerinde simetrik ve $\nabla \mathcal{A}$, yatay distribüsyon üzerinde anti-simetriktir [60].

Hatırlatma 2.3.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi: M \rightarrow B$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. π nin π_* diferensiyeli $Hom(TM, \pi^{-1}TB) \rightarrow M$ demetinin bir kesiti olarak görülebilir. Burada $\pi^{-1}TB$,

$$(\pi^{-1}TB)_p = T_{\pi(p)}B, \quad p \in M$$

liflerine sahip pullback demetidir. $Hom(TM, \pi^{-1}TB)$, ∇^M Levi-Civita konneksiyonundan indirgenen bir ∇ konneksiyonuna sahiptir. O halde π nin ikinci temel formu $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla \pi_*)(X, Y) = \nabla_X^\pi \pi_*(Y) - \pi_*(\nabla_X^M Y) \quad (2.3.16)$$

dir. Burada ∇^π pullback konneksiyondur [9].

Sonuç 2.3.1. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi: M \rightarrow B$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. π bir Riemann submersiyon ise herhangi $X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$(\nabla \pi_*)(X, Y) = 0 \quad (2.3.17)$$

dir [60].

Tanım 2.3.14. $\{U_j\}_{1 \leq j \leq r}$, $\Gamma(\text{çek} \pi_*)$ uzayının bir yerel ortonormal çatısı olmak üzere herhangi bir lifin ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \frac{1}{r} I_z(\mathcal{T}) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \mathcal{T}_{U_j} U_j \quad (2.3.18)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $H=0$ ise submersiyona minimal liflere sahip Riemann submersiyonu denir [60].

Tanım 2.3.15. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi: M \rightarrow B$ bir Riemann submersiyon olsun.

$$\dot{I}z \nabla \pi_* = 0 \quad (2.3.19)$$

ise π ye harmoniktir denir [9].

Tanım 2.3.16. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $\pi: M \rightarrow B$ bir Riemann submersiyon olsun. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla \pi_*)(X, Y) = 0 \quad (2.3.20)$$

ise π ye total geodezik dönüşüm denir [9].

Bu kısımda, tanım manifoldu ile baz manifoldunun eğrilikleri incelendi.

Tanım 2.3.17. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve $R^*, \chi^h(M)$ üzerinde $(1, 3)$ -mertebeli eğrilik tensör alanı olsun. Herhangi bir $X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $p \in M$ olmak üzere $R'_{\pi(p)}(\pi_* X_p, \pi_* Y_p, \pi_* Z_p)$ tensörünün yatay lifti $R^*(X, Y, Z)_p$ ile ifade edilir. (B, g') manifoldunun R' Riemann eğriliği

$$\pi_*(R^*(X, Y, Z)) = R'(\pi_* X, \pi_* Y, \pi_* Z)$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca herhangi bir $X, Y, Z, H \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$R^*(X, Y, Z, H) = g(R^*(Z, H, Y), X) = R'(\pi_* X, \pi_* Y, \pi_* Z, \pi_* H) \circ \pi$$

dir [25].

Teorem 2.3.4. (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldlar ve

$$\pi: (M, g) \rightarrow (B, g')$$

bir Riemann submersiyon olsun. R_M, R_B ve $\hat{R}$, sırasıyla, M, B ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere herhangi bir $U, V, W, F \in \Gamma(\text{çek} \pi_*)$ ve $X, Y, Z, H \in \Gamma((\text{çek} \pi_*)^\perp)$ için

$$R_M(U, V, W, F) = \hat{R}(U, V, W, F) + g(\mathcal{T}_V F, \mathcal{T}_U W) - g(\mathcal{T}_U F, \mathcal{T}_V W) \quad (2.3.21)$$

$$R_M(X, Y, Z, H) = R_B(\pi_*X, \pi_*Y, \pi_*Z, \pi_*H) + 2g(\mathcal{A}_X Y, \mathcal{A}_Z H) - g(\mathcal{A}_Y Z, \mathcal{A}_X H) + g(\mathcal{A}_X Z, \mathcal{A}_Y H) \quad (2.3.22)$$

$$R_M(X, V, Y, W) = -g((\nabla_X T)_V W, Y) + g((\nabla_V \mathcal{A})_X Y, W) - g(T_V X, T_W Y) + g(\mathcal{A}_X V, \mathcal{A}_Y W) \quad (2.3.23)$$

dir [60,66].

2.4. Hemen Hemen Çarpım Riemann Manifolds

Tanım 2.4.1. M ve N , $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ve $\{(V_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in J}$ diferensiyellenebilir yapılara sahip m ve n boyutlu Riemann manifoldlar olsun. Bu durumda $\{U_\alpha \times V_\beta\}_{\alpha \in I, \beta \in J}$, $M \times N$ için bir açık örtü oluşturur. $(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$ için

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \times \varphi_\beta : U_\alpha \times V_\beta &\rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (p, q) &\rightarrow (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \varphi_\beta(q)) \end{aligned}$$

olmak üzere $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi_\beta)$, $M \times N$ için diferensiyellenebilir yapı meydana getirir. Bu yapı ile birlikte $M \times N$ manifolduna çarpım manifoldu denir [60].

Tanım 2.4.2. (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldlar olsun. π ve σ , $M \times N$ çarpım manifoldundan, sırasıyla, M ve N ye izdüşüm fonksiyonları

$$\begin{aligned} \pi : M \times N &\rightarrow M \\ (p, q) &\rightarrow p \\ \sigma : M \times N &\rightarrow N \\ (p, q) &\rightarrow q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda

$$g(X, Y) = g_M(\pi_*X, \pi_*Y) + g_N(\sigma_*X, \sigma_*Y)$$

şeklinde tanımlanan g , pozitif tanımlı simetrik bilinear formdur. Böylece $(M \times N, g)$ bir Riemann manifoldu olup bu manifoldda çarpım Riemann manifoldu denir.

$M \times N$ çarpım Riemann manifoldu aşağıdaki özellikleri sağlar;

- a) π ve σ izdüşümleri C^∞ dönüşümlerdir ve bu dönüşümler birer submersiyondur.
- b) Bir $\varphi : P \rightarrow M \times N$ dönüşümünün C^∞ olması için gerek ve yeter şart hem $\pi \circ \varphi$ hem de $\sigma \circ \varphi$ dönüşümlerinin C^∞ olmasıdır.

c) Herbir $(p, q) \in M \times N$ için

$$M \times q = \{(r, q) \in M \times N : r \in M\}$$

$$p \times N = \{(p, r) \in M \times N : r \in N\}$$

alt kümeleri $M \times N$ nin alt manifoldlarıdır.

d) Herbir $(p, q) \in M \times N$ için, $\pi|_{M \times q}$, $M \times q$ dan M ye diffeomorfizmdir ve

$\sigma|_{p \times N}$, $p \times N$ den N ye diffeomorfizmdir. (b) den

$$T_{(p,q)}M = T_{(p,q)}(M \times q) \text{ ve } T_{(p,q)}N = T_{(p,q)}(p \times N)$$

uzayları (p, q) noktasında $M \times N$ nin tanjant altuzaylarıdır. Böylece

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_{(p,q)}M \oplus T_{(p,q)}N$$

dir. Buradan her $X \in T_{(p,q)}M \times N$ için $X_1 \in T_{(p,q)}M$ ve $X_2 \in T_{(p,q)}N$ olmak üzere

$X = X_1 + X_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir [32,66].

Tanım 2.4.3. $(M \times N, g)$, m -boyutlu bir çarpım Riemann manifoldu olsun. $M \times N$ üzerinde

$$F \neq \pm I, F^2 = I \tag{2.4.1}$$

olacak şekilde (1,1) tipinde tensör alanı tanımlı ise F ye hemen hemen çarpım yapı, $(M \times N, g, F)$ üçlüsüne de hemen hemen çarpım Riemann manifoldu denir [66].

$(M \times N, g, F)$ bir hemen hemen çarpım Riemann manifoldu olsun. Bu durumda

$$P = \frac{1}{2}(I + F), \quad Q = \frac{1}{2}(I - F)$$

projeksiyonları gözönüne alındığında

$$P + Q = I, P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0, F = P - Q$$

ve $F^2 = I$ olduğu kolayca görülür. Böylece P ve Q projeksiyonları global olarak distribüsyonlar tanımlar. F nin özdeğerleri ± 1 dir.

$M \times N$ üzerinde tanımlanan Riemann metriği açık olarak her $X, Y \in T(M \times N)$ için

$$g(FX, FY) = g(X, Y) \tag{2.4.2}$$

veya

$$g(FX, Y) = g(X, FY) \tag{2.4.3}$$

şartlarını sağlar. $F^2 = I$ olduğundan $T(M \times N)$ nin distribüsyonlarının integral altmanifoldları olan (M, g_M) ve (N, g_N) birer Riemann altmanifoldlarıdır. Yani

$$TM = \{X \in T(M \times N) : FX = X\}$$

ve

$$TN = \{X \in T(M \times N) : FX = -X\}$$

dır. Böylece $T(M \times N)$ nin dikey ve yatay distribüsyonlarının integral altmanifoldları, sırasıyla, (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldlarıdır [32].

Tanım 2.4.4. $M \times N$ bir çarpım manifoldu, g ve F de $M \times N$ üzerinde, sırasıyla, Riemann metrik ve hemen hemen çarpım yapı olsun. $X, Y \in \chi(M \times N)$ için

$$\Psi(X, Y) = g(X, FY) \quad (2.4.4)$$

şeklinde tanımlı tensöre ikinci temel form denir. Bu tensörün simetrik tensör olduğu kolayca görülür. Ψ ikinci temel formu

$$\Psi(FX, FY) = \Psi(X, Y)$$

eşitliğini sağlar [32].

Tanım 2.4.5. $(M \times N, F, g)$ hemen hemen çarpım Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $X \in \chi(M \times N)$ için

$$\nabla_X F = 0 \quad (2.4.5)$$

ise $M \times N$ ye yerel çarpım Riemann manifoldu denir. Burada ∇ Levi-Civita konneksiyonudur [66].

Lemma 2.4.1. $(M \times N, F, g)$ bir yerel çarpım Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere aşağıdakiler denktir [4]:

- i. $\nabla F = 0$,
- ii. $\nabla \Psi = 0$.

Teorem 2.4.1. $(M \times N, F, g)$ bir yerel çarpım Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(T(M \times N))$ için,

$$i. R(X, Y)FZ = FR(X, Y)Z,$$

$$ii. R(FX, FY) = R(X, Y),$$

$$iii. R(X, FY) = R(FX, Y)$$

dir. Burada R hemen hemen çarpım Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörüdür [4].

2.5. Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar

Tanım 2.5.1. M , $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlayan bir η diferensiyel 1-formu varsa η ya kontakt form, (M, η) ikilisine de kontakt manifold denir. Kontakt manifoldlarda $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ bağıntısı M manifoldu üzerinde bir hacim elementine karşılık gelir ve bundan dolayı M manifoldu yönlendirilebilir. Burada $(d\eta)^n$ ifadesi $d\eta$ nın kendisi ile n defa dış çarpımını gösterir. η , 1-form olduğundan $d\eta$, 2-form ve $\eta \wedge (d\eta)^n$ ifadesi $(2n+1)$ -form olur. Bu yüzden kontakt manifoldlar $(2n+1)$ -boyutlu manifoldlardır [11,28].

Tanım 2.5.2. (M, η) bir kontakt manifold ve $X \in \Gamma(TM)$ olsun. $X \neq \xi$ olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } d\eta(\xi, X) = 0 \tag{2.5.1}$$

olacak şekilde bir $\xi \in \Gamma(TM)$ vektör alanı varsa ξ ye η kontakt yapısının karakteristik vektör alanı denir. Burada

$$\xi: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_M(P)$$

birebir ve örten $(1, 0)$ tipinde bir tensör alanıdır [11].

Tanım 2.5.3. M , $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve I , TM üzerinde özdeşlik endomorfizmi olsun. M üzerinde $(1,1)$ tipinden bir tensör alanı ϕ , bir vektör alanı ξ ve bir 1-form η olmak üzere

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1 \quad (2.5.2)$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda (ϕ, ξ, η) üçlüsüne bir hemen hemen kontakt yapı ve (M, ϕ, ξ, η) ye ise bir hemen hemen kontakt manifold denir [11].

Teorem 2.5.1. (M, ϕ, ξ, η) , $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontakt manifold olmak üzere $X, \xi \in \Gamma(TM)$ ve $X \neq \xi$ için

$$\text{i. } \phi\xi = 0, \quad (2.5.3)$$

$$\text{ii. } \eta \circ \phi = 0, \quad (2.5.4)$$

$$\text{iii. } \text{rank}\phi = 2n \quad (2.5.5)$$

dir [11].

