T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ ve NÜMERİK UYGULAMALARI

Mine BABAOĞLU
(091121201)

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI
HAZİRAN-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ ve NÜMERİK UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Mine BABAOĞLU

(091121201)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29 Mayıs 2014

MAYIS-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ ve NÜMERİK UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Mine BABAOĞLU

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

HAZİRAN-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ ve NÜMERİK UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Mine BABAOĞLU

(091121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29 Mayıs 2014
Tezin Savunulduğu Tarih: 18 Haziran 2014

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU (G.O.P.Ü)
Prof. Dr. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)
Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü)

HAZİRAN-2014

ÖNSÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, yardımını ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI 'ya çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu uzun süreç boyunca hep yanımda olan ve bana destek veren kıymetli anneme tüm kalbimle teşekkür ederim.

Mine BABAOĞLU

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....II
İÇİNDEKİLER.....III
ÖZET.....V
SUMMARY.....VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....VII
TABLOLAR LİSTESİ.....VIII
SEMBOLLER LİSTESİ.....IX

1. GİRİŞ.....1

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....7

3. REGÜLER VE SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ ÜZERİNE.....21

3.1. REGÜLER STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİNİN İNCELENMESİ.....23
3.2. BESSEL TÜRÜNDEN TEKİLLİĞE SAHİP STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİNİN İNCELENMESİ.....33

4. DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ.....41

4.1. DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ.....41
4.2. REGÜLER KANONİK DIRAC SİSTEMİ İÇİN SPEKTRAL SONUÇLAR.....47
4.2.1. Çözüm Fonksiyonlarının Değerlendirilmesi.....49

5. BAZI NÜMERİK METOTLARIN İNCELENMESİ.....55

5.1. ADOMIAN AYRIŞIM METODU (ADM).....55
5.2. HOMOTOPI ANALİZ METODU (HAM).....58
5.2.1. Homotopi Analiz Çözümü.....59
5.2.1.1. Sıfırıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi.....59
5.2.1.2. Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi.....63
5.2.2. Çözüm İfadeleri.....64
5.2.2.1. Polinom fonksiyonları ile ifade edilen çözüm.....64
5.2.2.2. Kesirli fonksiyonlar ile ifade edilen çözüm.....67
5.2.2.3. Üstel fonksiyonlar ile ifade edilen çözüm.....70
5.2.3. Yakınsaklık Teoremi.....72
5.3. HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODU (HPM).....75

6. NÜMERİK METOTLARIN DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNE UYGULANMASI.....77

6.1. HOMOTOPI ANALİZ METODU (HAM) ve HOMOTOPI PERTÜRBASYON (HPM) METODU'NUN DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNE UYGULANMASI.....77
6.1.1. HAM' nun Uygulanmasına ilişkin örnek.....78
6.1.2. HPM' nun Uygulanmasına ilişkin örnek.....80
6.2. HAM ve HPM ÇÖZÜMLERİNİN YAKINSAKLIĞININ İNCELENMESİ.....83
6.3. DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ.....85

7. DİFÜZYON DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....93

7.1. DİFÜZYON OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ ile İLGİLİ TEMEL ÖZELLİKLER.....93
7.2. ADOMIAN AYRIŞIM METODU (ADM), HOMOTOPI ANALİZ METODU (HAM) ve HOMOTOPI PERTÜRBASYON (HPM) METODU' NUN DİFÜZYON DENKLEMİNE UYGULANMASI.....95
7.3. DİFÜZYON DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ.....117

KAYNAKLAR.....123
ÖZGEÇMİŞ.....131

ÖZET

Bu çalışma yedi bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerinin spektral teorisinin (düz ve ters problemler) tarihçesi ve bu alanlarda yapılan çalışmalar ifade edilmiştir. Ayrıca tezde kullanılacak olan Adomian Ayrışım Metodu (ADM), Homotopi Analiz Metodu (HAM) ve Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)' ndan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Paley-Wiener uzayının elemanı olan fonksiyonlar sınıfından faydalanılarak regüler ve singüler Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri detaylı olarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Dirac operatörünün spektral teorisi açıklanmıştır. Ayrıca Paley-Wiener uzayının elemanı olan fonksiyonlar sınıfından faydalanılarak regüler kanonik Dirac denklemler sistemi için spektral sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, çalışmamızda kullanacağımız ADM, HAM ve HPM' larının temeli detaylı olarak verilmiştir.

Altıncı bölümde, Dirac denklemler sistemine HAM ve HPM uygulanarak denklemler sisteminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Bu metotların hassaslıkları hakkında yorum yapılmıştır. Ayrıca elde edilen çözümlerin yakınsaklık analizleri yapılmıştır.

Yedinci bölümde, Difüzyon denkleminin spektral teorisi hakkında bilgi verilmiştir. ADM, HAM ve HPM ile nümerik çözümleri elde edilen Difüzyon denklemi için metotların hassaslıkları ile ilgili yorum yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, Özfonksiyon, Sturm-Liouville Operatörü, Dirac Denklemler Sistemi, Difüzyon Operatörü, Paley-Wiener Uzayı, Adomian Ayrışım Metodu (ADM), Homotopi Analiz Metodu (HAM), Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM).

SUMMARY

Spectral Theory of Differential Operators and Their Numerical Applications

This study has been probed in seven sections.

In Section 1, the history of spectral theory (well and ill-posed problem) Sturm-Liouville and Dirac operators and the studies that have been done in this area have been given. In addition to that Adomian Decomposition Method (ADM), Homotopy Analysis Method (HAM) and Homotopy Perturbation Method (HPM) that will be used in the thesis has been discussed in this section.

In Section 2, some fundamental definitions and theorems used in spectral theory differential operators have been stated.

In Section 3, eigenvalues of regular and singular Sturm-Liouville problems have been explained by means of functions which belongs to Paley-Wiener space.

In Section 4, the spectral theory of Dirac operator has been explained. Also, spectral results for regular canonic Dirac equations system have been obtained by means of functions which belongs to Paley-Wiener space.

In Section 5, the basic idea of ADM, HAM and HPM, which we use in our study, has been given in details.

In Section 6, numerical solutions of equation system have been obtained by being applied HAM and HPM to Dirac equations systems. About sensitivity of these methods have been made comment. Also, convergence analysis of solutions, which have been obtained, have been done.

In Section 7, information has been given about spectral theory of Diffusion equations. About the sensitivity of methods for diffusion equation, which has been obtained numerical solutions, with ADM, HAM and HPM have been made comment.

Key Words: Eigenvalue, Eigenfunction, Sturm-Liouville Operator, Dirac Equation System, Diffusion Operator, Paley-Wiener Space, Adomian Decomposition Method (ADM), Homotopy Analysis Method (HAM), Homotopy Perturbation Method (HPM).

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 6.1. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ analitik çözümünün ve yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü 82

Şekil 6.2. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ çözümünün $\phi_5(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği.....83

Şekil 6.3. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ analitik çözümü ile HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması.....84

Şekil 6.4. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ analitik çözümünün ve yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü.....85

Şekil 6.5. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ çözümünün $\psi_5(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği.....87

Şekil 6.6. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ analitik çözümü ile HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması.....87

Şekil 7.1. $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin analitik çözümünün ve yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü.....114

Şekil 7.2. $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin $\phi_3(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği.....115

Şekil 7.3. $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması.....116

Şekil 7.4. $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde difüzyon denkleminin yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü.....117

Şekil 7.5. $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde difüzyon denkleminin $\phi_3(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği.....118

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 6.1. HAM($\hbar=-1$) ve HPM kullanılarak Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ için mutlak hatası ($\alpha=1$).....82

Tablo 6.2. $\hbar$ yardımcı parametresinin farklı değerleri için Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonunun mutlak hatası ($\alpha=1$).....83

Tablo 6.3. HAM($\hbar=-1$) ve HPM kullanılarak Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ için mutlak hatası ($\alpha=1$).....86

Tablo 6.4. $\hbar$ yardımcı parametresinin farklı değerleri için Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonunun mutlak hatası ($\alpha=1$).....86

Tablo 7.1. ADM, HAM($\hbar=-1$) ve HPM kullanılarak $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin çözüm fonksiyonu için mutlak hata ($h=0.05$).....114

Tablo 7.2. $\hbar$ yardımcı parametresinin farklı değerleri için $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin çözüm fonksiyonunun mutlak hatası ($h=0.05$).....115

SEMBOLLER LİSTESİ

L	:	Sturm-Liouville Operatörü
$L_2[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlı karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$C[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında sürekli reel veya kompleks değerli fonksiyonlar uzayı
$W_1^2(\Omega)$	:	Sobolev Uzayı
$q(x)$	:	Sturm-Liouville operatörü için potansiyel fonksiyon
O	:	Sınırlı değerler
o	:	Sonsuz küçük değerler
h, H	:	Sınır şartlarındaki impedance sabitleri
λ_n	:	n. özdeğer
$y_n(x,\lambda_n)$	:	n. özdeğere karşılık gelen n. özfonksiyon
V	:	Dirac denklemler sistemindeki potansiyel fonksiyon
$\rho(\lambda)$	:	Spektral fonksiyon
μ	:	Mu
$\sum$	:	Toplam Sembolü
A_n	:	Adomian Polinomları
ϕ_n, ψ_n	:	n-terim yaklaşımı
$\hbar$	:	Yardımcı parametre
$H(x,t)$	:	Yardımcı fonksiyon
p	:	Küçük parametre
Tol	:	Hata payı

KISALTMALAR

ADM	:	Adomian Ayrışım Metodu
HAM	:	Homotopi Analiz Metodu
HPM	:	Homotopi Pertürbasyon Metodu

1. GİRİŞ

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları, lineer cebir ve titreşim teorisi problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb).

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sınırlı ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler; tanım bölgesi sınırsız veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere singüler operatör denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinmektedir. 19. yüzyılın sonlarında, G. D. Birkoff tarafından ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde önemli yere sahiptir. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra da F. Rietsz, J. Von Neumann, K. O. Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması probleminin Neumann tarafından bir süre sonra yapıldığı bilinmektedir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında E. C. Titchmarsh tarafından verilmiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denilmektedir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde ve singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak amacıyla kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörler teorisinde, spektral analizin ters problemleri önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörler için ters problem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hangi spektral verilere göre operatörün kendisini bulmak (veya yapısını kurmak) mümkündür.
2. Spektral verilere göre operatör birebir olarak mı tanımlanır.
3. Bu verilere göre operatörlerin tanımlanması (kurulması) yöntemlerinin bulunmasıdır.

Ters problemlerle ilgili ilk sonuç, V. A. Ambartsumyan' a [7] aittir. 1929 yılında V. A. Ambartsumyan çalışmasında Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili olarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n, \cdots$'ler

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad (0 \le x \le \pi) \tag{1.1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0,1,\cdots)$ şeklinde ise $q(x) = 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya atılmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir.

Sturm-Liouville operatörünün incelenmesi sürecinde özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısında kullanılan yöntemlerin sayısı sürekli olarak artmıştır. Bunun kanıtı olarak, 1967 yılında bir grup Amerikan fizikçi ve matematikçiler olan G. S. Gardner, J. M. Greene, M.

D. Kruskal, R. M. Miura [17] ve P. Lax [53] tarafından bulunan bazı kısmi türevli lineer olmayan evalusyon denklemleri ile Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu ve jeofizikte birçok uygulamaları olan singüler Sturm-Liouville operatörleri için kuantum teorisinin ters saçılma problemleri halen yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. Kuantum saçılma teorisinin ters problemleri ile ilgili tarihçe, detaylı bir şekilde L. D. Faddeev'in [28] çalışmasında verilmiştir.

Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları verelim. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar fizikçiler F. Prats, J. Toll [70], H. E. Moses [60] ve diğer bilim insanları tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan [33] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\quad y(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx}+Q(x)y=\lambda y,\qquad 0<x<\infty \tag{1.3}$$

$$y_1(0)=0,\quad y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{1.4}$$

$$(y_1(0)=0,\quad y_2(\pi)+H_1y_1(\pi)=0,\ H_1\neq H) \tag{1.5}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, (1.3) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda);(-\infty<\lambda<\infty)$ fonksiyonu (1.3)-(1.4) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L^2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^T(x)\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)d\rho(\lambda) \tag{1.6}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Dirac operatörü için özvektörlerin tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülarize izin hesaplanması, periodik ve antiperiodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, 2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [76, 77, 72, 34, 3, 45, 30, 86, 58, 75, 36, 27, 66, 59] çalışmalarında incelenmiştir.

$q(x)=q_1(x)+\dfrac{l(l+1)}{x^2}$ potansiyeline sahip (1.1) denklemi için iki spektruma göre ters problem M. G. Gasimov [29] tarafından çözülmüştür. Daha sonraki yıllarda Bessel tipi tekilliğe sahip potansiyeller için ters problemler farklı yöntemlerle E. S. Panakhov ve H. Koyunbakan [49], Hidrojen atomu denklemleri için E. S. Panakhov ve R. Yılmazer [69], Dirac denklemler sistemi için Ü. İç [39], M. Şat [79], tekile sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü için kuantum saçılma teorisinin ters problemleri E. Baş [12] ve tekile sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem Mehmet Kayalar [43] tarafından incelenmiştir.

Operatörlerin spektral teorisinde farklı bir yaklaşım da sampling teoridir. Sampling teori birçok yazar tarafından geliştirilerek çalışılmaktadır. B. Chanane çalışmasında daha özel ayrılabilir sınır koşulları ile verilen regüler Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerini sampling teori kullanarak hesaplamıştır [20]. Bu çalışmada,

$$\begin{aligned} &Ly:=-y''+q(x)y=\lambda y,\quad x\in[0,\pi],\\ &a_{11}y(0,\lambda)-a_{12}y'(0,\lambda)=0,\\ &a_{21}y(\pi,\lambda)+a_{22}y'(\pi,\lambda)=0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

problemini, $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ ve q potansiyeli, $q \in L^1(0,\pi)$ şartını sağlayan reel değerli bir fonksiyon olmak üzere ele almıştır. Bu problemin özdeğerlerini farklı sınır koşulları için elde etmiştir. A. Boumenir ve B. Chanane singüler tipten Sturm-Liouville problemleri için çalışmalarında,

$q(x)$ potansiyel fonksiyonu, $q(x) \in L^{1.loc}(0,\pi)$ ve reel değerli olmak üzere

$$\begin{cases} Ly \equiv -y'' + \left[\dfrac{v^2 - \dfrac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] y = \lambda y, \quad 0 < x \leq \pi \\ y(\pi, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

problemini gözönüne almışlardır [14]. Problemin özdeğerlerini v' nin farklı değerleri için elde etmişlerdir. Ayrıca B. Chanane sampling teori kullanarak (1.7) problemi için yüksek mertebeden yaklaşımlar vermiştir [19]. Düzenlenmiş sampling metodunu kullanarak B. Chanane, uygulamanın tanım bölgesini genişleterek singüler Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerini hesaplamıştır [22].

Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek amacıyla kullanılan birçok yarı analitik metot mevcuttur. Bunlara, Adomian Ayrışım Metodu, Homotopi Analiz Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu örnek olarak gösterilebilir. Adomian ayrışım metodu [90], lineer ve lineer olmayan problemler için kullanılabilen etkili bir yarı analitik metottur. Küçük ya da büyük parametre içerip içermediğine bakılmaksızın adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilirdir. Yani oldukça geneldir. Ayrıca, Adomian ayrışım metodunda yaklaşım serileri oldukça hızlı yakınsamaktadır. 1980'lerin başlarından itibaren bu metot fonksiyonel denklemlerin geniş bir sınıfına uygulanmıştır [4, 42]. Bu metotta bulunan çözümler seri formunda olup, sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın sayısal sonuçlar bulunur. Bu metodu kullanarak bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü indislemeye gerek duymadan sembolik programlama dilleri ile kodlama yaparak, hesaplamada kısmen bir kolaylık sağlanabilir.

Homotopi analiz metodu 1992 yılında Liao tarafından geliştirilmiştir. Bu metot birçok yazar tarafından bilim ve mühendislikte nonlineer problemlerin birçok tipini çözmek amacıyla başarılı olarak uygulanmıştır. Ayrıca bu uygulamalarda sonuçlar hemen hemen tam çözümler ile aynı bulunmuştur. Liao [56], çözüm serileri her neye yakınsarsa yakınsasın, dikkate alınan problemin çözümünün tek olacağını göstermiştir. Ayrıca, Homotopi analiz metodu ile elde edilen $\hbar$ yaklaşık çözümlerinin yakınsama hızının $\hbar$ yardımcı parametresi ile kontrol edilebileceğini göstermiştir. Bu metotta yardımcı parametre $\hbar$, yardımcı fonksiyon, başlangıç tahmini ve yardımcı lineer operatörün seçiminde büyük bir özgürlük vardır. Bu seçimler de Homotopi analiz metodunun geçerliliğinin ve esnekliğinin kilit taşını kurmada önemli rol oynar.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1. (Diferansiyel Denklem) Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme diferansiyel denklem denir [26].

Tanım 2.2. (Adi Diferansiyel Denklem) Bağımlı değişkenin yalnızca bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir.

n. mertebeden en genel halde adi diferansiyel denklem,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

biçiminde verilir [26].

Tanım 2.3. (Kısmi Diferansiyel Denklem) Bağımlı değişkenin bir ya da daha fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir ve u bağımlı değişkeni göstermek üzere,

$$F\left(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots\right) = 0$$

formunda verilir [26].

Tanım 2.4. (Başlangıç ve Sınır Şartları) Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir:

(i) Sınır Şartları: Sınır şartları kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α, β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleri aşağıdaki şekildedir;

Dirichlet şartı: $u\big|_{\Gamma} = g$,

Neumann şartı: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g$ (veya 0),

Karışık (mixed) veya Robin şartı: $\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = g$.

(ii) Başlangıç Şartları: Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir [62].

Tanım 2.5. (Bir Problemin İyi Tanımlılığı) Matematiksel bir terim olarak iyi tanımlı problem kavramı ilk olarak, Jacques Hadamard tarafından verilen bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

i) Çözüm vardır,

ii) Çözüm tektir,

iii) Çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümü tektir denildiği zaman, bu mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Örneğin, bir problemin birkaç çözümü olsun. Fakat bu çözümlerden sadece biri sınırlı olsun. Bu durumda, sınırlı fonksiyonlar uzayında çözüm tektir denir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa bunun anlamı, model hakkında elde bulunan bilgiler eksiktir. Bu durumda model için çeşitli ek özellikler verilmelidir. Eğer başlangıç ya da sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm kararlıdır denir. Bir problem kararlı değilse, bu problemin çözümü pratik bir şekilde hesaplanamaz. İyi tanımlı problemlere ilişkin örnekler Laplace denklemi için Dirichlet problemini ve özel başlangıç koşullarına sahip ısı problemi için Dirichlet problemini içermektedir. Bu problemler çözümleri için bazı fiziksel metotlar bulunan doğal problemlerdir. Fakat bunun aksine ters ısı denklemi iyi tanımlı değildir. Hadamard 'a göre iyi tanımlı olmayan problemlere ill-posed problemler denir. Hadamard, ters problemlerin genellikle ill-posed problemler, düz problemlerin ise iyi tanımlı problemler olduğunu söylemiştir. Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

X ve Y iki normlu uzay ve $K : X \to Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Kararlılık: x çözümü daima y ye bağlıdır. Yani $n \to \infty$ iken $Kx_n \to Kx$ olacak

şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için, $x_n \to x$ olmasıdır.

Kısmi diferansiyel denklemlerin klasik teorisi hemen hemen tamamıyla iyi tanımlı problemlerle ilgilenmektedir. Bu nedenle ill-posed problemler matematiksel ve bilimsel açıdan oldukça ilgi çekicidir [46, 85].

Tanım 2.6. (Kompakt Uzay) Her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunan topolojik uzaya kompakt(tıkız) uzay denir. Bu tanıma denk bazı koşullar:

a) Sonlu arakesit özelliğine sahip her kapalı altküme ailesinin arakesitinin boş olmaması,
b) Her süzgecin bir yığılma noktasına sahip olması,
c) Her ağın bir yığılma noktasına sahip olması,

biçimindedir. Bazı yazarlar, ancak yukarıdaki özelliğe sahip Hausdorf uzayları kompakt uzay olarak kabul etmektedirler [35].

Tanım 2.7. (Kompakt Küme) Bir topolojik uzayın, alt küme olarak kompakt uzay olan bir alt kümesine kompakt(tıkız) küme denir [35].

Tanım 2.8. (Metrik Uzay) X boş olmayan bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

i) $d(x,x) = 0$

ii) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

biçimindedir. Bu aksiyomlara metrik uzay aksiyomları, (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Burada (iv) eşitsizliği üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır [25].

Tanım 2.9. (Normlu Uzay) X, F kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan, $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Bu özellikler; her $x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için

i) $\|x\| \geq 0$;

ii) $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$;

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

şeklindedir. Üzerinde bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olan X vektör uzayına normlu vektör uzayı veya kısaca normlu uzay denir ve $(X, \|.\|)$ ile gösterilir [78].

Tanım 2.10. (Yarı Norm) V bir vektör uzayı olsun. Bir $p : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

i) $\forall u, \upsilon \in V$ için $p(u + \upsilon) \leq p(u) + p(\upsilon)$

ii) $\forall \upsilon \in V$ ve $\alpha \in F$ için $p(\alpha \upsilon) = |\alpha| p(\upsilon)$

özelliklerini sağlıyorsa, p ye yarı norm adı verilir [80].

Tanım 2.11. (Hilbert Uzayı) $x, y, z, \ldots$ elemanlarının bir kümesi H olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa H uzayına bir soyut Hilbert uzayı denir.

a) H bir lineer kompleks uzaydır.

b) H uzayındaki $\forall x, y \in H$ eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı adı verilen, aşağıdaki aksiyomları sağlayan ve $< x, y >$ ile gösterilen bir kompleks sayı karşılık gelir.

i) $< x, y > = \overline{< y, x >}$

ii) $< x + z, y > = < x, y > + < z, y >$

iii) $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$, ($\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için)

iv) $< x, x > \geq 0$ ve $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ile verilen metriğe göre H uzayı tamdır.

d) H uzayı sonsuz boyutludur.

Eğer sadece a), b) ve c) özellikleri sağlanıyorsa, H uzayına bir üniter Hilbert uzayı denir [47, 54].

Tanım 2.12. ($L_2[a,b]$ **uzayı)** $[a,b]$ aralığında tanımlı karesel integrallenebilen, ölçülebilir, kompleks değerli $f(x), g(x), \ldots$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya $L_2[a,b]$ uzayı denir.

$L_2[a,b]$ uzayı her $f,g \in L_2[a,b]$ için $d: L_2[a,b] \times L_2[a,b] \to \mathbb{R}^+$

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|.\|: L_2[a,b] \to \mathbb{R}^+$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

normu ile bir normlu uzaydır. Bu uzayda iç çarpım,

$$< f, g >= \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır. $L_2[a,b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır [47, 80].

Tanım 2.13. (l_2 **uzayı)** $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ ve $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 < \infty,$$

özelliğini sağlayan kompleks sayıların sonsuz sayı dizilerinin oluşturduğu uzaya l_2 uzayı denir. Bu uzay her $x, y \in l_2$ için; $d: l_2 \times l_2 \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|.\|: l_2 \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}$$

normu ile bir normlu uzaydır [80]. l_2 uzayında iç çarpım

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k . \overline{\eta}_k$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde verilen iç çarpıma göre l_2 uzayı bir Hilbert uzayıdır [54].

Tanım 2.14. ($C[a,b]$ **uzayı)** $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli, reel ya da kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaya $C[a,b]$ uzayı denir. Bu uzay $f, g \in C[a,b]$ ve $d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(f,g) = \sup_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|.\| : C[a,b] \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\|f\| = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır. Yukarıda tanımlanan metriğe, Rus matematikçi Pafnuty Lvovich Chebishev ile bağlantılı olarak Chebishev metriği denilmektedir. Bu uzaydaki iç çarpım

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

olarak tanımlanır.

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

normu ile tam olmayan bu uzay bir Hilbert uzayı değildir [80].

Tanım 2.15. (Sobolev uzayı) Kabul edelim ki Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bir bölge ve $L_2(\Omega)$ uzayı bir Lebesque uzayı olsun. $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayı $u \in L_2(\Omega)$ ve $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$

özelliğine sahip olan tüm u fonksiyonlarının uzayıdır. Buradaki 1, mertebesi bir olan kısmi türevlerin $L_2(\Omega)$ uzayına ait olması gerektiğini göstermektedir. 2 ise, $L_2(\Omega)$ uzayına ait olma koşulundaki integralin kuvvetini göstermektedir. $W^{1,2}(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ uzayları arasında $W^{1,2}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ şeklinde bir ilişki vardır. $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$ olmak üzere $W^{1,2}(\Omega)$ Sobolev uzayındaki iç çarpım

$$< f, g >= \int_{\Omega} f.g\, dx + \int_{\Omega} gradf.gradg\, dx$$

veya

$$< f, g >= \int_{\Omega} f.\overline{g}\, dx + \int_{\Omega} Df.\, Dg\, dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} f^2\, dx + \int_{\Omega} |gradf|^2\, dx \right)^{1/2}$$

olarak ifade edilir. Sobolev uzaylarına W – uzayları da denir [57].

$L_2[a,b]$, $C[a,b]$ ve Sobolev uzayları Hilbert uzaylarına ilişkin örneklerdir.

Tanım 2.16. (Operatör) Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [61].

Tanım 2.17. (Lineer Operatör) E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x bölgesinde tanımlı $y = Ax$ operatörü gözönüne alınsın. A operatörü için

1) $x_1, x_2 \in E_x$ olmak üzere $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$

2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x \in E_x$ için $A(\lambda x) = \lambda A(x)$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [48].

Tanım 2.18. (Sınırlı Operatör) X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \to Y$ bir operatör olsun. Eğer

$$\| Lx \| \leq c \| x \|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [80].

Tanım 2.19. (Adjoint ve Self Adjoint Operatörler) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \to H_1$ operatörü

$$< Lx, y > = < x, L^* y >$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L^* = L$ ise, L operatörüne self-adjoint (veya hermityen) operatör denir [64].

Tanım 2.20. (Özdeğer, Özfonksiyon) L sınırlı lineer bir operatör olsun. L operatörünün tanım kümesinde $Ly = \lambda y$ olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon (veya özvektör) denir [54].

Tanım 2.21. (Ayrık Spektrum) Operatörün özdeğerlerinden oluşturulmuş kümeye ayrık spektrum denir [35].

Tanım 2.22. (Sturm-Liouville Operatörü ve Denklemi) $q(x)$ reel değerli ve $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \tag{2.1}$$

formundaki operatöre Sturm-Liouville operatörü denir. λ parametre olacak biçimde,

$$Ly \equiv -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) y = \lambda y, \quad x \in [0, \pi] \tag{2.2}$$

şeklindeki ikinci mertebeden diferansiyel denkleme ise Sturm-Liouville denklemi denir [54].

Tanım 2.23. (Dirac Operatörü) $p_{ik}(x)$ $(i,k=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar olacak şekilde,

$$L \equiv \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \qquad p_{12}(x) \equiv p_{21}(x),$$

bir matris operatörü olsun. $y(x,\lambda)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve λ bir parametre olacak şekilde

$$B\frac{d}{dx} + L(x) - \lambda I,$$

biçiminde tanımlı operatör Dirac operatörü olarak adlandırılır [54].

Tanım 2.24. (Dönüşüm Operatörü) E bir lineer topolojik uzay, A ve B de $A, B : E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2, E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip bir X operatörü,

1) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

2) $AX = XB$

şartlarını sağlıyorsa, X 'e A ve B operatör çifti için dönüşüm operatörü denir [54].

Tanım 2.25. (Bir Operatörün Rezolventi) T, H Hilbert uzayında yoğun olan bir cümlede tanımlı, kapalı lineer bir operatör olsun. T operatörünün rezolventi $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ ile gösterilen λ parametreli bir operatör olarak tanımlanır [54].

Tanım 2.26. (Rezolvent cümlesi, Spektrum) $X \neq \varnothing$ kompleks normlu bir uzay ve $T : D(T) \to X$ lineer bir operatör olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa λ ya T operatörünün bir regüler değeri denir.

R1) $R_\lambda(T)$ mevcut

R2) $R_\lambda(T)$ sınırlı

R3) $R_\lambda(T)$, X de yoğun bir cümlede tanımlı.

T operatörünün tüm regüler değerlerinin cümlesine rezolvent cümlesi denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. Bu cümlenin tümleyeni $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ şeklinde olup, T operatörünün spektrumu adını alır. Eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise, λ ya T operatörünün spektral veya özdeğeri denir [48, 54].

Tanım 2.27. (İzdüşüm Operatörü) L, H Hilbert uzayının bir alt uzayı olsun. $y \in L$, $z \perp L$ olacak biçimde $\forall x \in H$ elemanı için $x = y + z$ şeklinde görüntüsü(açılımı) tektir. $Px = y$ olarak ele alınırsa değer bölgesi L alt uzayı olan ve H Hilbert uzayının tamamında tanımlı herhangi bir operatör oluşturulmuş olur. Bu operatöre izdüşüm operatörü veya L alt uzayına dik izdüşüm operatörü denir ve P_L (veya P) notasyonu ile gösterilir. P operatörü self adjoint bir operatördür ve normu bire eşittir [54].

Tanım 2.28. (Spektral Fonksiyon) H bir Hilbert uzayı olmak üzere, λ reel parametresi için her E_λ operatör fonksiyonuna aşağıdaki özellikler sağlanacak biçimde spektral fonksiyon denir:

1) Her λ için E_λ bir izdüşüm operatörüdür.

2) $\lambda \leq \mu$ ise $E_\lambda \leq E_\mu$ dür.

3) $\forall x \in H$ için

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \|E_\lambda x\| = 0 \text{ ve } \lim_{\lambda \to \infty} \|E_\lambda x - x\| = 0$$

şeklindedir.

4) $\forall x \in H$ için $E_\lambda x$ vektör fonksiyonu sağdan süreklidir. Yani

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\| E_{\lambda+\varepsilon} x - E_\lambda x \right\| = 0$$

biçimindedir [54].

Tanım 2.29. (O ve o Sembolleri) $x \in E$ olduğunda, verilen x değerleri için $f(x) \le Cg(x)$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. Eğer $x \to x_0$ iken, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır [54].

Tanım 2.30. (Analitik fonksiyon) Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemde bulunan keyfi bir z_0 noktasının herhangi komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [65].

