

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RADYAL SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN
KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA
AÇIK ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Ökkeş ÖZTÜRK

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Doç. Dr. Reşat YILMAZER

MAYIS-2015

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RADYAL SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN
KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA AÇIK ÇÖZÜMLERİ**

**DOKTORA TEZİ
Ökkeş ÖZTÜRK
(111121207)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

Danışman: Doç. Dr. Reşat YILMAZER

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.04.2015
MAYIS-2015**

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RADYAL SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN
KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA AÇIK ÇÖZÜMLERİ**

**DOKTORA TEZİ
Ökkeş ÖZTÜRK
(111121207)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.04.2015
Tezin Savunulduğu Tarih: 29.05.2015**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER (İ.Ü.)
Prof. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü.)
Prof. Dr. Oktay MUHTAROV (G.O.P.Ü.)**

MAYIS-2015

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, akademik hayatım boyunca, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım, üzerimde emeği çok fazla olan sayın hocam Doç. Dr. Reşat YILMAZER'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı (ÖYP) kapsamında verilen eğitim ödeneği desteğinden dolayı Yüksek Öğretim Kurumu (YÖK)'e, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a, bölüm başkan yardımcısına, Prof. Dr. Etibar PENAHLI ve İnönü Üniversitesi'nden Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER'e ve bölümümüzde görevli bütün hocalarıma ayrı ayrı teşekkürlerimi sunarım.

Öğrencilik hayatımın başından beri, desteklerini benden esirgemeyen, haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim, ömrünü evlatlarına adayan çok kıymetli anne ve babama; bu süreçte en az benim kadar stres yaşayan, bana sabırla katlanan, sıkıntılara çözüm bulan sevgili eşim Hünkare Vildan ÖZTÜRK'e; çalışmalarımı engellemediği için de biricik oğlum Kerim Baki ÖZTÜRK'e sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunarım.

Ökkeş ÖZTÜRK
ELAZIĞ – 2015

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
TABLolar LİSTESİ	VII
SEMBOLLER LİSTESİ	VIII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. KESİRLİ DİFERİNTİGRAL VE GELİŞİMİ	3
1.2. TEMEL TANIMLAR.....	12
2. KESİRLİ DİFERİNTİGRALLER	21
2.1. KESİRLİ DİFERİNTİGRAL TANIMLARI.....	29
2.2. VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ	37
2.3. KESİRLİ DİFERİNTİGRALLERİN GENEL ÖZELLİKLERİ.....	47
2.4. KESİRLİ DİFERİNTİGRALLER İÇİN BAZI TEOREMLER	50
2.5. HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE GAUSS DİFERENSİYEL DENKLEMİ	55
3. RADYAL SCHRÖDINGER DENKLEMİ.....	58
4. RADYAL SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA AÇIK ÇÖZÜMLERİ.....	63
5. N-KESİRLİ HESAP OPERATÖRÜNÜN SİNGÜLER KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI	77
6. SONUÇ	93
KAYNAKLAR.....	94
ÖZGEÇMİŞ	97

ÖZET

Bu tez çalışması altı ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; kesirli diferintegralin tarihçesi, gelişimi, yapılan çalışmalar ve kullanım alanları özet halinde ifade edilmiştir. Ayrıca, tezde kullanılan bazı temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde; kesirli hesap teorisinin temel tanım, teorem ve özellikleri incelenmiştir. Uygulamalarda sıklıkla kullanılan bazı kesirli diferintegral tanımları, hipergeometrik fonksiyonlar ve Gauss diferensiyel denklemi ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde; Schrödinger denklemi ve bu denkleme ait radyal denklemin elde edilişi verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümler tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde; bazı teoremler ele alınmıştır. Bu teoremlerdeki radyal denklemlerin açık çözümleri, uygun dönüşümler ve kesirli hesabın uygun tanım ve teoremleriyle elde edilmiştir. Ayrıca, bu kesirli çözümlerin hipergeometrik formları verilmiştir.

Beşinci bölümde; dördüncü bölüme ait denklemlerin çözümleri N -kesirli hesap operatörü yardımıyla elde edilmiştir.

Altıncı bölümde ise; elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve bu konuda ön görülen bazı açık problemler ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kesirli diferintegral, Kesirli hesap teorisi, Kesirli analiz, Kesirli diferensiyel denklem, Kesirli integral denklem, Gamma fonksiyonu, Grünwald-Letnikov tanımı, Riemann-Lioville tanımı, Caputo kesirli türevi, Schrödinger denklemi, Radyal denklem, Radyal Schrödinger denklemi, Kesirli Schrödinger denklemi, Kesirli çözümlerin hipergeometrik formları, N -kesirli hesap operatörü.

SUMMARY

Explicit Solutions of The Radial Schrödinger Equation via Fractional Differintegral

This thesis consists of six main chapters.

In chapter one; it is expressed a historical analysis, evolution, works found and usage fields of the fractional differintegral in summary. Furthermore, some fundamental definitions used in thesis are also given.