Tanım 2.5.4. (M, ϕ, ξ, η) , $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontakt manifold olsun. $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.5.6)$$

şeklinde bir Riemann metrik tanımlı ise (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir hemen hemen kontakt metrik yapı ve (M, ϕ, ξ, η, g) ye ise bir hemen hemen kontakt metrik manifold denir.

(2.5.6) eşitliğinde Y yerine ξ yazıldığında

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.5.7)$$

elde edilir [11].

Teorem 2.5.2. (ϕ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold M olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [11].

Sonuç 2.5.1. (ϕ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)$ boyutlu bir hemen hemen kontakt M manifoldunda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0 \quad (2.5.8)$$

dir [11].

Sonuç 2.5.2. (ϕ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen kontakt M manifoldunda $X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\phi X, X) = 0 \quad (2.5.9)$$

dır [11].

Teorem 2.5.3. M , $(2n+1)$ -boyutlu kontakt manifoldu verilsin. Bu durumda M de kontakt η 1-formu vardır. Bu η 1-formu yardımıyla M de $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.5.10)$$

olacak şekilde (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı bulunur [28].

Tanım 2.5.5. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.5.11)$$

şeklinde tanımlı Φ tensörüne (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısının ikinci temel formu denir [11,20].

Tanım 2.5.6. Φ , (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik manifoldu üzerinde bir 2-form olmak üzere

$$\Phi = d\eta$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye bir kontakt metrik manifoldu (hemen hemen Sasakian manifoldu) denir.

ϕ tensör alanının Nijenhuis tensörü

$$N(X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y], \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$N(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$$

ise (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısına normaldir denir [11].

Tanım 2.5.7. (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. η ve Φ kapalı ise M ye bir hemen hemen kosimplektik manifold denir. (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı normal ise (M, ϕ, ξ, η, g) manifolduna kosimplektik manifold denir [11].

Teorem 2.5.4. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik manifoldu verilsin. (M, ϕ, ξ, η, g) nin kosimplektik olması için gerek ve yeter şart ϕ nin paralel olmasıdır. Yani, ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\nabla \phi = 0 \tag{2.5.12}$$

dır.

(M, ϕ, ξ, η, g) kosimplektik manifoldu için aşağıdaki eşitlikler elde edilir [10, 46];

$$\text{i. } \nabla \phi = 0, \tag{2.5.13}$$

$$\text{ii. } \nabla \eta = 0, \tag{2.5.14}$$

$$\text{iii. } \nabla \xi = 0. \tag{2.5.15}$$

Teorem 2.5.5. (M, ϕ, ξ, η, g) bir kosimplektik manifold olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü ve kesit eğriliği herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\text{i. } R(\phi X, \phi Y) = R(X, Y),$$

$$\text{ii. } K(\phi X, \phi Y) = K(X, Y),$$

$$\text{iii. } K(X, \xi) = 0.$$

Ayrıca X, Y ve $\phi X, \phi Y$ vektörlerinin ortonormal olması durumunda

$$\text{iv. } g(R(X, \phi X)Y, \phi Y) = -K(X, Y) - K(X, \phi Y)$$

sağlanır [11,27].

Örnek 2.5.1. $\mathbb{R}^4$ de (x_1, x_2, x_3, x_4) standart koordinatlar olmak üzere $\mathbb{R}^4$ üzerinde

J_1 ve J_2 kompleks yapıları

$$\begin{aligned} J_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}, & J_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ J_1\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_4}, & J_1\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_3} \\ J_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_3}, & J_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_4} \\ J_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_1}, & J_2\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Ayrıca (x_1, x_2, x_3, x_4, t) koordinatlarıyla verilen $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ Öklid uzayı üzerindeki η formu

$$\eta = dt$$

olsun. $\xi = \frac{d}{dt}$ için

$$\eta(\xi) = dt\left(\frac{d}{dt}\right) = 1$$

olur. Ayrıca $\theta: \mathbb{R}^5 \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$X = (a, b, c, d) \in \Gamma(T\mathbb{R}^4)$, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^5)$ için $\mathbb{R}^5$ üzerinde

$$\phi\left(X + h\frac{d}{dx_5}\right) = (\cos\theta)J_1X - (\sin\theta)J_2X$$

olmak üzere ϕ endomorfizimine karşılık gelen matris

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\phi^2\left(X + h \frac{d}{dt}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ h \end{bmatrix} = -X + h \frac{d}{dt}$$

bulunur. Ayrıca $X = a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2} + c \frac{\partial}{\partial x_3} + d \frac{\partial}{\partial x_4}$ olmak üzere

$$\eta\left(X + h \frac{d}{dt}\right) = dt \left(a \frac{\partial}{\partial x_1} + b \frac{\partial}{\partial x_2} + c \frac{\partial}{\partial x_3} + d \frac{\partial}{\partial x_4} + h \frac{d}{dt} \right) = h$$

olur. Buradan

$$\phi^2\left(X + h \frac{d}{dt}\right) = -X + \eta\left(X + h \frac{d}{dt}\right) \xi$$

dir. Böylece $\mathbb{R}^5$ üzerinde bir g Öklid metriği ile birlikte (ϕ, ξ, η, g) yapısı bir hemen hemen kontakt metrik yapıdır. Bu yapı ile birlikte $\mathbb{R}^5$ bir hemen hemen kontakt metrik manifolddur [56].

Örnek 2.5.2. $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde kartezyen koordinatlar $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}, z\}$, $i = 1, \dots, n$,

olsun. $\xi = \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n+1})$ ve $\eta = dz$ kontakt formu için

$$\eta(\xi) = 1$$

dir. Ayrıca ϕ endomorfizimi

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanırsa $X = (a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{2n} \frac{\partial}{\partial x_{2n}} + a_{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n+1})$

olmak üzere

$$\eta(X) = dz \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \right) = a_{2n+1}$$

ve

$$\phi^2(X) = \begin{bmatrix} -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{bmatrix} = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir.

Bu durumda (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapı ile birlikte $\mathbb{R}^{2n+1}$ bir hemen hemen kontakt manifold olur.

Diğer taraftan $\mathbb{R}^{2n+1}$ hemen hemen kontakt manifoldunda g metriği

$$g = \sum_{i=1}^n \left((dx_i)^2 + (dy_i)^2 \right) + (dz)^2$$

şeklinde tanımlanırsa (ϕ, ξ, η, g) yapısı $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik yapı olur. Aynı zamanda ϕ endomorfizimi paralel olduğunda bu yapı bir kosimplektik yapıdır. (ϕ, ξ, η, g) kosimplektik yapısı ile birlikte $\mathbb{R}^{2n+1}$ bir kosimplektik manifold olur [49].

3. ÇARPIM RIEMANN MANİFOLDLARINDA POINTWISE SLANT SUBMERSİYONLAR

3.1. Hemen Hemen Çarpım Manifoldlarında Pointwise Slant Submersiyonlar

Tanım 3.1.1. (M, g_M, F) bir hemen hemen çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir Riemann submersiyon olsun. Herbir $p \in M$ için $F(X)$ ve $(\text{çek}\pi_*)_p$ uzayı arasındaki $\theta(X)$ açısı, sıfırdan farklı $X \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ vektörünün seçiminden bağımsız ise π ye bir pointwise slant submersiyon denir. θ açısına ise pointwise slant submersiyonun slant fonksiyonu denir.

Bu $\theta(X)$ açısı $p \in M$ nin seçiminden bağımsız ise π ye slant submersiyon denir. θ açısına ise slant submersiyonun slant açısı denir [47].

Örnek 3.1.1. $\theta: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu için $\mathbb{R}^4$ üzerinde hemen hemen çarpım yapı

$$F_\theta = ((\cos \theta)b - (\sin \theta)a, (\cos \theta)a - (\sin \theta)b, (\cos \theta)d - (\sin \theta)c, (\cos \theta)c + (\sin \theta)d)$$

olmak üzere $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1 - x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 - x_4}{\sqrt{2}} \right)$$

şeklinde tanımlansın. π_* dönüşüm matrisi

$$\pi_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\text{çek}\pi_* = \text{span} \left\{ U = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}, V = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ve

$$(\zeta ek\pi_*)^\perp = span\left\{X = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3}, Y = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

elde edilir. O halde π bir Riemann submersiyondur.

π, θ slant fonksiyonu ile bir pointwise slant submersiyondur.

(M, g_M, F) bir hemen hemen çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $U \in \Gamma(\zeta ek\pi_*)$ için

$$FU = \psi U + \omega U \quad (3.1.1)$$

şeklinde belirtilir. Burada ψU ve ωU , FU nun, sırasıyla, dikey ve yatay bileşenleridir.

Ayrıca $X \in \Gamma((\zeta ek\pi_*)^\perp)$ için

$$FX = BX + CX \quad (3.1.2)$$

dir. Burada BX ve CX , FX in, sırasıyla, dikey ve yatay bileşenleridir.

(2.3.11), (2.3.12) ve (3.1.1) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.1. (M, g_M, F) bir hemen hemen çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. ∇ , M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $U, V \in \Gamma(\zeta ek\pi_*)$ için

$$(\nabla_U \omega)V = C T_U V - T_U \psi V \quad (3.1.3)$$

$$(\nabla_U \psi)V = B T_U V - T_U \omega V \quad (3.1.4)$$

olur. Burada

$$(\nabla_U \omega)V = \mathcal{H} \nabla_U \omega V - \omega \hat{\nabla}_U V, \quad (3.1.5)$$

$$(\nabla_U \psi)V = \hat{\nabla}_U \psi V - \psi \hat{\nabla}_U V \quad (3.1.6)$$

dir.

Tanım 3.1.2. (M, g_M, F) bir hemen hemen çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir Riemann submersiyon olsun. Herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta ek\pi_*)$ için

$$(\nabla_U \omega)V = 0 \quad (3.1.7)$$

ise ω ya paraleldir denir.

Böylece çarpım Riemann manifoldları için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.1. (M, g_M, F) bir hemen hemen çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda π nin bir pointwise slant submersiyon olması için gerek ve yeter şart θ reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$\psi^2 = (\cos^2 \theta) I \quad (3.1.8)$$

dır.

İspat: Herhangi bir sıfırdan farklı $U \in \Gamma(\zeta \pi_*)$ için

$$\cos^2 \theta = \frac{\|\psi U\|}{\|FU\|}$$

olur. (2.4.2) ve (3.1.1) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} g_M(\psi^2 U, U) &= g_M(\psi U, \psi U) \\ &= \cos^2 \theta g_M(U, U) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\psi^2 = (\cos^2 \theta) I$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.1. (M, g_M, F) bir hemen hemen çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta \pi_*)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$g_M(\psi U, \psi V) = \cos^2 \theta g_M(U, V), \quad (3.1.9)$$

$$g_M(\omega U, \omega V) = \sin^2 \theta g_M(U, V) \quad (3.1.10)$$

İspat: (3.1.1) ve (3.1.8) eşitlikleri kullanılarak (3.1.9) ve (3.1.10) eşitlikleri elde edilir.

Lemma 3.1.2. (M, g_M, F) bir hemen hemen çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. ω paralel ise

$$\mathcal{T}_{\psi U} \psi U = \cos^2 \theta \mathcal{T}_U U \quad (3.1.11)$$

dir. Burada θ , π nin slant fonksiyonudur.

İspat: ω nın paralel olduğunu varsayalım. O halde $U, V \in \Gamma(\zeta \pi_*)$ için (3.1.3) den

$$\mathcal{T}_V \psi U = C \mathcal{T}_V U$$

dır. U ve V nin yerleri değiştirilip (2.3.5) eşitliği kullanılırsa

$$\mathcal{T}_U \psi V = \mathcal{T}_V \psi U$$

elde edilir. V nin yerine ψU yazılıp (3.1.8) eşitliğinden

$$\mathcal{T}_{\psi U} \psi U = -(\sin 2\theta)U + \cos^2 \theta \{ \mathcal{T}_U U + \hat{\nabla}_U U \} - \hat{\nabla}_U \cos^2 \theta U$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathcal{T}_{\psi U} \psi U = \cos^2 \theta \mathcal{T}_U U$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıda adjoint dönüşümler için bazı karakterizasyonlar verildi:

(M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldlar ve $\pi: M_1 \rightarrow M_2$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda π nin ${}^* \pi_*$ adjoint dönüşümü $X \in T_p M_1$, $Y \in T_{\pi(p)} M_2$ ve $p \in M_1$ için

$$g_1(X, {}^* \pi_{*p} Y) = g_2(\pi_{*p} X, Y) \quad (3.1.12)$$

şeklinde tanımlıdır.