Tanım 2.31. (Tam fonksiyon) Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise tam fonksiyon olarak adlandırılır [65].

Tanım 2.32. (Tam Fonksiyonun Mertebesi) $f(z)$ tam fonksiyon olacak şekilde

$$R = \left(\lim_{n \to \infty} \sqrt{|a_k|} \right)^{-1} \tag{2.3}$$

formülü ile tanımlı R,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k \tag{2.4}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı ve $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ olsun. $r > R$ için

$$M(r) < \exp(r^\mu) \tag{2.5}$$

olmak üzere $\mu > 0$ varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir ve (2.5) eşitsizliğini sağlayan μ sayılar cümlesinin

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \tag{2.6}$$

formülü ile tanımlı ρ alt sınırına $f(z)$ fonksiyonunun mertebesi denir [82].

Tanım 2.33. (Tam Fonksiyonun Tipi) $f(z)$ tam fonksiyonunun mertebesi $\rho(0<\rho<\infty)$ sonlu olacak biçimde, $r > R$ için

$$M(r) < \exp(\alpha r^{\rho}) \tag{2.7}$$

olmak üzere $\alpha > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu sonlu tipe sahiptir denir.

(2.7) eşitsizliğini sağlayan α sayı cümlesinin σ alt sınırına $f(z)$ fonksiyonunun tipi denir ve

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}} \tag{2.8}$$

şeklindedir [40].

Tanım 2.34. (Minimal ve Maksimal Tip) $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\sigma = \infty$ olacak biçimde $\rho\,(0<\rho<\infty)$ mertebeli $f(z)$ tam fonksiyonu sırası ile minimal, normal, maksimal tipe sahiptir denir [40].

Tanım 2.35. (Green Fonksiyonu) λ, sabit bir kompleks sayı olsun.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

Sturm-Liouville denkleminin

$$u(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ u'(0,\lambda) = -\cos\alpha,$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü $u(x,\lambda)$,

$$\upsilon(\pi,\lambda) = \sin\beta,\ \ \upsilon'(\pi,\lambda) = -\cos\beta,$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü ise $\upsilon(x,\lambda)$ ile gösterelim. Ayrıca $\omega(\lambda) = W\{u,\upsilon\}$ biçiminde olsun. Bu durumda,

$$G(x,\,t;\,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega(\lambda)}u(x,\lambda)\upsilon(t,\lambda), & x\le t,\\ \dfrac{1}{\omega(\lambda)}u(t,\lambda)\upsilon(x,\lambda), & x\ge t.\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Green fonksiyonu denir [1]. Bu fonksiyon, x ve t' ye göre simetriktir ve λ parametresinin reel değerleri için reel değerlidir [54].

Tanım 2.36. (Paley-Wiener Uzayı)

$$PW_{\pi}=\left\{f\ tam\ fonksiyon,\ |f(\mu)|\le Ce^{\pi|\mathrm{Im}\,\mu|},\ \int_R|f(\mu)|^2\,d\mu<\infty\right\}.$$

şeklindeki uzaya Paley-Wiener uzayı denir [20].

Tanım 2.37. (Leibniz Formülü) Sürekli $f(x,t)$ fonksiyonu $\{(x,t):\ a\le x\le b,\ c\le t\le d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu taktirde $c\le t\le d$ için

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,dx$$

dir [11].

Eğer f fonksiyonu bu teoremdeki şartları sağlayan bir fonksiyon, $a(t)$ ve $b(t)$ de (c,d) aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx+f(b(t),t)b'(t)-f(a(t),t)a'(t)$$

dir [11].

Tanım 2.38. (Weyl(limit) nokta-Weyl daire durumu) Eğer Sturm-Liouville probleminin iki çözümü de $L_2[a,b]$ uzayında ise Weyl-daire durumu, sadece bir çözüm bu uzayın elemanı ise Weyl-nokta durumu denir [54].

Teorem 2.1. (Rouche Teoremi) $\varphi(z)$, $\psi(z)$; bir D bölgesinde analitik ve bu bölgenin sınırı üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer D bölgesinin sınırı üzerinde (Γ-üzerinde)

$$|\varphi(z)| < |\psi(z)|, \qquad (z \in \Gamma)$$

ise bu takdirde $\varphi(z)+\psi(z)$ fonksiyonu ile $\psi(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı aynıdır [82].

3. REGÜLER VE SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ ÜZERİNE

$p(x), q(x)$ ve $\omega(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denklemi

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=\lambda\omega(x)y, \tag{3.1}$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Burada $\omega(x)$ fonksiyonuna ağırlık veya yoğunluk fonksiyonu denir. Sınır şartlarını sağlayan yukarıdaki (3.1) denkleminin aşikar olmayan çözümleri için λ değerlerini bulmak, Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan problemin bir parçasıdır.

(3.1) denkleminde $\omega(x)=1$ alınırsa

$$Lu=\lambda u$$

özdeğer problemi elde edilir.

Uygulamalarda oldukça sık kullanılan en temel operatörlerden birisi de $q(x)$ reel değerli ve $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$L\equiv-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

formundaki Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatörün $y(x)$ çözüm fonksiyonlarının cümlesi diferansiyellenebilirdir ve $[a,b]$ aralığının uç noktalarında verilen şartlarla belirlenir.

L operatörü için en önemli sınır şartları genellikle $\alpha,\beta\in[0,\pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha&=0\\ y(b)\cos\beta+y'(b)\sin\beta&=0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanır. Bu sınır şartlarına ayrılabilir (veya ayrık) sınır şartları da denir.

$$Ly \equiv -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \tag{3.3}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem (3.1) denkleminin $p(x) = \omega(x) = 1$ özel halidir. (3.2)-(3.3) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville sınır değer problemi olarak bilinmektedir. (3.2) sınır şartı $\sin\alpha \neq 0$ ve $\sin\beta \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y(a)\cot\alpha + y'(a) &= 0 \\ y(b)\cot\beta + y'(b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\cot\alpha \neq -h$ ve $\cot\beta \neq H$ alınırsa

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0 \\ y'(b) + Hy(b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

sınır şartları elde edilir. Bu sınır şartlarına impedance sabitli sınır şartları, h ve H sabitlerine ise impedance sabitleri denir [54].

Eğer p, q ve ω fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve hepsi periyodik fonksiyonlar ise (3.1) denklemine;

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b)$$

periyodik sınır şartı ve

$$y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b)$$

anti periyodik sınır şartları ile Sturm-Liouville periyodik (veya anti periyodik) sınır değer problemi denir. Bu şartlarla beraber (3.3) denklemi Hill denklemi olarak adlandırılır. Burada eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli bir fonksiyon; h ve H sayıları da sonlu ise (3.2)-(3.5) problemine regüler Sturm-Liouville problemi, bu şartlardan herhangi biri sağlanmadığında bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir [54].

3.1. REGÜLER STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİNİN İNCELENMESİ

B. Chanane, daha özel ayrılabilir sınır koşulları ile verilen regüler Sturm-Liouville problemlerinin sampling teori kullanılarak Dirichlet özdeğerlerini hesaplamıştır [20].

$$\begin{aligned} &Ly := -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [0,\pi], \\ &a_{11}y(0,\lambda) - a_{12}y'(0,\lambda) = 0, \\ &a_{21}y(\pi,\lambda) + a_{22}y'(\pi,\lambda) = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sturm-Liouville problemini gözönüne alalım. Burada $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ ve q potansiyeli, $q \in L^1(0,\pi)$ şartını sağlayan reel değerli bir fonksiyondur. Ayrıca q fonksiyonunun alttan sınırlı olduğu varsayılmıştır.

L operatörü regüler olduğunda; spektrumu ayrık, reel ve sonsuzda tek bir yığılma noktasına sahiptir. Ayrıca her özdeğer katlıdır. Bu çalışmada pozitif özdeğerlerin hesaplanmasıyla ilgilenilmiştir. Özdeğerlerin sonlu sayıda tüm negatif olanları λ'da yapılan basit bir değişim ile elde edilebilir.

$\lambda = \mu^2$ olmak üzere $y(x,\mu^2)$ aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümü olsun;

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \mu^2 y, \\ &y(0,\mu^2) = a_{12}, \quad y'(0,\mu^2) = a_{11}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

problemini gözönüne alalım ve

$$B(\mu) := a_{21}y(\pi,\mu^2) + a_{22}y'(\pi,\mu^2) \tag{3.8}$$

şeklinde $B(\mu)$ fonksiyonunu tanımlayalım. (3.6) probleminin özdeğerleri yukarıda (3.8) ile verilen sınır fonksiyonunun sıfırlarının karekökleridir.

Dirichlet koşulları durumunda, bu sınır fonksiyonu π tipinde, birinci mertebeden μ'ye göre tam fonksiyonudur ve reel eksen üzerinde karesel integrallenebilirdir. Paley-Wiener uzayı,

$$PW_\pi = \left\{ f \text{ tam fonksiyon}, |f(\mu)| \leq Ce^{\pi|\operatorname{Im}\mu|}, \int_R |f(\mu)|^2 \, d\mu < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. (3.7) probleminin özfonksiyonunu aşağıdaki lemma ile açıklayalım:

Lemma 3.1.1. (3.7) probleminin özfonksiyonu,

$$y(x,\mu^2)=a_{12}\cos\mu x+a_{11}\frac{\sin\mu x}{\mu}+\int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}y(t,\mu^2)\,dt \qquad (3.9)$$

integral denklemini sağlar.

İspat: $\lambda=\mu^2$ olsun. $\varphi(x,\lambda)$, Sturm-Liouville denkleminin çözümü olduğundan

$-\varphi''+q(x)\varphi=\mu^2\varphi$ eşitliği sağlanır. Buradan $q(x)\varphi=\varphi''+\mu^2\varphi$ şeklinde olup yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)q(\tau)\,d\tau &= \int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}.\left[\varphi''(\tau,\lambda)+\mu^2\varphi(\tau,\lambda)\right]d\tau\\
&= \int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi''(\tau,\lambda)\,d\tau+\\
&\quad+\mu^2\int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau\\
&= \int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\,d\varphi'(\tau,\lambda)\,d\tau+\\
&\quad+\mu^2\int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau\\
&= \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi'(\tau,\lambda)\Big|_0^x+\mu\int_0^x \cos\{\mu(x-\tau)\}\,d\varphi(\tau,\lambda)+\\
&\quad+\mu^2\int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau\\
&= -a_{11}\sin\mu x+\mu\varphi(x,\lambda)-\mu a_{12}\cos\mu x+\\
&\quad+\mu^2\int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau-\\
&\quad-\mu^2\int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau\\
&= -a_{11}\sin\mu x+\mu\varphi(x,\lambda)-\mu a_{12}\cos\mu x
\end{aligned}$$

bulunur ki son eşitlikten

$$\varphi(x,\lambda)=a_{12}\cos\mu x+\frac{a_{11}}{\mu}\sin\mu x+\frac{1}{\mu}\int_0^x \sin\{\mu(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)q(\tau)\,d\tau$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıda (3.10) ile verilen eşitsizliklerden faydalanacağız [18],

Lemma 3.1.2.

$$|\cos u| \le e^{|\mathrm{Im}\, u|}, \quad \left|\frac{\sin u}{u}\right| \le \frac{c_0}{1+|u|} e^{|\mathrm{Im}\, u|} \tag{3.10}$$

burada c_0 sabit bir reel sayıdır ($c_0 = 1.72$ olarak alınabilir).

Şimdi bu eşitsizliklerin sağlandığını ispatlayalım.

İspat:

$|\cos u| \le e^{|\mathrm{Im}\, u|}$ için,

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ şeklinde olup $z = x + iy$ olarak alınırsa,

$$|\cos z| = \left|\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right| \le \left|\frac{e^{iz}}{2}\right| + \left|\frac{e^{-iz}}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{i(x+iy)}}{2}\right| + \left|\frac{e^{-i(x+iy)}}{2}\right| \qquad (\ |e^{ix}| = |e^{-ix}| = 1 \text{ olduğundan }\ )$$

$$= \frac{|e^{-y}|}{2} + \frac{|e^{y}|}{2} \le \frac{e^{|y|}}{2} + \frac{e^{|y|}}{2} = e^{|y|} = e^{|\mathrm{Im}\, z|}$$

eşitsizliği elde edilir. İkinci eşitsizliğin sağlandığı da benzer şekilde sinüs fonksiyonunun üstel formdaki görüntüsü yazılarak aşağıdaki biçimde kolayca gösterilebilir,

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz}\right| \le \left|\frac{e^{iz}}{2iz}\right| + \left|\frac{e^{-iz}}{2iz}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{i(x+iy)}}{2i(x+iy)}\right| + \left|\frac{e^{-i(x+iy)}}{2i(x+iy)}\right| \qquad (\ |e^{ix}| = |e^{-ix}| = 1 \text{ olduğundan }\ )$$

$$\le \frac{e^{|y|}}{|ix-y|} = \frac{|i|e^{|y|}}{|i||ix-y|} = \frac{|i|e^{|y|}}{|z|} < \frac{\tilde{c}e^{|y|} + |i|e^{|y|}}{1+|z|} \qquad (\ \tilde{c}+1 = c_0 \text{ olarak alınırsa }\ )$$

$$= \frac{c_0 e^{|y|}}{1+|z|}$$

bulunur.

Şimdi ileride sık sık kullanacağımız Gronwall eşitsizliğine ilişkin aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 3.1.3. (Gronwall Eşitsizliği)

$t_0 \le t \le t_1$ aralığında, $\phi(t) \ge 0$ ve $\Psi(t) \ge 0$ sürekli fonksiyonlar, K ve L pozitif sabitler olmak üzere eğer,

$$\phi(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\phi(s)\,ds \tag{3.11}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu ifadeyi yine aynı koşullar altında

$$\phi(t) \le K\exp\left(L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)ds \right) \tag{3.12}$$

şeklinde yazmak mümkündür.

İspat: (3.11) eşitsizliği

$$\frac{\phi(t)}{K + L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\phi(s)\,ds} \le 1 \tag{3.13}$$

ifadesine eşdeğerdir. (3.13) eşitsizliğinin her iki tarafı $L\psi(t)$ ile çarpılıp daha sonra integre edilirse

$$\int_{t_0}^{t} \frac{L\Psi(s)\phi(s)\,ds}{K + L\int_{t_0}^{s} \Psi(\tau)\phi(\tau)\,d\tau} \le L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\,ds$$

elde edilir. Buradan

$$\ln\left(K + L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\phi(s)\,ds \right) - \ln K \le L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\,ds$$

bulunur ve son eşitsizlik düzenlenirse

$$K + L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\phi(s)\,ds \le K\exp\left(L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\,ds \right) \tag{3.14}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafında (3.11) ifadesi dikkate alınarak sonuç elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur [83, 84].

Şimdi ileride kullanacağımız $v_1(x,\mu)$, $v_2(x,\mu)$ fonksiyonlarını tanımlayalım:

$$v_1(x,\mu) = y(x,\mu^2) - a_{12}\cos\mu x - a_{11}\frac{\sin\mu x}{\mu}$$

$$= \int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu} y(t,\mu^2)\,dt, \tag{3.15}$$

$$v_2(x,\mu) = y'(x,\mu^2) + a_{12}\mu\sin\mu x - a_{11}\cos\mu x$$

$$-\int_0^x q(t)\cos\mu(x-t)\left[a_{12}\cos\mu t + a_{11}\frac{\sin\mu t}{\mu}\right]dt$$

$$= y'(x,\mu^2) + a_{12}\mu\sin\mu x - a_{11}\cos\mu x - \int_0^x q(t)\cos\mu(x-t)\,y(t,\mu^2)\,dt. \tag{3.16}$$

şeklinde olsun. Bu takdirde aşağıdaki lemma söz konusudur:

Lemma 3.1.4.

$$c_1 = c_4\exp c_5, \qquad c_2 = c_1\int_0^\pi |q(t)|\,dt, \qquad c_3 = |a_{21}|c_1 + |a_{22}|c_2,$$
$$c_4 = |a_{12}| + c_0\pi|a_{11}|, \qquad c_5 = \pi c_0\int_0^\pi |q(t)|\,dt,$$

biçiminde olmak üzere, $v_1(x,\mu)\in PW_x$ her x için μ' nün bir fonksiyonudur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [20]:

$$|v_1(x,\mu)| \le \frac{c_1c_5}{1+|\mu|\pi} e^{x|\operatorname{Im}\mu|}$$

İspat:

$$v_1(x,\mu) = \int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}\left[a_{12}\cos\mu t + a_{11}\frac{\sin\mu t}{\mu}\right]dt +$$
$$+\int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu} v_1(t,\mu)\,dt \tag{3.17}$$
$$= \int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu} y(t,\mu^2)\,dt + +\int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu} v_1(t,\mu)\,dt$$

şeklinde yazılarak,

$$\left|\int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}\left[a_{12}\cos\mu t+a_{11}\frac{\sin\mu t}{\mu}\right]dt\right|\le$$
$$\le e^{x|\operatorname{Im}\mu|}\int_0^x|q(t)|\frac{c_0(x-t)}{1+|\mu|(x-t)}\left[|a_{12}|+|a_{11}|\frac{c_0 t}{1+|\mu|t}\right]dt$$
$$\le e^{x|\operatorname{Im}\mu|}\frac{c_0 x}{1+|\mu|x}\int_0^x|q(t)|\left[|a_{12}|+|a_{11}|c_0 t\right]dt \tag{3.18}$$
$$\le e^{x|\operatorname{Im}\mu|}\frac{c_0\pi}{1+|\mu|\pi}\int_0^\pi|q(t)|\left[|a_{12}|+|a_{11}|c_0 t\right]dt$$

ve

$$\left|\int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}v_1(t,\mu)\,dt\right|\le\int_0^x|q(t)|\frac{c_0(x-t)}{1+|\mu|(x-t)}|v_1(t,\mu)|dt$$
$$\le e^{x|\operatorname{Im}\mu|}c_0\pi\int_0^x|q(t)|e^{-t|\operatorname{Im}\mu|}|v_1(t,\mu)|dt \tag{3.19}$$

elde edilir. Buradan,

$$|v_1(x,\mu)|\le\left|\int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}\left[a_{12}\cos\mu t+a_{11}\frac{\sin\mu t}{\mu}\right]dt\right|+$$
$$+\left|\int_0^x q(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{\mu}v_1(t,\mu)\,dt\right|$$
$$\le e^{x|\operatorname{Im}\mu|}\frac{c_0\pi}{1+|\mu|\pi}\int_0^\pi|q(t)|\left[|a_{12}|+|a_{11}|c_0 t\right]dt+ \tag{3.20}$$
$$+e^{x|\operatorname{Im}\mu|}c_0\pi\int_0^x|q(t)|e^{-t|\operatorname{Im}\mu|}|v_1(t,\mu)|dt$$

ve

$$e^{-x|\operatorname{Im}\mu|}|v_1(x,\mu)|\le\frac{c_0\pi}{1+|\mu|\pi}\int_0^\pi|q(t)|\left[|a_{12}|+|a_{11}|c_0 t\right]dt+c_0\pi\int_0^x|q(t)|e^{-t|\operatorname{Im}\mu|}|z_1(t,\mu)|dt$$

bulunur. Gronwall eşitsizliği kullanılarak,

$$e^{-x|\operatorname{Im}\mu|}\left|v_1(x,\mu)\right| \le \left[\frac{c_0\pi}{1+|\mu|\pi}\int_0^{\pi}|q(t)|\left[|a_{12}|+|a_{11}|c_0 t\right]dt\right]e^{c_0\pi\int_0^{x}|q(t)|dt}$$
$$\le \left[\frac{c_0\pi}{1+|\mu|\pi}\int_0^{\pi}|q(t)|\left[|a_{12}|+|a_{11}|c_0 t\right]dt\right]e^{c_0\pi\int_0^{\pi}|q(t)|dt} \qquad (3.21)$$

yazılabilir. Böylece,

$$\left|v_1(x,\mu)\right| \le e^{-x|\operatorname{Im}\mu|}\left[\frac{c_0\pi\left[|a_{12}|+|a_{11}|c_0\pi\right]}{1+|\mu|\pi}\int_0^{\pi}|q(t)|dt\right]e^{c_0\pi\int_0^{\pi}|q(t)|dt}$$
$$\le \frac{c_1 c_5}{1+|\mu|\pi}e^{x|\operatorname{Im}\mu|} \qquad (3.22)$$

şeklinde elde edilir.

Bundan dolayı, $v_1(x,\mu)$ birinci mertebeden x tipinde tam fonksiyondur, her x için μ'nün bir fonksiyonu olarak reel eksende karesel integrallenebilirdir ve yukarıda verilen eşitsizliği sağlar.

Açıklama 3.1.1. Dirichlet koşulları durumunda, $a_{12}=0$ iken, aşağıdaki eşitsizlik söz konusudur [20]:

$$\left|v_1(\pi,\mu)\right| \le \frac{\tilde{c}}{1+|\mu|\pi}e^{x|\operatorname{Im}\mu|}\int_0^{\pi}\frac{t|q(t)|}{1+|\mu|t}dt$$

Lemma 3.1.5.

$$c_1 = c_4\exp c_5, \qquad c_2 = c_1\int_0^{\pi}|q(t)|dt, \qquad c_3 = |a_{21}|c_1+|a_{22}|c_2,$$
$$c_4 = |a_{12}|+c_0\pi|a_{11}|, \qquad c_5 = \pi c_0\int_0^{\pi}|q(t)|dt,$$

biçiminde olmak üzere, $v_2(x,\mu)\in PW_x$ her x için μ' nün bir fonksiyonudur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [20]:

$$\left|v_2(x,\mu)\right| \le \frac{c_2 c_5}{1+|\mu|\pi}e^{x|\operatorname{Im}\mu|}$$

İspat: (3.9) eşitliğinin her iki tarafını x' e göre diferensiyelleyerek,

$$y'(x,\mu) = -\mu a_{12}\sin\mu x + a_{11}\cos\mu x + \int_0^x q(t)\cos\mu(x-t)y(t,\mu)dt \qquad (3.23)$$

elde edilir. Buradan,

$$v_2(x,\mu)=\int_0^x q(t)\cos\mu(x-t)v_1(t,\mu)\,dt \tag{3.24}$$

bulunur. Böylece,

$$\left|v_2(x,\mu)\right|\le\frac{c_2c_5}{1+|\mu|\pi}e^{x|\operatorname{Im}\mu|} \tag{3.25}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylelikle, $v_2(x,\mu)$ birinci mertebeden x tipinde tam fonksiyondur ve her x için μ 'nün bir fonksiyonu olarak reel eksende karesel integrallenebilirdir. Ayrıca yukarıda verilen (3.25) eşitsizliğini sağlar.

$B(\mu)$ sınır fonksiyonu Dirichlet koşulları durumunda mutlaka Paley-Wiener uzayının elemanıdır. Fakat bu uzayın elemanı olmadığı durumlar da mevcut olabilir. Aşağıdaki lemma söz konusudur.

Lemma 3.1.6.

$$c_1=c_4\exp c_5,\qquad c_2=c_1\int_0^\pi|q(t)|\,dt,\qquad c_3=|a_{21}|c_1+|a_{22}|c_2,$$
$$c_4=|a_{12}|+c_0\pi|a_{11}|,\qquad c_5=\pi c_0\int_0^\pi|q(t)|\,dt,$$

biçiminde olmak üzere, $\tilde{B}(\pi,\mu)=a_{21}v_1(\pi,\mu)+a_{22}v_2(\pi,\mu)\in PW_\pi$, μ 'nün bir fonksiyonudur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [20]:

$$\left|\tilde{B}(\pi,\mu)\right|\le\frac{c_3c_5}{1+|\mu|\pi}e^{\pi|\operatorname{Im}\mu|}$$

Bundan dolayı, aşağıdaki teorem uygulanabilirdir.

Teorem 3.1.1. $f\in PW_\pi$ olsun, o halde

$$f(\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)\frac{\sin\pi(\mu-k)}{\pi(\mu-k)}$$

yazılabilir. Burada seri $L^2_{d\mu}$' de yakınsak, $\mathbb{R}$' de bulunan kompakt kümede düzgün yakınsaktır [92].

Böylece, $v_1(\pi,k), v_2(\pi,k)$ ve $\tilde{B}(\pi,k)$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $v_1(\pi,\mu), v_2(\pi,\mu)$ ve $\tilde{B}(\pi,\mu)$ fonksiyonları yeniden düzenlenilebilir. $\tilde{B}(\pi,\mu)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde elde edebiliriz;

$$\begin{aligned} B(\mu) = \tilde{B}(\pi,\mu) + a_{21}\left(a_{12}\cos\mu\pi + a_{11}\frac{\sin\mu\pi}{\mu} \right) + \\ + a_{22}\left(-a_{12}\mu\sin\mu\pi + a_{11}\cos\mu\pi + \int_0^{\pi} q(t)\cos\mu(x-t)\left[a_{12}\cos\mu t + a_{11}\frac{\sin\mu t}{\mu} \right] dt \right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilen $B(\mu)$ fonksiyonunun sıfırları aranılan özdeğerlerin karekökleridir.

$\tilde{B}(\pi,\mu)$ fonksiyonunun kısıtlaması $\tilde{B}_N(\pi,\mu)$ olmak üzere,

$$\tilde{B}_N(\pi,\mu) = \sum_{k=-N}^{N} \tilde{B}(\pi,k)\frac{\sin\pi(\mu-k)}{\pi(\mu-k)} \tag{3.27}$$

şeklinde olsun. Bu takdirde aşağıdaki lemma sağlanır.

Lemma 3.1.7. $B(\pi,\mu)$ ve $B_N(\pi,\mu)$ fonksiyonları için kesme hatası,

$$\left| B(\pi,\mu) - B_N(\pi,\mu) \right| \le \frac{4c_3c_5}{\pi^2 N} \tag{3.28}$$

şeklindedir [20].

İspat: Gerçekten,

$$B(\pi,\mu) - B_N(\pi,\mu) = \tilde{B}(\pi,\mu) - \tilde{B}_N(\pi,\mu) \tag{3.29}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \left| B(\pi,\mu) - B_N(\pi,\mu) \right| &= \left| \tilde{B}(\pi,\mu) - \tilde{B}_N(\pi,\mu) \right| \\ &\le \left| a_{21} \right| \left| v_1(\pi,\mu) - v_{1,N}(\pi,\mu) \right| + \left| a_{22} \right| \left| v_2(\pi,\mu) - v_{2,N}(\pi,\mu) \right| \end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç Helms ve Thomas eşitsizliğine uyar, [92]:

$$\left| v_i(\pi,\mu) - v_{i,N}(\pi,\mu) \right| \le \frac{4c_i c_5}{\pi^2 N}, \qquad i = 1,2.$$

Açıklama 3.1.2. Dirichlet koşulları durumunda $\mu v_1(\pi,\mu) \in L^2(-\infty,\infty)$ dir. Jagerman sonucu [92] uygulanabilirdir ve N^{-1}' in yerine $N^{-3/2}$ katsayısını verir [13].

Eğer $\bar{\mu}$ tam özdeğer ve μ_N^2, B_N' in sıfırının karesi olarak elde edilen bir yaklaşımsa bu takdirde,

$$\left|B_N(\pi,\bar{\mu}) - B_N(\pi,\mu_N)\right| = \left|B_N(\pi,\bar{\mu}) - B(\pi,\bar{\mu})\right| \le \frac{4c_3c_5}{\pi^2 N}$$

eşitsizliği söz konusudur. Buradan aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 3.1.8. Özdeğerlerin hata değeri,

$$\left|\bar{\mu} - \mu_N\right| \le \frac{4c_3c_5}{\pi^2 N \inf_{\bar{\mu}\le\tilde{\mu}\le\mu_N}\left|B_N'(\pi,\tilde{\mu})\right|} \tag{3.30}$$

şeklindedir ve özdeğerler basit olduğunda, $B_N'(\pi,\mu_N) \neq 0$ dır.

3.2. BESSEL TÜRÜNDEN TEKİLLİĞE SAHİP STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİNİN İNCELENMESİ

B. Chanane ve A. Boumenir, Bessel türünden tekilliğe sahip Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerinin hesaplanması amacıyla yeni bir metot vermiştir [14]. Bu metot sınır fonksiyonunun Paley-Wiener uzayında interpolasyonuna dayanmaktadır. Aşağıda verilen Bessel denklemini göz önüne alalım,

$$\begin{cases} Ly \equiv -y'' + \left[\dfrac{v^2 - \dfrac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] y = \lambda y, \quad 0 < x \le \pi \\ y(\pi, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

burada $q(x)$ potansiyel fonksiyonu, $q(x) \in L^{1,loc}(0,\pi)$ ve reel değerlidir. Ayrıca $\underline{\lim}_{x \to 0} x^2 q(x) \ge 1 - v^2$ eşitsizliği sağlanır.

(3.31) ile verilen diferensiyel ifade, $x = \pi$ noktasında regüler ve $x = 0$ noktasında singüler olacak şekilde bir simetrik operatör oluşturur.

İspat: $< Lf, g > = < f, Lg >$ olmalıdır. Yani,

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + \left[\frac{\upsilon^2 - \dfrac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] \quad \text{şeklinde olmak üzere,}$$

$$< -\frac{d^2 f}{dx^2} + \left[\frac{\upsilon^2 - \dfrac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] f, g > = < f, -\frac{d^2 g}{dx^2} + \left[\frac{\upsilon^2 - \dfrac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] g >$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. $f(x)$ ve $g(x)$, ikinci mertebeden diferansiyellenen sürekli fonksiyonlar olsun. Ayrıca,

$$Lf = f''(x) - \left[\frac{\upsilon^2 - \dfrac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] f(x)$$

$$Lg = g''(x) - \left[\frac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] g(x)$$

biçiminde tanımlansın. Bu taktirde f ile g' nin Wronski determinantı

$$W\{f,g\} = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Böylece,

$$\int_a^b Lf.g(x)\,dx = \int_a^b \left\{ f''(x) - \left[\frac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right] f(x) \right\}.g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f''(x).g(x)\,dx - \int_a^b \left[\frac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right].f(x).g(x)\,dx$$

$$= f'(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g'(x)\,dx - \int_a^b \left[\frac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right].f(x).g(x)\,dx$$

$$= f'(b)\,g(b) - f'(a)\,g(a) - \left[f(x)\,g'(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g''(x)\,dx \right] -$$

$$- \int_a^b \left[\frac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right].f(x).g(x)\,dx$$

$$= f'(b)\,g(b) - f'(a)\,g(a) - f(b)\,g'(b) + f(a)\,g'(a) +$$

$$+ \int_a^b f(x) \left\{ g''(x) - \left[\frac{\upsilon^2 - \frac{1}{4}}{x^2} + q(x) \right].g(x) \right\} dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,Lg\,dx$$

olup ispat tamamlanır.