In chapter two; The fundamental definitions, theories and properties of the fractional calculus theory are analyzed. Some definitions of the fractional differintegral that are usually used in applications, hypergeometric functions and Gauss differential equation are considered.

In chapter three; Schrödinger equation and formation of its radial equation are given.

Chapter four and chapter five form the original part of thesis.

In chapter four; Some theorems are investigated. Explicit solutions of the radial equations in this theorems are obtained by means of suitable transformations and, suitable definitions and theories of the fractional calculus. Furthermore, hypergeometric forms of this fractional solutions are derived.

In chapter five; solutions of the equations in chapter four are obtained via N -fractional calculus operator.

In chapter six; obtained results are evaluated and open problems proposed in this subject are presented.

Key Words: Fractional differintegral, Fractional calculus theory, Fractional analysis, Fractional differential equation, Fractional integral equation, Gamma function, Grünwald-Letnikov definition, Riemann-Liouville definition, Caputo Fractional derivative, Schrödinger equation, Radial equation, Radial Schrödinger equation, Fractional Schrödinger equation, Hypergeometric forms of fractional solutions, N - fractional calculus operator.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1.1. Kesirli Hesabın Tarihi Gelişimi.....	3
Şekil 1.2.1. Küresel Koordinat Sistemi.....	20
Şekil 2.1.1. Gamma fonksiyonu eğrisi.....	22
Şekil 2.3.1. $\alpha, \beta = 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonu.....	25
Şekil 2.1.8.1. Cauchy integral formülünün C yolu.....	33
Şekil 2.1.8.2. Diferintegral formülündeki C yolu.....	34

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.2.1. İntegral Denklemler.....	14
Tablo 2.1.1. Bazı n değerleri için gamma fonksiyonunun değerleri.....	23

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
${}_aD_t^\nu$	: ν keyfi mertebeli kesirli türev notasyonu
${}_aD_t^{-\mu}$	: μ keyfi mertebeli kesirli integral notasyonu
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
$B(p, q)$	: Beta fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	: Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(z)$	: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\text{erf}(x)$	: Hata fonksiyonu
$K(x, t)$	: İntegral dönüşümün çekirdeği
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	: $f(t)$ nin Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\}$	: $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü
e	: Dışmerkezlik
ε_0	: Vakum geçirgenliği ($8.854 \times 10^{-12} \text{ C/V.m}$)
n	: Enerji seviyesi (<i>Baş kuantum sayısı</i>)
$\mathbf{L}$	: Açısal momentum (<i>Moment</i>) operatörü
l	: Yörünge açısal momentum kuantum sayısı
$\hbar$	: Planck sabiti ($\hbar = 1.01 \times 10^{-34} \text{ Js} = \text{joule} \times \text{saniye}$)

v	: Çizgisel hız
r	: Dönme yarıçapı (<i>Radyal uzaklık</i>)
$V(r)$	: Potansiyel enerji
H	: Hamiltonyen dalga operatörü
∇^2	: 3-boyutlu Laplace operatörü
$\hat{p}$	: Momentum operatörü
Z	: Atom numarası
E	: m kütleli parçacığın toplam enerjisi (<i>Dalga enerjisi</i>)
Ψ	: Dalga fonksiyonu
θ	: Açısal uzaklık (<i>Kutupsal açı</i>)
ϕ	: Boylam açısı (<i>Azimet</i>)
m	: Kütle
g	: Yer çekimi ivmesi (9.8 m/s^2)
h	: Yükseklik
$Y(\theta, \phi)$	: Küresel harmonik
$R(r)$	: Radyal dalga fonksiyonu
${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$	: Gauss hipergeometrik seri
N^μ	: N -kesirli hesap operatörü

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve kesirli integral kavramlarının ortak adı olarak bilinen *kesirli diferintegral tekniği*; n pozitif bir tamsayı olmak üzere, klasik hesabın n . mertebeden türev ve n -katlı integral kavramlarının reel veya kompleks mertebeye bir genişlemesi şeklinde tanımlanan keyfi mertebeden türev ve integral teorisidir. *Kesirli hesap* veya *kesirli analiz* olarak da adlandırılabilir. $\nu \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, keyfi mertebeden türev; Davis tarafından kullanılan ${}_a D_t^\nu f(t)$ notasyonu ile verilir. $\mu \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, keyfi mertebeden integral ise; ${}_a D_t^{-\mu} f(t)$ ile gösterilir.

Kesirli türevleri içeren bir denkleme *kesirli diferensiyel denklem*, kesirli integralleri içeren bir integral denkleme de *kesirli integral denklem* adı verilir. Kesirli diferensiyel denklemler, tamsayı mertebeli diferensiyel denklemlere göre daha karmaşık yapıdadır. Bunları iyi anlayabilmek için öncelikle önemli belli tanımları (*Gamma fonksiyonu*, *Beta fonksiyonu*, *Mittag-Leffler fonksiyonları*, *Laplace dönüşümü*, *Riemann-Liouville integral ve türev operatörleri*, *Caputo türev operatörü*, *Grünwald-Letnikov türevleri gibi*) iyi anlamak ve bilmek gerekir [1,2].