Herbir $p \in M_1$ için π_{*p}^h

$$\pi_{*p}^h : \left((\zeta \pi_*)^\perp(p), g_{1p((\zeta \pi_*)^\perp(p))} \right) \rightarrow \left(\text{range} \pi_*(p), g_{2q(\text{range} \pi_*(q))} \right),$$

şeklinde belirtelim. π_{*p}^h in adjointi ${}^* \pi_{*p}^h : \text{range} \pi_*(q) \rightarrow (\zeta \pi_*)^\perp(p)$

$$\left({}^* \pi_{*p} \right)^h Y = {}^* \pi_{*p} Y \quad (3.1.13)$$

şeklinde tanımlı bir lineer izomorfizmdir. Burada $Y \in \Gamma(\text{range} \pi_{*p})$, $q = \pi(p)$ dir. Ayrıca

$$\left(\pi_{*p}^h \right)^{-1} = \left({}^* \pi_{*p} \right)^h = {}^* \left(\pi_{*p}^h \right)$$

eşitliği yazılır [10].

Teorem 3.1.2. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. O halde π nin harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$iz^* \pi_* \left((\nabla \pi_*) \left((\cdot), \omega \psi(\cdot) \right) \right) - iz \omega T_{(\cdot)} \omega(\cdot) + iz C^* \pi_* (\nabla \pi_*) \left((\cdot), \omega(\cdot) \right) = 0 \quad (3.1.14)$$

dır.

İspat: $X \in \Gamma \left((\zeta \pi_*)^\perp \right)$ olmak üzere (2.3.11) eşitliğinden

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(\nabla_U U - \hat{\nabla}_U U, X)$$

yazılır. $\hat{\nabla}_U U = \mathcal{V} \nabla_U U$ olduğundan

$$g_M(\hat{\nabla}_U U, X) = 0$$

dır. O halde

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(\nabla_U U, X) \quad (3.1.15)$$

olur. (2.4.2) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(F(\nabla_U U), FX)$$

elde edilir. Tanım 2.4.5 den

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(\nabla_U F U, FX) \quad (3.1.16)$$

bulunur. (3.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(\nabla_U \psi U, FX) + g_M(\nabla_U \omega U, FX) \quad (3.1.17)$$

dir. Ayrıca (2.4.1) ve (2.4.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(\nabla_U F(\psi U), X) + g_M(\nabla_U \omega U, FX) \quad (3.1.18)$$

bulunur. Son eşitlikte

$$g_M(\nabla_U F(\psi U), X) = g_M(\nabla_U \psi^2 U, X) + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \quad (3.1.19)$$

dir. Burada (3.1.8) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U F(\psi U), X) &= g_M(\nabla_U (\cos^2 \theta) U, X) + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \\ &= -(\sin 2\theta) U[\theta] g_M(U, X) + \cos^2 \theta g_M(\nabla_U U, X) \\ &\quad + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \end{aligned}$$

olup

$$g_M(\nabla_U F(\psi U), X) = \cos^2 \theta g(\nabla_U U, X) + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \quad (3.1.20)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.3.12) ve (3.1.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_U \omega U, FX) &= g_M(\nabla_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \\
&= g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega U, BX) + g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) \\
&\quad + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \\
\Rightarrow g_M(\nabla_U \omega U, FX) &= g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX)
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

elde edilir. (3.1.20) ve (3.1.21) eşitlikleri (3.1.18) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\mathcal{T}_U U, X) &= \cos^2 \theta g_M(\nabla_U U, X) + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \\
&\quad + g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX)
\end{aligned}$$

olur. (2.3.11) eşitliğinden

$$\sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) + g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \tag{3.1.22}$$

bulunur. Burada (2.4.1) ve (3.1.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) &= g_M(\mathcal{T}_U \omega U, FX - CX) \\
&= g_M(\mathcal{T}_U \omega U, FX) \\
&= g_M(F(\mathcal{T}_U \omega U), F^2 X) \\
&= g_M(F(\mathcal{T}_U \omega U), X) \\
\Rightarrow g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) &= g_M(\omega(\mathcal{T}_U \omega U), X)
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

dir. (2.3.16) den

$$g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) = -g_N(\nabla \pi_*(U, \omega \psi U), \pi_* X) \tag{3.1.24}$$

ve

$$g_M(\nabla_U \omega U, CX) = -g_N(\nabla \pi_*(U, \omega U), \pi_*(CX)) \tag{3.1.25}$$

olup bu eşitlikler (3.1.22) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, X) &= -g_N((\nabla \pi_*)(U, \omega \psi U), \pi_*(X)) + g_M(\omega \mathcal{T}_U \omega U, X) \\
&\quad - g_N((\nabla \pi_*)(U, \omega U), \pi_*(CX))
\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.12) den

$$g_N(\nabla \pi_*(U, \omega \psi U), \pi_* X) = g_M(\pi_*^*(\nabla \pi_*(U, \omega \psi U)), X) \tag{3.1.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_N(\nabla \pi_*(U, \omega U), \pi_*(CX)) &= g_M(\pi_*^*(\nabla \pi_*(U, \omega U)), CX) \\
&= g_M(\pi_*^*(\nabla \pi_*(U, \omega U)), FX) \\
&= g_M(F(\pi_*^*(\nabla \pi_*(U, \omega U))), X)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_N(\nabla \pi_*(U, \omega U), \pi_*(CX)) = g_M(C^* \pi_*(\nabla \pi_*(U, \omega U)), X) \quad (3.1.28)$$

dır. (3.1.27) ve (3.1.28), (3.1.26) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, X) &= -g_M(C^* \pi_*(\nabla \pi_*(U, \omega \psi U)), X) + g_M(\omega \mathcal{T}_U \omega U, X) \\ &- g_M(C^* \pi_*(\nabla \pi_*(U, \omega U)), X). \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitliğin $\dot{I}z$ i alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda X ve X' , π -bağlı vektör alanları ve ∇^N , N üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere liflerin M de total geodezik altmanifoldlar olması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(\zeta \pi_*)$ için

$$\begin{aligned} g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) &= -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) \\ &- g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

dır.

İspat: (2.3.8) ve (2.3.12) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -g_M(\mathcal{T}_U X, V) \\ &= -g_M(\nabla_U X - \mathcal{H} \nabla_U X, V) \\ &= -g_M(\nabla_U X, V) + g_M(\mathcal{H} \nabla_U X, V) \\ &= -g_M(\nabla_U X, V) \end{aligned}$$

olur. Burada (2.4.2), (2.4.5), (3.1.1) ve Tanım 2.1.7 kullanılırsa

$$g_M(\mathcal{T}_U V, X) = -g_M([U, X], V) - g_M(\nabla_X \psi U, FV) - g_M(\nabla_X \omega U, FV) \quad (3.1.30)$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X \psi U, FV) &= g_M(F(\nabla_X \psi U), F^2 V) \\ &= g_M(\nabla_X F \psi U, V) \\ &= g_M(\nabla_X \psi^2 U, V) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, V) \end{aligned}$$

dır. (3.1.8) den

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X \psi U, FV) &= g_M(\nabla_X (\cos^2 \theta) U, V) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, V) \\
&= -\sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) + \cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, V) \\
&\quad + g_M(\nabla_X \omega \psi U, V)
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

olup

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X \omega \psi U, V) &= g_M(\mathcal{H} \nabla_X \omega \psi U + \mathcal{A}_X \omega \psi U, V) \\
&= g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V)
\end{aligned}$$

eşitliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X \psi U, FV) &= -\sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) + \cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V)
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.30) eşitliğinde

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X \omega U, FV) &= g_M(\mathcal{H} \nabla_X \omega U, \psi V) + g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\
&\quad + g_M(\nabla_X \omega U, \omega V) \\
\Rightarrow g_M(\nabla_X \omega U, FV) &= g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) + g_M(\nabla_X \omega U, \omega V)
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.16) den

$$g_M(\nabla_X \omega U, \omega V) = g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) \tag{3.1.34}$$

olup (3.1.32), (3.1.33) ve (3.1.34) eşitlikleri (3.1.30) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) \\
&\quad - \cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) \\
&\quad - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) - g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V))
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$g_M(\nabla_X U, V) = -g_M([U, X], V) - g_M(\mathcal{T}_U V, X)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) \\
&\quad - g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\
&\quad - g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V))
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda X

ve X' , π -bağlı vektör alanları ve ∇^π , π boyunca Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere π nin bir total geodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ ve $Y \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ için

$$g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) = -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \quad (3.1.35)$$

ve

$$g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) = -g_N(\nabla_X^\pi \pi_*(\omega \psi U), \pi_*(Y)) - g_N(\nabla_X^\pi \pi_*(\omega U), \pi_*(CY)) \quad (3.1.36)$$

olur.

İspat: Tanımdan π nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla \pi_*)(X, Y) = 0$ olmasıdır. Teorem 3.1.3 ve (2.3.17) eşitliğini kullanarak (3.1.35) eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan (2.3.3) ve (2.3.16) eşitliklerinden

$$g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = -g_N(\pi_*(\nabla_X U), \pi_*(Y)) = -g_M(\nabla_X U, Y)$$

olur. Burada (2.4.1), (2.4.2) ve (3.1.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) &= -g_M(\nabla_X FU, FY) \\ &= -g_M(\nabla_X \psi U, FY) - g_M(\nabla_X \omega U, FY) \\ &= -g_M(F(\nabla_X \psi U), F^2 Y) - g_M(\nabla_X \omega U, FY) \\ &= -g_M(F(\nabla_X \psi U), Y) - g_M(\nabla_X \omega U, FY) \\ &= -g_M(\nabla_X F(\psi U), Y) - g_M(\nabla_X \omega U, FY) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = -g_M(\nabla_X \psi^2 U, Y) - g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\nabla_X \omega U, FY)$$

elde edilir. (3.1.8) eşitliğinden

$$g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = -\cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, Y) - g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\nabla_X \omega U, FY)$$

bulunur. (2.3.14) ve (3.1.2) den

$$g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = -\cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, Y) - g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) - g_M(\nabla_X \omega U, CY)$$

dir. (2.3.16) eşitliği göz önüne alınırsa

$$g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = \cos^2 \theta g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) - g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) \\ - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) - g_M(\nabla_X \omega U, CY)$$

elde edilir. (2.3.17) den

$$\sin^2 \theta g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = -g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) \\ - g_M(\nabla_X \omega U, CY) \\ = -g_N(\nabla_X^\pi(\pi_*(\omega \psi U)), \pi_*(Y)) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) \\ - g_N(\nabla_X^\pi(\pi_*(\omega U)), \pi_*(CY))$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. Yerel Çarpım Riemann Manifoldlarda Pointwise Slant Submersiyonlar için Eğrilik İlişkileri

Bu alt bölümde, yerel çarpım Riemann manifoldlarından Riemann manifoldlarına tanımlı olan pointwise slant submersiyonun total uzay, baz uzay ve liflerin kesit eğrilikleri incelenmektedir.

(M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Ayrıca M , N ve herhangi bir $\pi^{-1}(x)$ lifinin kesit eğrilikleri, sırasıyla, K_M , K_N ve $\hat{K}$ şeklinde gösterilsin. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda M üzerindeki U, V dikey vektör ve X, Y yatay vektör alanları için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) = & K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U) + g_M((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 - 3 \|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - g_M((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V) \\
& + g_M(\mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U) \\
& - \|\psi[\psi V, U] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V - \sin 2\theta U[\theta]V + \mathcal{T}_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U - \sin 2\theta V[\theta]U + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2 \\
& - \cos^2 \theta \{ g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) \\
& + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) \} \\
& + \|\omega[\psi U, V] + \cos^2 \theta \mathcal{T}_V U + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega V\|^2, \tag{3.2.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_M(X, Y) = & K_N(\pi_* CX, \pi_* CY) + \hat{K}(BX, BY) - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_{BY} BY) \\
& - g_M((\nabla_{CY} \mathcal{T})_{BX} BX, CY) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{CY} CY, BX) \\
& - \|\mathcal{T}_{BX} CY\|^2 + \|\mathcal{A}_{CY} BX\|^2 + \|\mathcal{T}_{BX} BY\|^2 \\
& - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{BY} BY, CX) + g_M((\nabla_{BY} \mathcal{A})_{CX} CX, BY) \\
& - \|\mathcal{T}_{BY} CX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} BY\|^2 - 3 \|\mathcal{A}_{CX} CY\|^2 \tag{3.2.2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) = & K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) - \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U) \\
& - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
& - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
& + \|\omega[\psi U, X] + \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H} \nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} CX\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, X] - \sin 2\theta X[\theta]U + \cos^2 \theta \mathcal{V} \nabla_X U + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2 \\
& - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3 \|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2 \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: M bir yerel çarpım Riemann manifoldu olsun. O halde

$$K_M(U, V) = K_M(FU, FV)$$

yazılabilir. Herhangi $U, V \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için

$$K_M(FU, FV) = K_M(\psi U, \psi V) + K_M(\psi U, \omega V) + K_M(\omega U, \psi V) + K_M(\omega U, \omega V) \quad (3.2.4)$$

dir. Burada (2.3.21) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} K_M(\psi U, \psi V) &= \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) - \cos^4 \theta g_M(T_U U, T_V V) \\ &\quad - \cos^2 \theta \{ g_M(T_U U, \omega[\psi V, V]) + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V \} \\ &\quad + g_M(T_V V, \omega[\psi U, U]) + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U \} \\ &\quad + \|\omega[\psi U, V] + \cos^2 \theta T_V U + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega V\|^2 \\ &\quad - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \\ &\quad - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\ &\quad - g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \\ &\quad + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

bulunur. (2.3.23) eşitliğinden

$$\begin{aligned} K_M(\omega U, \psi V) &= -g_M((\nabla_{\omega U} T)_{\psi V} \psi V, \omega U) + g_M((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 \\ &\quad - \|\psi[\psi V, U] + \cos^2 \theta \hat{\mathcal{N}}_U V - \sin 2\theta U[\theta]V + T_U \omega \psi V - \hat{\mathcal{V}}_{\psi V} \psi U\|^2 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

olur. Benzer şekilde işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} K_M(\omega V, \psi U) &= -g_M((\nabla_{\omega V} T)_{\psi U} \psi U, \omega V) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\ &\quad - \|\psi[\psi U, V] + \cos^2 \theta \hat{\mathcal{N}}_V U - \sin 2\theta V[\theta]U + T_V \omega \psi U - \hat{\mathcal{V}}_{\psi U} \psi V\|^2 \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.22) eşitliğinden

$$K_M(\omega U, \omega V) = K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \quad (3.2.8)$$

bulunur. Burada (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) ve (3.2.8) eşitlikleri (3.2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa (3.2.1) elde edilir.