Bu nedenle tek bir sınır koşulu yani $x=\pi$ noktası, bir self-adjoint açılım oluşturmak için gereklidir. $q(x)=0$ iken, açık endeksler eğer $v\geq 1$ ise (1,1) ve $0\leq v<1$ ise (2,2) dir. Ayrıca (3.31) ile tanımlanan self-adjoint operatörün spektrumu ayrıktır.

Uygulamalı matematikte özdeğerlerin hesaplanmasının öneminden dolayı, Sturm-Liouville denklemlerinin özdeğerlerinin hesaplanması problemi önemli bir yere sahiptir.

Bessel denklemleri için Shannon sampling teoreminin uygulanabildiği ve iyi sonuçlar verdiği hatırlatılmalıdır.

Yarı klasik yaklaşım metodu λ spektral parametresinin geniş(büyük) reel değerleri için bir diferensiyel denklemin çözümünü tahmin etmek amacıyla kullanılabilir. $x=0$ noktasında karesel integrallenebilen ve limit çember durumunda, $x=0$ noktasında Friedrichs sınır koşulunu sağlayan diferansiyel denklemin çözümleri gözönüne alınacaktır. Bu çözümler aşağıdaki integral denkleminin çözümünün skalar katlarıdır:

$$y(x,\mu^2)=\mu^{-l-1}u(\mu x)+\int_0^x G(x,t,\mu)q(t)y(t,\mu^2)dt \tag{3.32}$$

burada

$$\lambda=\mu^2, \qquad v=l+\frac{1}{2} \qquad (l>0)$$

ve

$$u(z):=\sqrt{\frac{\pi z}{2}}J_v(z) \quad \text{ve} \quad v^2\geq 1-\underline{\lim}_{x\to\infty}x^2q(x)$$

şeklindedir.

Green fonksiyonu

$$G(x,t,\mu)=\frac{i(-1)^l}{2\mu}\{w(\mu x)w(-\mu t)-w(\mu t)w(-\mu x)\}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $w(z):=i\exp(i\pi l)\left(\frac{\pi}{2}z\right)^{\frac{1}{2}}H^{(1)}_{1+\frac{1}{2}}(z)$ şeklindedir.

$$|u(z)|<C\left(\frac{|z|}{1+|z|}\right)^{l+1}e^{|\mathrm{Im}\,z|} \tag{3.33}$$

bağıntısını kullanarak Green fonksiyonu için aşağıdaki bağıntıyı göstermek mümkündür:

$$|G(x,t,\mu)| < \frac{C}{|\mu|}\left(\frac{|\mu|x}{1+|\mu|x}\right)^{l+1}\left(\frac{|\mu|t}{1+|\mu|t}\right)^{-l} e^{|\mathrm{Im}\,\mu|\,(x-t)} \tag{3.34}$$

burada C bir sabittir.

Böylece eğer $\int_0^\pi x|q(x)| < \infty$ ise ardışık yaklaşımlardan,

$$|y(x,\mu^2)| \le C_1\left(\frac{x}{1+|\mu|x}\right)^{l+1} e^{|\mathrm{Im}\,\mu|x} \tag{3.35}$$

eşitsizliği bulunur.

Bu ifade x' in her sabit değeri için $y(x,\mu^2)$ çözümünün x tipinde ve birinci mertebeden μ' ye göre tam fonksiyon olduğu anlamındadır. Ayrıca x' in her sabit değeri için ve $|\mu| \to \infty$ iken

$$|y(x,\mu^2) - \mu^{-l-1}u(\mu x)| = C_2\left(\frac{x}{1+|\mu|x}\right)^{l+1} e^{|\mathrm{Im}\,\mu|x} o(1) \tag{3.36}$$

elde edilir.

Böylece $y(x,\mu^2)$ çözümü için aşağıdaki asimptotik formül sağlanır:

$$y(x,\mu^2) = \frac{1}{\mu^{l+1}}\sin\left(\mu x - \frac{1}{2}l\pi\right) + \frac{1}{\mu^{l+1}}e^{|\mathrm{Im}\,\mu|x}o(1), \quad |\mu| \to \infty$$

$\int_0^\pi x|q(x)| < \infty$ olduğu kabul edilecektir. Bu ifade bundan sonra sadece limit nokta problemlerinin ele alınacağı anlamındadır.

Teorem 3.2.1. Eğer $\int_0^\pi x|q(x)| < \infty$ ve $v = \frac{1}{2}$ ise x' in her sabit değeri için, $y(x,\mu^2) \in PW_x$, μ' ye bağlı bir fonksiyondur.

(3.36) eşitliğinde verilen asimptotik formüller, aşağıdaki başlangıç değer probleminin y_δ çözümü ile (3.32)' de tanımlanan y çözümüne yaklaşmak için kullanılacaktır.

$$\begin{cases} -y_\delta'' + \left[\dfrac{v^2-\dfrac{1}{4}}{x^2}+q(x)\right] y_\delta = \lambda y_\delta, \quad \delta \le x \le \pi, \\ y_\delta(\delta,\lambda) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mu^{-v}\sqrt{\delta}\, J_v(\mu\delta), \quad y_\delta'(\delta,\lambda) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mu^{-v}\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, J_v(\mu x)\right]\Big|_{x=\delta}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Başlangıç koşulları (3.32) ile verilen integral denklemi ile belirlenir ve δ ''yeterince küçük parametre'' olarak alınmaktadır. Hatırlatalım ki,

$$\begin{aligned} y(x,\mu^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu^{-v}\sqrt{x}\, J_v(\mu x) + \int_0^x G(x,t,\mu) q(t) y(t,\mu^2)\, dt, \quad 0 \le x \le \pi, \\ y_\delta(x,\mu^2) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mu^{-v}\sqrt{x}\, J_v(\mu x) + \int_\delta^x G(x,t,\mu) q(t) y_\delta(t,\mu^2)\, dt, \quad \delta \le x \le \pi. \end{aligned} \tag{3.38}$$

şeklindedir.

Bu ise $x = 0$ noktasındaki singülerlikten kurtulmaya yardımcı olur.

Teorem 3.2.2. Eğer $\int_0^\pi x|q(x)| < \infty$, $\operatorname{Im}\mu = 0$ ve $v > \dfrac{1}{2}$ ise bu takdirde,

$$\left|y(\pi,\mu^2) - y_\delta(\pi,\mu^2)\right| < C_2 \frac{1}{(1+|\mu|\pi)^{l+1}} \int_0^\delta t|q(t)|\, dt$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\theta(x,\mu^2) := y(x,\mu^2) - y_\delta(x,\mu^2)$ olsun, $\delta \le x \le \pi$ için,

$$\theta(x,\mu^2) = \int_\delta^x G(x,t,\mu) q(t) \theta(t,\mu^2)\, dt + \int_0^\delta G(x,t,\mu) q(t) y(t,\mu^2)\, dt \tag{3.39}$$

(3.33) ve (3.34) eşitsizlikleri

$$\left|\left(\frac{x}{1+|\mu|x}\right)^{-l-1}\theta(x,\mu^2)\right| \le C\int_\delta^x \left(\frac{t}{1+|\mu|t}\right)|q(t)|\left(\frac{t}{1+|\mu|t}\right)^{-l-1}\theta(t,\mu^2)\, dt + $$

$$+CC_1\int_0^\delta \left(\frac{t}{1+|\mu|t}\right)|q(t)|\, dt$$

bağıntısını içerir. Gronwall eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\left(\frac{x}{1+|\mu|x}\right)^{-l-1}\theta\left(x,\mu^2\right)\right| \le CC_1\int_0^{\delta}\left(\frac{t}{1+|\mu|t}\right)|q(t)|dt.\left(e^{C\int_{\delta}^{x}\left(\frac{t}{1+|\mu|t}\right)|q(t)|dt}\right)$$

$$\left|\theta\left(\pi,\mu^2\right)\right| \le CC_1\left(\frac{\pi}{1+|\mu|\pi}\right)^{l+1}\int_0^{\delta}\left(\frac{t}{1+|\mu|t}\right)|q(t)|dt.\left(e^{C\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{t}{1+|\mu|t}\right)|q(t)|dt}\right)$$

elde edilir.

μ' ye bağlı bir fonksiyon olan $y\left(\pi,\mu^2\right)$' nin Teorem 3.2.1' den Paley-Wiener uzayının elemanı olduğu görülür ve bu nedenle sadece sampling noktalarındaki değerlerinin bir dizisi ile örtülebilir. W.S.K. (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov) sampling teoremini hatırlayalım;

Eğer $f \in PW_{\Omega}$ ise

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nt)\frac{\sin\left[\Omega(t-nT)\right]}{\Omega(t-nT)}$$

biçiminde tanımlanır, burada $T=\frac{\pi}{\Omega}$ şeklindedir. Bu fonksiyon kompleks düzlemin her kompakt alt kümesinde ve L^2_{dx}' de düzgün yakınsaktır.

Problemin λ_n özdeğerleri $B(\mu)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır,

$$B(\mu):=y\left(\pi,\mu^2\right)\in PW_{\pi}$$

ve böylece W.S.K. teoremi ile

$$B(\mu)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} B(n)\frac{\sin\left[\pi(\mu-n)\right]}{\pi(\mu-n)}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B_{N,\delta}(\mu):=\sum_{|n|\le\mathbb{N}} B_{\delta}(n)\frac{\sin\left[\pi(\mu-n)\right]}{\pi(\mu-n)} \qquad (3.40)$$

olsun, burada $B_\delta(n) = y_\delta(\pi, n^2)$ şeklindedir.

Teorem 3.2.3. Her $\varepsilon > 0$ ve $\rho > 0$ için, $\delta > 0$ ve N pozitif tamsayısı vardır öyle ki,

$$\left|B(\mu) - B_{N,\delta}(\mu)\right| < \varepsilon, \qquad \forall \mu \in [-\rho, \rho]$$

şeklindedir.

İspat: Verilen $\varepsilon > 0$ ve $k > 0$ için, Teorem 3.2.2' den,

$$\sup_{-k \le \mu \le k} \left|B(\mu) - B_\delta(\mu)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının mevcut olduğu görülür. Kesme hatası eşitsizliği kullanılarak bir N tamsayısı vardır öyle ki

$$\left|B_\delta(\mu) - B_{N,\delta}(\mu)\right| \le \frac{E_l \left|\sin \pi \mu\right|}{\pi \sqrt{1 - 4^{-k}} (N+1)^l} \left[\frac{1}{\sqrt{N-\mu}} + \frac{1}{\sqrt{N+\mu}}\right] \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \mu \in [-N, N]$$

burada $E_l = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mu^l B_\delta(\mu)\right|^2 d\mu$ şeklindedir. Böylece sonuç $\rho := \min(N, k)$ olur.

Açıklama 3.2.1. Kesme hatası sampling noktalarında sıfırdır ve $[-N, N]$ aralığında sınırlıdır.

Sonuç 3.2.1. (Hata tahmini (eşitsizliği)) Verilen her $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ ve $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki eğer $\bar{\mu}$ ve $\mu_{N,\delta}$ sırasıyla B ve $B_{N,\delta}$' nın kökleri ise aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$-\varepsilon < B_{N,\delta}(\bar{\mu}) < \varepsilon \quad \text{ve} \quad \left|\mu_{N,\delta} - \bar{\mu}\right| \le \frac{\varepsilon}{\inf_{\mu_{N,\delta} \le \zeta \le \bar{\mu}} \left|B'_{N,\delta}(\zeta)\right|}$$

İspat: Yukarıda 3.2.3 ile verilen teoremden ve $\bar{\mu}$' nin B' nin bir sıfırı olmasından $\left|B_{N,\delta}(\bar{\mu})\right| < \varepsilon$ sonucu elde edilir. Bu ifade $\left|B_{N,\delta}(\bar{\mu}) - B_{N,\delta}(\mu_{N,\delta})\right| < \varepsilon$ olarak yazılabilir. Ortalama değer teoremi ile, $\bar{\mu}$ ve $\mu_{N,\delta}$ arasındaki en az bir ζ sayısı için $\left|\bar{\mu} - \mu_{N,\delta}\right| \cdot \left|B'_{N,\delta}(\zeta)\right| < \varepsilon$ elde edilir. Dikkat edelim ki $B_{N,\delta}$' nın sıfırları yeteri kadar küçük ε sayısı için basittir ve bu nedenle μ civarında $B'_{N,\delta}(\zeta) \neq 0$' dır.

$-\varepsilon < B_{N,\delta}(\bar{\mu}) < \varepsilon$ arasında ve $B_{N,\delta}(\cdot)$' nın bir lokal inversiyonu olmasından

$$\bar{\mu} \in \left(B_{N,\delta}^{-1}(\mp\varepsilon), B_{N,\delta}^{-1}(\pm\varepsilon) \right) \tag{3.41}$$

özdeğerleri için $B'_{N,\delta}$' nın işaretine bağlı olan bir ek elde edilir. Hatırlatalım ki, $y_\delta(\pi, n^2)$ katsayıları (3.38) eşitliğinden nümerik olarak hesaplanır ve böylece $B_{N,\delta}(\cdot)$ fonksiyonu (3.40)' dan bulunur. Bu nedenle (3.41) ifadesi elde edilen özdeğerler için pratik bir hata sınırı sağlar.

4. DIRAC OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

4.1. DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ

Dirac sistemi için ters problemler ilk olarak Moses (1956), Prats-Toll (1959), Verde (1958-1959), Gasymov-Levitan (1966) ve Panakhov (1985) tarafından çalışılmıştır. Joa ve Minkin (1997), bir boyutlu Dirac operatörleri için kuantum mekaniğinde bir parçacığın hareketini tasvir eden özfonksiyonlar için bazı açılım formülleri vermişlerdir. Ağırlıklı olarak Dirac sistemleri için ters spektral problemler Watson (1999) tarafından çalışılmıştır.

Kerimov (2002); denklem ve sınır koşullarında aynı spektral parametreyi bulunduran Dirac denklemler sistemi için öz değer ve öz fonksiyonların özelliklerini incelemiştir.

$p_{ik}(x)$ $(i,k=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar olacak şekilde,

$$L \equiv \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \qquad p_{12}(x) \equiv p_{21}(x), \tag{4.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x,\lambda)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve λ bir parametre olacak şekilde

$$\left(B\frac{d}{dx} + L(x) - \lambda I \right) y = 0, \tag{4.2}$$

operatör denklemi, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\begin{cases} \dfrac{dy_2}{dx} + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 = \lambda y_1 \\ -\dfrac{dy_1}{dx} + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 = \lambda y_2 \end{cases} \tag{4.2'}$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)$; potansiyel fonksiyon ve m; parçacığın(zerreciğin) kütlesi olmak üzere $p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0$ ve $p_{11}(x) = V(x) + m$, $p_{22}(x) = V(x) - m$ olacak şekilde relativistik kuantum teorisinde (4.2) denklemi veya (4.2') sistemi bir boyutlu stasyoner Dirac denklemi veya sistemi olarak bilinmektedir.

Sabit ortogonal normlu bazda iki boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır [39]. Ayrıca bu durumda,

$$BH = HB$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y = Hz$ olacak şekilde (4.2) denkleminin her iki tarafı soldan H^{-1} ile çarpılırsa,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}LHz = \lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx} + \left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH\right)z = \lambda z \tag{4.3}$$

elde edilir.

$$Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$$

olacak şekilde Q matrisini hesaplayalım. Bu taktirde,

$$H^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}, \qquad H^{-1}(x) = \frac{1}{\det H(x)}\begin{pmatrix} H_{22}(x) & -H_{12}(x) \\ -H_{21}(x) & H_{11}(x) \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \\ -\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix}$$

ve diğer bir yandan

$$H^{-1}LH=\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & \sin\varphi(x) \\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

elde edilir. Son iki eşitlikten,

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \varphi'(x)+p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x)+p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

bulunur. $q_{12}(x)=0$ olacak şekilde $\varphi(x)$ fonksiyonunu seçelim. Bu taktirde,

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x)+\frac{1}{2}\{p_{22}(x)-p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x)=0$$

şeklinde bir bağıntı bulunur. Buradan,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

elde edilir. Böylece $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

biçiminde olur. Bu durumda (4.3) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sistemine bir boyutlu Dirac denklem sistemi ya da Dirac denklem sisteminin **I. kanonik formu** adı verilir.

Şimdi $izQ(x)=q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçelim, yani;

$$2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)=0$$

şeklindedir. Buradan

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(t)+p_{22}(t)\}\,dt$$

elde edilir. Bu durumda (4.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sistemine bir boyutlu Dirac denklem sistemi ya da Dirac denklem sisteminin **II. kanonik formu** adı verilir. (4.4) ve (4.5) denklemlerine (4.2) sisteminin kanonik formları da denir. (4.2) denklem sistemlerinin spektral teorisinin çeşitli problemleri incelenirken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığı durumda), (4.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken (4.4) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilen (4.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve spektral teorinin ters problemleri incelenirken de (4.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlayacaktır.

(4.4) kanonik denklem sisteminde $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere (4.4) denklemine karşılık gelen denklemler sistemi,

$$y_2' - \{\lambda - p(x)\} y_1 = 0, \quad y_1' + \{\lambda - r(x)\} y_2 = 0, \tag{4.6}$$

şeklinde yazılır.

$$y_2(0)\cos\alpha + y_1(0)\sin\alpha = 0, \tag{4.7}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0. \tag{4.8}$$

(4.6)-(4.8) sınır değer problemini gözönüne alalım. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı bir çözümü $y(x,\lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun$(\lambda_1 \neq 0)$. Bu durumda λ_1 sayısına verilen problemin özdeğeri, $y(x,\lambda_1)$' e de λ_1' e karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir.

Lemma 4.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldir. Yani,

$$\int_0^{\pi} \{y_1(x,\lambda_1) z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1) z_2(x,\lambda_2)\} dx = 0$$

dir.

İspat. $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonları (4.6) sisteminin çözümleri olduklarından,

$$\begin{aligned}
&y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\} y_1(x,\lambda_1) = 0, \\
&y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\} y_2(x,\lambda_1) = 0, \\
&z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\} z_1(x,\lambda_2) = 0, \\
&z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\} z_2(x,\lambda_2) = 0.
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu denklemleri sırası ile $z_1(x,\lambda_2)$, $-z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpar ve sonuçları toplarsak,

$$\frac{d}{dx}\left\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)-y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\right\}=$$
$$=(\lambda_1-\lambda_2)\left\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right\}$$

elde ederiz. Bu son eşitliği x ' e göre 0 ' dan π ' ye integre edersek,

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\left\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right\}dx$$
$$=\left\{y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)-y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)\right\}\Big|_0^{\pi}$$

bulunur. Buradan

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}\left\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right\}dx=0$$

veya

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi}y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx=0$$

elde edilir. $\lambda_1\neq\lambda_2$ olduğundan $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özvektör fonksiyonlarının ortogonal olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.2. (4.6)-(4.8) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. Bunun aksini varsayalım. Yani, $\lambda_1=u+i\upsilon$ kompleks özdeğer olsun. $p(x)$ ve $r(x)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar ve α,β reel sayılar olduğundan $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=u-i\upsilon$ ' nin de bir özdeğer olduğu kolayca görülebilir. λ_2 ' ye karşılık gelen özvektör fonksiyonu da $\overline{y}(x,\lambda_1)$ şeklinde olsun. Bu taktirde Lemma 4.1' den dolayı,

$$(\lambda_1-\overline{\lambda_1})\int_0^{\pi}\left\{y_1(x,\lambda_1)\overline{y_1}(x,\lambda_1)+y_2(x,\lambda_1)\overline{y_2}(x,\lambda_1)\right\}dx=0$$

ve

$$(\lambda_1-\overline{\lambda_1})\int_0^{\pi}\left\{\left|y_1(x,\lambda_1)\right|^2+\left|y_2(x,\lambda_1)^2\right|\right\}dx=0$$

olur. $\lambda_1\neq\overline{\lambda_1}$ olduğundan $y_1(x,\lambda_1)=0$ ve $y_2(x,\lambda_1)=0$ olur ki bu da özvektör

fonksiyonlarının sıfırdan farklı olması gerçeği ile çelişir. O halde özdeğerler kompleks olamaz, yani reeldir. Bu da ispatı tamamlar.

4.2. REGÜLER KANONİK DIRAC SİSTEMİ İÇİN SPEKTRAL SONUÇLAR

Bu bölümde regüler Dirac denklemler sistemi için bazı spektral sonuçlar elde edilmiştir. Özel olarak çözüm fonksiyonları daha önceki bölümlerde tanımlanan Paley-Wiener uzayının elemanıdır. Aşağıda verilen teoremler ispatlanmıştır.

(4.2') sistemi için

$$y_2' - \{\lambda - p(x)\} y_1 = 0, \quad y_1' + \{\lambda - r(x)\} y_2 = 0 \tag{4.9}$$

şeklindeki I. kanonik formunu dikkate alarak

$$\begin{aligned} &y_2(0)\cos\alpha + y_1(0)\sin\alpha = 0, \\ &y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

sınır koşulları ile birlikte sınır değer problemini gözönüne alalım.

(4.9) sisteminin

$$y_1(0,\lambda) = \cos\alpha, \quad y_2(0,\lambda) = -\sin\alpha. \tag{4.11}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

şeklinde olsun. $y(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonunun (4.10) sınır koşulunu sağladığı açıktır. Şimdi (4.9), (4.11) problemini $p(x) = r(x) \equiv 0$ olması halinde dikkate alalım. Bu durumda,

$$y_1(x,\lambda) = \cos(\lambda x - \alpha), \quad y_2(x,\lambda) = \sin(\lambda x - \alpha) \tag{4.13}$$

şeklindedir.

$\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları,

$$\alpha(x)=\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x\left[p(\tau)+r(\tau)\right]d\tau\right\},$$
$$\beta(x)=\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x\left[p(\tau)+r(\tau)\right]d\tau\right\}. \tag{4.14}$$

ifadelerine sahiptirler. (4.9), (4.11) probleminin

$$y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda)\\ y_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$$

biçimindeki çözümü için $y_1(x,\lambda)$ ve $y_2(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonları aşağıdaki şekildedir:

$$y_1(x,\lambda)=\alpha(x)\cos(\lambda x-\alpha)+\beta(x)\sin(\lambda x-\alpha)+ \\ +\int_0^x\left\{P(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+R(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds \tag{4.15}$$

$$y_2(x,\lambda)=\alpha(x)\sin(\lambda x-\alpha)-\beta(x)\cos(\lambda x-\alpha)+ \\ +\int_0^x\left\{Q(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+H(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds \tag{4.16}$$

Ayrıca,

$$\xi(x,\lambda)=\lambda x-\frac{1}{2}\int_0^x\left[p(\tau)+r(\tau)\right]d\tau \tag{4.17}$$

olmak üzere $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonlarının (4.14) ile verilen ifadelerini yerlerine yazarak çözüm fonksiyonları için

$$y_1(x,\lambda)=\cos\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+\int_0^x\left\{P(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+R(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds,$$
$$y_2(x,\lambda)=\sin\left\{\xi(x,\lambda)-\alpha\right\}+\int_0^x\left\{Q(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+H(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\right\}ds.$$

eşitlikleri yazılabilir.

Dirac denklemler sistemini aşağıdaki şekilde daha genel ayrılabilir sınır koşulları ile gözönüne alalım:

$$y_2'-\left\{\lambda-p(x)\right\}y_1=0,\quad y_1'+\left\{\lambda-r(x)\right\}y_2=0, \\ a_{11}y_2(0)-a_{12}y_1(0)=0, \\ a_{21}y_2(\pi)+a_{22}y_1(\pi)=0. \tag{4.18}$$

Bu taktirde, $\lambda=\mu^2$ olsun ve $y_1(x,\mu^2), y_2(x,\mu^2)$ fonksiyonları başlangıç değer probleminin çözümünü göstersinler,

$$y_2' - \{\mu^2 - p(x)\} y_1 = 0, \quad y_1' + \{\mu^2 - r(x)\} y_2 = 0,$$
$$y_2(0) = a_{12} \ , \quad y_1(0) = a_{11}.$$

(4.12) çözüm fonksiyonunun özdeğerleri aşağıda verilen sınır koşulunun(fonksiyonunun) sıfırlarının karesidir,

$$B(\mu) := a_{21} y_2(\pi) + a_{22} y_1(\pi) \tag{4.19}$$

Dirichlet koşulları durumunda, bu sınır fonksiyonu birinci mertebeden π tipinde μ ' nün bir tam fonksiyondur ve reel eksende karesel integrallenebilirdir. Böylece de Paley-Wiener uzayının elemanıdır.

4.2.1. Çözüm Fonksiyonlarının Değerlendirilmesi

$$v_{11}(x,\mu^2) = y_1(x,\mu^2) - \alpha(x)\cos(\mu^2 x - \alpha) - \beta(x)\sin(\mu^2 x - \alpha) \tag{4.20}$$

ve

$$v_{21}(x,\mu^2) = y_2(x,\mu^2) - \alpha(x)\sin(\mu^2 x - \alpha) + \beta(x)\cos(\mu^2 x - \alpha) \tag{4.21}$$

şeklinde olsun.

İleride yapacağımız işlemlerde aşağıda verilen eşitsizliklerden faydalanacağız [38],

$$|\cos u| \le e^{|\mathrm{Im}\, u|}, \quad |\sin u| \le c_0 e^{|\mathrm{Im}\, u|} \tag{4.22}$$

burada c_0 keyfi bir sabittir ($c_0 = 1.72$ olarak alınabilir).

Ayrıca kullanacağımız sabitler,

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi} |P(x,s)|\, ds \ , \quad c_2 = \int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi} |R(x,s)|\, ds, \\ c_3 &= \int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi} |Q(x,s)|\, ds \ , \quad c_4 = \int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi} |H(x,s)|\, ds, \\ c_5 &= |a_{21}|(c_1 + c_0 c_2), \\ c_6 &= |a_{22}|(c_3 + c_0 c_4). \end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.1. $v_{11}(x,\mu^2), v_{21}(x,\mu^2) \in PW_x$ fonksiyonları her x için μ^2'nin fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} \left|v_{11}(x,\mu^2)\right| &\le (c_1 + c_0 c_2) e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|} \\ \left|v_{21}(x,\mu^2)\right| &\le (c_3 + c_0 c_4) e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|} \end{aligned} \tag{4.24}$$

İspat: İlk olarak verilen birinci eşitsizliği gözönüne alalım,

$$\begin{aligned} \left|v_{11}(x,\mu^2)\right| &\le \left|\int_0^x \left\{P(x,s)\cos(\mu^2 s-\alpha)\,ds\right\}\right| + \left|\int_0^x \left\{R(x,s)\sin(\mu^2 s-\alpha)\,ds\right\}\right| \\ &\le \int_0^x \left|P(x,s)\right|\left|\cos(\mu^2 s-\alpha)\right|ds + \int_0^x \left|R(x,s)\right|\left|\sin(\mu^2 s-\alpha)\right|ds \\ &\le \int_0^x \left|P(x,s)\right| e^{\left|\operatorname{Im}(\mu^2 s-\alpha)\right|}ds + \int_0^x c_0\left|R(x,s)\right| e^{\left|\operatorname{Im}(\mu^2 s-\alpha)\right|}ds \\ &= \int_0^x \left|P(x,s)\right| e^{\left|\operatorname{Im}(\mu^2 s)\right|}ds + \int_0^x c_0\left|R(x,s)\right| e^{\left|\operatorname{Im}(\mu^2 s)\right|}ds \\ &\le \int_0^x \left|P(x,s)\right| \max_{0\le s\le x} e^{\left|\operatorname{Im}(\mu^2 s)\right|}ds + \int_0^x c_0\left|R(x,s)\right| \max_{0\le s\le x} e^{\left|\operatorname{Im}(\mu^2 s)\right|}ds \\ &= e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(\int_0^x \left|P(x,s)\right|ds + c_0\int_0^x \left|R(x,s)\right|ds\right) \\ &\le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(\int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi}\left(\left|P(x,s)\right|\right)ds + c_0\int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi}\left(\left|R(x,s)\right|\right)ds\right) \end{aligned}$$

buradan

$$\left|v_{11}(x,\mu^2)\right| \le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_1 + c_0 c_2\right)$$

olarak elde edilir. Böylece $v_{11}(x,\mu^2)$, x tipinde birinci mertebeden tam fonksiyondur ve her x için μ^2'nin bir fonksiyonu olarak reel eksende karesel integrallenebilirdir.
İkinci eşitsizliğin sağlandığı da aşağıdaki şekilde gösterilebilir,

$$
\begin{aligned}
\left|v_{21}\left(x,\mu^2\right)\right| &\le \left|\int_0^x \left\{Q(x,s)\cos\left(\mu^2 s-\alpha\right)ds\right\}\right| + \left|\int_0^x \left\{H(x,s)\sin\left(\mu^2 s-\alpha\right)ds\right\}\right| \\
&\le \int_0^x \left|Q(x,s)\right|\left|\cos\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|ds + \int_0^x \left|H(x,s)\right|\left|\sin\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|ds \\
&\le \int_0^x \left|Q(x,s)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|}ds + \int_0^x c_0\left|H(x,s)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|}ds \\
&= \int_0^x \left|Q(x,s)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds + \int_0^x c_0\left|H(x,s)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds \\
&\le \int_0^x \left|Q(x,s)\right|\max_{0\le s\le x} e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds + \int_0^x c_0\left|H(x,s)\right|\max_{0\le s\le x} e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds \\
&= e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(\int_0^x \left|Q(x,s)\right|ds + c_0\int_0^x \left|H(x,s)\right|ds\right) \\
&\le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(\int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi}\left(\left|Q(x,s)\right|\right)ds + c_0\int_0^\pi \max_{0\le x\le\pi}\left(\left|H(x,s)\right|\right)ds\right)
\end{aligned}
$$

buradan

$$
\left|v_{21}\left(x,\mu^2\right)\right| \le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_3 + c_0 c_4\right)
$$

elde edilir. Böylece $v_{21}\left(x,\mu^2\right)$, x tipinde birinci mertebeden tam fonksiyondur ve her x için μ^2'nin bir fonksiyonu olarak reel eksende karesel integrallenebilirdir.

Teorem 4.2.2. $v_{12}\left(x,\mu^2\right), v_{22}\left(x,\mu^2\right) \in PW_x$ fonksiyonları her x için μ^2'nin fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$
\begin{aligned}
\left|v_{12}\left(x,\mu^2\right)\right| &\le c_0 c_2 e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|} \\
\left|v_{22}\left(x,\mu^2\right)\right| &\le c_0 c_4 e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

İspat: İlk olarak,

$$
v_{12}\left(x,\mu^2\right) = \int_0^x \left\{P(x,s)\cos\left(\mu^2 s-\alpha\right) + R(x,s)\sin\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right\}ds - \int_0^x \left\{P(x,s)\cos\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right\}ds
$$

şeklinde olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left|v_{12}\left(x,\mu^2\right)\right| &\le \int_0^x \left|R\left(x,s\right)\right|\left|\sin\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|ds \\
&\le \int_0^x c_0\left|R\left(x,s\right)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|}ds \\
&= \int_0^x c_0\left|R\left(x,s\right)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds \\
&\le \int_0^x c_0\left|R\left(x,s\right)\right|\max_{0\le s\le x} e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds \\
&= e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_0\int_0^x \left|R\left(x,s\right)\right|ds\right) \\
&\le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_0\int_0^{\pi}\max_{0\le x\le\pi}\left(\left|R\left(x,s\right)\right|\right)ds\right) \\
&= e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_0c_2\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde,

$$v_{22}\left(x,\mu^2\right)=\int_0^x\left\{Q\left(x,s\right)\cos\left(\mu^2 s-\alpha\right)+H\left(x,s\right)\sin\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right\}ds-\int_0^x Q\left(x,s\right)\cos\left(\mu^2 s-\alpha\right)ds$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|v_{22}\left(x,\mu^2\right)\right| &\le \int_0^x \left|H\left(x,s\right)\right|\left|\sin\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|ds \\
&\le \int_0^x c_0\left|H\left(x,s\right)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s-\alpha\right)\right|}ds \\
&= \int_0^x c_0\left|H\left(x,s\right)\right|e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds \\
&\le \int_0^x c_0\left|H\left(x,s\right)\right|\max_{0\le s\le x} e^{\left|\operatorname{Im}\left(\mu^2 s\right)\right|}ds \\
&= e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_0\int_0^x \left|H\left(x,s\right)\right|ds\right) \\
&\le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_0\int_0^{\pi}\max_{0\le x\le\pi}\left(\left|H\left(x,s\right)\right|\right)ds\right) \\
&= e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_0c_4\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bununla teorem ispatlanmıştır.

Böylece, $v_{12}(x,\mu^2)$ ve $v_{22}(x,\mu^2)$ fonksiyonları x tipinde birinci mertebeden tam fonksiyonlardır ve her x için μ^2'nin bir fonksiyonu olarak reel eksende karesel integrallenebilirdirler.

$B(\mu^2)$ sınır fonksiyonu(karekteristik denklem) Dirichlet-Dirichlet koşulları durumunda mutlaka PW_π' nin elemanıdır. Fakat PW_π' nin elemanı olmadığı durumlar da söz konusu olabilir. Böylece aşağıdaki teorem söz konusudur.

Teorem 4.2.3. $\tilde{B}(\pi,\mu^2)=a_{21}v_{11}(\pi,\mu^2)+a_{22}v_{21}(\pi,\mu^2)\in PW_\pi$, μ^2'nin bir fonksiyonudur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\tilde{B}(\pi,\mu^2)\right|\le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_5+c_0c_6\right) \tag{4.26}$$

İspat: İlk olarak,

$$\left|\tilde{B}(x,\mu^2)\right|\le\left|a_{21}\right|\left|v_{11}(x,\mu^2)\right|+\left|a_{22}\right|\left|v_{21}(x,\mu^2)\right|$$

şeklinde yazarak

$$\le\left|a_{21}\right|\left(c_1+c_0c_2\right)e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}+\left|a_{22}\right|\left(c_3+c_0c_4\right)e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}$$
$$\le e^{x\left|\operatorname{Im}\mu^2\right|}\left(c_5+c_6\right)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem uygulanabilirdir.

Teorem 4.2.4. $f\in PW_\pi$ olsun, o halde

$$f(\mu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)\frac{\sin\pi(\mu-k)}{\pi(\mu-k)} \tag{4.27}$$

yazılabilir. Burada seri $L^2_{d\mu}$' de yakınsak, $\mathbb{R}$' de bulunan kompakt kümede düzgün yakınsaktır.

$\tilde{B}(\pi,\mu^2)$ fonksiyonunun kısıtlaması $\tilde{B}_N(\pi,\mu^2)$ olmak üzere,

$$\tilde{B}_N(\pi,\mu^2)=\sum_{k=-N}^{N}\tilde{B}(\pi,k)\frac{\sin\pi(\mu-k)}{\pi(\mu-k)} \tag{4.28}$$

eşitliği yazılabilir.

5. BAZI NÜMERİK METOTLARIN İNCELENMESİ

Bu bölümde lineer, lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilen Adomian Ayrışım Metodu (ADM), Homotopi Analiz Metodu (HAM) ve Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM) verilecektir. Ayrıca bu yarı analitik metotların geniş bir biçimde analizleri yapılacaktır.

5.1. ADOMIAN AYRIŞIM METODU (ADM)

Adomian ayrışım metodunun bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir (Adomian, 1990).

Genel olarak bu metodu açıklarsak; lineer ve lineer olmayan terimlerin her ikisini de kapsayan genel bir lineer olmayan adi diferansiyel operatörü F olmak üzere,

$$Fu(x) = g(x) \tag{5.1}$$

veya

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{5.2}$$

diferansiyel denklemini ve $u(x_0) = a$, $u'(x_0) = b$ başlangıç şartını göz önüne alalım. Burada L; lineer operatörü (diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini) , R; lineer operatörden kalan kısmı ve N; lineer olmayan terimi göstermektedir.

L lineer operatörünün tersi mevcut ve L^{-1} olsun. (5.2) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \tag{5.3}$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafına L^{-1} operatörü sol taraftan uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{5.4}$$

eşitliği elde edilebilir. L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (5.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra ve başlangıç şartları kullanılarak

$$u = a + bx + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{5.5}$$

şeklinde çözüm fonksiyonu elde edilir. (5.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu , lineer olmayan

terimdir ve $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar ileride detaylı olarak verilmiştir. (5.5) eşitliğindeki u, ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi olan u_0, verilen başlangıç değerleri ve denklemin sağ taraf fonksiyonunun integrali alınarak, $u_0 = a + bx + L^{-1}g$ eşitliği ile bulunur. Daha sonra seri çözümün birinci terimi olan u_0 kullanılarak u_1, u_2, u_3, ... terimleri elde edilir. Böylece ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{5.6}$$

şeklinde yazılabilir ve serinin yakınsak olduğu varsayılacaktır. Bu seri çözümü kullanılarak (5.5) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{5.7}$$

şeklinde genel seri formu elde edilir. Benzer olarak, (5.7) 'den

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \ , \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir. Bu genelleştirmede A_0 ; sadece u_0 'a, A_1; u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0 , u_1 , u_2 'ye bağlıdır. Benzer şekilde (5.8) eşitliğindeki bütün A_n polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomlarının ayrıştırılmış hali ise literatürde,

$$A_0 = f(u_0),$$

$$A_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0),$$

$$A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)+\frac{u_1^2}{2!}\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0),$$

$$A_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)+u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0)+\frac{u_1^3}{3!}\left(\frac{d^3}{du_0^3}\right)f(u_0),$$

$$A_4 = u_4\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)+\left(\frac{u_2^2}{2!}+u_1u_3\right)\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0)+\frac{u_1^2u_2}{2!}\left(\frac{d^3}{du_0^3}\right)f(u_0)+\frac{u_1^4}{4!}\left(\frac{d^4}{du_0^4}\right)f(u_0),$$

$$\vdots \qquad (5.9)$$

şeklinde verilmektedir (Adomian, 1994). Diğer polinomlar da benzer yolla oluşturulabilir. Ayrıştırılmış polinomların genel hali ise,

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\phi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n\geq 0 \qquad (5.10)$$

biçiminde formüle edilerek (Adomian, 1994; Seng ve arkadaşları, 1996) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu formül, sayısal çözümlerin hesaplanmasında ihtiyaç duyulan birçok polinomun elde edilmesi için bilgisayar kodları kurulmasını kolaylaştırır. Adomian polinomlarını elde etmek için bir alternatif metot ise (Wazwaz, 1999) tarafından geliştirilmiştir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olması istenildiği durumlarda ayrışım serisinin çok sayıda teriminin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (5.10) genel formülünün kullanılması, istenildiği kadar çok sayıda (5.6) ayrışım serisinin terimlerinin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilebilmesi için

$$\phi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x,t) \quad ; \quad n\geq 0 \qquad (5.11)$$

olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n = u(x,t) \qquad (5.12)$$

ifadesi (5.8) indirgeme bağıntısı gözönüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ek olarak (5.12) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı yakınsamaktadır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığını teorik olarak (Cherruault, 1989; Repaci, 1990; Cherruault ve Adomian, 1993; Abbaoui ve Cherruault, 1994; Abbaoui ve Cherruault, 1995) incelemişlerdir. Bu çalışmalara ilaveten yakın zamanda (Abbaoui ve arkadaşları, 2001) çalışmalarında ayrışım serisinin yakınsaklığını bulmada yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Bu yazarlar ayrışım seri metodunun yakınsaklığını yeni şartlar vererek bulmuşlardır.

5.2. HOMOTOPI ANALİZ METODU (HAM)

Bu metodun temel yapısını aşağıdaki örneği gözönüne alarak açıklayalım.

Bir serbest kürenin havada statik (durağan) durumdan düştüğünü düşünelim. $\tilde{t}$ zamanı, $U(\tilde{t})$ kürenin hızını, m kütleyi ve g yer çekiminin hızını göstersin. Hava direncinin kürede $aU^2(\tilde{t})$ olduğunu varsayalım, burada a bir sabittir. Bu durumda, Newton 'nun ikinci hareket kanunundan(net kuvvet=kütle ağırlığı-ortam kuvveti veya yay kuvveti) dolayı,

$$U(0)=0 \tag{5.13}$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$m\frac{dU(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = mg - aU^2(\tilde{t}) , \tag{5.14}$$

yazılabilir.

Fiziksel olarak ifade edilirse, serbest düşen bir kürenin hızı sabit bir U_∞ hızına ulaşıncaya kadar yerçekimine bağlı olarak artar. Böylece, $U(\tilde{t})$ çözümü detaylı olarak bilinmese bile, U_∞ hız limitini direkt olarak (5.14) den elde edebiliriz, yani,

$$U_\infty = \sqrt{\frac{mg}{a}} \tag{5.15}$$

şeklindedir.

U_∞ ve U_∞/g ifadelerini sırasıyla karakteristik hız ve zaman olarak kullanarak ve (5.16) biçiminde yazarak,

$$\tilde{t} = \left(\frac{U_\infty}{g}\right) t \ , \quad U(\tilde{t}) = U_\infty V(t), \tag{5.16}$$

ve

$$V(0) = 0 \tag{5.17}$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$\dot{V}(t) + V^2(t) = 1 \ , \quad t \geq 0, \tag{5.18}$$

boyutsuz denklemini elde ederiz. Burada t, boyutsuz zamanı ve nokta, t 'ye bağlı türevi gösterir. Açıkça, $t \to +\infty$ iken, yani, $\tilde{t} \to \infty$ ve $U(\tilde{t}) \to U_\infty$ iken, (5.18) ve (5.17) denklemlerini çözmeden (5.16) dan

$$\lim_{t \to +\infty} V(t) = 1 \tag{5.19}$$

ifadesi bulunur.

(5.18) ve (5.17) denklemlerinin tam çözümü olan

$$V(t) = \tanh(t) \tag{5.20}$$

ifadesi farklı yaklaşımların karşılaştırmaları için kullanışlıdır.

5.2.1. Homotopi Analiz Çözümü

Bu bölümde Homotopi analiz metodunun temel kavramları yukarıda bahsedilen aynı açıklayıcı problem ile verilmektedir.

5.2.1.1. Sıfırıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi

$V_0(t)$, $V(t)$' nin bir başlangıç yaklaşımını göstermek üzere (5.17) başlangıç koşulunu sağlar, yani,

$$V_0(0) = 0 \tag{5.21}$$

olur.

$q \in [0,1]$ bir parametre olsun. Homotopi analiz metodu $V(t) \to \Phi(t;q)$ sürekli eşlemesinin bir çeşidine dayanır öyle ki q parametresi, 0 'dan 1 'e yaklaştıkça, $\Phi(t;q)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$' den tam çözüm olan $V(t)$' ye yakınsar. Bunu sağlamak için, öyle bir yardımcı lineer operatör

$$L[\Phi(t;q)] = \gamma_1(t)\frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \gamma_2(t)\Phi(t;q), \tag{5.22}$$

olarak seçilebilir. Burada $\gamma_1(t) \neq 0$ ve $\gamma_2(t)$ daha sonra belirlenecek olan reel fonksiyonlardır. (5.18) denkleminden

$$N[\Phi(t;q)] = \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \Phi^2(t;q) - 1 \tag{5.23}$$

şeklindeki nonlineer operatör tanımlanır.

$\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyonu göstersin. $q \in [0,1]$ parametresini kullanarak ve

$$\Phi(0;q) = 0 \tag{5.24}$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$(1-q)L[\Phi(t;q) - V_0(t)] = \hbar q H(t) N[\Phi(t;q)], \tag{5.25}$$

şeklinde bir denklemler ailesi kurulur.

Yardımcı parametre $\hbar$, yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı lineer operatör L 'nin seçimi tamamen keyfidir. Bu keyfi seçim daha sonra gösterildiği gibi, Homotopi analiz metodunun geçerliliğinin ve esnekliğinin köşe taşını kurar ve önemli roller oynar.

$q = 0$ iken, (5.25) denklemi

$$\Phi(0;0) = 0 \tag{5.26}$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$L\left[\Phi(t;0)-V_0(t)\right]=0,\quad t\geq 0\ , \tag{5.27}$$

olur.

(5.21) ve (5.22) denklemlerine göre, (5.26) ve (5.27) denklemlerinin çözümü basitçe

$$\Phi(t;0)=V_0(t) \tag{5.28}$$

şeklindedir.

$q=1$ iken, (5.25) denklemi

$$\Phi(0;1)=0 \tag{5.29}$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$\hbar H(t)N\left[\Phi(t;1)\right]=0,\quad t\geq 0\ , \tag{5.30}$$

olur.

$\hbar\neq 0$, $H(t)\neq 0$ iken ve (5.23) tanımını kullanarak, (5.29) ve (5.30) denklemleri (5.17) ve (5.18) denklemlerinin orijinaline eşdeğerdir,

$$\Phi(t;1)=V(t) \tag{5.31}$$

sağlanır.

Böylece, (5.28) ve (5.31) denklemlerine göre $\Phi(t;q)$ çözümü, q parametresi 0'dan 1 'e yaklaştıkça $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımından $V(t)$ tam çözümüne yaklaşır. Topolojide varyasyonun bu çeşidi deformasyon olarak adlandırılır, ayrıca (5.24) ve (5.25) denklemleri $\Phi(t;q)$ homotopisini kurar. Kısaca, (5.24) ve (5.25) denklemleri **sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemleri** olarak adlandırılırlar.

$0\leq q\leq 1$ için (5.24) ve (5.25) sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemlerinin $\Phi(t;q)$ çözümünün mevcut olması için yardımcı parametre $\hbar$, yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı lineer operatör L'nin seçimlerinin tümünün uygun bir şekilde yapıldığı varsayılabilir ve q parametresi ile ilgili olarak m'inci mertebeden türevinden başka,

$$V_0^{[m]}(t)=\left.\frac{\partial^m \Phi(t;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0} \tag{5.32}$$

eşitliği mevcuttur, burada m=1,2,3,⋯ dir. Kısaca, $V_0^{[m]}(t)$, m'inci mertebeden deformasyon türevi olarak adlandırılır.

$$V_m(t)=\frac{V_0^{[m]}(t)}{m!}=\frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^m \Phi(t;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0} \tag{5.33}$$

Taylor teoremi ile, $\Phi(t;q)$ aşağıdaki şekilde q yardımcı parametresinin bir kuvvet serisine açılabilir:

$$\Phi(t;q)=\Phi(t;0)+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^m \Phi(t;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0} q^m \tag{5.34}$$

(5.28) ve (5.33) denklemlerinden, yukarıdaki kuvvet serisi

$$\Phi(t;q)=V_0(t)+\sum_{m=1}^{+\infty}V_m(t)q^m \tag{5.35}$$

şeklinde yazılır.

Yardımcı parametre $\hbar$, yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı lineer operatör L'nin öyle uygun bir şekilde seçildiğini varsayalım ki (5.35) serileri $q=1$ de yakınsasınlar. O zaman, $q=1$ de (5.35) serisi

$$\Phi(t;1)=V_0(t)+\sum_{m=1}^{+\infty}V_m(t) \tag{5.36}$$

olur. Böylece, (5.31) denklemini kullanarak,

$$V(t)=V_0(t)+\sum_{m=1}^{+\infty}V_m(t) \tag{5.37}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade şu ana kadar bilinmeyen, $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımı ve $V(t)$ tam çözümü arasındaki ilişkiyi $V_m(t)$, (m=1,2,3,…) terimleri vasıtasıyla verir.

5.2.1.2. Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi

$$\vec{V}_n = \{V_0(t), V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}.$$

Vektörünü tanımlayalım.

(5.33) tanımına göre, hakim olunan denklem ve $V_m(t)$' nin başlangıç koşulu (5.24) ve (5.25) sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemlerinden çıkarılabilir. (5.24) ve (5.25) denklemlerini q parametresine bağlı olarak m kez diferansiyelleyip, sonra $q=0$ alıp ve son olarak $m!$ ile bölerek,

$$V_m(0) = 0 \tag{5.38}$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$L\left[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)\right] = \hbar H(t) R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right), \tag{5.39}$$

***m*'inci mertebeden deformasyon denklemi** elde edilir.

Burada

$$R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} N\left[\Phi(t;q)\right]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \tag{5.40}$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \le 1, \\ 1 & m > 1. \end{cases} \tag{5.41}$$

şeklindedir.

(5.23) ve (5.41) denklemlerinden,

$$R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right) = \dot{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) - (1-\chi_m) \tag{5.42}$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki ifade ile verilen $R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right)$' in sadece

$$V_0(t), V_1(t), V_2(t), \cdots, V_{m-1}(t),$$

ifadesine bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu ifadeler (5.38) ve (5.39) m'inci mertebeden

deformasyon denklemlerinin çözümünden bulunur. Böylece, L yardımcı operatörünün (5.22) tanımına göre (5.39) denklemi, (5.38) lineer başlangıç koşuluna bağlı olan lineer bir birinci mertebeden diferansiyel denklemdir. Bundan dolayı, (5.38) ve (5.39) yüksek mertebeden deformasyon denklemlerinin $V_m(t)$ çözümü özellikle Mathematica, Maple, Matlab gibi hesaplama yazılımları yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir.

$V(t)$' nin m'inci mertebeden yaklaşımı

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{m} V_n(t) \tag{5.43}$$

ile verilir.

5.2.2. Çözüm İfadeleri

5.2.2.1. Polinom fonksiyonları ile ifade edilen çözüm

Pertürbasyon çözümü t' nin bir kuvvet serisidir. Bundan dolayı, $V(t)$' yi temsil etmek için aşağıdaki temel fonksiyonların kümesini kullanmak doğrudur

$$\left\{ t^{2m+1} \;\middle|\; m = 0,1,2,3,\cdots \right\} \tag{5.44}$$

yani $V(t)$,

$$V(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^{2m+1}, \tag{5.45}$$

formundadır, burada a_m bir katsayıdır. Bu ise açıklayıcı problemin çözüm ifadesinin ilk kuralını verir.

Çözüm ifadesinin ilk kuralı altında ve (5.21) başlangıç koşuluna göre, $V(t)$' nin başlangıç yaklaşımı olarak

$$V_0(t) = t \tag{5.46}$$

ifadesini seçmek ve yardımcı lineer operatörü,

$$L(C_1) = 0, \tag{5.47}$$

özelliği ile

$$L[\Phi(t;q)] = \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} \tag{5.48}$$

olarak seçmek doğrudur. Burada C_1 bir integral sabitidir.

(5.45) ile gösterilen çözüm ifadesinin ilk kuralı altında ve (5.39) denkleminden, $H(t)$ yardımcı fonksiyonu

$$H(t) = t^{2\kappa} \tag{5.49}$$

şeklinde seçilebilir.

(5.47) ye göre, (5.39) denkleminin çözümü

$$V_m(t) = \chi_m V_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t \tau^{2\kappa} R_m(\vec{V}_{m-1})\, d\tau + C_1 ,$$

olur, burada C_1 integral sabiti (5.38) başlangıç koşulu ile belirlenir.

Hem (5.45) ile gösterilen çözüm ifadesinin kuralının birincisine hem de ergodicity katsayısının kuralına uyması için, $\kappa = 0$ olarak belirlenmek zorundadır. Bu ise ilgili yardımcı fonksiyonu tek olarak belirler

$$H(t) = 1 \tag{5.50}$$

dir.Böylece sırasıyla

$$V_1(t) = \frac{1}{3}\hbar t^3 ,$$
$$V_2(t) = \frac{1}{3}\hbar(1+\hbar)t^3 + \frac{2}{15}\hbar^2 t^5 ,$$
$$V_3(t) = \frac{1}{3}\hbar(1+\hbar)^2 t^3 + \frac{2}{15}\hbar^2(1+\hbar)t^5 + \frac{17}{315}\hbar^3 t^7 ,$$
$$\vdots$$

elde edilir.

İlgili m'inci mertebeden yaklaşımın

$$V(t) \approx \sum_{k=0}^{m} V_k(t) = \sum_{n=0}^{m} \mu_0^{m,n}(\hbar)\left[\alpha_{2n+1} t^{2n+1}\right], \tag{5.51}$$

ile ifade edilebileceği bulunur. Burada α_{2n+1} katsayıdır ve $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonu

$$\mu_0^{m,n}(\hbar) = (-\hbar)^n \sum_{j=0}^{m-n} \binom{n-1+j}{j} (1+\hbar)^j . \tag{5.52}$$

ile tanımlanır.

Başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$, yardımcı lineer operatör L ve yardımcı fonksiyon $H(t)$ belirlenmiş olmasına rağmen, yardımcı parametre $\hbar$'nin bir uygun değerinin seçimi hala keyfidir. (5.51) denklemi $\hbar$ yardımcı parametresine bağlı olan çözüm ifadelerinin bir ailesini gösterir. Yukarıda bahsedilen $\mu_0^{m,n}(\hbar)$ fonksiyonunun

$$\mu_0^{m,n}(-1) = 1 , \quad n \le m . \tag{5.53}$$

özelliğinin mevcut olduğunu ispatlamak kolaydır.

Herhangi bir sonlu pozitif n tamsayısı için,

$$\lim_{m\to+\infty} \mu_0^{m,n}(\hbar) = \begin{cases} 1, & |1+\hbar| < 1, \\ \infty, & |1+\hbar| > 1. \end{cases} \tag{5.54}$$

şeklindedir.

Böylece, $\hbar = -1$ iken, (5.53) , (5.41) eşitlikleri ve pertürbasyon çözümünden

$$V(t) = V_{perI}(t) \tag{5.55}$$

elde edilir.

Bu sebeple, pertürbasyon çözümü $\hbar = -1$ iken Lyapunov'un suni küçük parametre metodu ve Adomian ayrışım metodu ile verilen çözüm gibi sadece (5.51) çözüm ifadesinin bir özel durumudur. (5.51) ifadesi mantıksal olarak Pertürbasyon metodu, Lyapunov'un suni küçük parametre metodu ve Adomian ayrışım metodu ile verilen çözüm ifadesini içerir, bundan dolayı da daha genel bir yaklaşımdır.

(5.51) çözüm ifadesinin katsayıları $\hbar$ yardımcı parametresine bağlıdır. (5.54) eşitliğine göre (5.51) serisinin yakınsak olması için gerekli koşul $|1+\hbar| < 1$ olmasıdır, yani,

$$-2 < \hbar < 0$$

şeklinde olmalıdır.

(5.51) çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesinin $\hbar$'nin değerine bağlı olması ilginçtir. $\hbar\ (-2<\hbar<0)$'nin değeri sıfıra yaklaştıkça (5.51) serilerinin yakınsaklık bölgesi genişler. (5.51) çözüm serilerinin

$$0 \le t < \rho_0 \sqrt{\frac{2}{|\hbar|} - 1}\ ,$$

bölgesinde yakınsadığı bulunur, burada $\rho_0 \approx 3/2$ pertürbasyon çözümünün yakınsaklık yarıçapıdır. Böylece, $\hbar\ (-2<\hbar<0)$ sıfıra yaklaştıkça (5.51) çözüm serileri

$$0 \le t < +\infty$$

tüm bölgesinde $V(t) = \tanh(t)$ tam çözümüne yakınsar.

Daha önceki tüm analitik tekniklerden farklı olarak, (5.51) çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi $\hbar$'ye uygun bir değer vererek ayarlanabilir ve kontrol edilebilir. Böylece $\hbar$ yardımcı parametresi çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesinin ayarlanması ve kontrol edilmesi için kolaylık sağlar.

5.2.2.2. Kesirli fonksiyonlar ile ifade edilen çözüm

(5.51) çözüm ifadesi temel fonksiyonlar ile gösterilmesine rağmen, (5.44) ifadesi

$$0 \le t < +\infty$$

tüm bölgesinde geçerli olabilir. $\hbar\ (-2<\hbar<0)$ sıfıra yaklaşırken yaklaşımın mertebesi, $\hbar\ (-2<\hbar<0)$'nin mutlak değeri küçük bir değer aldığında kesin ve yeterli sonuç vermek için çok yüksek olmalıdır. Teorik olarak daha iyi olmasına rağmen ve Pertürbasyon metodu, Lyapunov'un suni (yapay) küçük parametre metodu ve Adomian ayrışım metodu ile verilen çözümden daha genel olmasına rağmen yaklaşımın bu türü daha az verimlidir (yeterlidir). Bundan dolayı $V(t)$'ye daha verimli(hızlı) yaklaşmak için temel fonksiyonları daha iyi bir küme olarak seçmek gereklidir.

Daha önce bahsedildiği gibi, (5.18) ve (5.17) denklemlerini çözmeden V limit hızını bilmek kolaydır,

$$V(+\infty)=1$$

şeklindedir.

(5.46) başlangıç yaklaşımı açıkça bu özelliği sağlamaz. Genel olarak, bir kuvvet serisi sonlu bölgede yakınsar. Bundan dolayı, polinom fonksiyonların (5.44) kümesi $0 \le t < +\infty$ tüm bölgesinde $V(t)$' ye verimli bir şekilde yakınsamak için uygun değildir.

Dikkat edilmeli ki

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(1+t)^m} = 0, \quad m \ge 1 .$$

şeklindedir. Böylece, temel fonksiyonların kümesi ile ifade edilen bir fonksiyon

$$\left\{ (1+t)^{-m} \,\middle|\, m = 0,1,2,3,\cdots \right\} \tag{5.56}$$

$t \to +\infty$ iken sonlu bir değere sahiptir. $V(t)$ çözümünün

$$V(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{b_m}{(1+t)^m} , \tag{5.57}$$

ile ifade edilebileceğini varsayılabilir, burada b_m belirlenecek bir katsayıdır. Bu ise açıklayıcı problemin çözüm ifadesinin kuralının ikincisini verir.

Çözüm ifadesinin kuralının ikincisinin altında, (5.17) başlangıç koşulunu ve (5.19) limit hızını kullanıp, $V(t)$'nin başlangıç yaklaşımı olarak

$$V_0(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \tag{5.58}$$

ifadesini ve ilgili yardımcı lineer operatör olarak da

$$L\left[\Phi(t;q)\right] = (1+t)\frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \Phi(t;q) \tag{5.59}$$

ifadesini

$$L\left(\frac{C_2}{1+t}\right)=0\,, \tag{5.60}$$

özelliği ile seçmek doğrudur. Burada C_2 integral sabitidir. L'nin (5.59) tanımına göre, (5.39) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümü

$$V_m(t)=\chi_m V_{m-1}(t)+\frac{\hbar}{1+t}\int_0^t H(\tau)\ R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right)d\tau+\frac{C_2}{1+t},\quad m\geq 1,$$

şeklinde olur. Buradaki C_2 integral sabiti (5.38) başlangıç koşulu ile belirlenir. (5.57) ile gösterilen çözüm ifadesinin kuralının ikincisine göre ve (5.39) denkleminden yardımcı fonksiyon $H(t)$,

$$H(t)=\frac{1}{(1+t)^{\kappa}}\,, \tag{5.61}$$

şeklinde olmalıdır, burada κ bir tamsayıdır. $\kappa\leq 0$ iken (5.39) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümünün

$$\frac{\ln(1+t)}{1+t}$$

terimini içerdiği bulunur, bu ise (5.57) ile gösterilen çözüm ifadesinin kuralının ikincisine uymaz. $\kappa>1$ iken, $(1+t)^{-2}$ tabanı $V_m(t)$'nin çözüm ifadesinde yok olur şöyle ki $(1+t)^{-2}$ teriminin katsayısı daima sıfırdır ve böylece yaklaşımın mertebesi sonsuza yaklaşsa bile değiştirilemez(azaltılamaz). Bu ifade ise buna rağmen, ergodicity katsayısının kuralına uymaz. Böylece, çözüm ifadesinin kuralının ikincisine ve ergodicity katsayısının kuralının her ikisine de uyması için, $\kappa=1$ olarak seçilmek durumundadır. Böylece ilgili yardımcı fonksiyon aşağıdaki şekilde tek olarak belirlenir,

$$H(t)=\frac{1}{1+t}\,. \tag{5.62}$$

Bundan sonra başarılı bir şekilde

$$V_1(t) = -\frac{\hbar}{1+t} + \frac{2\hbar}{(1+t)^2} - \frac{\hbar}{(1+t)^3},$$

$$V_2(t) = -\hbar\left(1+\frac{7}{12}\hbar\right)\frac{1}{1+t} + \frac{2\hbar(1+\hbar)}{(1+t)^2}$$

$$-\hbar\left(1+\frac{7}{2}\hbar\right)\frac{1}{(1+t)^3} + \frac{10\hbar^2}{3(1+t)^4} - \frac{5\hbar^2}{4(1+t)^5},$$

$$\vdots$$

ifadeleri elde edilir.