$X, Y \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ olmak üzere

$$K_M(FX, FY) = K_M(BX, BY) + K_M(BX, CY) + K_M(CX, BY) + K_M(CX, CY) \quad (3.2.9)$$

dir. Burada (2.3.21), (2.3.22), (2.3.23) eşitlikleri kullanılarak

$$K_M(BX, BY) = \hat{K}(BX, BY) + \|\mathcal{T}_{BX} BY\|^2 - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_{BY} BY), \quad (3.2.10)$$

$$K_M(BX, CY) = -g_M((\nabla_{CY} T)_{BX} BX, CY) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{CY} CY, BX) - \|\mathcal{T}_{BX} CY\|^2 + \|\mathcal{A}_{CY} BX\|^2, \quad (3.2.11)$$

$$K_M(CX, BY) = -g_M((\nabla_{CX} T)_{BY} BY, CX) + g_M((\nabla_{BY} \mathcal{A})_{CX} CX, BY) - \|\mathcal{T}_{BY} CX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} BY\|^2, \quad (3.2.12)$$

$$K_M(CX, CY) = K_N(\pi_* CX, \pi_* CY) - 3\|\mathcal{A}_{CX} CY\|^2 \quad (3.2.13)$$

elde edilir. Bulunan eşitlikler (3.2.9) da yerine yazıldığında (3.2.2) eşitliği bulunur.

Benzer şekilde $U \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ olmak üzere

$$K_M(FX, FU) = K_M(BX, \psi U) + K_M(BX, \omega U) + K_M(CX, \psi U) + K_M(CX, \omega U) \quad (3.2.14)$$

yazılabilir. Bu durumda (2.3.21), (2.3.22), (2.3.23) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} K_M(BX, \psi U) &= \hat{K}(BX, \psi U) - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\ &\quad + \|\omega[\psi U, X] + \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX\|^2 \\ &\quad - \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U), \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} K_M(BX, \omega U) &= -g_M((\nabla_{\omega U} T)_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\ &\quad - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned} K_M(CX, \psi U) &= -g_M((\nabla_{CX} T)_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\ &\quad - \|\psi[\psi U, X] - \sin 2\theta X[\theta]U + \cos^2 \theta \nabla_X U + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

ve

$$K_M(CX, \omega U) = K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2 \quad (3.2.18)$$

bulunur. Bulunan eşitlikler (3.2.14) de yerine yazıldığında (3.2.3) eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.2.1. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) \geq & K_N(\pi_*\omega U, \pi_*\omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M\left((\nabla_{\omega U} T)_{\psi V} \psi V, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V\right) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(T_U U, T_V V) \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - g_M\left((\nabla_{\omega V} T)_{\psi U} \psi U, \omega V\right) \\
& + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) + g_M\left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U\right) \\
& - \|\psi[\psi V, U] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V - \sin 2\theta U[\theta]V + T_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U - \sin 2\theta V[\theta]U + T_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2 \\
& - \cos^2 \theta \left\{ g_M(T_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \right. \\
& \left. + g_M(T_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \right\}
\end{aligned}$$

dir. $\omega[\psi U, V] = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega V = \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi U$ olmak üzere eşitliğin sağlanması için gerek

ve yeter şart $T_V U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

İspat: M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için (3.2.1) eşitliği

$$\begin{aligned}
& K_M(U, V) - \|\omega[\psi U, V] + \cos^2 \theta T_V U + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega V\|^2 \\
= & K_N(\pi_*\omega U, \pi_*\omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M\left((\nabla_{\omega U} T)_{\psi V} \psi V, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V\right) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(T_U U, T_V V) \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - g_M\left((\nabla_{\omega V} T)_{\psi U} \psi U, \omega V\right) \\
& + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) + g_M\left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U\right) \\
& - \|\psi[\psi V, U] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V - \sin 2\theta U[\theta]V + T_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U - \sin 2\theta V[\theta]U + T_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2 \\
& - \cos^2 \theta \left\{ g_M(T_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \right. \\
& \left. + g_M(T_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) \geq & K_N(\pi_*\omega U, \pi_*\omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U) + g_M((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - g_M((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V) \\
& + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U) \\
& - \|\psi[\psi V, U] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V - \sin 2\theta U[\theta]V + \mathcal{T}_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U - \sin 2\theta V[\theta]U + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2 \\
& - \cos^2 \theta \{g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \\
& + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\omega[\psi U, V] = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega V = \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi U$ olmak üzere eşitliğin sağlanması için

gerek ve yeter şart $\mathcal{T}_V U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

Sonuç 3.2.2. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) \leq & K_N(\pi_*\omega U, \pi_*\omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U) + g_M((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - g_M((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V) \\
& + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U) \\
& - \cos^2 \theta \{g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \\
& + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U)\} \\
& + \|\omega[\psi U, V] + \cos^2 \theta \mathcal{T}_V U + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega V\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] + \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U - \sin 2\theta V[\theta]U + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2
\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{T}_U \omega \psi V = 0$ ve $\cos^2 \hat{\theta} \hat{\mathcal{N}}_U V = \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U - \psi [\psi V, U]$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

İspat: (3.2.2) eşitliği

$$\begin{aligned}
& K_M(U, V) + \left\| \psi [\psi V, U] + \cos^2 \hat{\theta} \hat{\mathcal{N}}_U V - \sin 2\theta U [\theta] V + \mathcal{T}_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U \right\|^2 \\
&= K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
&\quad - g_M\left((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V\right) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
&\quad - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
&\quad - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
&\quad - g_M(\mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - g_M\left((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V\right) \\
&\quad + g_M(\mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + g_M\left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U\right) \\
&\quad - \cos^2 \theta \left\{ g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V]) + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V \right\} \\
&\quad + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U]) + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U \Big\} \\
&\quad + \left\| \omega[\psi U, V] + \cos^2 \theta \mathcal{T}_V U + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega V \right\|^2 \\
&\quad - \left\| \psi [\psi U, V] + \cos^2 \hat{\theta} \hat{\mathcal{N}}_V U - \sin 2\theta V [\theta] U + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V \right\|^2
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) &\leq K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
&\quad - g_M\left((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V\right) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
&\quad - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
&\quad - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
&\quad - g_M(\mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - g_M\left((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V\right) \\
&\quad + g_M(\mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + g_M\left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U\right) \\
&\quad - \cos^2 \theta \left\{ g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V]) + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V \right\} \\
&\quad + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U]) + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U \Big\} \\
&\quad + \left\| \omega[\psi U, V] + \cos^2 \theta \mathcal{T}_V U + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega V \right\|^2 \\
&\quad - \left\| \psi [\psi U, V] + \cos^2 \hat{\theta} \hat{\mathcal{N}}_V U - \sin 2\theta V [\theta] U + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V \right\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{T}_U \omega \psi V = 0$ ve $\cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V = \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U - \psi [\psi V, U]$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

Sonuç 3.2.3. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda M üzerindeki herhangi $U \in \Gamma(\zeta \pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta \pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} K_M(X, U) &\geq K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) - \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U) \\ &\quad - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\ &\quad - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\ &\quad - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\ &\quad - \|\psi[\psi U, X] - \sin 2\theta X[\theta]U + \cos^2 \theta \mathcal{V}\nabla_X U + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2 \\ &\quad - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2 \end{aligned}$$

dir. $\omega[\psi U, X] = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U = \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A}_X U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

İspat: (3.2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &K_M(X, U) - \|\omega[\psi U, X] + \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX\|^2 \\ &= K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) - \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U) \\ &\quad - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\ &\quad - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\ &\quad - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\ &\quad - \|\psi[\psi U, X] - \sin 2\theta X[\theta]U + \cos^2 \theta \mathcal{V}\nabla_X U + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2 \\ &\quad - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) &\geq K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) - \cos^2 \theta g_M(T_{BX} BX, T_U U) \\
&\quad - g_M(T_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
&\quad - g_M((\nabla_{\omega U} T)_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
&\quad - g_M((\nabla_{CX} T)_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
&\quad - \left\| \psi[\psi U, X] - \sin 2\theta X[\theta]U + \cos^2 \theta \mathcal{V}\nabla_X U + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX \right\|^2 \\
&\quad - \|T_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\omega[\psi U, X] = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U = \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A}_X U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

Sonuç 3.2.4. (M, g_M, F) bir yerel çarpım Riemann manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda M üzerindeki herhangi $U \in \Gamma(\zeta \ker \pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta \ker \pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) &\leq K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) - \cos^2 \theta g_M(T_{BX} BX, T_U U) \\
&\quad - g_M(T_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
&\quad - g_M((\nabla_{\omega U} T)_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
&\quad - g_M((\nabla_{CX} T)_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
&\quad + \left\| \omega[\psi U, X] + \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX \right\|^2 \\
&\quad - \|T_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{A}_X \omega \psi U = 0$ ve $\cos^2 \theta \mathcal{V}\nabla_X U = \hat{\nabla}_{\psi U} BX - \psi[\psi U, X]$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

İspat: (3.2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& K_M(X, U) + \left\| \psi[\psi U, X] - \sin 2\theta X[\theta]U + \cos^2 \theta \nabla_X U + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX \right\|^2 \\
& = K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) - \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U) \\
& \quad - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
& \quad - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
& \quad - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
& \quad + \left\| \omega[\psi U, X] + \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX \right\|^2 \\
& \quad - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) & \leq K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) - \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U) \\
& \quad - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
& \quad - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
& \quad - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
& \quad + \left\| \omega[\psi U, X] + \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX \right\|^2 \\
& \quad - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\mathcal{A}_X \omega \psi U = 0$ ve $\cos^2 \theta \nabla_X U = \hat{\nabla}_{\psi U} BX - \psi[\psi U, X]$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

4. KONTAKT METRİK MANİFOLDLARDA POINTWISE SLANT SUBMERSİYONLAR

4.1. Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlarda Pointwise Slant Submersiyonlar

Tanım 4.1.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir Riemann submersiyon olsun. Herbir $p \in M$ için $\phi(X)$ ve $(\text{çek}\pi_*)_p$ uzayı arasındaki $\theta(X)$ açısı, sıfırdan farklı $X \in \Gamma((\text{çek}\pi_*) - \{\xi\})$ vektörünün seçiminden bağımsız ise π ye bir pointwise slant submersiyon denir.

Örnek 4.1.1. $\mathbb{R}^5$, Örnek 2.5.1 deki gibi bir hemen hemen kontakt metrik yapıya sahip bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. $\pi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3), x_4 \right)$$

şeklinde verilsin. Burada $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ile $\mathbb{R}^5$ uzayının bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$\pi_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$\text{çek}\pi_* = \text{span} \left\{ V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right), V_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, V_3 = \xi = \frac{\partial}{\partial x_5} \right\}$$

ve

$$(\text{çek}\pi_*)^\perp = \text{span} \left\{ H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right), H_2 = \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

elde edilir. $h \in C^\infty(\mathbb{R}^5)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\phi\left(V_1 + h_1 \frac{d}{dx_5}\right) &= \cos \theta (J_1 V_1) - \sin \theta (J_2 V_1) \\
&= \cos \theta \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \\
&= \left(-\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$|g(\phi V_1, V_2)| = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}$$

elde edilir.