$V(t)$' nin ilgili m'inci mertebeden yaklaşımının

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{2m+1} \frac{\beta_{m,n}(\hbar)}{(1+t)^n}, \tag{5.63}$$

ile ifade edilebileceği bulunur, burada $\beta_{m,n}(\hbar)$, $\hbar$'ye bağlı bir katsayıdır. Ayrıca

$$-3/2 \le \hbar \le -1/2$$

şeklindedir.

5.2.2.3. Üstel fonksiyonlar ile ifade edilen çözüm

İyi bilinir ki

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(-nt) = 0, \qquad n \ge 1$$

biçimindedir. Böylece, temel fonksiyonların kümesi ile ifade edilen

$$\left\{\exp(-nt) \,\middle|\, n \ge 0\right\} \tag{5.64}$$

fonksiyonu t sonsuza yaklaştıkça sonlu değere sahip olur. (5.19) limit hızı dikkate alınarak, yukarıdaki temel fonksiyonlar (5.44) den daha iyidir. $V(t)$' nin

$$V(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \exp(-nt), \tag{5.65}$$

ile ifade edilebileceğini varsayalım, burada c_n bir katsayıdır. Bu ise açıklayıcı problemin çözüm ifadesinin kuralının üçüncüsünü verir.

Çözüm ifadesinin kuralının üçüncüsüne göre, (5.17) ve (5.19) den, $V(t)$' nin başlangıç yaklaşımı olarak

$$V_0(t) = 1 - \exp(-t) \tag{5.66}$$

ifadesini ve

$$L\left[C_3 \exp(-t)\right] = 0\,, \tag{5.67}$$

özelliği ile yardımcı lineer operatörü

$$L\left[\Phi(t;q)\right] = \frac{\partial \Phi(t;q)}{\partial t} + \Phi(t;q) \tag{5.68}$$

olarak seçmek doğrudur, burada C_3 bir integral katsayısıdır. Bu yolla, (5.39) m'inci mertebeden deformasyon denkleminin çözümü

$$V_m(t) = \chi_m\, V_{m-1}(t) + \hbar \exp(-t) \int_0^t \exp(\tau)\, H(\tau)\, R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right) d\tau + C_3 \exp(-t), \quad m \geq 1,$$

şeklinde olur, burada C_3 integral sabiti (5.38) başlangıç koşulu ile belirlenir. (5.65) ile gösterilen çözüm ifadesinin kuralının üçüncüsüne göre ve (5.39) denkleminden, $H(t)$ yardımcı fonksiyonu

$$H(t) = \exp(-\kappa t), \tag{5.69}$$

şeklinde olmalıdır, burada κ bir tamsayıdır. $\kappa \leq 0$ iken, (5.39) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin çözümünün

$$t \exp(-t)\,,$$

terimini içerdiği bulunur, bu ise (5.65) ile gösterilen çözüm ifadesinin kuralının üçüncüsüne uymaz. $\kappa \geq 2$ iken, $\exp(-2t)$ tabanı (5.39) yüksek mertebeden deformasyon denkleminin ifadesinin çözümünde daima yok olur şöyle ki $\exp(-2t)$ teriminin katsayısı yaklaşımın mertebesi sonsuz olsa bile değiştirilemez(azaltılamaz). Bu ise buna rağmen, ergodicity katsayısının kuralına uymaz. Böylece, (5.65) ile gösterilen çözüm ifadesinin kuralının

üçüncüsüne ve ergodicity katsayısının kuralına uyması için $\kappa = 1$ alınmalıdır. Böylece ilgili yardımcı fonksiyon aşağıdaki şekilde tek olarak belirlenir,

$$H(t) = \exp(-t). \tag{5.70}$$

Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} V_1(t) &= -\frac{\hbar}{2}e^{-t} + \hbar e^{-2t} - \frac{\hbar}{2}e^{-3t}, \\ V_2(t) &= -\frac{\hbar}{2}\left(1+\frac{\hbar}{2}\right)e^{-t} + \hbar\left(1+\frac{\hbar}{2}\right)e^{-2t} - \frac{\hbar}{2}(1+\hbar)e^{-3t} \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2}e^{-4t} - \frac{\hbar^2}{4}e^{-5t}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir.

$V(t)$' nin ilgili m'inci mertebeden yaklaşımının genel olarak

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^{2m+1} \gamma_{m,n}(\hbar)\exp(-nt), \tag{5.71}$$

ile ifade edilebileceği bulunur. Burada $\gamma_{m,n}(\hbar)$, $\hbar$' ye bağlı bir katsayıdır. Ayrıca

$$-2 < \hbar < 0 \quad , \quad H(t) = 1$$

şeklindedir.

5.2.3. Yakınsaklık Teoremi

Teorem 5.1. $V_m(t)$ ifadesinin (5.41) ve (5.42) tanımları ile, (5.37) serisi yakınsak olduğu sürece (5.38) ve (5.39) yüksek mertebeden deformasyon denklemleri ile ifade edilir. Ayrıca $V_m(t)$, (5.17) ve (5.18) denklemlerinin tam çözümü olmalıdır.

İspat: Eğer

$$\sum_{m=0}^{+\infty} V_m(t)$$

serisi yakınsaksa,

$$S(t)=\sum_{m=0}^{+\infty} V_m(t)$$

yazılabilir ve

$$\lim_{m\to+\infty} V_m(t)=0 \tag{5.72}$$

olur. χ_m 'in (5.41) ile verilen tanımı kullanılarak,

$$\sum_{m=1}^{n}\left[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)\right]=V_n(t)$$

elde edilir. Burada (5.72) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)\right]=\lim_{n\to+\infty} V_n(t)=0$$

yazılır. Yukarıdaki ifadeyi ve L 'nin (5.22) ile verilen tanımını kullanarak,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} L\left[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)\right]=L\sum_{m=1}^{+\infty}\left[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)\right]=0$$

elde edilir. Bu son eşitlik ve (5.39) denkleminden,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} L\left[V_m(t)-\chi_m V_{m-1}(t)\right]=\hbar H(t)\sum_{m=1}^{+\infty} R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right)=0$$

eşitliği elde edilir. $\hbar\neq 0$ ve $H(t)\neq 0$ olması halinde

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right)=0 \tag{5.73}$$

ifadesini verir. (5.42) 'den,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m\left(\vec{V}_{m-1}\right)=\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\dot{V}_{m-1}(t)+\sum_{j=0}^{m-1} V_j(t)V_{m-1-j}(t)-(1-\chi_m)\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\dot{V}_m(t)-1+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{m-1} V_j(t)V_{m-1-j}(t)$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\dot{V}_m(t)-1+\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{m=j+1}^{+\infty} V_j(t)V_{m-1-j}(t)$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\dot{V}_m(t)-1+\sum_{j=0}^{+\infty} V_j(t)\sum_{i=0}^{+\infty}\dot{V}_i(t)$$

$$=\dot{S}(t)+S^2(t)-1 \qquad (5.74)$$

bulunur. (5.73) ve (5.74) denklemlerinden,

$$\dot{S}(t)+S^2(t)-1=0, \quad t\geq 0$$

eşitliği elde edilir. (5.21) ve (5.38) denklemlerinden,

$$S(0)=\sum_{m=0}^{+\infty} V_m(0)=V_0(0)+\sum_{m=1}^{+\infty} V_m(0)=V_0(0)=0$$

bulunur. Bundan dolayı, yukarıdaki iki ifadeye göre $S(t)$, (5.17) ve (5.18) denklemlerinin tam çözümü olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca yukarıdaki teoremin oldukça genel bir formda (5.22) ile tanımlanan L yardımcı lineer operatörü için geçerli olduğu not edilmelidir, burada $\gamma_1(t)\neq 0$ ve $\gamma_2(t)$ farklı fonksiyonlar olabilirler. Bu yakınsaklık teoremi önemlidir. Bu teoremden dolayı yaklaşım serilerinin yakınsaklığı sağladığı ifade edilebilir. (5.37) serisinin yakınsaklığının yardımcı parametre $\hbar$, yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı lineer operatör L 'ye bağlı olduğu açıktır. Homotopi analiz metodunun olumlu tarafı bunların tamamının seçiminde kolaylık sağlamasıdır. Böylece, $\hbar$, $H(t)$, $V_0(t)$ ve L değerleri uygun seçildiği sürece (5.37) serisi $0\leq t\leq t_0$ bölgesinde yakınsak olur. (5.37) serisi bu bölgede tam çözüme yakınsamalıdır. Bundan dolayı, yakınsaklık teoreminin ve yardımcı parametre $\hbar$, yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı

lineer operatör L 'nin seçimindeki rahatlığın birleşimi homotopi analiz metodunun geçerliliğinin ve esnekliğinin köşetaşını kurar.

5.3. HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODU (HPM)

Bu metodun temel kavramlarını tanımlamak amacıyla lineer olmayan diferansiyel denklemi:

$$A(u)-f(r)=0, \quad r\in\Omega, \tag{5.75}$$
$$B(u,\partial u/\partial n)=0, \quad r\in\Gamma, \tag{5.76}$$

sınır koşulları ile ele alalım. Burada A; bir genel diferansiyel operatörü, B; sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyondur ve Γ, Ω tanım bölgesinin sınırıdır.

Genelde, A operatörü L ve N olarak iki bölüme ayrılabilir, burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatördür. Bu nedenle (5.75) denklemi aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$L(u)+N(u)-f(r)=0. \tag{5.77}$$

Homotopi tekniği kullanılarak,

$$H(V,p)=(1-p)\left[L(V)-L(u_0)\right]+p\left[A(V)-f(r)\right]=0, \quad p\in[0,1], \ r\in\Omega, \tag{5.78}$$

veya

$$H(V,p)=L(V)-L(u_0)+pL(u_0)+p\left[N(V)-f(r)\right]=0, \tag{5.79}$$

şartlarını sağlayan bir $V(r,p):\Omega\times[0,1]\to R$ homotopisi kurulur. Burada $p\in[0,1]$ yerleştirilen parametre, u_0 sınır şartlarını sağlayan (5.75) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır. Açıkça, (5.78) ve (5.79) denklemlerinden:

$$H(V,0)=L(V)-L(u_0)=0, \tag{5.80}$$
$$H(V,1)=A(V)-f(r)=0, \tag{5.81}$$

şeklindedir. Sıfırdan p'nin değişim süreci sadece $V(r,p)$ için, $u_0(r)$'den $u(r)$'ye kadardır. Topolojide, bu deformasyon olarak, $L(V)-L(u_0)$ ve $A(V)-f(r)$ homotopi olarak adlandırılırlar.

Homotopi pertürbasyon metoduna göre ilk olarak yerleştirilen p parametresi, "küçük parametre" olarak kullanılabilir. (5.78) ve (5.79) denklemlerinin çözümünün p'nin kuvvet serisi olarak yazılabildiğini varsayalım:

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + \cdots. \tag{5.82}$$

(5.75) denkleminin yaklaşık çözümünde $p = 1$ alınması sonucunda:

$$u = \lim_{p \to 1} V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \tag{5.83}$$

elde edilir.

Pertürbasyon metodunun ve homotopi metodunun birleşimi Homotopi pertürbasyon metodu (HPM) olarak adlandırılır ki bu metot genel pertürbasyon metotlarının sınırlamalarını ortadan kaldırır. Diğer taraftan, bu yöntem genel pertürbasyon yöntemlerinin tüm avantajlarına sahiptir. (5.83) serisi pek çok durum için yakınsaktır. Bununla beraber, yakınsaklık oranı $A(V)$ nonlineer operatörüne bağlıdır (aşağıdaki düşünceler (J.H. He, 2006) tarafından önerilmektedir):

(1) $N(V)$'nin V'ye göre ikinci mertebeden türevi küçük olmalıdır çünkü parametre oldukça büyük olabilir, yani, $p \to 1$ olabilir.

(2) Serinin yakınsaması için $L^{-1}(\partial N / \partial V)$ nin normu birden daha küçük olmalıdır.

6. NÜMERİK METOTLARIN DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNE UYGULANMASI

6.1. HOMOTOPI ANALİZ METODU (HAM) ve HOMOTOPI PERTÜRBASYON (HPM) METODU' NUN DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNE UYGULANMASI

Bu kısımda, dördüncü bölümde detaylı olarak verilen Dirac denklemler sisteminin nümerik çözümlerini elde etmek amacıyla yarı analitik metotlar olan HAM ve HPM kullanılacaktır. Bu denklemler sisteminin daha önce ADM kullanılarak nümerik çözümleri [91]' de incelenmiştir.

(4.4) ile verilen kanonik denklem sisteminde $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonlar, λ problemin özdeğeri olmak üzere (4.4) matris denklemine karşılık gelen denklemler sistemini,

$$\varphi_2' + \{p(x) - \lambda\}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1' + \{\lambda - r(x)\}\varphi_2 = 0, \tag{6.1}$$

ve

$$\varphi_2(0,\lambda)\cos\alpha + \varphi_1(0,\lambda)\sin\alpha = 0, \tag{6.2}$$

$$\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta + \varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta = 0. \tag{6.3}$$

sınır koşullarını gözönüne alalım. $\varphi(x,\lambda)$ ile (6.1) denklemler sisteminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \cos\alpha, \ \varphi_2(0,\lambda) = -\sin\alpha$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü gösterelim. Bu çözümün (6.2) sınır koşulunu sağladığı açıktır. (6.1)-(6.2) problemini $p(x) = r(x) = 0$ olması halinde gözönüne alalım. Bu durumda çözüm fonksiyonlarının görüntüleri,

$$\varphi_1(x,\lambda) = \cos(\lambda x - \alpha), \ \varphi_2(x,\lambda) = \sin(\lambda x - \alpha)$$

şeklindedir. HAM ve HPM' nu uygulamak amacıyla öncelikle (6.1) denklemler sistemini

$$\tilde{\varphi}_2' + \{p(x) - \lambda\}\varphi_1 = 0, \quad \tilde{\varphi}_1' + \{\lambda - r(x)\}\varphi_2 = 0, \tag{6.4}$$

biçiminde yazalım. Bu taktirde başlangıç koşulları

$$\tilde{\varphi}_1(0,\lambda) = \cos\alpha, \ \tilde{\varphi}_2(0,\lambda) = -\sin\alpha \tag{6.5}$$

şeklinde olur.

6.1.1. HAM' nun Uygulanmasına ilişkin örnek

(6.4), (6.5) ile verilen Dirac denklemler sistemine HAM' nu uygulayabilmek amacıyla, $\hbar \neq 0$ ve $H(x,t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere, (5.39) eşitliğindeki $n.$ mertebeden deformasyon denkleminden hareketle,

$$\begin{aligned} L\left[u_{1_n}(x,t) - \chi_n u_{1_{n-1}}(x,t)\right] &= \hbar H(x,t) R_{1_n}\left[\vec{u}_{1_{n-1}}(x,t)\right], \; n \geq 1, \\ L\left[u_{2_n}(x,t) - \chi_n u_{2_{n-1}}(x,t)\right] &= \hbar H(x,t) R_{2_n}\left[\vec{u}_{2_{n-1}}(x,t)\right], \; n \geq 1, \end{aligned} \tag{6.6}$$

eşitlikleri yazılır. Bu denklemlerde $H(x,t)$ yardımcı fonksiyonu; $H(x,t) = 1$ olarak ele alınacaktır. Bu taktirde (6.6) denklemlerinin başlangıç şartları,

$$u_{1_n}(0,\lambda) = \cos\alpha, \; u_{2_n}(0,\lambda) = -\sin\alpha \tag{6.7}$$

biçiminde olur. Burada $R_{1_n}\left[\vec{u}_{1_{n-1}}(x,t)\right]$ ve $R_{2_n}\left[\vec{u}_{2_{n-1}}(x,t)\right]$ terimleri,

$$\begin{aligned} R_{1_n}\left[u_{1_{n-1}}(x,t)\right] &= \frac{du_{1_{n-1}}(x,t)}{dx} + \lambda u_{2_{n-1}}(x,t) \\ R_{2_n}\left[u_{2_{n-1}}(x,t)\right] &= \frac{du_{2_{n-1}}(x,t)}{dx} - \lambda u_{1_{n-1}}(x,t) \end{aligned} \tag{6.8}$$

ve

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1, \\ 1, & n > 1. \end{cases} \tag{6.9}$$

şeklindedir. (6.7), (6.8) ve (6.9) eşitlikleri göz önüne alınarak (6.6) denklemi $n = 1,2,3,\ldots$ değerleri için yazılırsa Dirac denklemler sisteminin sırasıyla $\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)$ ve $\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)$ ile gösterilen çözüm fonksiyonlarının elemanları olan terimler,

$$\begin{aligned} u_{1_0}(x,\lambda) &= \cos\alpha, \\ u_{1_1}(x,\lambda) &= -\hbar\lambda x \sin\alpha, \\ u_{1_2}(x,\lambda) &= -\left(\hbar + \hbar^2\right)\lambda x \sin\alpha + \hbar\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\cos\alpha, \end{aligned}$$

$$u_{1_3}(x,\lambda) = -\left(\hbar + 2\hbar^2 + \hbar^3\right)\lambda x \sin\alpha + \left(\hbar - \hbar^3\right)\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\cos\alpha +$$

$$+ \hbar^3\lambda^3 \frac{x^3}{3!}\sin\alpha,$$

$$u_{1_4}(x,\lambda) = -\left(\hbar + 3\hbar^2 + 3\hbar^3 + \hbar^4\right)\lambda x \sin\alpha +$$

$$+ \left(\hbar - 3\hbar^3 - 2\hbar^4\right)\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\cos\alpha + \left(3\hbar^3 + 3\hbar^4\right)\lambda^3 \frac{x^3}{3!}\sin\alpha -$$

$$- \hbar^3\lambda^4 \frac{x^4}{4!}\cos\alpha,$$

$$u_{1_5}(x,\lambda) = -\left(\hbar + 4\hbar^2 + 6\hbar^3 + 4\hbar^4 + \hbar^5\right)\lambda x \sin\alpha +$$

$$+ \left(\hbar - 6\hbar^3 - 8\hbar^4 - 3\hbar^5\right)\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\cos\alpha +$$

$$+ \left(6\hbar^3 + 12\hbar^4 + 6\hbar^5\right)\lambda^3 \frac{x^3}{3!}\sin\alpha -$$

$$- \left(3\hbar^3 + 2\hbar^4 - \hbar^5\right)\lambda^4 \frac{x^4}{4!}\cos\alpha - \hbar^5\lambda^5 \frac{x^5}{5!}\sin\alpha,$$

$$\vdots$$

ve

$$u_{2_0}(x,\lambda) = -\sin\alpha\,,$$

$$u_{2_1}(x,\lambda) = -\hbar\lambda x \cos\alpha\,,$$

$$u_{2_2}(x,\lambda) = -\left(\hbar + \hbar^2\right)\lambda x \cos\alpha + \hbar^2\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\sin\alpha\,,$$

$$u_{2_3}(x,\lambda) = -\left(\hbar + 2\hbar^2 + \hbar^3\right)\lambda x \cos\alpha - \hbar^2\lambda^3 \frac{x^3}{3!}\cos\alpha +$$

$$+ \left(2\hbar^2 + 2\hbar^3\right)\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\sin\alpha,$$

$$u_{2_4}(x,\lambda) = -\left(\hbar + 3\hbar^2 + 3\hbar^3 + \hbar^4\right)\lambda x \cos\alpha -$$

$$- \left(2\hbar^2 + \hbar^3 - \hbar^4\right)\lambda^3 \frac{x^3}{3!}\cos\alpha +$$

$$+ \left(3\hbar^2 + 6\hbar^3 + 3\hbar^4\right)\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\sin\alpha - \hbar^4\lambda^4 \frac{x^4}{4!}\sin\alpha,$$

$$u_{2_5}(x,\lambda) = -\left(\hbar + 4\hbar^2 + 6\hbar^3 + 4\hbar^4 + \hbar^5\right)\lambda x\cos\alpha -$$
$$-\left(3\hbar^2 + 3\hbar^3 - 3\hbar^4 - 3\hbar^5\right)\lambda^3\frac{x^3}{3!}\cos\alpha +$$
$$+\left(4\hbar^2 + 12\hbar^3 + 12\hbar^4 + 4\hbar^5\right)\lambda^2\frac{x^2}{2!}\sin\alpha -$$
$$-\left(4\hbar^4 + 4\hbar^5\right)\lambda^4\frac{x^4}{4!}\sin\alpha + \hbar^4\lambda^5\frac{x^5}{5!}\cos\alpha,$$
$$\vdots$$

olarak elde edilir. Böylece bu süreç devam ettirilerek bir sonraki terimleri de hesaplanabilir. Elde edilen bu terimlerden

$$u_1(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1_n}(x,\lambda), \quad u_2(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2_n}(x,\lambda) \tag{6.10}$$

serilerini oluşturarak, (6.4) Dirac denklemler sisteminin (6.5) başlangıç koşullarını sağlayan yaklaşık çözümleri elde edilir. Analizde bilinen yakınsaklık testlerinden faydalanarak elde edilen bu serilerin kolayca yakınsak olduklarını göstermek mümkündür.

6.1.2. HPM' nun Uygulanmasına ilişkin örnek

(6.4), (6.5) ile verilen Dirac denklemler sistemine HPM' nu uygulayabilmek amacıyla (5.78) eşitliği yardımı ile (6.4) denklemler sistemi için,

$$\begin{aligned}(1-p)\left[\frac{dY_1}{dx} - \frac{du_{1_0}}{dx}\right] + p\left[\frac{dY_1}{dx} + \lambda Y_2\right] = 0\\ (1-p)\left[\frac{dY_2}{dx} - \frac{du_{2_0}}{dx}\right] + p\left[\frac{dY_2}{dx} - \lambda Y_1\right] = 0\end{aligned} \tag{6.11}$$

homotopilerini kuralım. Bu denklemler için

$$\begin{aligned}Y_1 &= Y_{1_0} + pY_{1_1} + p^2Y_{1_2} + p^3Y_{1_3} + p^4Y_{1_4} + p^5Y_{1_5} + \ldots\\ Y_2 &= Y_{2_0} + pY_{2_1} + p^2Y_{2_2} + p^3Y_{2_3} + p^4Y_{2_4} + p^5Y_{2_5} + \ldots\end{aligned} \tag{6.12}$$

biçimindeki çözümleri aradığımızı kabul edelim. Bu çözümlerde (6.11) eşitliklerindeki gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{dY_{1_0}}{dx}+p\frac{dY_{1_1}}{dx}+p^2\frac{dY_{1_2}}{dx}+p^3\frac{dY_{1_3}}{dx}+p^4\frac{dY_{1_4}}{dx}+p^5\frac{dY_{1_5}}{dx}-\frac{du_{1_0}}{dx}+$$
$$+p\frac{du_{1_0}}{dx}+p\lambda Y_{2_0}+p^2\lambda Y_{2_1}+p^3\lambda Y_{2_2}+p^4\lambda Y_{2_3}+p^5\lambda Y_{2_4}+p^6\lambda Y_{2_5}=0$$

ve

$$\frac{dY_{2_0}}{dx}+p\frac{dY_{2_1}}{dx}+p^2\frac{dY_{2_2}}{dx}+p^3\frac{dY_{2_3}}{dx}+p^4\frac{dY_{2_4}}{dx}+p^5\frac{dY_{2_5}}{dx}-\frac{du_{2_0}}{dx}+$$
$$+p\frac{du_{2_0}}{dx}-p\lambda Y_{1_0}-p^2\lambda Y_{1_1}-p^3\lambda Y_{1_2}-p^4\lambda Y_{1_3}-p^5\lambda Y_{1_4}-p^6\lambda Y_{1_5}=0$$

olacak şekilde cebirsel denklemler sistemleri elde edilir. Sırasıyla, bu cebirsel denklemler sisteminlerinde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki biçimde ayrışımlar yapılabilir:

$$p^0:\frac{dY_{1_0}}{dx}-\frac{du_{1_0}}{dx}=0 \tag{6.13}$$

$$p^1:\frac{dY_{1_1}}{dx}+\frac{du_{1_0}}{dx}+\lambda Y_{2_0}=0 \tag{6.14}$$

$$p^2:\frac{dY_{1_2}}{dx}+\lambda Y_{2_1}=0 \tag{6.15}$$

$$p^3:\frac{dY_{1_3}}{dx}+\lambda Y_{2_2}=0 \tag{6.16}$$

$$p^4:\frac{dY_{1_4}}{dx}+\lambda Y_{2_3}=0 \tag{6.18}$$

$$p^5:\frac{dY_{1_5}}{dx}+\lambda Y_{2_4}=0 \tag{6.19}$$

$$\vdots$$

ve

$$p^0:\frac{dY_{2_0}}{dx}-\frac{du_{2_0}}{dx}=0 \tag{6.20}$$

$$p^1:\frac{dY_{2_1}}{dx}+\frac{du_{2_0}}{dx}-\lambda Y_{1_0}=0 \tag{6.21}$$

$$p^2:\frac{dY_{2_2}}{dx}-\lambda Y_{1_1}=0 \tag{6.22}$$

$$p^3 : \frac{dY_{2_3}}{dx} - \lambda Y_{1_2} = 0 \tag{6.23}$$

$$p^4 : \frac{dY_{2_4}}{dx} - \lambda Y_{1_3} = 0 \tag{6.24}$$

$$p^5 : \frac{dY_{2_5}}{dx} - \lambda Y_{1_4} = 0 \tag{6.25}$$

$\vdots$

(6.13)-(6.19) eşitlikleri $u_{1_0}(x,\lambda) = \cos\alpha$ başlangıç şartı ve (6.20)-(6.25) eşitlikleri $u_{2_0}(x,\lambda) = -\sin\alpha$ başlangıç şartı ile çözüldüğünde $Y_{1_0}, Y_{1_1}, Y_{1_2}, Y_{1_3}, Y_{1_4}, Y_{1_5}, \ldots$ ve $Y_{2_0}, Y_{2_1}, Y_{2_2}, Y_{2_3}, Y_{2_4}, Y_{2_5}, \ldots$ terimleri sırasıyla,

$$Y_{1_0} = \cos\alpha,$$
$$Y_{1_1} = \lambda x \sin\alpha,$$
$$Y_{1_2} = -\lambda^2 \frac{x^2}{2!}\cos\alpha,$$
$$Y_{1_3} = -\lambda^3 \frac{x^3}{3!}\sin\alpha,$$
$$Y_{1_4} = \lambda^4 \frac{x^4}{4!}\cos\alpha,$$
$$Y_{1_5} = \lambda^5 \frac{x^5}{5!}\sin\alpha,$$
$\vdots$

ve

$$Y_{2_0} = -\sin\alpha,$$
$$Y_{2_1} = \lambda x \cos\alpha,$$
$$Y_{2_2} = \lambda^2 \frac{x^2}{2!}\sin\alpha,$$
$$Y_{2_3} = -\lambda^3 \frac{x^3}{3!}\cos\alpha,$$
$$Y_{2_4} = -\lambda^4 \frac{x^4}{4!}\sin\alpha,$$
$$Y_{2_5} = \lambda^5 \frac{x^5}{5!}\cos\alpha,$$
$\vdots$

şeklinde elde edilirler. Böylece (5.83) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_{1_0}, Y_{1_1}, Y_{1_2}, Y_{1_3}, Y_{1_4}, Y_{1_5}, \ldots$ ve $Y_{2_0}, Y_{2_1}, Y_{2_2}, Y_{2_3}, Y_{2_4}, Y_{2_5}, \ldots$ terimleri sırasıyla kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x,\lambda) &= \lim_{p\to 1} Y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{1_n} \\ \tilde{\varphi}_2(x,\lambda) &= \lim_{p\to 1} Y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2_n} \end{aligned} \tag{6.26}$$

olacak şekilde (6.4), (6.5) Dirac denklemler sisteminin bir yaklaşık çözümü elde edilir. Benzer şekilde burada da bu serilerin yakınsaklığı söz konusudur.

6.2. HAM ve HPM ÇÖZÜMLERİNİN YAKINSAKLIĞININ İNCELENMESİ

Bu kısımda, Oran testini kullanarak yukarıda elde ettiğimiz yaklaşık çözümlerin yakınsaklığını inceleyeceğiz. Yapılan hesaplamalar HAM ve HPM ile elde edilen sonuçların x' in tüm bölgesinde yakınsak olduğunu göstermektedir.

Teorem 6.2.1. Eğer HAM ve HPM ile elde edilen seriler

$$\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{1_n}(x,\lambda), \quad \tilde{\varphi}_2(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{2_n}(x,\lambda)$$

şeklinde ise,

1) $0 \le x \le \pi$ aralığında $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{1_n}(x,\lambda)$ serisi yakınsaktır.

2) $0 \le x \le \pi$ aralığında $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{2_n}(x,\lambda)$ serisi yakınsaktır.

İspat: 1) $\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{1_n}(x,\lambda)$ serisi,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{1_n}(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\lambda x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\sin\alpha + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(\lambda x)^{2n}}{(2n)!}\cos\alpha \end{aligned} \tag{6.27}$$

şeklinde yazılabilir. Öncelikle $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\lambda x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ serisini gözönüne alalım. Buradan,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n}(\lambda x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}(\lambda x)^{2n-1}}\right| = \left|\frac{\lambda^2 x^2}{(2n+1)(2n)}\right| \tag{6.28}$$

$n\to\infty$ için yukarıdaki ifade sıfıra yaklaşır, seri x' in her değeri için Ratio testine göre yakınsaktır. Böylece, bu serinin yakınsaklık aralığı tüm $(-\infty,\infty)$ reel eksenidir.

Benzer şekilde Oran testini $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(\lambda x)^{2n}}{(2n)!}$ serisine uygularsak,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(\lambda x)^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^{n}(\lambda x)^{2n}}\right| = \left|\frac{\lambda^2 x^2}{(2n+1)(2n+2)}\right| \tag{6.29}$$

elde ederiz. $n\to\infty$ için yukarıdaki ifade sıfıra yaklaşır, seri x'in her değeri için yakınsaktır. Böylece, bu serinin yakınsaklık aralığı tüm $(-\infty,\infty)$ reel eksenidir.

(6.28) ve (6.29) eşitliklerinde elde edilen sonuçlardan, HAM ve HPM' nin $\varphi_1(x,\lambda)$ exact çözümüne $0\le x\le\pi$ aralığında yakınsak olduğu görülür.