$\pi, \mathbb{R}^5$ üzerinde bir Riemann submersiyon ve $|g(\phi V_1, V_2)| = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}$ olduğundan π, θ

slant fonksiyonu ile bir pointwise slant submersiyondur.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{R}^5$ üzerinde iki tensör alanı

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Burada

$$\phi_1 \phi_2 = -\phi_2 \phi_1$$

dir. Herhangi bir $\theta: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu için $\mathbb{R}^5$ üzerinde yeni bir tensör alanını

$$\phi = \cos \theta \phi_1 + \sin \theta \phi_2$$

şeklinde tanımlayalım. ϕ dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$\eta = dx_5, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial x_5},$$

ve g , $\mathbb{R}^5$ üzerinde Öklid metriği olmak üzere π dönüşümü

$$\pi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow \pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{x_1 - x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 - x_4}{\sqrt{2}} \right)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda π_* dönüşüm matrisi

$$\pi_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\text{çek}\pi_* = \text{span} \left\{ V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right), V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right), V_3 = \xi = \frac{\partial}{\partial x_5} \right\}$$

ve

$$(\text{çek}\pi_*)^\perp = \text{span} \left\{ H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right), H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \right\}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \phi(V_1) &= \cos \theta \phi_1(V_1) + \sin \theta \phi_2(V_1) \\ &= \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, 0 \right) \end{aligned}$$

dir. π bir Riemann submersiyon ve

$$|g(\phi V_1, V_2)| = |\cos \theta|$$

olduğundan π , θ slant fonksiyonu ile bir pointwise slant submersiyondur.

4.2. $\xi \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için Pointwise Slant Submersiyonlar

Bu alt bölümde ξ karakteristik vektör alanının dikey olmasına göre bazı karakterizasyonlar elde edilmektedir.

$(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $U, V \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ için ψU ve ωU , ϕU nun, sırasıyla, dikey ve yatay bileşenleri olmak üzere

$$\phi U = \psi U + \omega U \quad (4.2.1)$$

dir. Ayrıca $X \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ için BX ve CX , ϕX in, sırasıyla, dikey ve yatay bileşenleri olmak üzere

$$\phi X = BX + CX \quad (4.2.2)$$

dir.

(2.3.11), (2.3.12) ve (4.2.1) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç verilir:

Sonuç 4.2.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. ∇ , M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $U, V \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ için

$$(\nabla_U \omega)V = CT_U V - T_U \psi V, \quad (4.2.3)$$

$$(\nabla_U \psi)V = BT_U V - T_U \omega V \quad (4.2.4)$$

olur. Burada

$$(\nabla_U \omega)V = \mathcal{H} \nabla_U \omega V - \omega \hat{\nabla}_U V, \quad (4.2.5)$$

$$(\nabla_U \psi)V = \hat{\nabla}_U \psi V - \psi \hat{\nabla}_U V \quad (4.2.6)$$

dir.

Sonuç 4.2.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. $U, V \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ ve $Y \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ için

$$g_M(\psi U, V) = -g_M(U, \psi V), \quad (4.2.7)$$

$$g_M(\omega U, Y) = -g_M(U, BY) \quad (4.2.8)$$

dir.

İspat: (2.5.8) eşitliğinde (4.2.1) ve (4.2.2) eşitlikleri gözönüne alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.3. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi : M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. $U \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için

$$\mathcal{T}_U \xi = 0 \quad (4.2.9)$$

dir.

İspat: $U \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için (2.3.11) eşitliğinden

$$\mathcal{T}_U \xi = \nabla_U \xi - \hat{\nabla}_U \xi$$

yazılır. Burada (2.3.10) ve (2.5.15) göz önüne alındığında istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 4.2.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi : M \rightarrow N$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda π nin bir pointwise slant submersiyon olması için gerek ve yeter şart θ reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$\psi^2 = \cos^2 \theta (-I + \eta \otimes \xi) \quad (4.2.10)$$

dir.

İspat: $U \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{g_M(\phi U, \psi U)}{|\phi U| |\psi U|} = \frac{|\phi U|}{|\psi U|} \quad (4.2.11)$$

yazılabilir. (4.2.11) eşitliğinde U yerine ψU yazıldığında

$$\cos \theta = \frac{|\psi^2 U|}{|\psi U|} \quad (4.2.12)$$

bulunur. Ayrıca (4.2.7) eşitliğinden

$$g_M(\psi^2 U, U) = -g_M(\psi U, \psi U) = -|\psi U|^2 \quad (4.2.13)$$

elde edilir. Burada (4.2.11), (4.2.12) ve (4.2.13) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$g_M(\psi^2 U, \phi^2 U) = |\psi^2 U| |\phi^2 U| \quad (4.2.14)$$

olur. Böylece (2.5.2), (4.2.11), (4.2.12) ve (4.2.14) eşitlikleri kullanılırsa

$$\psi^2 = \cos^2 \theta (-I + \eta \otimes \xi)$$

elde edilir.

Tersi de doğrudan ispatlanır.

Lemma 4.2.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi : M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Herhangi $U, V \in \Gamma(\xi \ker \pi_*)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$g_M(\psi U, \psi V) = \cos^2 \theta [g_M(U, V) - \eta(U)\eta(V)], \quad (4.2.15)$$

$$g_M(\omega U, \omega V) = \sin^2 \theta [g_M(U, V) - \eta(U)\eta(V)]. \quad (4.2.16)$$

İspat: (2.5.6), (4.2.1) ve (4.2.10) kullanılarak istenilen eşitlikler elde edilir.

Lemma 4.2.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi : M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. ω paralel ise

$$T_{\psi U} \psi U = -\cos^2 \theta T_U U \quad (4.2.17)$$

dir. Burada θ , π nin slant fonksiyonudur.

İspat: (2.3.5), (4.2.3) ve (4.2.10) kullanıldığında (4.2.17) eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi : M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda π nin harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\dot{L}z^* \pi_* ((\nabla \pi_*)(\cdot), \omega \psi(\cdot)) - \dot{L}z \omega T_U \omega(\cdot) + \dot{L}z C^* \pi_* (\nabla \pi_*)(\cdot, \omega(\cdot)) = 0 \quad (4.2.18)$$

dır.

İspat: $X \in \Gamma((\xi \ker \pi_*)^\perp)$ için (2.3.11) eşitliğinden

$$g_M(T_U U, X) = g_M(\nabla_U U, X) \quad (4.2.19)$$

bulunur. (2.5.6) den

$$g_M(T_U U, X) = g_M(\phi(\nabla_U U), \phi X) + \eta(\nabla_U U)\eta(X)$$

olur. $\xi \in \Gamma(\zeta \pi_*)$ olduğundan

$$\eta(X) = g_M(X, \xi) = 0 \quad (4.2.20)$$

dir. Bu durumda (2.5.13) den

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = g_M(\nabla_U \phi U, \phi X) \quad (4.2.21)$$

bulunur. (2.5.2), (2.5.6) ve (4.2.1) den

$$g_M(\mathcal{T}_U U, X) = -g_M(\nabla_U \phi(\psi U), X) + g_M(\nabla_U \omega U, \phi X) \quad (4.2.22)$$

yazılır. Son eşitlikte

$$g_M(\nabla_U \phi(\psi U), X) = g_M(\nabla_U \psi^2 U, X) + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \quad (4.2.23)$$

dir. Burada (4.2.10) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U \phi(\psi U), X) &= -g_M(\nabla_U (\cos^2 \theta (U - \eta(U) \xi)), X) + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \\ &= \sin 2\theta U [\theta] g_M(U, X) - \sin 2\theta U [\theta] \eta(U) g_M(\xi, X) \\ &\quad - (\cos^2 \theta) g_M(\nabla_U U, X) + (\cos^2 \theta) \nabla_U \eta(U) g_M(\xi, X) \\ &\quad + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g_M(\nabla_U \phi(\psi U), X) = -\cos^2 \theta g(\nabla_U U, X) + g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \quad (4.2.24)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (4.2.2) ve (2.3.12) den

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U \omega U, \phi X) &= g_M(\nabla_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \\ &= g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

bulunur. (4.2.24) ve (4.2.25) eşitlikleri (4.2.22) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\mathcal{T}_U U, X) &= \cos^2 \theta g_M(\nabla_U U, X) - g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \\ &\quad + g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \\ \Rightarrow \sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, X) &= -g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) + g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) &= g_M(\mathcal{T}_U \omega U, \phi X - CX) \\ &= g_M(\mathcal{T}_U \omega U, \phi X) \\ &= -g_M(\phi(\mathcal{T}_U \omega U), X) \\ \Rightarrow g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) &= -g_M(\omega(\mathcal{T}_U \omega U), X) \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

dir. Ayrıca (2.3.16) den

$$g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) = -g_N(\nabla \pi_*(U, \omega \psi U), \pi_* X) \quad (4.2.28)$$

ve

$$g_M(\nabla_U \omega U, CX) = -g_N(\nabla \pi_*(U, \omega U), \pi_*(CX)) \quad (4.2.29)$$

olup (4.2.27), (4.2.28) ve (4.2.29) eşitlikleri (4.2.26) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_M(T_U U, X) &= g_N((\nabla \pi_*)(U, \omega \psi U), \pi_*(X)) + g_M(T_U \omega U, BX) \\ &\quad - g_N((\nabla \pi_*)(U, \omega U), \pi_*(CX)) \\ \Rightarrow \sin^2 \theta g_M(T_U U, X) &= g_M(\pi_*((\nabla \pi_*)(U, \omega \psi U)), X) - g_M(\omega T_U \omega U, X) \\ &\quad + g_M(C^* \pi_*((\nabla \pi_*)(U, \omega U)), X). \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin $\dot{L}z$ i alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda X ve X' , π -bağlı vektör alanları ve ∇^N , N üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere M de liflerin total geodezik altmanifoldlar olması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(\text{çek} \pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek} \pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) &= -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(\phi U, \phi V) \\ &\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\ &\quad - \sin^2 \theta \eta(\nabla_X U) \eta(V) \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

dır.

İspat: (2.3.8), (2.3.11) ve Tanım 2.1.7 den

$$g_M(\mathcal{T}_U V, X) = -g_M([U, X], V) - g(\nabla_X U, V) \quad (4.2.31)$$

elde edilir. (2.5.6) ve (2.5.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g_M(\mathcal{T}_X U, V) &= -g_M([U, X], V) - g_M(\nabla_X \phi U, \phi V) - \eta(\nabla_X U) \eta(V) \\ \Rightarrow g_M(\mathcal{T}_X U, V) &= -g_M([U, X], V) - g_M(\nabla_X \psi U, \phi V) \\ &\quad - g_M(\nabla_X \omega U, \phi V) - \eta(\nabla_X U) \eta(V) \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

bulunur. Burada (4.2.10) dan

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X \psi U, \phi V) &= g_M(\phi(\nabla_X \psi U), \phi^2 V) \\
&= -g_M(\phi(\nabla_X \psi U), V) \\
&= -g_M(\nabla_X \psi^2 U, V) - g_M(\nabla_X \omega \psi U, V) \\
&= g_M(\nabla_X ((\cos^2 \theta) U), V) - g_M(\nabla_X (\cos^2 \theta \eta(U) \xi), V) \\
&\quad - g_M(\nabla_X \omega \psi U, V) \\
\Rightarrow g_M(\nabla_X \psi U, \phi V) &= -\sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) + \cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, V) \\
&\quad + \sin 2\theta X[\theta] \eta(U) \eta(V) - \cos^2 \theta \eta(\nabla_X U) \eta(V) \\
&\quad - g_M(\nabla_X \omega \psi U, V)
\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

olur. (2.3.14) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X \psi U, \phi V) &= -\sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) + \cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, V) \\
&\quad + \sin 2\theta X[\theta] \eta(U) \eta(V) - \cos^2 \theta \eta(\nabla_X U) \eta(V) \\
&\quad - g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V)
\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.3.14) ve (2.3.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
g_M(\nabla_X \omega U, \phi V) &= g_M(\nabla_X \omega U, \psi V) + g_M(\nabla_X \omega U, \omega V) \\
&= g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) + g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V))
\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

olup (4.2.34) ve (4.2.35) eşitlikleri (4.2.32) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) - \cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\
&\quad - g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) - \sin 2\theta X[\theta] \eta(U) \eta(V) \\
&\quad - \sin^2 \theta \eta(\nabla_X U) \eta(V) \\
\Rightarrow \sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(\phi U, \phi V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\
&\quad - g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) - \sin^2 \theta \eta(\nabla_X U) \eta(V)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda X ve X' , π -bağlı vektör alanları ve ∇^π , π boyunca üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere π nin bir total geodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(\text{çek} \pi_*)$ için

$$\begin{aligned}
g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) &= -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(\phi U, \phi V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\
&\quad - \sin^2 \theta \eta(\nabla_X U) \eta(V)
\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

ve

$$g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) = g_N(\nabla_X^\pi \pi_*(\omega \psi U), \pi_*(Y)) - g_N(\nabla_X^\pi \pi_*(\omega U), \pi_*(CY)) \tag{4.2.37}$$

dır.

İspat: Tanımdan π nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla \pi_*)(X, Y) = 0$$

dır. Böylece (4.2.36) eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan (2.3.16), (2.5.6) ve (4.2.1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) &= -g_M(\nabla_X \phi U, \phi Y) \\
&= -g_M(\nabla_X \psi U, \phi Y) - g_M(\nabla_X \omega U, \phi Y) \\
&= g_M(\phi(\nabla_X \psi U), Y) - g_M(\nabla_X \omega U, \phi Y) \\
&= g_M(\nabla_X \phi(\psi U), Y) - g_M(\nabla_X \omega U, \phi Y)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = g_M(\nabla_X \psi^2 U, Y) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\nabla_X \omega U, \phi Y) \tag{4.2.38}$$

bulunur. (4.2.2) ve (4.2.10) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) &= -\cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, Y) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) \\
&\quad - g_M(\nabla_X \omega U, \phi Y) \\
\Rightarrow g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) &= -\cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, Y) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) \\
&\quad - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) - g_M(\nabla_X \omega U, CY)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) &= g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) \\
&\quad - g_M(\nabla_X \omega U, CY)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) &= g_N(\nabla_X^\pi (\pi_*(\omega \psi U)), \pi_*(Y)) \\
&\quad - g_N(\nabla_X^\pi (\pi_*(\omega U)), \pi_*(CY)) \\
&\quad - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.3. $\xi \in \Gamma((\zeta ek\pi_*)^\perp)$ için Pointwise Slant Submersiyonlar

Bu kısımda $\xi \in \Gamma((\zeta ek\pi_*)^\perp)$ olmak üzere bir kosimplektik manifoldundan bir Riemann manifolduna pointwise slant submersiyonlar için bazı temel eşitlikler elde edildi. $U, V \in \Gamma(\zeta ek\pi_*)$ olmak üzere (2.5.2) ve (2.5.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$\phi^2 U = -U \quad (4.3.1)$$

ve

$$g(\phi U, \phi V) = g(U, V) \quad (4.3.2)$$

eşitlikleri bulunur. (2.3.12) ve (2.5.15) den

$$T_U \xi = 0 \quad (4.3.3)$$

ve

$$\eta(\nabla_U V) = 0 \quad (4.3.4)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $X \in \Gamma((\zeta ek\pi_*)^\perp)$ olmak üzere (2.3.14) den

$$A_X \xi = 0 \quad (4.3.5)$$

dir.

Teorem 4.3.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda π nin bir pointwise slant submersiyon olması için gerek ve yeter şart θ reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$\psi^2 = -(\cos^2 \theta) I \quad (4.3.6)$$

olur.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.1 in ispatına benzer olarak yapılır.

(4.2.1) ve (4.3.6) eşitlikleri kullanıldığında aşağıdaki Lemma elde edilir:

Lemma 4.3.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda herhangi $U, V \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için θ slant fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$g_M(\psi U, \psi V) = \cos^2 \theta g_M(U, V), \quad (4.3.7)$$

$$g_M(\omega U, \omega V) = \sin^2 \theta g_M(U, V) \quad (4.3.8)$$

Lemma 4.3.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. ω paralel ise

$$T_{\psi U} \psi U = -\cos^2 \theta T_U U \quad (4.3.9)$$

dir. Burada θ , π nin slant fonksiyonudur.

İspat. Bu Lemma nın ispatı Lemma 4.2.2 nin ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 4.3.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda π nin harmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\dot{I}z^* \pi_* \left((\nabla \pi_*)((\cdot), \omega \psi(\cdot)) \right) - \dot{I}z \omega T_{(\cdot)} \omega(\cdot) + \dot{I}z C^* \pi_* (\nabla \pi_*)((\cdot), \omega(\cdot)) = 0 \quad (4.3.10)$$

dir.

İspat. $X \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ olmak üzere Teorem 4.2.2 in ispatında yapılan işlemlere benzer işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} g_M(T_U U, X) &= g_M(\nabla_U \psi U, \phi X) + g_M(\nabla_U \omega U, \phi X) \\ &\quad + \eta(\nabla_U U) \eta(X) \\ &= g_M(\phi(\nabla_U \psi U), \phi^2 X) + g_M(\nabla_U \omega U, \phi X) \end{aligned}$$

olur. (4.3.1) eşitliği göz önüne alınırsa

$$g_M(T_U U, X) = -g_M(\nabla_U \phi(\psi U), X) + g_M(\nabla_U \omega U, \phi X)$$

elde edilir. Buradan (2.5.2), (2.5.6), (4.2.1) ve (4.3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(T_U U, X) &= \cos^2 \theta g_M(\nabla_U U, X) - g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) \\ &\quad + g_M(T_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, X) = -g_M(\nabla_U \omega \psi U, X) + g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) + g_M(\nabla_U \omega U, CX)$$

bulunur. (2.3.16) dan

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, X) &= g_N((\nabla \pi_*)(U, \omega \psi U), \pi_*(X)) + g_M(\mathcal{T}_U \omega U, BX) \\ &\quad - g_N((\nabla \pi_*)(U, \omega U), \pi_*(CX)) \\ \Rightarrow \sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, X) &= g_M(\pi_*((\nabla \pi_*)(U, \omega \psi U)), X) - g_M(\omega \mathcal{T}_U \omega U, X) \\ &\quad + g_M(C^* \pi_*((\nabla \pi_*)(U, \omega U)), X). \end{aligned}$$

dır. Son eşitliğin $\dot{L}z$ i alınarak istenilen elde edilir.

Teorem 4.3.3. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda X ve X' , π -bağlı vektör alanları ve ∇^N , N üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere liflerin M de total geodezik altmanifoldlar olması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(\text{çek} \pi_*)$ için

$$\begin{aligned} g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) &= -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) \\ &\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

dır.

İspat. Teorem 4.2.3 in ispatına benzer olarak (2.3.8), (2.3.11), (2.5.6), (2.5.13) ve Tanım 2.1.8 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -g_M([U, X], V) + g_M(\nabla_X \psi^2 U, V) \\ &\quad + g_M(\nabla_X \omega \psi U, V) - g_M(\nabla_X \omega U, \phi V) \end{aligned}$$

elde edilir. Doğrudan işlemlerle (4.3.6) dan

$$\begin{aligned} g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) - \cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, V) \\ &\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\ &\quad - g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) \\ \Rightarrow \sin^2 \theta g_M(\mathcal{T}_U V, X) &= -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) \\ &\quad + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \\ &\quad - g_N(\nabla_X^N \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) \end{aligned}$$

olur. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.4. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda X ve X' , π -bağlı vektör alanları ve ∇^π , π boyunca üzerinde pull-back konneksiyonu olmak üzere π nin bir total geodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ ve $Y \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ için

$$g_N(\nabla_X^\pi \pi_*(\omega U), \pi_*(\omega V)) = -\sin^2 \theta g_M([U, X], V) + \sin 2\theta X[\theta] g_M(U, V) + g_M(\mathcal{A}_X \omega \psi U, V) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, \psi V) \quad (4.3.12)$$

ve

$$g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) = g_N(\nabla_X^\pi \pi_*(\omega \psi U), \pi_*(Y)) - g_N(\nabla_X^\pi \pi_*(\omega U), \pi_*(CY)) \quad (4.3.13)$$

dir.

İspat: Tanımdan π nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla \pi_*)(X, Y) = 0$$

dır. Böylece (4.3.12) eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan (2.3.16), (2.5.6) ve (4.2.1) eşitliklerinden

$$g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = g_M(\nabla_X \psi^2 U, Y) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\nabla_X \omega U, \phi Y)$$

elde edilir. (4.3.6) dan

$$g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = -\cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, Y) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\nabla_X \omega U, \phi Y)$$

dir. (4.2.2) ve (2.3.14) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = -\cos^2 \theta g_M(\nabla_X U, Y) + g_M(\nabla_X \omega \psi U, Y) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) - g_M(\nabla_X \omega U, CY)$$

bulunur. Buradan

$$\sin^2 \theta g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) = g_N(\pi_*(\nabla_X \omega \psi U)(X, U), \pi_*(Y)) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) - g_N(\pi_*(\nabla_X \omega U), \pi_*(CY))$$

olup

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_N((\nabla \pi_*)(X, U), \pi_*(Y)) &= g_N(\nabla_X^\pi(\pi_*(\omega \psi U)), \pi_*(Y)) - g_M(\mathcal{A}_X \omega U, BY) \\ &\quad - g_N(\nabla_X^\pi(\pi_*(\omega U)), \pi_*(CY)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

4.4. Kosimplektik Manifoldlarda Pointwise Slant Submersiyonlar için Eğrilik İlişkileri

Bu alt bölümde kosimplektik manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı olan pointwise slant submersiyon için ξ karakteristik vektör alanının dikey veya yatay olmasına göre total uzay, baz uzay ve liflerin kesit eğrilikleri arasında bağıntılar elde edilecektir.

Teorem 4.4.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma(\text{çek} \pi_*)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\text{çek} \pi_*)$ ve $X, Y \in \Gamma((\text{çek} \pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} K_M(U, V) &= K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\ &\quad - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U) + g_M((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V) \\ &\quad - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 \\ &\quad - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) - 3 \|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\ &\quad - g_M(\mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\ &\quad + g_M(\mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\ &\quad - \|\psi[\psi V, U] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V + \sin 2\theta U[\theta]V + \eta(\nabla_U V)\xi + \mathcal{T}_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \\ &\quad - \|\psi[\psi U, V] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U + \sin 2\theta V[\theta]U + \eta(\nabla_V U)\xi + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2 \\ &\quad - g_M((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U) \\ &\quad + \cos^2 \theta \{ g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) \\ &\quad + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) \} \\ &\quad + \|\omega[\psi U, V] - \cos^2 \theta \mathcal{T}_V U + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega V\|^2, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned}
K_M(X, Y) &= K_N(\pi_* CX, \pi_* CY) + \hat{K}(BX, BY) + \|\mathcal{T}_{BX} BY\|^2 - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_{BY} BY) \\
&\quad - g_M((\nabla_{CY} \mathcal{T})_{BX} BX, CY) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{CY} CY, BX) \\
&\quad - \|\mathcal{T}_{BX} CY\|^2 + \|\mathcal{A}_{CY} BX\|^2 - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{BY} BY, CX) - \|\mathcal{T}_{BY} CX\|^2 \\
&\quad + \|\mathcal{A}_{CX} BY\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} CY\|^2 + g_M((\nabla_{BY} \mathcal{A})_{CX} CX, BY)
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) &= K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) + \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U) \\
&\quad - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
&\quad - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
&\quad - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
&\quad + \|\omega[\psi U, X] - \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX\|^2 \\
&\quad - \|\psi[\psi U, X] + \sin 2\theta X[\theta]U - \cos^2 \theta \mathcal{V}\nabla_X U + \eta(\nabla_X U)\xi + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2 \\
&\quad - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

dir.

İspat. M bir kosimplektik manifold olsun. O halde

$$K_M(U, V) = K_M(\phi U, \phi V)$$

yazılabilir. Herhangi $U, V \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ için

$$K_M(\phi U, \phi V) = K_M(\psi U, \psi V) + K_M(\psi U, \omega V) + K_M(\omega U, \psi V) + K_M(\omega U, \omega V) \tag{4.4.4}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
K_M(\psi U, \psi V) &= \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
&\quad + \cos^2 \theta \{ g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \} \\
&\quad + \|\omega[\psi U, V] - \cos^2 \theta \mathcal{T}_V U + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega V\|^2 \\
&\quad - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \\
&\quad - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
&\quad - g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V)
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

bulunur. (2.3.23) eşitliği kullanılarak

$$K_M(\omega U, \psi V) = -g_M\left((\nabla_{\omega U} T)_{\psi V} \psi V, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V\right) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 \\ - \|\psi[\psi V, U] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V + \sin 2\theta U[\theta]V + \eta(\nabla_U V)\xi + \mathcal{T}_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \quad (4.4.6)$$

olur. Benzer şekilde işlemler yapılarak

$$K_M(\omega V, \psi U) = -g_M\left((\nabla_{\omega V} T)_{\psi U} \psi U, \omega V\right) + g_M\left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U\right) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\ - \|\psi[\psi U, V] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U + \sin 2\theta V[\theta]U + \eta(\nabla_V U)\xi + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2 \quad (4.4.7)$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.22) eşitliğinden

$$K_M(\omega U, \omega V) = K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \quad (4.4.8)$$

bulunur. Bulunan (4.4.5), (4.4.6), (4.4.7) ve (4.4.8) eşitlikleri (4.4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.4.1) elde edilir.