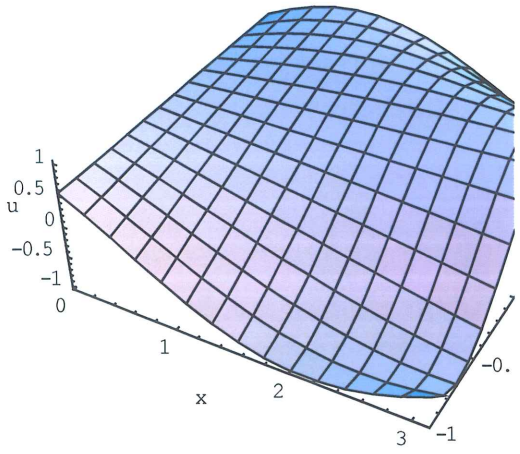
2) $\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\varphi}_{2_n}(x,\lambda)$ serisi için de ispat benzer şekilde yapılabilir.

6.3. DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

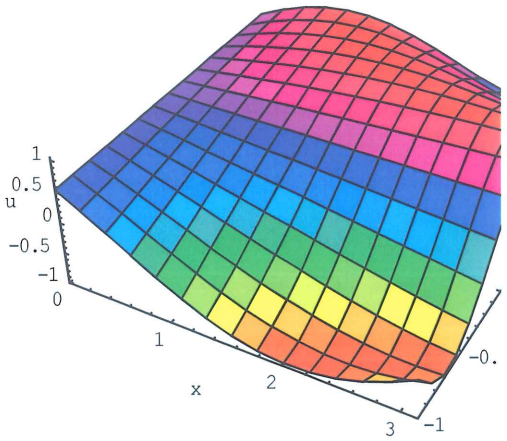
Bu kısımda, Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha)$ eşitlikleri ile tanımlanan analitik çözümleri için HAM ve HPM kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlarının üç boyutlu görünümleri verilmiştir. Ayrıca bu nümerik sonuçların analitik çözümler ile arasındaki mutlak hata verileri grafikler ve tablolarla verilerek nümerik irdelemeleri yapılmıştır. Daha sonra HAM' da kullanılan ve elde edilen yaklaşık çözümün yakınsaklık aralığını belirlemede önemli bir rol oynayan $\hbar$ yardımcı parametresinin grafiği çizilerek Dirac denklemler sisteminin yaklaşık çözümleri için yakınsaklık aralığı belirlenmiştir. Belirlenen bu yakınsaklık aralığı içerisinde bulunan keyfi noktalarda $\hbar$ yardımcı parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın $\hbar$' ın hangi değerinde olduğu tablolarda gösterilmiştir.

İncelenen denklemler sisteminin analitik çözümleri sırasıyla $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ olmak üzere HAM ve HPM kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm serileri $\phi_n(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_{1_n}(x,\lambda)$, $\psi_n(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_{2_n}(x,\lambda)$, $n\geq 1$ şeklinde ifade edilebilir.

a)



b)



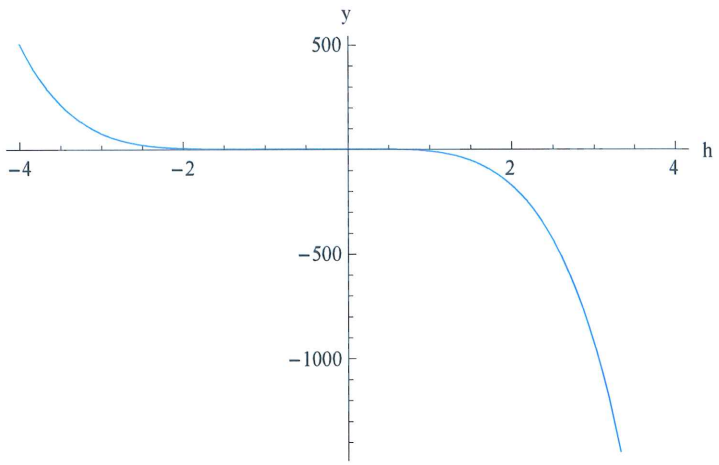
Şekil 6.1. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ analitik çözümünün ve yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü **a)** Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ analitik çözümünün üç boyutlu görünümü, **b)** Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonu için HAM($\hbar=-1$) ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü ($\alpha=1$)

Tablo 6.1. HAM($\hbar=-1$) ve HPM kullanılarak Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ için mutlak hatası ($\alpha=1$)

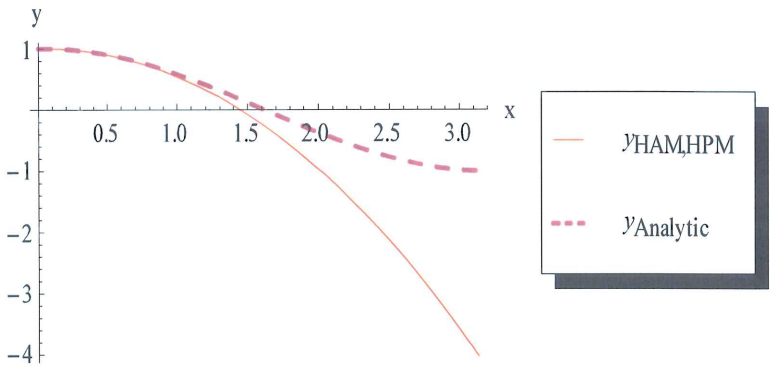
$\varphi_1(x,\lambda)-\phi_5(x,\lambda)$					
λ_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	8.88178×10^{-16}	4.82947×10^{-14}	5.50671×10^{-13}	3.10096×10^{-12}	1.18552×10^{-11}
0.2	4.82947×10^{-14}	3.10096×10^{-12}	3.54767×10^{-11}	2.00197×10^{-10}	7.6698×10^{-10}
0.3	5.50671×10^{-13}	3.54767×10^{-11}	4.06731×10^{-10}	2.29998×10^{-9}	8.82949×10^{-9}
0.4	3.10096×10^{-12}	2.00197×10^{-10}	2.29998×10^{-9}	1.30322×10^{-8}	5.01285×10^{-8}
0.5	1.18552×10^{-11}	7.6698×10^{-10}	8.82949×10^{-9}	5.01285×10^{-8}	1.93185×10^{-7}

Tablo 6.2. $\hbar$ yardımcı parametresinin farklı değerleri için Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonunun mutlak hatası ($\alpha = 1, x = 0.5$)

λ	$h=-1.4$	$h=-1.2$	$h=-1$	$h=-0.8$	$h=-0.6$
0.1	7.88727×10^{-4}	1.52635×10^{-4}	1.18552×10^{-11}	1.42784×10^{-4}	6.29787×10^{-4}
0.2	2.21219×10^{-3}	5.75056×10^{-4}	7.6698×10^{-10}	5.40357×10^{-4}	1.63608×10^{-3}
0.3	4.14203×10^{-3}	1.25295×10^{-3}	8.82949×10^{-9}	1.18734×10^{-3}	2.98817×10^{-3}
0.4	6.4418×10^{-3}	2.17038×10^{-3}	5.01285×10^{-8}	2.07902×10^{-3}	4.65744×10^{-3}
0.5	8.96813×10^{-3}	3.31014×10^{-3}	1.93185×10^{-7}	3.21153×10^{-3}	6.61752×10^{-3}



Şekil 6.2. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ çözümünün $\phi_5(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği

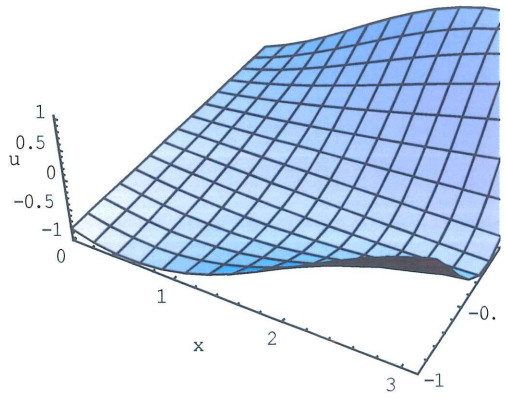


Şekil 6.3. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ analitik çözümü ile HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

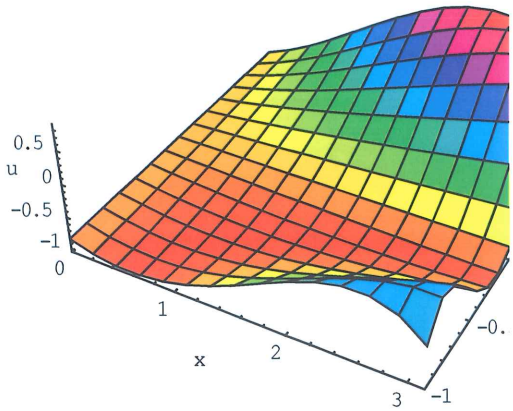
(6.1) ile verilen Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonu için HAM ve HPM ile elde edilen nümerik sonuçları Şekil 6.1, 6.3 ve Tablo 6.1, 6.2 'de verilmiştir. Tablo 6.1 'de $\varphi_1(x,\lambda)$ seri çözümünün sadece beş teriminde bile analitik çözüme çok yakın değerler elde edilmiştir. Bu tabloda HAM ile elde edilen sonuçlarda $\hbar=-1$, $H(x,t)=1$ alınmıştır. $\hbar$ yardımcı parametresinin bu şekildeki seçiminin HPM ile elde edilen nümerik sonuçların HAM ile elde edilen değerlere yakınsadığı sonucuna varılmıştır. Bu durum Tablo 6.1 'den görülebilir. Ayrıca HAM ile elde edilen seri çözümlerde analitik çözüme en iyi yakınsamayı sağlamak amacıyla $\hbar$ yardımcı parametresinin grafiği çizilerek seri çözümün yakınsaklık aralığı bulunabilir. Şekil 6.2' de Dirac denklemler sisteminin $\varphi_1(x,\lambda)$ çözümü için HAM uygulanarak elde edilen seri çözümüne göre $\hbar$ yardımcı parametresinin eğrisi çizilmiştir. Bu şekilde görüldüğü gibi seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-2.5\le\hbar\le-1.5$ aralığıdır. Bu aralık içerisinde en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği $\hbar$ parametresine değerler verilerek bulunabilir. Bu durum da Tablo 6.2 'de verilmiştir. Bu tabloda da $\hbar=-1$ değerinde analitik çözüme en iyi yakınsama görülmüştür.

Dirac denklemler sisteminin ikinci çözüm fonksiyonu olan $\varphi_2(x,\lambda)$ için de aşağıdaki değerlendirmeler söz konusudur:

a)



b)



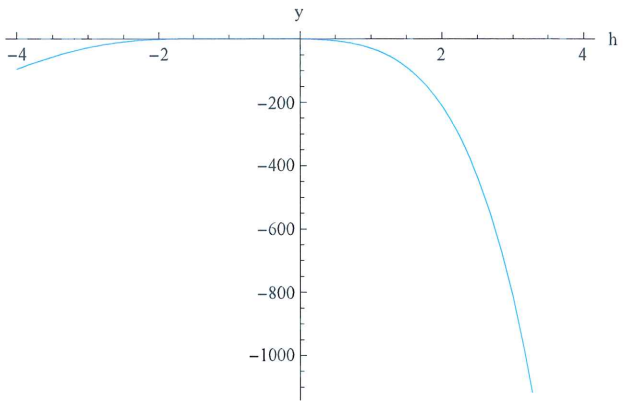
Şekil 6.4. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ analitik çözümünün ve yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü **a)** Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ analitik çözümünün üç boyutlu görünümü, **b)** Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonu için HAM($\hbar=-1$) ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü ($\alpha=1$)

Tablo 6.3. HAM($\hbar = -1$) ve HPM kullanılarak Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ için mutlak hatası ($\alpha = 1$)

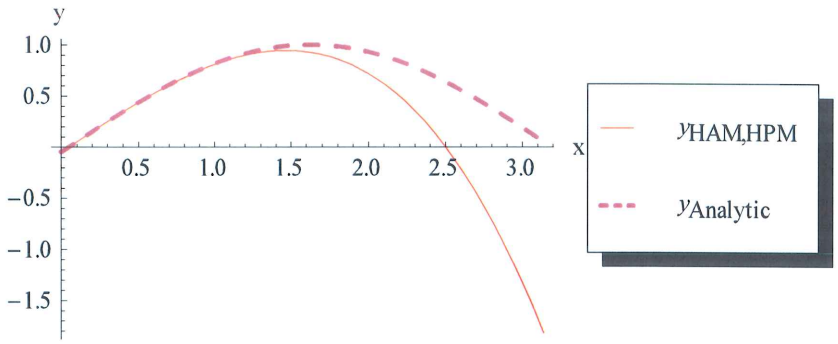
$\varphi_2(x,\lambda) - \psi_5(x,\lambda)$					
λ_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	1.11022×10^{-15}	7.4607×10^{-14}	8.49654×10^{-13}	4.7693×10^{-12}	1.81766×10^{-11}
0.2	7.4607×10^{-14}	4.7693×10^{-12}	5.42237×10^{-11}	3.04087×10^{-10}	1.15778×10^{-9}
0.3	8.49654×10^{-13}	5.42237×10^{-11}	6.15884×10^{-10}	3.45045×10^{-9}	1.31239×10^{-8}
0.4	4.7693×10^{-12}	3.04087×10^{-10}	3.45045×10^{-9}	1.93111×10^{-8}	7.33726×10^{-8}
0.5	1.81766×10^{-11}	1.15778×10^{-9}	1.31239×10^{-8}	7.33726×10^{-8}	2.78474×10^{-7}

Tablo 6.4. $\hbar$ yardımcı parametresinin farklı değerleri için Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonunun mutlak hatası ($\alpha = 1, x = 0.5$)

λ	$h=-1.4$	$h=-1.2$	$h=-1$	$h=-0.8$	$h=-0.6$
0.1	9.34272×10^{-5}	1.55359×10^{-7}	1.81766×10^{-11}	1.71945×10^{-5}	3.68165×10^{-4}
0.2	1.95627×10^{-4}	1.05206×10^{-5}	1.15778×10^{-9}	5.69742×10^{-5}	9.18173×10^{-4}
0.3	8.77804×10^{-4}	2.03429×10^{-5}	1.31239×10^{-8}	1.26629×10^{-4}	1.64572×10^{-3}
0.4	1.94543×10^{-3}	1.42134×10^{-5}	7.33726×10^{-8}	2.32295×10^{-4}	2.54334×10^{-3}
0.5	3.37207×10^{-3}	2.65285×10^{-5}	2.78474×10^{-7}	3.79083×10^{-4}	3.60058×10^{-3}



Şekil 6.5. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ çözümünün $\psi_5(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği



Şekil 6.6. Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ analitik çözümü ile HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

(6.1) ile verilen Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonu için HAM ve HPM ile elde edilen nümerik sonuçları Şekil 6.4, 6.6 ve Tablo 6.3, 6.4 'de verilmiştir. Tablo 6.3 'de $\varphi_2(x,\lambda)$ seri çözümünün sadece beş teriminde bile analitik çözüme çok yakın değerler elde edilmiştir. Bu tabloda HAM ile elde edilen sonuçlarda $\hbar=-1$, $H(x,t)=1$ alınmıştır. $\hbar$ yardımcı parametresinin bu şekildeki seçiminin HPM ile elde edilen nümerik sonuçların HAM ile elde edilen değerlere yakınsadığı sonucuna varılmıştır. Bu durum Tablo 6.3 'den görülebilir. Ayrıca HAM ile elde edilen seri çözümlerde analitik çözüme en iyi yakınsamayı sağlamak amacıyla $\hbar$ yardımcı parametresinin grafiği çizilerek seri çözümün yakınsaklık aralığı bulunabilir. Şekil 6.5' de

Dirac denklemler sisteminin $\varphi_2(x,\lambda)$ çözümü için HAM uygulanarak elde edilen seri çözümüne göre $\hbar$ yardımcı parametresinin eğrisi çizilmiştir. Bu şekilde görüldüğü gibi seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1.75 \le \hbar \le -0.5$ aralığıdır. Bu aralık içerisinde en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği $\hbar$ parametresine değerler verilerek bulunabilir. Bu durum da Tablo 6.4 'de verilmiştir. Bu tabloda da $\hbar = -1$ değerinde analitik çözüme en iyi yakınsama görülmüştür.

7. DİFÜZYON DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

7.1. DİFÜZYON OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ ile İLGİLİ TEMEL ÖZELLİKLER

Difüzyon operatörü,

$$Ly \equiv -y'' + \left[2\lambda p(x) + q(x)\right] y = \lambda^2 y, \quad x \in [0,\pi] \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} y'(0,\lambda) - h\,y(0,\lambda) &= 0 \\ y'(\pi,\lambda) + H\,y(\pi,\lambda) &= 0 \end{aligned}, \tag{7.2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada h ve H sonlu reel sayılar, $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli fonksiyonlar ve $m \geq 0$ için $p(x) \in W_2^{m+1}[0,\pi]$, $q(x) \in W_2^{m}[0,\pi]$ şeklindedir.

(7.1) denkleminin; (7.2) koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)$,

$$\begin{aligned} y(0,\lambda) &= 0, \; y'(0,\lambda) = 1 \\ y'(\pi,\lambda) + H\,y(\pi,\lambda) &= 0 \end{aligned}, \tag{7.3}$$

koşullarını sağlayan çözümü ise $\psi(x,\lambda)$ olsun. Bu problemlerin çözüm fonksiyonları sırası ile,

$$\varphi(x,\lambda) = \cos(\lambda x) - \frac{h}{\lambda}\sin(\lambda x) + \int_0^x \frac{\sin\left[\lambda(x-t)\right]}{\lambda}\left[2\lambda p(t) + q(t)\right]\varphi(\lambda,t)\,dt, \tag{7.4}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} + \int_0^x \frac{\sin\left[\lambda(x-t)\right]}{\lambda}\left[2\lambda p(t) + q(t)\right]\psi(\lambda,t)\,dt, \tag{7.5}$$

şeklindedir [32, 50].

Bir başka ifade ile (7.1) denkleminin,

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h, \tag{7.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun. Bu takdirde,

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\left[\lambda x - \alpha(x)\right] + \int_0^x A(x,t)\cos\lambda t\,dt + \int_0^x B(x,t)\sin\lambda t\,dt, \tag{7.7}$$

şeklindedir. Burada,

$$\alpha(x)=x.p(0)+2\int_0^x\left[A(\xi,\xi)\sin\alpha(\xi)-B(\xi,\xi)\cos\alpha(\xi)\right]d\xi \tag{7.8}$$

$$q(x)=-p^2(x)+2\frac{d}{dx}\left[A(x,x)\cos\alpha(x)+B(x,x)\sin\alpha(x)\right] \tag{7.9}$$

$$A(0,0)=h,\quad B(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{7.10}$$

$t>0$ için $A(x,-t)=0$, $B(x,-t)=0$;

$t>x$ için $B(x,t)=0$,

$$\alpha(x)=\int_0^x p(t)\,dt \tag{7.11}$$

olmak üzere x ve t değişkenlerine göre (m+1). mertebeden karesi integrallenebilir türevlere sahip olan $A(x,t)$ ve $B(x,t)$ fonksiyonları mevcuttur. Ayrıca $m\geq 1$ olacak biçimde,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2}-2p(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}-q(x)A(x,t)=\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}\\&\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}+2p(x)\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}-q(x)B(x,t)=\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{7.12}$$

denklemler sistemi sağlanır. Tersine, eğer $A(x,t)$ ve $B(x,t)$; (7.12) denklemler sistemini ve (7.8), (7.9), (7.10) koşullarını sağlayan ikinci mertebeden karesi integrallenebilir fonksiyonlar ise, (7.7) formülü ile tanımlı $\varphi(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonu (7.1) denkleminin (7.6) başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür [32].

Bu problemin n. özdeğeri,

$$\lambda_n=n+c_0+\frac{c_1}{n}+\frac{c_{1,n}}{n},$$

olsun. Burada

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\,dx, \quad \sum_n \left|c_{1,n}\right|^2 < \infty,$$
$$c_1 = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[p^2(x) + q(x)\right]dx\right),$$

biçiminde tanımlanır, h ve H sonlu reel sayılardır [32].

7.2. ADOMIAN AYRIŞIM METODU (ADM), HOMOTOPI ANALİZ METODU (HAM) ve HOMOTOPI PERTÜRBASYON (HPM) METODU' NUN DİFÜZYON DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu kısımda, beşinci bölümde analizleri yapılan yarı analitik metotlar olan ADM, HAM ve HPM kullanılarak, (7.1) ile verilen difüzyon denkleminin $p(x)$ ve $q(x)$ potansiyellerinin farklı alınmaları durumunda nümerik çözümleri elde edilecektir.

7.2.1. $p(x)=0$ ve $q(x)=0$ olması durumu

$p(x)=0$ ve $q(x)=0$ olması halinde (7.1) ile verilen difüzyon denklemi $y''+\lambda^2 y=0$ şeklindeki Sturm-Liouville denklemine dönüşür. Bu denklemin analitik çözümü $y(x,\lambda)=\cos(\lambda x)$ dir. Şimdi bu denklemin seri çözümlerini araştıralım.

7.2.1.1. ADM' nun Uygulanması

$$y''+\lambda^2 y=0, \tag{7.13}$$
$$y(0,\lambda)=1, \quad y'(0,\lambda)=h, \tag{7.14}$$

başlangıç koşulları ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. (7.13) denklemi,

$$L_x y+\lambda^2 y=0, \tag{7.15}$$

şeklinde operatör formda yazılır. Burada $L_x=\dfrac{d^2}{dx^2}$ biçimindedir. L_x^{-1} ters operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_x^{-1}=\int_0^x\int_0^x(\cdot)\,dx\,dx$ şeklinde tanımlanarak (7.15) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$L_x^{-1}L_x y+\lambda^2 L_x^{-1}y=0, \tag{7.16}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$y(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda)-\lambda^2 L_x^{-1}y,$$

bulunur. Son eşitlikten aşağıdaki şekilde bir rekürans(indirgeme) bağıntısı yazılabilir;

$$\begin{cases} y_0(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda), \\ y_{n+1}(x,\lambda)=-\lambda^2 L_x^{-1}y_n(x,\lambda), \quad n\geq 0, \end{cases} \tag{7.17}$$

Buradan (7.14) ile verilen başlangıç şartları ve (7.17) rekürans bağıntısı kullanılarak,

$$y_0(x,\lambda)=1+xh,$$
$$y_1(x,\lambda)=-\lambda^2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}h\right),$$
$$y_2(x,\lambda)=\lambda^4\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}h\right),$$
$$\vdots$$

terimleri elde edilir. Bu terimler (5.6) eşitliğinde yazıldığında (7.13), (7.14) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.1.2. HAM' nun Uygulanması

(7.13), (7.14) ile verilen difüzyon denklemine HAM' nu uygulayabilmek amacıyla, $\hbar\neq 0$ ve $H(x,t)\neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere, (5.39) eşitliğindeki $n.$ mertebeden deformasyon denkleminden hareketle,

$$L\left[u_n(x,t)-\chi_n u_{n-1}(x,t)\right]=\hbar H(x,t)R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right],\ n\geq 1, \tag{7.18}$$

eşitliği yazılır. Bu denklemde $H(x,t)$ yardımcı fonksiyonu; $H(x,t)=1$ olarak ele alınacaktır. (7.18) denkleminin başlangıç şartı,

$$u_n(0,\lambda)=1+xh \tag{7.19}$$

biçimindedir. Burada $R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right]$ ifadesi,

$$R_n\left[u_{n-1}(x,t)\right]=\frac{d^2u_{n-1}(x,t)}{dx^2}+\lambda^2u_{n-1}(x,t) \tag{7.20}$$

ve

$$\chi_n=\begin{cases}0, & n\le 1,\\ 1, & n>1.\end{cases} \tag{7.21}$$

şeklindedir. (7.19), (7.20) ve (7.21) eşitlikleri göz önüne alınarak (7.18) denklemi $n=1,2,3,\ldots$ değerleri için yazılırsa difüzyon denkleminin çözüm elemanları olan terimler,

$$u_0(x,\lambda)=1+xh,$$
$$u_1(x,\lambda)=\hbar\lambda^2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}h\right),$$
$$u_2(x,\lambda)=\hbar\lambda^2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}h+\hbar\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}h\right)\right)+\lambda^4\hbar^2\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}h\right),$$
$$\vdots$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de hesaplanabilir. Elde edilen bu terimler

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) \tag{7.22}$$

eşitliğinde yazılarak (7.13), (7.14) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.1.3. HPM' nun Uygulanması

(7.13), (7.14) ile verilen difüzyon denklemine HPM' nu uygulayabilmek amacıyla (5.78) eşitliği yardımı ile (7.13) denklemi için,

$$(1-p)\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}\right]+p\left[\frac{d^2Y}{dx^2}+\lambda^2Y\right]=0 \tag{7.23}$$

şeklinde bir homotopi kuralım. Bu denklem için

$$Y=Y_0+pY_1+p^2Y_2+\ldots \tag{7.24}$$

biçiminde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (7.23) eşitliğinde gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Y_0}{dx^2}+p\frac{d^2Y_1}{dx^2}+p^2\frac{d^2Y_2}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\lambda^2Y_0+p^2\lambda^2Y_1+p^3\lambda^2Y_2=0$$

olacak şekilde bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemler sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p 'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki biçimde bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0:\frac{d^2Y_0}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}=0 \tag{7.25}$$

$$p^1:\frac{d^2Y_1}{dx^2}+\frac{d^2u_0}{dx^2}+\lambda^2Y_0=0 \tag{7.26}$$

$$p^2:\frac{d^2Y_2}{dx^2}+\lambda^2Y_1=0 \tag{7.27}$$

$$\vdots$$

(7.25)-(7.27) eşitlikleri $u_0(x,\lambda)=1+xh$ başlangıç şartı ile çözüldüğünde $Y_0,Y_1,Y_2,\ldots$ terimleri sırasıyla,

$$Y_0=1+xh,$$

$$Y_1=-\lambda^2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}h\right),$$

$$Y_2=\lambda^4\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}h\right),$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir. Böylece (5.83) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0,Y_1,Y_2,\ldots$ terimleri kullanılarak

$$y(x,\lambda)=\lim_{p\to 1}Y=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n \tag{7.28}$$

olacak şekilde (7.13), (7.14) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.2. $p(x)=0$ ve $q(x)=x^2$ olması durumu

$p(x)=0$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde (7.1) ile verilen difüzyon denklemi $y''+\lambda^2 y-x^2 y=0$ halini alır. Şimdi bu denklemin seri çözümlerini araştıralım.

7.2.2.1. ADM' nun Uygulanması

$$y''+\lambda^2 y-x^2 y=0, \tag{7.29}$$
$$y(0,\lambda)=1,\quad y'(0,\lambda)=h, \tag{7.30}$$

başlangıç koşulları ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. (7.29) denklemi,

$$L_x y+\lambda^2 y-x^2 y=0, \tag{7.31}$$

şeklinde operatör formda yazılır. Burada $L_x=\dfrac{d^2}{dx^2}$ biçimindedir. L_x^{-1} ters operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_x^{-1}=\int_0^x\int_0^x(\cdot)\,dx\,dx$ şeklinde tanımlanarak (7.31) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$L_x^{-1}L_x y+\lambda^2 L_x^{-1}y-L_x^{-1}x^2 y=0, \tag{7.32}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$y(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda)-\lambda^2 L_x^{-1}y+L_x^{-1}x^2 y,$$

bulunur. Son eşitlikten aşağıdaki şekilde bir rekürans(indirgeme) bağıntısı yazılabilir;

$$\begin{cases} y_0(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda), \\ y_{n+1}(x,\lambda)=L_x^{-1}\left(x^2-\lambda^2\right)y_n(x,\lambda),\quad n\geq 0, \end{cases} \tag{7.33}$$

Buradan (7.30) ile verilen başlangıç şartları ve (7.33) rekürans bağıntısı kullanılarak,

$$y_0(x,\lambda)=1+xh,$$
$$y_1(x,\lambda)=-\lambda^2\frac{x^2}{2}-\lambda^2\frac{x^3}{3!}h+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}h,$$
$$y_2(x,\lambda)=\lambda^4\frac{x^4}{4!}+\lambda^4\frac{x^5}{5!}h-7\lambda^2\frac{x^6}{360}-13\lambda^2\frac{x^7}{2520}h+\frac{x^8}{672}+\frac{x^9}{1440}h,$$
$$\vdots$$

terimleri elde edilir. Bu terimler (5.6) eşitliğinde yazıldığında (7.29), (7.30) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.2.2. HAM' nun Uygulanması

(7.29), (7.30) ile verilen difüzyon denklemine HAM' nu uygulayabilmek amacıyla, $\hbar \neq 0$ ve $H(x,t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere, (5.39) eşitliğindeki $n.$ mertebeden deformasyon denkleminden hareketle,

$$L\left[u_n(x,t) - \chi_n u_{n-1}(x,t)\right] = \hbar H(x,t) R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right], \quad n \geq 1, \tag{7.34}$$

eşitliği yazılır. Bu denklemde $H(x,t)$ yardımcı fonksiyonu; $H(x,t) = 1$ olarak ele alınacaktır. (7.34) denkleminin başlangıç şartı,

$$u_n(0,\lambda) = 1 + xh \tag{7.35}$$

biçimindedir. Burada $R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right]$ ifadesi,

$$R_n\left[u_{n-1}(x,t)\right] = \frac{d^2 u_{n-1}(x,t)}{dx^2} + \lambda^2 u_{n-1}(x,t) - x^2 u_{n-1}(x,t) \tag{7.36}$$

ve

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1, \\ 1, & n > 1. \end{cases} \tag{7.37}$$

şeklindedir. (7.35), (7.36) ve (7.37) eşitlikleri göz önüne alınarak (7.34) denklemi $n = 1,2,3,\ldots$ değerleri için yazılırsa difüzyon denkleminin çözüm elemanları olan terimler,

$$\begin{aligned}
&u_0(x,\lambda) = 1 + xh, \\
&u_1(x,\lambda) = \hbar\left(\lambda^2 \frac{x^2}{2} + \lambda^2 \frac{x^3}{3!} h - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} h\right), \\
&u_2(x,\lambda) = \hbar\left(\lambda^2 \frac{x^2}{2} + \lambda^2 \frac{x^3}{3!} h - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} h\right) + \hbar^2\left(\lambda^2 \frac{x^2}{2} + \lambda^2 \frac{x^3}{3!} h - \frac{x^4}{12} + \right. \\
&\qquad \left. + \lambda^4 \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{20} h + \lambda^4 \frac{x^5}{5!} h - 7\lambda^2 \frac{x^6}{360} - 13\lambda^2 \frac{x^7}{2520} h + \frac{x^8}{672} + \frac{x^9}{1440} h\right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de hesaplanabilir. Elde edilen bu terimler

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) \tag{7.38}$$

eşitliğinde yazılarak (7.29), (7.30) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.2.3. HPM' nun Uygulanması

(7.29), (7.30) ile verilen difüzyon denklemine HPM' nu uygulayabilmek amacıyla (5.78) eşitliği yardımı ile (7.29) denklemi için,

$$(1-p)\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}\right]+p\left[\frac{d^2Y}{dx^2}+\lambda^2Y-x^2Y\right]=0 \tag{7.39}$$

şeklinde bir homotopi kuralım. Bu denklem için

$$Y=Y_0+pY_1+p^2Y_2+\ldots \tag{7.40}$$

biçiminde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (7.39) eşitliğinde gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Y_0}{dx^2}+p\frac{d^2Y_1}{dx^2}+p^2\frac{d^2Y_2}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\lambda^2Y_0+p^2\lambda^2Y_1+p^3\lambda^2Y_2-$$
$$-px^2Y_0-p^2x^2Y_1-p^3x^2Y_2=0$$

olacak şekilde bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemler sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p 'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki biçimde bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0:\frac{d^2Y_0}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}=0 \tag{7.41}$$

$$p^1:\frac{d^2Y_1}{dx^2}+\frac{d^2u_0}{dx^2}+\lambda^2Y_0-x^2Y_0=0 \tag{7.42}$$

$$p^2:\frac{d^2Y_2}{dx^2}+\lambda^2Y_1-x^2Y_1=0 \tag{7.43}$$

$$\vdots$$

(7.41)-(7.43) eşitlikleri $u_0(x,\lambda)=1+xh$ başlangıç şartı ile çözüldüğünde $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ terimleri sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
&Y_0 = 1+xh,\\
&Y_1 = -\lambda^2\frac{x^2}{2} - \lambda^2\frac{x^3}{3!}h + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}h,\\
&Y_2 = \lambda^4\frac{x^4}{4!} + \lambda^4\frac{x^5}{5!}h - 7\lambda^2\frac{x^6}{360} - 13\lambda^2\frac{x^7}{2520}h + \frac{x^8}{672} + \frac{x^9}{1440}h,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Böylece (5.83) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ terimleri kullanılarak

$$y(x,\lambda) = \lim_{p\to 1} Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \tag{7.44}$$

olacak şekilde (7.29), (7.30) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.3. $p(x)=x^2$ ve $q(x)=0$ olması durumu

$p(x)=x^2$ ve $q(x)=0$ olması halinde (7.1) ile verilen difüzyon denklemi $y''-2\lambda x^2 y+\lambda^2 y=0$ halini alır. Şimdi bu denklemin seri çözümlerini araştıralım.

7.2.3.1. ADM' nun Uygulanması

$$y''-2\lambda x^2 y+\lambda^2 y=0, \tag{7.45}$$
$$y(0,\lambda)=1, \quad y'(0,\lambda)=h, \tag{7.46}$$

başlangıç koşulları ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. (7.45) denklemi,

$$L_x y - 2\lambda x^2 y + \lambda^2 y = 0, \tag{7.47}$$

şeklinde operatör formda yazılır. Burada $L_x = \dfrac{d^2}{dx^2}$ biçimindedir. L_x^{-1} ters operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot)\,dx\,dx$ şeklinde tanımlanarak (7.47) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$L_x^{-1}L_x y - 2\lambda L_x^{-1}x^2 y + \lambda^2 L_x^{-1} y = 0, \tag{7.48}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$y(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda)-\lambda^2 L_x^{-1}y+2\lambda L_x^{-1}x^2 y,$$

bulunur. Son eşitlikten aşağıdaki şekilde bir rekürans(indirgeme) bağıntısı yazılabilir;

$$\begin{cases} y_0(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda), \\ y_{n+1}(x,\lambda)=L_x^{-1}\left(2\lambda x^2-\lambda^2\right)y_n(x,\lambda), \quad n\geq 0, \end{cases} \tag{7.49}$$

Buradan (7.46) ile verilen başlangıç şartları ve (7.49) rekürans bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} y_0(x,\lambda)&=1+xh, \\ y_1(x,\lambda)&=-\lambda^2\frac{x^2}{2}-\lambda^2\frac{x^3}{3!}h+\lambda\frac{x^4}{6}+\lambda\frac{x^5}{10}h, \\ y_2(x,\lambda)&=\lambda^4\frac{x^4}{4!}+\lambda^4\frac{x^5}{5!}h-7\lambda^3\frac{x^6}{180}-13\lambda^3\frac{x^7}{1260}h+\lambda^2\frac{x^8}{168}+\lambda^2\frac{x^9}{360}h, \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Bu terimler (5.6) eşitliğinde yazıldığında (7.45), (7.46) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.3.2. HAM' nun Uygulanması

(7.45), (7.46) ile verilen difüzyon denklemine HAM' nu uygulayabilmek amacıyla, $\hbar\neq 0$ ve $H(x,t)\neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere, (5.39) eşitliğindeki $n.$ mertebeden deformasyon denkleminden hareketle,

$$L\left[u_n(x,t)-\chi_n u_{n-1}(x,t)\right]=\hbar\,H(x,t)R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right], \quad n\geq 1, \tag{7.50}$$

eşitliği yazılır. Bu denklemde $H(x,t)$ yardımcı fonksiyonu; $H(x,t)=1$ olarak ele alınacaktır. (7.50) denkleminin başlangıç şartı,

$$u_n(0,\lambda)=1+xh \tag{7.51}$$

biçimindedir. Burada $R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right]$ ifadesi,

$$R_n\left[u_{n-1}(x,t)\right]=\frac{d^2u_{n-1}(x,t)}{dx^2}-2\lambda x^2 u_{n-1}(x,t)+\lambda^2 u_{n-1}(x,t) \tag{7.52}$$

ve

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \le 1, \\ 1, & n > 1. \end{cases} \tag{7.53}$$

şeklindedir. (7.51), (7.52) ve (7.53) eşitlikleri göz önüne alınarak (7.50) denklemi $n = 1,2,3,\ldots$ değerleri için yazılırsa difüzyon denkleminin çözüm elemanları olan terimler,

$$u_0(x,\lambda) = 1 + xh,$$

$$u_1(x,\lambda) = \hbar\left(\lambda^2\frac{x^2}{2} + \lambda^2\frac{x^3}{3!}h - \lambda\frac{x^4}{6} - \lambda\frac{x^5}{10}h\right),$$

$$u_2(x,\lambda) = \hbar\left(\lambda^2\frac{x^2}{2} + \lambda^2\frac{x^3}{3!}h - \lambda\frac{x^4}{6} - \lambda\frac{x^5}{10}h\right) + \hbar^2\left[\lambda^2\frac{x^2}{2} + \lambda^2\frac{x^3}{3!}h - \right.$$
$$-\lambda\frac{x^4}{6} + \lambda^4\frac{x^4}{4!} - \lambda\frac{x^5}{10}h + \lambda^4\frac{x^5}{5!}h - 7\lambda^3\frac{x^6}{180} - 13\lambda^3\frac{x^7}{1260}h +$$
$$\left. + \lambda^2\frac{x^8}{168} + \lambda^2\frac{x^9}{360}h\right],$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de hesaplanabilir. Elde edilen bu terimler

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{7.54}$$

eşitliğinde yazılarak (7.45), (7.46) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.3.3. HPM' nun Uygulanması

(7.45), (7.46) ile verilen difüzyon denklemine HPM' nu uygulayabilmek amacıyla (5.78) eşitliği yardımı ile (7.45) denklemi için,

$$(1-p)\left[\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{d^2u_0}{dx^2}\right] + p\left[\frac{d^2Y}{dx^2} - 2\lambda x^2 Y + \lambda^2 Y\right] = 0 \tag{7.55}$$

şeklinde bir homotopi kuralım. Bu denklem için

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + \ldots \tag{7.56}$$

biçiminde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (7.55) eşitliğinde gerekli olan

türevler alınır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Y_0}{dx^2}+p\frac{d^2Y_1}{dx^2}+p^2\frac{d^2Y_2}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\frac{d^2u_0}{dx^2}-2p\lambda x^2Y_0-2p^2\lambda x^2Y_1-2p^3\lambda x^2Y_2+$$
$$+p\lambda^2Y_0+p^2\lambda^2Y_1+p^3\lambda^2Y_2=0$$

olacak şekilde bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemler sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p 'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki biçimde bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0:\frac{d^2Y_0}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}=0 \tag{7.57}$$

$$p^1:\frac{d^2Y_1}{dx^2}+\frac{d^2u_0}{dx^2}-2\lambda x^2Y_0+\lambda^2Y_0=0 \tag{7.58}$$

$$p^2:\frac{d^2Y_2}{dx^2}-2\lambda x^2Y_1+\lambda^2Y_1=0 \tag{7.59}$$

$$\vdots$$

(7.57)-(7.59) eşitlikleri $u_0(x,\lambda)=1+xh$ başlangıç şartı ile çözüldüğünde $Y_0,Y_1,Y_2,\ldots$ terimleri sırasıyla,

$$Y_0=1+xh,$$
$$Y_1=-\lambda^2\frac{x^2}{2}-\lambda^2\frac{x^3}{3!}h+\lambda\frac{x^4}{6}+\lambda\frac{x^5}{10}h,$$
$$Y_2=\lambda^4\frac{x^4}{4!}+\lambda^4\frac{x^5}{5!}h-7\lambda^3\frac{x^6}{180}-13\lambda^3\frac{x^7}{1260}h+\lambda^2\frac{x^8}{168}+\lambda^2\frac{x^9}{360}h,$$
$$\vdots$$

olarak elde edilir. Böylece (5.83) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0,Y_1,Y_2,\ldots$ terimleri kullanılarak

$$y(x,\lambda)=\lim_{p\to 1}Y=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n \tag{7.60}$$

olacak şekilde (7.45), (7.46) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.4. $p(x)=x^2$ ve $q(x)=x^2$ olması durumu

$p(x)=x^2$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde (7.1) ile verilen difüzyon denklemi $y''-2\lambda x^2 y-x^2 y+\lambda^2 y=0$ halini alır. Şimdi bu denklemin seri çözümlerini araştıralım.

7.2.4.1. ADM' nun Uygulanması

$$y''-2\lambda x^2 y-x^2 y+\lambda^2 y=0, \tag{7.61}$$

$$y(0,\lambda)=1,\quad y'(0,\lambda)=h, \tag{7.62}$$

başlangıç koşulları ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. (7.61) denklemi,

$$L_x y-2\lambda x^2 y-x^2 y+\lambda^2 y=0, \tag{7.63}$$

şeklinde operatör formda yazılır. Burada $L_x=\dfrac{d^2}{dx^2}$ biçimindedir. L_x^{-1} ters operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_x^{-1}=\int_0^x\int_0^x(\cdot)\,dx\,dx$ şeklinde tanımlanarak (7.63) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$L_x^{-1}L_x y-2\lambda L_x^{-1}x^2 y-L_x^{-1}x^2 y+\lambda^2 L_x^{-1}y=0, \tag{7.64}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$y(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda)+2\lambda L_x^{-1}x^2 y+L_x^{-1}x^2 y-\lambda^2 L_x^{-1}y,$$

bulunur. Son eşitlikten aşağıdaki şekilde bir rekürans(indirgeme) bağıntısı yazılabilir;

$$\begin{cases} y_0(x,\lambda)=y(0,\lambda)+x\,y'(0,\lambda), \\ y_{n+1}(x,\lambda)=L_x^{-1}\left[2\lambda x^2+x^2-\lambda^2\right]y_n(x,\lambda),\quad n\geq 0, \end{cases} \tag{7.65}$$

Buradan (7.62) ile verilen başlangıç şartları ve (7.65) rekürans bağıntısı kullanılarak,

$$y_0(x,\lambda)=1+xh,$$

$$y_1(x,\lambda)=-\lambda^2\frac{x^2}{2}-\lambda^2\frac{x^3}{3!}h+(1+2\lambda)\frac{x^4}{12}+(1+2\lambda)\frac{x^5}{20}h,$$

$$y_2(x,\lambda)=\lambda^4\frac{x^4}{4!}+\lambda^4\frac{x^5}{5!}h-7\lambda^2(1+2\lambda)\frac{x^6}{360}-13\lambda^2(1+2\lambda)\frac{x^7}{2520}h+$$

$$+(1+2\lambda)^2\frac{x^8}{672}+(1+2\lambda)^2\frac{x^9}{1440}h,$$

$$\vdots$$

terimleri elde edilir. Bu terimler (5.6) eşitliğinde yazıldığında (7.61), (7.62) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.4.2. HAM' nun Uygulanması

(7.61), (7.62) ile verilen difüzyon denklemine HAM' nu uygulayabilmek amacıyla, $\hbar \neq 0$ ve $H(x,t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere, (5.39) eşitliğindeki $n.$ mertebeden deformasyon denkleminden hareketle,

$$L\left[u_n(x,t) - \chi_n u_{n-1}(x,t)\right] = \hbar H(x,t) R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right], \quad n \geq 1, \tag{7.66}$$

eşitliği yazılır. Bu denklemde $H(x,t)$ yardımcı fonksiyonu; $H(x,t) = 1$ olarak ele alınacaktır. (7.66) denkleminin başlangıç şartı,

$$u_n(0,\lambda) = 1 + xh \tag{7.67}$$

biçimindedir. Burada $R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right]$ ifadesi,

$$R_n\left[u_{n-1}(x,t)\right] = \frac{d^2 u_{n-1}(x,t)}{dx^2} - 2\lambda x^2 u_{n-1}(x,t) - x^2 u_{n-1}(x,t) + \lambda^2 u_{n-1}(x,t) \tag{7.68}$$

ve

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1, \\ 1, & n > 1. \end{cases} \tag{7.69}$$

şeklindedir. (7.67), (7.68) ve (7.69) eşitlikleri göz önüne alınarak (7.66) denklemi $n = 1,2,3,\ldots$ değerleri için yazılırsa difüzyon denkleminin çözüm elemanları olan terimler,

$$u_0(x,\lambda) = 1 + xh,$$

$$u_1(x,\lambda) = \hbar\left(\lambda^2 \frac{x^2}{2} + \lambda^2 \frac{x^3}{3!} h - (1+2\lambda)\frac{x^4}{12} - (1+2\lambda)\frac{x^5}{20} h\right),$$

$$u_2(x,\lambda)=\hbar\left(\lambda^2\frac{x^2}{2}+\lambda^2\frac{x^3}{3!}h-(1+2\lambda)\frac{x^4}{12}-(1+2\lambda)\frac{x^5}{20}h\right)+\hbar^2\left[\lambda^2\frac{x^2}{2}+\right.$$
$$+\lambda^2\frac{x^3}{3!}h++\lambda^4\frac{x^4}{4!}+\lambda^4\frac{x^5}{5!}h-\lambda\frac{x^4}{6}-\lambda\frac{x^5}{10}h-\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{20}h+\lambda^2\frac{x^8}{168}+$$
$$+\lambda^2\frac{x^9}{360}h+\lambda\frac{x^8}{336}+\lambda\frac{x^9}{720}h-\lambda^3\frac{x^6}{30}-\lambda^3\frac{x^7}{126}h+\lambda\frac{x^8}{336}+\lambda\frac{x^9}{720}h+$$
$$+\frac{x^8}{672}+\frac{x^9}{1440}h-\lambda^2\frac{x^6}{60}-\lambda^2\frac{x^7}{252}h-\lambda^3\frac{x^6}{180}-\lambda^3\frac{x^7}{420}h-\lambda^2\frac{x^6}{360}-$$
$$\left.-\lambda^2\frac{x^7}{840}h\right],$$
$$\vdots$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de hesaplanabilir. Elde edilen bu terimler

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) \tag{7.70}$$

eşitliğinde yazılarak (7.61), (7.62) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.4.3. HPM' nun Uygulanması

(7.61), (7.62) ile verilen difüzyon denklemine HPM' nu uygulayabilmek amacıyla (5.78) eşitliği yardımı ile (7.61) denklemi için,

$$(1-p)\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}\right]+p\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-2\lambda x^2Y-x^2Y+\lambda^2Y\right]=0 \tag{7.71}$$

şeklinde bir homotopi kuralım. Bu denklem için

$$Y=Y_0+pY_1+p^2Y_2+\ldots \tag{7.72}$$

biçiminde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (7.71) eşitliğinde gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Y_0}{dx^2}+p\frac{d^2Y_1}{dx^2}+p^2\frac{d^2Y_2}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\frac{d^2u_0}{dx^2}-2p\lambda x^2Y_0-2p^2\lambda x^2Y_1-2p^3\lambda x^2Y_2-$$
$$-px^2Y_0-p^2x^2Y_1-p^3x^2Y_2+p\lambda^2Y_0+p^2\lambda^2Y_1+p^3\lambda^2Y_2=0$$

olacak şekilde bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemler

sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p 'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki biçimde bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0 : \frac{d^2Y_0}{dx^2} - \frac{d^2u_0}{dx^2} = 0 \tag{7.73}$$

$$p^1 : \frac{d^2Y_1}{dx^2} + \frac{d^2u_0}{dx^2} - 2\lambda x^2 Y_0 - x^2 Y_0 + \lambda^2 Y_0 = 0 \tag{7.74}$$

$$p^2 : \frac{d^2Y_2}{dx^2} - 2\lambda x^2 Y_1 - x^2 Y_1 + \lambda^2 Y_1 = 0 \tag{7.75}$$

$$\vdots$$

(7.73)-(7.75) eşitlikleri $u_0(x,\lambda) = 1 + xh$ başlangıç şartı ile çözüldüğünde $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ terimleri sırasıyla,

$$Y_0 = 1 + xh,$$

$$Y_1 = -\lambda^2 \frac{x^2}{2} - \lambda^2 \frac{x^3}{3!} h + (1+2\lambda)\frac{x^4}{12} + (1+2\lambda)\frac{x^5}{20} h,$$

$$Y_2 = \lambda^4 \frac{x^4}{4!} + \lambda^4 \frac{x^5}{5!} h - 7\lambda^2 (1+2\lambda)\frac{x^6}{360} - 13\lambda^2 (1+2\lambda)\frac{x^7}{2520} h +$$

$$+ (1+2\lambda)^2 \frac{x^8}{672} + (1+2\lambda)^2 \frac{x^9}{1440} h,$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir. Böylece (5.83) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ terimleri kullanılarak

$$y(x,\lambda) = \lim_{p \to 1} Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \tag{7.76}$$

olacak şekilde (7.61), (7.62) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.5. $p(x) = 1$ ve $q(x) = x$ olması durumu

$p(x) = 1$ ve $q(x) = x$ olması halinde (7.1) ile verilen difüzyon denklemi $y'' - 2\lambda y - xy + \lambda^2 y = 0$ halini alır. Şimdi bu denklemin seri çözümlerini araştıralım.

7.2.5.1. ADM' nun Uygulanması

$$y'' - 2\lambda y - xy + \lambda^2 y = 0, \tag{7.77}$$

$$y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h, \tag{7.78}$$

başlangıç koşulları ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. (7.77) denklemi,

$$L_x y - 2\lambda y - x y + \lambda^2 y = 0, \tag{7.79}$$

şeklinde operatör formda yazılır. Burada $L_x = \dfrac{d^2}{dx^2}$ biçimindedir. L_x^{-1} ters operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot)\, dx\, dx$ şeklinde tanımlanarak (7.79) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$L_x^{-1} L_x y - 2\lambda L_x^{-1} y - L_x^{-1} x y + \lambda^2 L_x^{-1} y = 0, \tag{7.80}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$y(x,\lambda) = y(0,\lambda) + x\, y'(0,\lambda) + 2\lambda L_x^{-1} y + L_x^{-1} x y - \lambda^2 L_x^{-1} y,$$

bulunur. Son eşitlikten aşağıdaki şekilde bir rekürans(indirgeme) bağıntısı yazılabilir;

$$\begin{cases} y_0(x,\lambda) = y(0,\lambda) + x\, y'(0,\lambda), \\ y_{n+1}(x,\lambda) = L_x^{-1}\left[2\lambda + x - \lambda^2\right] y_n(x,\lambda), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{7.81}$$

Buradan (7.78) ile verilen başlangıç şartları ve (7.81) rekürans bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} y_0(x,\lambda) &= 1 + xh, \\ y_1(x,\lambda) &= \lambda(2-\lambda)\frac{x^2}{2} + \left(-\lambda^2 h + 2\lambda h + 1\right)\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} h, \\ y_2(x,\lambda) &= \lambda^2 (2-\lambda)^2 \frac{x^4}{4!} + \lambda\left(\lambda^3 h - 4\lambda^2 h + 4\lambda h - 4\lambda + 8\right)\frac{x^5}{5!} + \\ &\quad + \left(-3\lambda^2 h + 6\lambda h + 2\right)\frac{x^6}{360} + \frac{x^7}{504} h, \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Bu terimler (5.6) eşitliğinde yazıldığında (7.77), (7.78) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.5.2. HAM' nun Uygulanması

(7.77), (7.78) ile verilen difüzyon denklemine HAM' nu uygulayabilmek amacıyla, $\hbar \neq 0$ ve $H(x,t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere, (5.39) eşitliğindeki n. mertebeden deformasyon denkleminden hareketle,

$$L\left[u_n(x,t)-\chi_n u_{n-1}(x,t)\right]=\hbar H(x,t)R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right],\ n\geq 1, \tag{7.82}$$

eşitliği yazılır. Bu denklemde $H(x,t)$ yardımcı fonksiyonu; $H(x,t)=1$ olarak ele alınacaktır. (7.82) denkleminin başlangıç şartı,

$$u_n(0,\lambda)=1+xh \tag{7.83}$$

biçimindedir. Burada $R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right]$ ifadesi,

$$R_n\left[u_{n-1}(x,t)\right]=\frac{d^2u_{n-1}(x,t)}{dx^2}-2\lambda u_{n-1}(x,t)-xu_{n-1}(x,t)+\lambda^2 u_{n-1}(x,t) \tag{7.84}$$

ve

$$\chi_n=\begin{cases}0, & n\leq 1,\\ 1, & n>1.\end{cases} \tag{7.85}$$

şeklindedir. (7.83), (7.84) ve (7.85) eşitlikleri göz önüne alınarak (7.82) denklemi $n=1,2,3,\ldots$ değerleri için yazılırsa difüzyon denkleminin çözüm elemanları olan terimler,

$$\begin{aligned}
&u_0(x,\lambda)=1+xh,\\
&u_1(x,\lambda)=\hbar\left(\lambda(\lambda-2)\frac{x^2}{2}+(\lambda^2h-2\lambda h-1)\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}h\right),\\
&u_2(x,\lambda)=\hbar\left[\lambda(\lambda-2)\frac{x^2}{2}+(\lambda^2h-2\lambda h-1)\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{12}h\right]+\hbar^2\left[\lambda(\lambda-2)\frac{x^2}{2}+\right.\\
&\qquad+(\lambda^2h-2\lambda h-1)\frac{x^3}{3!}+(\lambda^4-4\lambda^3+4\lambda^2-2h)\frac{x^4}{4!}+\\
&\qquad\left.+(\lambda-2)(\lambda^3h-2\lambda^2h-4\lambda)\frac{x^5}{5!}-(3\lambda^2h-6\lambda h-2)\frac{x^6}{360}+\frac{x^7}{504}h\right],\\
&\vdots
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de hesaplanabilir. Elde edilen bu terimler

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) \tag{7.86}$$

eşitliğinde yazılarak (7.77), (7.78) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.5.3. HPM' nun Uygulanması

(7.77), (7.78) ile verilen difüzyon denklemine HPM' nu uygulayabilmek amacıyla (5.78) eşitliği yardımı ile (7.77) denklemi için,

$$(1-p)\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}\right]+p\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-2\lambda Y-xY+\lambda^2Y\right]=0 \tag{7.87}$$

şeklinde bir homotopi kuralım. Bu denklem için

$$Y=Y_0+pY_1+p^2Y_2+\ldots \tag{7.88}$$

biçiminde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (7.87) eşitliğinde gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Y_0}{dx^2}+p\frac{d^2Y_1}{dx^2}+p^2\frac{d^2Y_2}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\frac{d^2u_0}{dx^2}-2p\lambda Y_0-2p^2\lambda Y_1-2p^3\lambda Y_2-$$
$$-pxY_0-p^2xY_1-p^3xY_2+p\lambda^2Y_0+p^2\lambda^2Y_1+p^3\lambda^2Y_2=0$$

olacak şekilde bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemler sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p 'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki biçimde bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0:\frac{d^2Y_0}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}=0 \tag{7.89}$$

$$p^1:\frac{d^2Y_1}{dx^2}+\frac{d^2u_0}{dx^2}-2\lambda Y_0-xY_0+\lambda^2Y_0=0 \tag{7.90}$$

$$p^2:\frac{d^2Y_2}{dx^2}-2\lambda Y_1-xY_1+\lambda^2Y_1=0 \tag{7.91}$$

$$\vdots$$

(7.89)-(7.91) eşitlikleri $u_0(x,\lambda)=1+xh$ başlangıç şartı ile çözüldüğünde $Y_0,Y_1,Y_2,\ldots$ terimleri sırasıyla,

$$Y_0=1+xh,$$

$$Y_1=\lambda(2-\lambda)\frac{x^2}{2}+(-\lambda^2h+2\lambda h+1)\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}h,$$

$$Y_2 = \lambda^2(2-\lambda)^2\frac{x^4}{4!} + \lambda\left(\lambda^3 h - 4\lambda^2 h + 4\lambda h - 4\lambda + 8\right)\frac{x^5}{5!} +$$
$$+\left(-3\lambda^2 h + 6\lambda h + 2\right)\frac{x^6}{360} + \frac{x^7}{504}h,$$
$$\vdots$$

olarak elde edilir. Böylece (5.83) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ terimleri kullanılarak

$$y(x,\lambda) = \lim_{p\to 1} Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \tag{7.92}$$

olacak şekilde (7.77), (7.78) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.6. $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması durumu

$p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde (7.1) ile verilen difüzyon denklemi $y''-2\lambda x y - x^2 y + \lambda^2 y = 0$ halini alır. Şimdi bu denklemin seri çözümlerini araştıralım.