$X, Y \in \Gamma\left((\zeta ek \pi_*)^\perp\right)$ olmak üzere

$$K_M(\phi X, \phi Y) = K_M(BX, BY) + K_M(BX, CY) + K_M(CX, BY) + K_M(CX, CY) \quad (4.4.9)$$

dir. Burada (2.3.21), (2.3.22) ve (2.3.23) eşitlikleri kullanılarak

$$K_M(BX, BY) = \hat{K}(BX, BY) + \|\mathcal{T}_{BX} BY\|^2 - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_{BY} BY) \quad (4.4.10)$$

$$K_M(BX, CY) = -g_M\left((\nabla_{CY} T)_{BX} BX, CY\right) + g_M\left((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{CY} CY, BX\right) \\ - \|\mathcal{T}_{BX} CY\|^2 + \|\mathcal{A}_{CY} BX\|^2 \quad (4.4.11)$$

$$K_M(CX, BY) = -g_M\left((\nabla_{CX} T)_{BY} BY, CX\right) + g_M\left((\nabla_{BY} \mathcal{A})_{CX} CX, BY\right) \\ - \|\mathcal{T}_{BY} CX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} BY\|^2 \quad (4.4.12)$$

ve

$$K_M(CX, CY) = K_N(\pi_* CX, \pi_* CY) - 3\|\mathcal{A}_{CX} CY\|^2 \quad (4.4.13)$$

elde edilir. Bulunan eşitlikler (4.4.9) da yerine yazıldığında (4.4.2) eşitliği bulunur.

Benzer şekilde $U \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ ve $X \in \Gamma\left((\zeta ek \pi_*)^\perp\right)$ olmak üzere

$$K_M(\phi X, \phi U) = K_M(BX, \psi U) + K_M(BX, \omega U) + K_M(CX, \psi U) + K_M(CX, \omega U) \quad (4.4.14)$$

yazılabilir. Bu durumda (2.3.21), (2.3.22) ve (2.3.23) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
K_M(BX, \psi U) &= \hat{K}(BX, \psi U) - g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
&\quad + \|\omega[\psi U, X] - \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX\|^2 \\
&\quad + \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX} BX, \mathcal{T}_U U)
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

$$\begin{aligned}
K_M(BX, \omega U) &= -g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
&\quad - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2
\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

$$\begin{aligned}
K_M(CX, \psi U) &= -g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 \\
&\quad - \|\psi[\psi U, X] + \sin 2\theta X[\theta]U - \cos^2 \theta \mathcal{V}_X U + \eta(\nabla_X U)\xi + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

ve

$$K_M(CX, \omega U) = K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2 \tag{4.4.18}$$

bulunur. Bulunan eşitlikler (4.4.14) de yerine yazıldığında (4.4.3) eşitliği elde edilir.

Hemen hemen çarpım Riemann manifoldları için verilen sonuçlara benzer olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 4.4.1. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma(\zeta \text{ek} \pi_*)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta \text{ek} \pi_*)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) &\geq K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
&\quad - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U) + g_M((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V) \\
&\quad - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 \\
&\quad - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
&\quad - g_M(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
&\quad - \|\psi[\psi V, U] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V + \sin 2\theta U[\theta]V + \eta(\nabla_U V)\xi + \mathcal{T}_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \\
&\quad - \|\psi[\psi U, V] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U + \sin 2\theta V[\theta]U + \eta(\nabla_V U)\xi + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_M \left((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V \right) + g_M \left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U \right) \\
& + \cos^2 \theta \left\{ g_M \left(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V \right) \right. \\
& \left. + g_M \left(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U \right) \right\}
\end{aligned}$$

dır. $\omega[\psi U, V] = 0$ ve $\mathcal{H} \nabla_V \omega \psi U = \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega V$ olmak üzere eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{T}_V U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

Sonuç 4.4.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) & \leq K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M \left((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U \right) + g_M \left((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V \right) \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
& + g_M(\mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - g_M \left((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V \right) + g_M \left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U \right) \\
& + \cos^2 \theta \left\{ g_M \left(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V \right) \right. \\
& \left. + g_M \left(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U \right) \right\} \\
& + \|\omega[\psi U, V] - \cos^2 \theta \mathcal{T}_V U + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega V\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U + \sin 2\theta V[\theta]U + \eta(\nabla_V U)\xi + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2
\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{T}_U \omega \psi V = 0$ ve $\cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V = \psi[\psi V, U] + \eta(\nabla_U V)\xi - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U$ olmak üzere eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

Sonuç 4.4.3. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) \geq & K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) + \cos^2 \theta g_M(T_{BX} BX, T_U U) \\
& - g_M(T_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} T)_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
& - g_M((\nabla_{CX} T)_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
& - \|\psi[\psi U, X] + \sin 2\theta X[\theta]U - \cos^2 \theta \mathcal{V}\nabla_X U + \eta(\nabla_X U)\xi + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2 \\
& - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned}$$

dir. Burada $\omega[\psi U, X] = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U = \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX$ olmak üzere eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\mathcal{A}_X U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

Sonuç 4.4.4. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) \leq & K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) + \cos^2 \theta g_M(T_{BX} BX, T_U U) \\
& - g_M(T_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} T)_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
& - g_M((\nabla_{CX} T)_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
& + \|\omega[\psi U, X] - \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX\|^2 \\
& - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned}$$

dir. Burada $\mathcal{A}_X \omega \psi U = 0$ ve $\cos^2 \theta \mathcal{V}\nabla_X U = \psi[\psi U, X] + \eta(\nabla_X U)\xi - \hat{\nabla}_{\psi U} BX$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

Yukarıda verilen teorem ve sonuçlara benzer olarak $\xi \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ için aşağıdaki teorem ve sonuçlar verilebilir:

Teorem 4.4.2. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda

$\xi \in \Gamma\left(\left(\zeta ek\pi_*\right)^\perp\right)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta ek\pi_*)$ ve $X, Y \in \Gamma\left(\left(\zeta ek\pi_*\right)^\perp\right)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) = & K_N(\pi_*\omega U, \pi_*\omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M\left((\nabla_{\omega U}\mathcal{T})_{\psi V}, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{\psi V}\mathcal{A})_{\omega U}, \psi V\right) \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V\omega\psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V}\omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega U}\psi V\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U\omega\psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U}\omega U) - 3\|\mathcal{A}_{\omega U}\omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H}\nabla_U\omega\psi U, \mathcal{H}\nabla_V\omega\psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V}\omega V) - \cos^4\theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
& + g_M(\mathcal{H}\nabla_{\psi U}\omega U, \mathcal{H}\nabla_V\omega\psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V}\omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega V}\psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi V, U] - \cos^2\theta\hat{\nabla}_U V + \sin 2\theta U[\theta]V + \mathcal{T}_U\omega\psi V - \hat{\nabla}_{\psi V}\psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] - \cos^2\theta\hat{\nabla}_V U + \sin 2\theta V[\theta]U + \mathcal{T}_V\omega\psi U - \hat{\nabla}_{\psi U}\psi V\|^2 \\
& - g_M\left((\nabla_{\omega V}\mathcal{T})_{\psi U}, \omega V\right) + g_M\left((\nabla_{\psi U}\mathcal{A})_{\omega V}, \psi U\right) \\
& + \cos^2\theta\left\{g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H}\nabla_V\omega\psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V}\omega V)\right. \\
& \left.+ g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U\omega\psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U}\omega U)\right\} \\
& + \|\omega[\psi U, V] - \cos^2\theta\mathcal{T}_V U + \mathcal{H}\nabla_V\omega\psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U}\omega V\|^2, \tag{4.4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_M(X, Y) = & K_N(\pi_*CX, \pi_*CY) + \hat{K}(BX, BY) + \|\mathcal{T}_{BX}BY\|^2 - g_M(\mathcal{T}_{BX}BX, \mathcal{T}_{BY}BY) \\
& - g_M\left((\nabla_{CY}\mathcal{T})_{BX}, BX, CY\right) + g_M\left((\nabla_{BX}\mathcal{A})_{CY}, CY, BX\right) \\
& - \|\mathcal{T}_{BX}CY\|^2 + \|\mathcal{A}_{CY}BX\|^2 - g_M\left((\nabla_{CX}\mathcal{T})_{BY}, BY, CX\right) - \|\mathcal{T}_{BY}CX\|^2 \\
& + \|\mathcal{A}_{CX}BY\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX}CY\|^2 + g_M\left((\nabla_{BY}\mathcal{A})_{CX}, CX, BY\right) \tag{4.4.20}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) = & K_N(\pi_*CX, \pi_*\omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) + \cos^2\theta g_M(\mathcal{T}_{BX}BX, \mathcal{T}_U U) \\
& - g_M(\mathcal{T}_{BX}BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U\omega\psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U}\omega U) \\
& - g_M\left((\nabla_{\omega U}\mathcal{T})_{BX}, BX, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{BX}\mathcal{A})_{\omega U}, \omega U, BX\right) \\
& - g_M\left((\nabla_{CX}\mathcal{T})_{\psi U}, \psi U, CX\right) + g_M\left((\nabla_{\psi U}\mathcal{A})_{CX}, CX, \psi U\right) \\
& + \|\omega[\psi U, X] - \cos^2\theta\mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X\omega\psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U}CX\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, X] + \sin 2\theta X[\theta]U - \cos^2\theta\mathcal{V}\nabla_X U + \mathcal{A}_X\omega\psi U - \hat{\nabla}_{\psi U}BX\|^2 \\
& - \|\mathcal{T}_{BX}\omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U}BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX}\psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX}\omega U\|^2 \tag{4.4.21}
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.4.5. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) \geq & K_N(\pi_* \omega U, \pi_* \omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U) + g_M((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V) \\
& - g_M(\omega[\psi U, U], \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 \\
& - g_M(\omega[\psi V, V], \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M(\mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) - \cos^4 \theta g_M(\mathcal{T}_U U, \mathcal{T}_V V) \\
& + g_M(\mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi V, U] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V + \sin 2\theta U[\theta]V + \mathcal{T}_U \omega \psi V - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U + \sin 2\theta V[\theta]U + \mathcal{T}_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2 \\
& - g_M((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U) \\
& + \cos^2 \theta \{ g_M(\mathcal{T}_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H} \nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H} \nabla_{\psi V} \omega V) \\
& + g_M(\mathcal{T}_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H} \nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega U) \}
\end{aligned}$$

dır. $\omega[\psi U, V] = 0$ ve $\mathcal{H} \nabla_V \omega \psi U = \mathcal{H} \nabla_{\psi U} \omega V$ olmak üzere eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{T}_V U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

Sonuç 4.4.6. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma((\zeta ek \pi_*)^\perp)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U, V \in \Gamma(\zeta ek \pi_*)$ için

$$\begin{aligned}
K_M(U, V) \leq & K_N(\pi_*\omega U, \pi_*\omega V) + \hat{K}(\psi U, \psi V) - g_M(\omega[\psi U, U], \omega[\psi V, V]) \\
& - g_M\left((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{\psi V} \psi V, \omega U\right) + g_M\left((\nabla_{\psi V} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, \psi V\right) \\
& - g_M\left(\omega[\psi U, U], \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V\right) + \|\mathcal{A}_{\omega U} \psi V\|^2 \\
& - g_M\left(\omega[\psi V, V], \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U\right) - 3\|\mathcal{A}_{\omega U} \omega V\|^2 \\
& - g_M\left(\mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V\right) - \cos^4 \theta g_M(T_U U, T_V V) \\
& + g_M\left(\mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U, \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V\right) + \|\mathcal{A}_{\omega V} \psi U\|^2 \\
& - g_M\left((\nabla_{\omega V} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, \omega V\right) + g_M\left((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{\omega V} \omega V, \psi U\right) \\
& + \cos^2 \theta \left\{ g_M(T_U U, \omega[\psi V, V] + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi V - \mathcal{H}\nabla_{\psi V} \omega V) \right. \\
& \left. + g_M(T_V V, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \right\} \\
& + \|\omega[\psi U, V] - \cos^2 \theta T_V U + \mathcal{H}\nabla_V \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega V\|^2 \\
& - \|\psi[\psi U, V] - \cos^2 \theta \hat{\nabla}_V U + \sin 2\theta V[\theta]U + T_V \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} \psi V\|^2
\end{aligned}$$

dir. $T_U \omega \psi V = 0$ ve $\cos^2 \theta \hat{\nabla}_U V = \psi[\psi V, U] - \hat{\nabla}_{\psi V} \psi U$ olmak üzere eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