7.2.6.1. ADM' nun Uygulanması

$$y'' - 2\lambda x y - x^2 y + \lambda^2 y = 0, \tag{7.93}$$
$$y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h, \tag{7.94}$$

başlangıç koşulları ile verilen difüzyon denklemini göz önüne alalım. (7.93) denklemi,

$$L_x y - 2\lambda x y - x^2 y + \lambda^2 y = 0, \tag{7.95}$$

şeklinde operatör formda yazılır. Burada $L_x = \frac{d^2}{dx^2}$ biçimindedir. L_x^{-1} ters operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot)\,dx\,dx$ şeklinde tanımlanarak (7.95) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa,

$$L_x^{-1}L_x y - 2\lambda L_x^{-1} x y - L_x^{-1} x^2 y + \lambda^2 L_x^{-1} y = 0, \tag{7.96}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$y(x,\lambda) = y(0,\lambda) + x\,y'(0,\lambda) + 2\lambda L_x^{-1} x y + L_x^{-1} x^2 y - \lambda^2 L_x^{-1} y,$$

bulunur. Son eşitlikten aşağıdaki şekilde bir rekürans(indirgeme) bağıntısı yazılabilir;

$$\begin{cases} y_0(x,\lambda) = y(0,\lambda) + x\,y'(0,\lambda), \\ y_{n+1}(x,\lambda) = L_x^{-1}\left[2\lambda x + x^2 - \lambda^2\right] y_n(x,\lambda), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{7.97}$$

Buradan (7.94) ile verilen başlangıç şartları ve (7.97) rekürans bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned} y_0(x,\lambda) &= 1 + xh, \\ y_1(x,\lambda) &= -\lambda^2 \frac{x^2}{2} + \lambda(-\lambda h + 2)\frac{x^3}{6} + (2\lambda h + 1)\frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}h, \\ y_2(x,\lambda) &= \lambda^4 \frac{x^4}{4!} + \lambda^3(\lambda h - 8)\frac{x^5}{120} + \lambda^2(-6\lambda h + 1)\frac{x^6}{360} + \\ &\quad + \lambda(7\lambda h + 30)\frac{x^7}{2520} + (16\lambda h + 5)\frac{x^8}{3360} + \frac{x^9}{1440}h, \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Bu terimler (5.6) eşitliğinde yazıldığında (7.93), (7.94) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.6.2. HAM' nun Uygulanması

(7.93), (7.94) ile verilen difüzyon denklemine HAM' nu uygulayabilmek amacıyla, $\hbar \neq 0$ ve $H(x,t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olmak üzere, (5.39) eşitliğindeki $n.$ mertebeden deformasyon denkleminden hareketle,

$$L\left[u_n(x,t) - \chi_n u_{n-1}(x,t)\right] = \hbar H(x,t) R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right], \quad n \geq 1, \tag{7.98}$$

eşitliği yazılır. Bu denklemde $H(x,t)$ yardımcı fonksiyonu; $H(x,t) = 1$ olarak ele alınacaktır. (7.98) denkleminin başlangıç şartı,

$$u_n(0,\lambda) = 1 + xh \tag{7.99}$$

biçimindedir. Burada $R_n\left[\vec{u}_{n-1}(x,t)\right]$ ifadesi,

$$R_n\left[u_{n-1}(x,t)\right] = \frac{d^2 u_{n-1}(x,t)}{dx^2} - 2\lambda x u_{n-1}(x,t) - x^2 u_{n-1}(x,t) + \lambda^2 u_{n-1}(x,t) \tag{7.100}$$

ve

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1, \\ 1, & n > 1. \end{cases} \tag{7.101}$$

şeklindedir. (7.99), (7.100) ve (7.101) eşitlikleri göz önüne alınarak (7.98) denklemi $n=1,2,3,\ldots$ değerleri için yazılırsa difüzyon denkleminin çözüm elemanları olan terimler,

$$u_0(x,\lambda)=1+xh,$$

$$u_1(x,\lambda)=\hbar\left(\lambda^2\frac{x^2}{2}+\lambda(\lambda h-2)\frac{x^3}{6}-(2\lambda h+1)\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{20}h\right),$$

$$u_2(x,\lambda)=\hbar\left(\lambda^2\frac{x^2}{2}+\lambda(\lambda h-2)\frac{x^3}{6}-(2\lambda h+1)\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{20}h\right)+\hbar^2\left[\lambda^2\frac{x^2}{2}+\right.$$

$$+\lambda(\lambda h-2)\frac{x^3}{6}-(2\lambda h+1)\frac{x^4}{12}+\lambda^4\frac{x^4}{4!}+(\lambda^4 h-8\lambda^3-6h)\frac{x^5}{120}+$$

$$\left.+\lambda^2(-6\lambda h+1)\frac{x^6}{360}+\lambda(7\lambda h+30)\frac{x^7}{2520}+(16\lambda h+5)\frac{x^8}{3360}+\frac{x^9}{1440}h\right],$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de hesaplanabilir. Elde edilen bu terimler

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t) \tag{7.102}$$

eşitliğinde yazılarak (7.93), (7.94) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.2.6.3. HPM' nun Uygulanması

(7.93), (7.94) ile verilen difüzyon denklemine HPM' nu uygulayabilmek amacıyla (5.78) eşitliği yardımı ile (7.93) denklemi için,

$$(1-p)\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}\right]+p\left[\frac{d^2Y}{dx^2}-2\lambda xY-x^2Y+\lambda^2Y\right]=0 \tag{7.103}$$

şeklinde bir homotopi kuralım. Bu denklem için

$$Y=Y_0+pY_1+p^2Y_2+\ldots \tag{7.104}$$

biçiminde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (7.103) eşitliğinde gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Y_0}{dx^2}+p\frac{d^2Y_1}{dx^2}+p^2\frac{d^2Y_2}{dx^2}-\frac{d^2u_0}{dx^2}+p\frac{d^2u_0}{dx^2}-2p\lambda xY_0-2p^2\lambda xY_1-2p^3\lambda xY_2-$$

$$-px^2Y_0-p^2x^2Y_1-p^3x^2Y_2+p\lambda^2Y_0+p^2\lambda^2Y_1+p^3\lambda^2Y_2=0$$

olacak şekilde bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemler

sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p 'nin kuvvetlerine göre aşağıdaki biçimde bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0 : \frac{d^2Y_0}{dx^2} - \frac{d^2u_0}{dx^2} = 0 \tag{7.105}$$

$$p^1 : \frac{d^2Y_1}{dx^2} + \frac{d^2u_0}{dx^2} - 2\lambda x Y_0 - x^2 Y_0 + \lambda^2 Y_0 = 0 \tag{7.106}$$

$$p^2 : \frac{d^2Y_2}{dx^2} - 2\lambda x Y_1 - x^2 Y_1 + \lambda^2 Y_1 = 0 \tag{7.107}$$

$$\vdots$$

(7.105)-(7.107) eşitlikleri $u_0(x,\lambda) = 1 + xh$ başlangıç şartı ile çözüldüğünde $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ terimleri sırasıyla,

$$Y_0 = 1 + xh,$$

$$Y_1 = -\lambda^2 \frac{x^2}{2} + \lambda(-\lambda h + 2)\frac{x^3}{6} + (2\lambda h + 1)\frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}h,$$

$$Y_2 = \lambda^4 \frac{x^4}{4!} + \lambda^3(\lambda h - 8)\frac{x^5}{120} + \lambda^2(-6\lambda h + 1)\frac{x^6}{360} +$$

$$+ \lambda(7\lambda h + 30)\frac{x^7}{2520} + (16\lambda h + 5)\frac{x^8}{3360} + \frac{x^9}{1440}h,$$

$$\vdots$$

olarak elde edilir. Böylece (5.83) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ terimleri kullanılarak

$$y(x,\lambda) = \lim_{p \to 1} Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \tag{7.108}$$

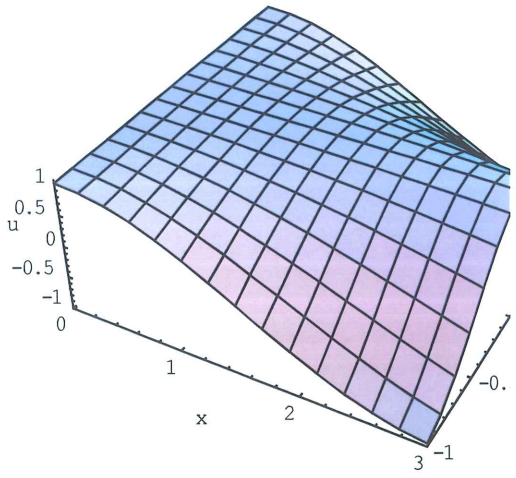
olacak şekilde (7.93), (7.94) başlangıç değer probleminin bir yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

7.3. DİFÜZYON DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

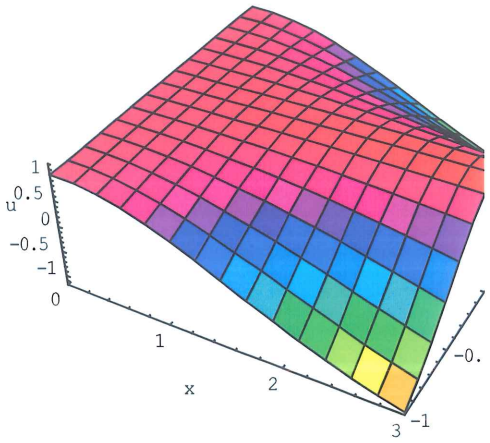
Bu kısımda, (7.1)-(7.2) Difüzyon denkleminin $p(x)$ ve $q(x)$ potansiyellerinin farklı alınmaları durumunda mevcut olan analitik çözümleri için ADM, HAM ve HPM kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlarının üç boyutlu görünümleri verilmiştir. Ayrıca bu nümerik sonuçların analitik çözümler ile arasındaki mutlak hata verileri grafikler ve tablolarla verilerek nümerik irdelemeleri yapılmıştır. Daha sonra HAM' da kullanılan ve elde edilen yaklaşık çözümün yakınsaklık aralığını belirlemede önemli bir rol oynayan $\hbar$ yardımcı parametresinin grafiği çizilerek Difüzyon denkleminin yaklaşık çözümleri için yakınsaklık aralığı belirlenmiştir. Belirlenen bu yakınsaklık aralığı içerisinde bulunan keyfi noktalarda $\hbar$ yardımcı parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın $\hbar$' ın hangi değerinde olduğu tablolarda gösterilmiştir.

İncelenen denklemin analitik çözümü $y(x,\lambda)$ olmak üzere ADM, HAM ve HPM kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm serileri $\phi_n(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1} y_n(x,\lambda),\ n\geq 1$ şeklinde ifade edilebilir.

a)



b)



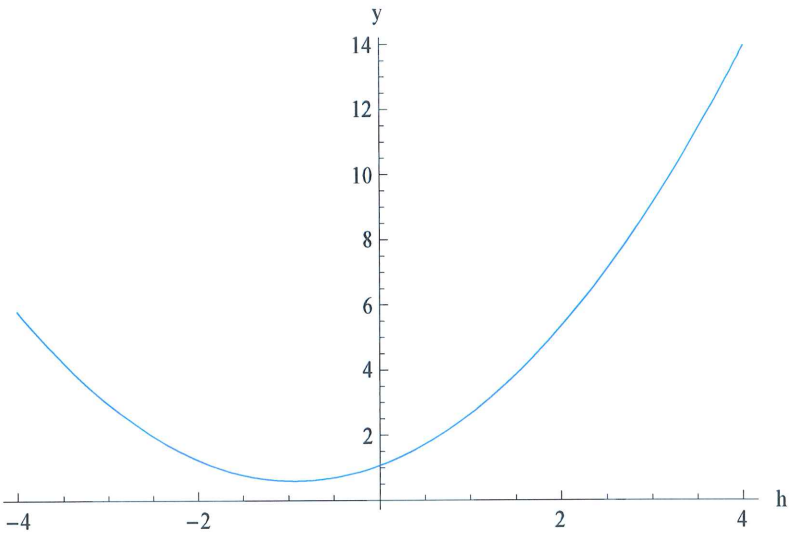
Şekil 7.1. $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin analitik çözümünün ve yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü **a)** $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin analitik çözüm fonksiyonunun üç boyutlu görünümü, **b)** $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin çözüm fonksiyonu için ADM, HAM($\hbar=-1$) ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü ($\alpha=1$)

Tablo 7.1. ADM, HAM($\hbar=-1$) ve HPM kullanılarak $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin çözüm fonksiyonu için mutlak hata ($h=0.05$)

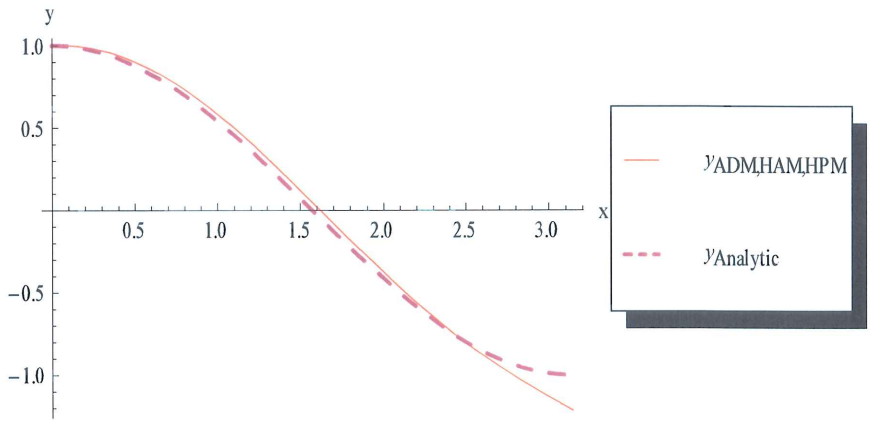
$y(x,\lambda)-\phi_3(x,\lambda)$					
λ_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.00499992	0.00499967	0.00499925	0.00499867	0.00499792
0.2	0.00999933	0.00999733	0.009994	0.00998934	0.00998334
0.3	0.0149978	0.014991	0.0149798	0.014964	0.0149438
0.4	0.0199947	0.0199787	0.019952	0.0199148	0.0198669
0.5	0.0249896	0.0249584	0.0249064	0.0248337	0.0247404

Tablo 7.2. $\hbar$ yardımcı parametresinin farklı değerleri için $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin çözüm fonksiyonunun mutlak hatası ($h=0.05$)

λ	$h=-1.4$	$h=-1.2$	$h=-1$	$h=-0.8$	$h=-0.6$
0.1	5.1985×10^{-3}	5.04811×10^{-3}	4.99792×10^{-3}	6.05742×10^{-3}	6.104×10^{-3}
0.2	1.079×10^{-2}	1.01858×10^{-2}	9.98334×10^{-3}	1.42253×10^{-2}	1.44119×10^{-2}
0.3	1.67731×10^{-2}	1.54054×10^{-2}	1.49438×10^{-2}	2.44924×10^{-2}	2.4913×10^{-2}
0.4	2.31526×10^{-2}	2.07018×10^{-2}	1.9867×10^{-2}	3.68414×10^{-2}	3.75901×10^{-2}
0.5	2.99394×10^{-2}	2.60731×10^{-2}	2.47407×10^{-2}	5.12486×10^{-2}	5.24204×10^{-2}



Şekil 7.2. $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin $\phi_3(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği

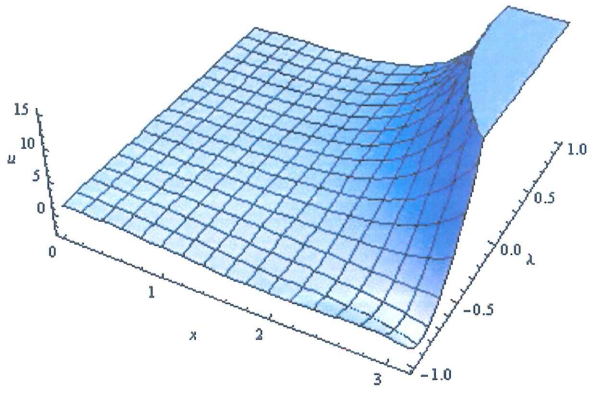


Şekil 7.3. $p(x)=q(x)=0$ olması halinde difüzyon denkleminin analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

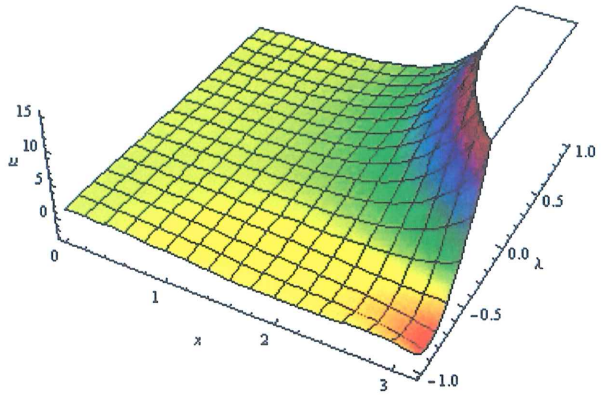
(7.1) ile verilen difüzyon denkleminin $p(x)=q(x)=0$ olması halinde ADM, HAM ve HPM ile elde edilen nümerik sonuçları Şekil 7.1, 7.3 ve Tablo 7.1, 7.2 'de verilmiştir. Tablo 7.1' de $y(x,\lambda)$ seri çözümünün sadece üç teriminde bile analitik çözüme çok yakın değerler elde edilmiştir. Bu tabloda HAM ile elde edilen sonuçlarda $\hbar=-1$, $H(x,t)=1$ alınmıştır. $\hbar$ yardımcı parametresinin bu şekildeki seçimiyle ADM ve HPM ile elde edilen nümerik sonuçların HAM ile elde edilen değerlere yakınsadığı sonucuna varılmıştır. Bu durum Tablo 7.1' den görülebilir. Ayrıca HAM ile elde edilen seri çözümlerde analitik çözüme en iyi yakınsamayı sağlamak amacıyla $\hbar$ yardımcı parametresinin grafiği çizilerek seri çözümün yakınsaklık aralığı bulunabilir. Şekil 7.2' de difüzyon denkleminin $p(x)=q(x)=0$ olması halinde HAM uygulanarak elde edilen seri çözümüne göre $\hbar$ yardımcı parametresinin eğrisi çizilmiştir. Bu şekilde görüldüğü gibi seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1.25\le\hbar\le-0.75$ aralığıdır. Bu aralık içerisinde en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği $\hbar$ parametresine değerler verilerek bulunabilir. Bu durum da Tablo 7.2 'de verilmiştir. Bu tabloda da $\hbar=-1$ değerinde analitik çözüme en iyi yakınsama görülmüştür.

(7.1) ile verilen difüzyon denkleminde $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde elde edilen denklem için de aşağıdaki değerlendirmeler söz konusudur:

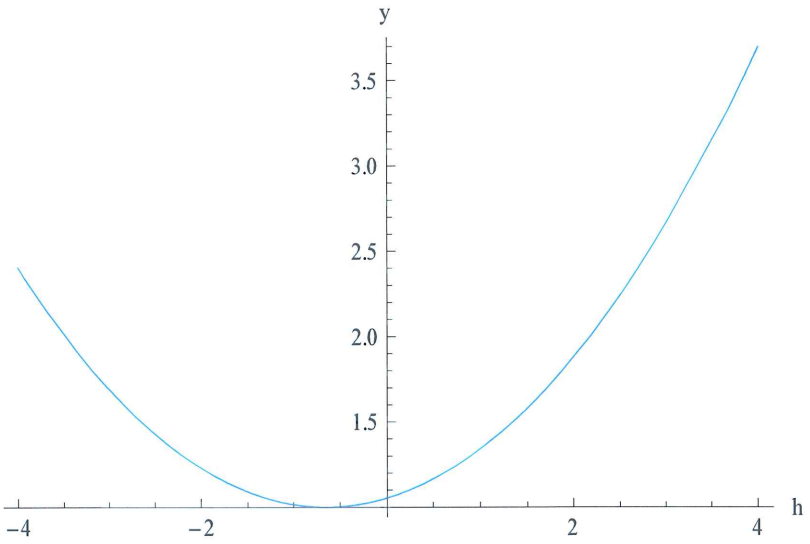
a)



b)



Şekil 7.4. $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde difüzyon denkleminin yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü **a)** $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde difüzyon denkleminin HAM($\hbar=-1$) ile elde edilen yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($h=0.05$), **b)** $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde difüzyon denkleminin çözüm fonksiyonu için ADM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin üç boyutlu görünümü ($h=0.05$)



Şekil 7.5. $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde difüzyon denkleminin $\phi_3(x,\lambda)$ için $\hbar$ eğrisinin grafiği

(7.1) ile verilen difüzyon denkleminin $p(x)=x$ ve $q(x)=x^2$ olması halinde ADM, HAM ve HPM ile elde edilen nümerik sonuçları Şekil 7.4' de verilmiştir. Bu koşullarla verilen denklemin analitik çözümü olmadığından hata analizi yapılamamıştır. Ancak Şekil 7.4' de hesaplanan nümerik çözümlerin birbirleri ile uyumlu oldukları görülmüştür. HAM ile elde edilen seri çözümlerde analitik çözüme en iyi yakınsamayı sağlamak amacıyla $\hbar$ yardımcı parametresinin grafiği çizilerek seri çözümün yakınsaklık aralığı bulunabilir. Şekil 7.5' de bu denklem için HAM uygulanarak elde edilen seri çözümüne göre $\hbar$ yardımcı parametresinin eğrisi çizilmiştir. Bu şekilde görüldüğü gibi seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1\le\hbar\le-0.5$ aralığıdır. Bu aralık içerisinde en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği $\hbar$ parametresine değerler verilerek de bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Abbaoui, K., Cherruault, Y.,** 1994. Convergence of Adomian's Method Applied to Differential Equations, Comp. Math. Appl., **28**, 103-109.

[2] **Abbaoui, K., Cherruault, Y.,** 1995. New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods, Comp. Math. Appl., **29**, 103-108.

[3] **Abdukadyrov, E.,** 1967. Computation of the Regularizad Trace for a Dirac System, Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh., **22** (4), 17-24.

[4] **Adomian, G.,** 1990. A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations, Math. Comp. Model., **13**, 17-43.

[5] **Adomian, G.,** 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

[6] **Algazin, S. D.,** 1995. Calculating the Eigenvalues of Ordinary Differential Equations, Comp. Maths. Math. Phys., **35** (4), 477-482.

[7] **Ambartsumyan, V.A.,** 1929. Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik, **53**, 690-695.

[8] **Amirov, R. Kh., Keskin, B., Özkan A. S.,** 2009. Direct and Inverse problems for Dirac operator with a spectral parameter linearly contained in a boundary condition, Ukrainian Math. J., **61** (9), 1365-1379.

[9] **Arutyunyan, T.N.,** 2008. Transformation operators for the canonical Dirac system, Differ. Uravn., **44**, 1011-1021.

[10] **Babaoğlu, M.,** 2009. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümlerinde Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Analiz Metodu' nun Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş.

[11] **Balcı, M.,** 1997. Matematik Analiz 2, Balcı Yayınları.

[12] **Baş E.,** 2006. Spektral ve Potansiyel Teorinin Ters problemleri, Doktora Tezi, Elazığ.

[13] **Boumenir, A., Chanane B.,** 1997. Eigenvalues of S-L systems using sampling theory, Applicable Analysis, **62**, 323-334.

[14] **Boumenir, A., Chanane B.,** 1999. Computing eigenvalues of Sturm-Liouville systems of bessel type, Proc. Edinburgh Math. Soc., **42**, 257-265.

[15] **Bulut, H.,** 2009. Comparing Numerical Methods for Boussinesq Equation Model Problem, Numerical Methods for Partial Differential Equations, **25** (4), 783-796.

[16] **Bulut, H., Baskonus H.M.,** 2010. A Study On The Numerical Solution Of The Third-Order Dispersive Equation With Homotopy Perturbation Method, e-Journal of New World Sciences Academy, **5** (1), 18-30.

[17] **Cardner, G., Green, J., Kruskal, M. and Miura, M.,** 1967. A Method for Solving the Korteweg-De Vries Equation, Phys. Rev. Lett., v. **19**, 1095-1098.

[18] **Chadan K., Sabatier P.C.,** 1989. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory, Second edition, Springer-Verlag.

[19] **Chanane, B.,** 1998. High Order Approximations of the Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems , **226**, 121-129.

[20] **Chanane, B.,** 1999. Computing eigenvalues of regular Sturm-Liouville problems, Appl. Math. Lett. , **12**, 119-125.

[21] **Chanane, B.,** 2005. Computation of the Eigenvalues of Sturm-Liouville Problems with Parameter Dependent Boundary Conditions Using The Regularized Sampling Method, **74**, 1793-1801.

[22] **Chanane, B.,** 2007. Computing the eigenvalues of singular Sturm-Liouville problems using the regularized sampling method, **184**, 972-978.

[23] **Cherruault, Y.,** 1989. Convergence of Adomian's Method, Kybernetes, **18**, 31-38.

[24] **Cherruault, Y., Adomian, G.,** 1993. Decomposition Methods: A New Proof of Convergence, Math. Comp. Model., **18**, 103-106.

[25] **Choudhary, B., Nanda, S.,** 1990. Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons Inc.

[26] **Debnath, L.,** 1998. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser.

[27] **Evans, W.D., Harris, B.J.,** 1980. Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., **A 88**, 1-15.

[28] **Faddeev, L.D.,** 1964. Properties of the S-Matrix of the One-Dimensional Schrödinger Equation trudy Mat. Inst. Steklow, **73**, 314-336.

[29] **Gasymov M.G.,** 1965. Determination of the Sturm-Liouville equation having singularity from two spectra, DAN SSSR, **161**, 274-276.

[30] **Gasymov, M.G.,** 1967. The Inserve Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n, Soviet Physics Dokl., **11**, 676-678.

[31] **Gasymov M. G., Dzhabiev, T. T.,** 1975. Determination of a system of Dirac differential equations using two spectra, Transactions of the summer school on spectral theory of operators, Bakü, 46-71.

[32] **Gasymov, M. G., Guseinov, G. Sh.,** 1981. Determination of diffusion operator on spektral data, Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSSR, **37** (2), 19-23.

[33] **Gasymov, M.G., Levitan, B.M.,** 1966. The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, **167**, 967-970.

[34] **Grosse, H., Martin, A.,** 1979. Theory of the Inverse Problem for Confining Potentials, Nuclear Phys., B 14 B, 413-432.

[35] **Hacısalihoğlu, H., H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown, L., M., İbikli, E., Brown, S.**, 2000. Türk Dil Kurumu, Matematik Terimleri Sözlüğü, Ankara.

[36] **Harris, B.J.**, 1983. Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators, Proc. Of the Royal Society of Edinburgh, **95 A**, 341-366.

[37] **Inç, M.**, 2007. On exact solution of Laplace equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions by the homotopy analysis method, Physics Letters A, **365**, 412-415.

[38] **Inç, M., Uğurlu, Y.**, 2007. Numerical simulation of the regularized wave equation by He's homotopy perturbation method, Physics Letters A, **369**, 173-179.

[39] **İç Ü.**, 2003. Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma göre Ters problem, Doktora Tezi, Elazığ.

[40] **İdemen, M.**, 1999. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Işık Üni., İstanbul.

[41] **Joa I., Minkin,** 1997. Eigenfunction estimate for a Dirac operator, Acta Math., Hungar., **4**, 337-349.

[42] **Kaya, D., Yokuş, A.**, 2005. A decomposition method for finding solitary and periodic solutions for a coupled higher-dimensional Burgers equations, Applied Mathematics and Computation, **164**, 857-864.

[43] **Kayalar M.**, 2003. Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Singüler Sturm-Liouville Operatörü için Ters problem, Doktora Tezi, Erzurum.

[44] **Kerimov, N.B.**, 2002. A boundary value problem for Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions, Differential Equations, **38** (2), 164-174.

[45] **Khasanov, A.B.**, 1994. On Eigenvalues of the Dirac Operator Located on the Continuous Spectrum, Theory and Math. Phys., v. **99**, No: 1, 20-26.

[46] **Kirsh, A.,** 1996. An introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer.

[47] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.,** 1961. Elements of the Theory of functions and Functional Analysis Volume 2 Measure, The Lebesque integral, Hilbert Space, Graylock Press, Albany N. Y.

[48] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.,** 1972. Elements of Functional Analysis and Theory of Functions, Moscow, Nauka.

[49] **Koyunbakan, H.,** 2002. Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Teorisi, Doktora Tezi, Elazığ.

[50] **Koyunbakan H., Yılmaz, E.,** 2008. Reconstruction of the potential function and its derivatives for the Diffusion operator, Verlag der Zeitschrift für Naturforch, 63a, 127-130.

[51] **Koyunbakan H., Yılmaz, E.,** 2010. Numerical Simulation of Diffusion Equation by Means of He's Variational Iteration Method and Adomian's Decomposition Method, Çankaya University Journal of Science and Engineering, 7, 25-38.

[52] **Kreyszig, E.,** 1978. Introduction to Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.

[53] **Lax, P.,** 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, Comm. Pure and Appl. Math., v. **21**,467-490.

[54] **Levitan, B. M., Sargsjan, I. S.,** 1975. Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[55] **Liao, S. J.,** 1992. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University.

[56] **Liao, S. J.,** 2003. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, Champan & Hall/CRC Press, Boca Raton., 322s.

[57] **Lukkassen, D.,** 2004. A short Introduction to Sobolev Spaces and Applications for engineering students.

[58] **Maksudov, F. G., Veliev, S. G.,** 1975. The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis, Soviet Math. Dokl., V. **16**, No: 6, 1629-1633.

[59] **Martynov, V.V.,** 1965. Conditions of Discreteness and Countinuity of the Spectrum in the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, 996-999.

[60] **Moses, H. E.,** 1956. Calculation of the scattering potentials from reflection coefficient, Bull. Amer. Phys. Soc., **4**, 240.

[61] **Musayev, B., Alp, M.** 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya.

[62] **Myint-U, T., Debnath, L.,** 2006. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser, Boston.

[63] **Nabiev, I.M.,** 2003. On reconstruction of Dirac operator on the segment, Proceeding of IMM of Nas of Azerbaijan, **18**, 97-102.

[64] **Naimark, M. A.,** 1969. Linear Differential operators, NAUKA.

[65] **Ocak, R.,** 1993. Kompleks Analiz, Atatürk Üni., Erzurum.

[66] **Otelbayev, M.O.,** 1973. Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator, Mat. Zametki, **14**, 843-852.

[67] **Panakhov, E.S.,** 1981. Inverse problem for Dirac system in two partially settled spectrum, VINITY 3304, 1-29.

[68] **Panakhov, E. S.,** 1985. The defining of Dirac system in two incompletely set collection of eigenvalues, Dokl. AN AzSSR, **5**, 8-12.

[69] **Panakhov E.S., Yilmazer R.**, 2006. On inverse problem for Singular Sturm-Liouville operator from two spectra, Ukrainian Mathematical Journal, 147-154.

[70] **Prats, F., Toll, J.**, 1959. Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, Phys. Rew., **113**, (1), 363-370.

[71] **Pryce, J. D.**, 1993. Numerical Solution of Sturm-Liouville Problems, Oxford Science Publications, Clarendon Press.

[72] **Quigg, C., Rosner, J. L., Thacker, H.B.**, 1978. Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and II Phys. Rev., D 18, No: **1**, 274-295.

[73] **Rajabi, A., Ganji, D. D., Taherian, H.**, 2007. Application of homotopy perturbation method in nonlinear heat conduction and convection equations, Phys. Lett., A, **360**, 570-573.

[74] **Repaci, A.**, 1990. Nonlinear Dynamical Systems: On the Accuracy of Adomian's Decomposition method, Appl. Math. Lett., **3**, 35-39.

[75] **Roos, B.W., Sangren, W.C.**, 1961. Spectra for a Pair Singular First Order Differential Equations, Proc. Amer. Math. Soc., V. **12**, 468-476.

[76] **Sargsjan, I.S.**, 1966. A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System, Dokl., Akad. Nauk. Arm. SSR, **42**, (2), 77-82.

[77] **Sargsjan, I.S.**, 1966. Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional Dirac System, Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., **1**, (6), 392-436.

[78] **Soykan, Y.**, 2008. Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

[79] **Şat M.**, 2012. Singüler Dirac Operatörünün Spektral Teorisi, Doktora Tezi, Elazığ.

[80] **Şuhubi, E. S.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları.

[81] **Tan, Y., Abbasbandy, S.,** 2008. Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **13**, 539-546.

[82] **Uluçay, C.,** 1978. Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri, Türkiye Cumhuriyeti Karadeniz Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi Yayınları.

[83] **URL-1,** http://planetmath.org/encyclopedia/ GronwallsLemma.html, 7 Ocak 2011.

[84] **URL-2,** http://planetmath.org/encyclopedia/ ProofofGronwallsLemma.html, 7 Ocak 2011.

[85] **URL-3,** http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed_problem, *Well-posed Problem*, 20 Aralık 2011.

[86] **Veliev, S.G.,** 1972. Inverse Problem for the Dirac Systems a the Whole Axis, DEP. VINITI, 4917-4972.

[87] **Verde, M.,** (1958/59). The inversion problem in wave mechanics and dispertion relations, Nuclear Phys., **9**, 255-266.

[88] **Watson, B. A.,** 1999. Inverse spectral problems for weighted Dirac systems, Inverse Problems, **15**, 793-805.

[89] **Wazwaz, A. M.,** 1999. A reliable modification of Adomian decomposition method, Appl. Math. Comp., **102**, 77-86.

[90] **Wazwaz, A. M.,** 2002. Partial Differantial Equations: Methods and Applications, Balkema Publishers, The Netherlands, 459s.

[91] **Yılmaz, E., Inç, M., Koyunbakan, H.,** 2009. A Numerical Implementation of The Decomposition Method for Dirac System, Turkish Journal of Science and Technology, **4** (2), 111-119.

[92] **Zayed A. I.,** 1993. Advances in Shannon's Sampling Theory, CRC Press, Boca Raton.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Kahramanmaraş'ta doğdum. İlkokul öğrenimini Atatürk İlkokulunda, ortaokul ve lise öğrenimini yine Kahramanmaraş'ta Kadriye Çalık Anadolu Lisesinde tamamladım. 2003 yılında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladım. 2007 yılında mezun oldum ve aynı yıl Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisansa başladım. 2009 yılı Haziran ayında yüksek lisans eğitimini tamamlayarak mezun oldum. 2009 yılı güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nın Uygulamalı Matematik programında doktoraya başladım. Halen doktora eğitimine devam etmekteyim.