Sonuç 4.4.7. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma((\zeta \pi)_*)^\perp$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U \in \Gamma(\zeta \pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\zeta \pi)_*)^\perp$ için

$$\begin{aligned}
K_M(X, U) \geq & K_N(\pi_* CX, \pi_* \omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) + \cos^2 \theta g_M(T_{BX} BX, T_U U) \\
& - g_M(T_{BX} BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\
& - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\
& - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\
& - \|\psi[\psi U, X] + \sin 2\theta X[\theta]U - \cos^2 \theta \mathcal{V} \nabla_X U + \mathcal{A}_X \omega \psi U - \hat{\nabla}_{\psi U} BX\|^2 \\
& - \|T_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2
\end{aligned}$$

dir. Burada $\omega[\psi U, X] = 0$ ve $\mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U = \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX$ olmak üzere eşitliğin sağlanması

için gerek ve yeter şart $\mathcal{A}_X U = 0$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

Sonuç 4.4.8. $(M, \phi, \xi, \eta, g_M)$ bir kosimplektik manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\pi: M \rightarrow N$ bir pointwise slant submersiyon olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ olmak üzere M üzerindeki herhangi $U \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)$ ve $X \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} K_M(X, U) \leq & K_N(\pi_*CX, \pi_*\omega U) + \hat{K}(BX, \psi U) + \cos^2 \theta g_M(\mathcal{T}_{BX}BX, \mathcal{T}_U U) \\ & - g_M(\mathcal{T}_{BX}BX, \omega[\psi U, U] + \mathcal{H}\nabla_U \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} \omega U) \\ & - g_M((\nabla_{\omega U} \mathcal{T})_{BX} BX, \omega U) + g_M((\nabla_{BX} \mathcal{A})_{\omega U} \omega U, BX) \\ & - g_M((\nabla_{CX} \mathcal{T})_{\psi U} \psi U, CX) + g_M((\nabla_{\psi U} \mathcal{A})_{CX} CX, \psi U) \\ & + \|\omega[\psi U, X] - \cos^2 \theta \mathcal{A}_X U + \mathcal{H}\nabla_X \omega \psi U - \mathcal{H}\nabla_{\psi U} CX\|^2 \\ & - \|\mathcal{T}_{BX} \omega U\|^2 + \|\mathcal{A}_{\omega U} BX\|^2 + \|\mathcal{A}_{CX} \psi U\|^2 - 3\|\mathcal{A}_{CX} \omega U\|^2 \end{aligned}$$

dir. Burada $\mathcal{A}_X \omega \psi U = 0$ ve $\cos^2 \theta \mathcal{H}\nabla_X U = \psi[\psi U, X] - \hat{\nabla}_{\psi U} BX$ olmak üzere eşitliğin olması için gerek ve yeter şart π nin slant olmasıdır.

KAYNAKLAR

- [1]. **Akyol, M.A.**, 2015. Kompleks geometride konform submersiyonlar, *Doktora Tezi*, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- [2]. **Ali, S. and Fatima, T.**, 2013. Anti-invariant Riemannian submersions from nearly Kaehler manifolds, *Filomat*, **27**(7), 1219-1235.
- [3]. **Alohalı, R.H.**, 2005. Geometry of slant submanifolds, King Saud University.
- [4]. **Atçeken, M.**, 2002. Çarpım manifoldunun altmanifoldlarının geometrisi, *Doktora Tezi*, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- [5]. **Atçeken, M.**, 2008. Warped product semi-slant submanifolds in locally Riemannian product manifolds, *Bulletin of the Astralian Matematical Society*, **77**, doi:1017/S0004972708000191.
- [6]. **Atçeken, M.**, 2010. Semi-slant submanifolds of an almost paracontact metric manifolds, *Canad. Math. Bull.*, Vol. **53**(2), 206-217.
- [7]. **Atçeken, M.**, 2010. Slant submanifolds of a Riemannian product manifold, *Acta Math. Sci.*, **30**, 215-224.
- [8]. **Atçeken, M.**, 2010. Warped product semi-slant submanifolds in Kenmotsu manifolds, *Turk J. Math.*, **34**, 425-432.
- [9]. **Baird, P. and Wood, J.C.**, 2003. Harmonic morphisms between Riemannian Manifolds, Clarendon Press, Oxford.
- [10]. **Bejancu, A.**, 1986. Geometry of CR-Submanifolds, Polytechnic Institute of Iasi, Romania.
- [11]. **Blair, D.E.**, 2010. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, *Springer*.
- [12]. **Bourguignon, J.P. and Lawson, H.B.**, 1981. Stability and isolation phenomena for Yang Mills fields, *Commun. Math. Phys.*, **79**, 189-230.
- [13]. **Bourguignon, J.P. and Lawson, H.B.**, 1989. A mathematicians's visit to Kaluza-Klein theory, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, Special Issue, 143-163.
- [14]. **Cabrerizo, J.L., Carriazo, A. and Fernandez, L.M.**, 2000. Slant submanifolds in Sasakian manifolds, *Glasgow Math. J.*, **42**, 125-138.
- [15]. **Cabrerizo, J.L., Carriazo, A., Fernandez, L.M. and Fernandez, M.**, 2000. Structures on a slant submanifolds of a contact manifold, *Indian J. Pure and Appl. Math.*, **31**(7), 857-864.

- [16]. **Chen, B.Y.**, 1973. Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker, New York.
- [17]. **Chen, B.Y.**, 1990. Geometry of Slant Submanifolds, Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium.
- [18]. **Chen, B.Y. and Tazawa, Y.**, 1991. Slant Submanifolds in Complex Euclidean Spaces, Tokyo, *J. Math.* **14**(1), 101-120.
- [19]. **Chen, B.Y. and Garay, O.**, 2012. Pointwise slant submanifolds in almost Hermitian manifolds, *Turk. J. Math.*, **36**, 630-640.
- [20]. **Chinea, D.**, 1985. Almost contact metric submersions, *Rend. Circ. Mat. Palmo*, **34**(1), 89-104.
- [21]. **Do Carmo, M.P.**, 1992. Riemannian Geometry, Birkhauser Boston.
- [22]. **Erken, İ.K. and Murathan, C.**, 2013. Slant Riemannian submersions from Sasakian manifolds, arXiv:1309.2487v1, [Math.DG].
- [23]. **Erken, İ.K. and Murathan, C.**, 2014. On Slant Riemannian submersions for cosymplectic manifolds, *Bull Korean Math. Soc.*, **51**(6), 1749-1771.
- [24]. **Etayo, F.**, 1998. On quasi-slant submanifolds of an almost Hermitian manifold, *Publ. Math. Debrecen*, **53**, no. 1-2, 217-223.
- [25]. **Falcitelli, M., Ianus, S., and Pastore, A.M.**, 2004. Riemannian Submersions and Related Topics, World Scientific Company.
- [26]. **Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J.**, 1990. Riemannian Geometry, Second ed, Universitext, Springer-Verlag, Berlin.
- [27]. **Goldberg, S.I. and Yano, K.**, 1969. Integrability of almost cosymplectic structures, *Pacific Journal of Mathematics*, **31**, 373-381.
- [28]. **Gök, İ.**, 2010. Kontak geometride yüzeyler teorisi, *Doktora tezi*, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [29]. **Gray A.**, 1967. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *J. Math. Mech.*, **16**, 715-737.
- [30]. **Gundmundson, S.**, 2006. An introduction to Riemannian geometry, *Lecture Notes*, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science.
- [31]. **Gündüzalp, Y.**, 2007. Riemann submersiyonların geometrisi üzerine, *Yüksek Lisans Tezi*, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- [32]. **Gündüzalp, Y.**, 2011. Çarpım submersiyonlarının geometrisi üzerine, *Doktora Tezi*, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- [33]. **Gündüzalp, Y.**, 2013. Anti-invariant semi-Riemannian submersions from almost

- para-Hermitian manifolds, *Journal of Function Spaces and Applications*, 1-7, Doi:10.1155/2013/720623.
- [34]. **Gündüzalp, Y.**, 2013. Slant submersions from almost product Riemannian manifolds, *Turk. J. Math.*, **37**, 863-873.
- [35]. **Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1982. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen Ed. Fak. Mat., No:2.
- [36]. **Hacısalıhoğlu, H.H.**, 2003. Diferensiyel Geometri, Cilt:3, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Ankara.
- [37]. **Ianus, S. and Visinescu, M.**, 1987. Kaluza-Klein theory with scalar fields and generalized Hopf manifolds, *Classical Quantum Gravity*, **4**, no. 5, 1317-1325.
- [38]. **Ianus, S., Mazocco R. and Vilcu, G.E.**, 2008. Harmonic maps between quaternionic Kaehler manifolds, *J. Nonlinear Math. Phys.* **15**(1), 1-8.
- [39]. **Ianus, S., Mazocco, R. and Vilcu, G.E.**, 2008. Riemannian submersions from quaternionic manifolds, *Acta Appl. Math.*, **104**(1), 83-89.
- [40]. **Ianus, S., Ionescu, A., Mocanu, R. and Vilcu, G.E.**, 2011. Riemannian submersions from almost contact metric manifolds, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, **81**, no.1, 101-114.
- [41]. **Kobayashi, S. and Nomizu, K.**, 1963. Foundations of differential geometry, vol:1, New York.
- [42]. **Lee, J.W.**, 2013. Anti-invariant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions from almost contact manifolds, *Hacettepe J. Math. Stat.*, **42**(2), 231-241.
- [43]. **Lee, J.W., Sahin, B.**, 2014. Pointwise slant submersions, *Bull. Korean Math. Soc.*, **51**(4), 1115-1126.
- [44]. **Lotta, A.**, 1996. Slant submanifolds in contact geometry, *Bull. Math. Soc. Roumanie*, 183-198.
- [45]. **Lotta, A.**, 1998. Three-dimensional slant submanifolds of K-Contact manifolds, *Balkan J. Geom. Appl.* **3**(1), 37-51.
- [46]. **Ludden, J.W.**, 1970. Submanifolds of cosymplectic manifolds, *J. Differential Geom.* **4**, 237-244.
- [47]. **Marrero, J.C. and Rocha, J.**, 1994. Locally conformal Kahler submersions. *Geom. Dedicata*, **52**(3), 271-289.
- [48]. **Murathan, C. and Erken, İ.K.**, 2015. Anti-invariant Riemannian submersions from cosymplectic manifolds onto Riemannian manifolds, *Filomat*, **29**(7), 1429-1444.

- [49]. Olzsak, Z., 1981. On almost cosymplectic manifolds, *Kodai Math J.*, **4**, 239-250.
- [50]. O'Neill, B., 1966. The Fundamental Equations of a Submersions, *Michigan Math. J.*, 459-469.
- [51]. O'Neill, B., 1983. Semi Riemann Geometry, Academic Press, New York.
- [52]. Park, K.S., 2012. H-Slant submersions, *Bull. Korean Math. Soc.*, **49**(2), 329-338.
- [53]. Park, K.S., 2013. H-semi-slant Riemannian submersions, *Taiwan. J. Math.*, **17**(3), 937-956.
- [54]. Park, K.S. and Prasad, R., 2013. Semi-slant submersions, *Bull. Korean Math. Soc.* **50**(3), 951-962.
- [55]. Park, K.S., 2014. H-Semi-Slant Submersions from almost quaternionic hermitian manifolds, *Taiwan. J. Math.*, **18**(6), 1909-1926.
- [56]. Park, K.S., 2014. Pointwise slant and pointwise semi-slant submanifolds in almost contact metric manifolds, arXiv:1410.5587v2, [math.DG] .
- [57]. Şahin, B., 1996. CR-Altmanifoldların Geometrisi, *Yüksek Lisans Tezi*, İnönü Üniversitesi, Malatya.
- [58]. Şahin, B., 2010. Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Central European J.Math.*, **8**(3), 437-447.
- [59]. Şahin, B., 2011. Slant submersions from almost Hermitian manifolds, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome*, No. 1, **54**(102), 93-105.
- [60]. Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayınevi.
- [61]. Sahin, B., 2013. Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Taiwanese J. Math.*, **17**(2), 629-659.
- [62]. Şahin, B., 2013. Semi-invariant submersions from almost Hermitian manifolds, *Canad. Math. Bull.*, **56**(1), 173-183.
- [63]. Taştan, H.M., 2014. On Lagrangian submersions, *Hacet. J. Math. Stat.* **43**(6), 993-1000.
- [64]. Taştan, H.M., Anti-holomorphic semi-invariant submersion from Kaehlerian manifolds, arXiv: 1404.2385.
- [65]. Vilcu, G.E., 2010. 3-submersions from QR-hypersurfaces of quaternionic Kahler manifolds, *Ann. Pol. Math.*, **98**(3), 301-309.
- [66]. Yano, K. and Kon, M., 1984. Structures on Manifolds, World Scientific Publishing Company Pte. Ltd.
- [67]. Watson, B., 1976. Almost Hermitian submersions, *J. Diff. Geom.*, **11**(1), 147-165.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2009 yılında Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladı. 2011 yılında Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. Aynı yıl yüksek lisansı bitirdi ve Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora başladı. Halen Ahi Evran Üniversitesinde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.