Kesirli hesabın içeriğinde klasik hesapta olduğu gibi tek bir türev tanımı yoktur. Kesirli hesaptaki birden fazla türev tanımının varlığı, problemin türüne en uygun olanının kullanılmasını ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. En önemli kesirli türevler: Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz ve Marchaud tanımlarıdır. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılık gösterirler.

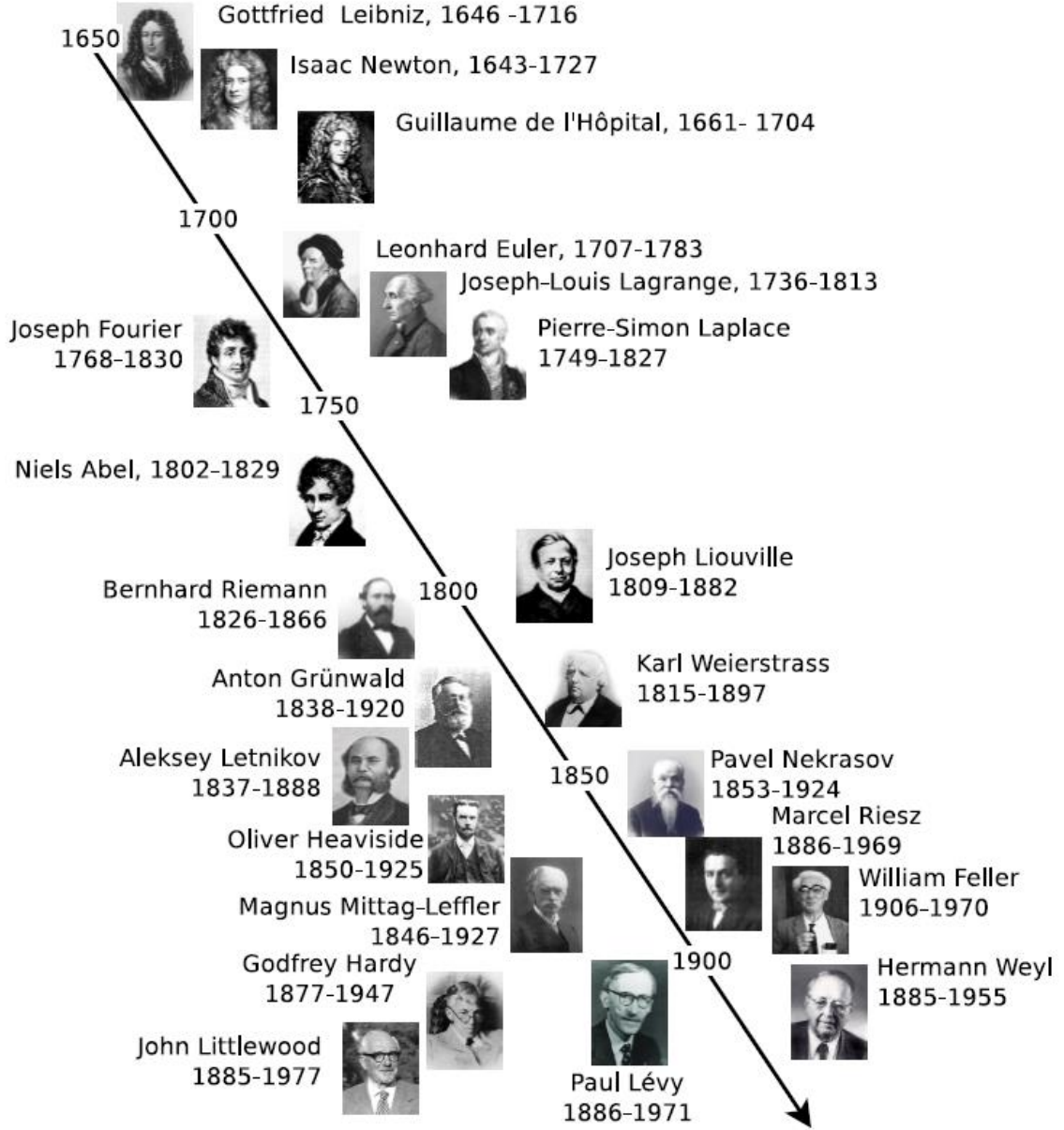
Riemann-Liouville tanımları, kesirli türev ve kesirli integral ile onların uygulamalarına yönelik matematiksel çalışmalara çok önemli katkı sağlamıştır. Ancak zamanla, bazı fiziksel olguları modellemede, kesirli diferensiyel tekniğinde başlangıç koşullarını, fiziksel durumlara en uygun biçimde veren Caputo türevinin daha avantajlı olduğu görülmüştür. Caputo türevi olarak da bilinen Caputo'nun tanımı, Riemann-Liouville tanımının üzerinde bazı değişikliklerle elde edilmiştir. Tamsayı mertebeden diferensiyel denklemlerdeki başlangıç koşullarıyla aynı başlangıç koşulları kullanıldığından, özellikle başlangıç değer problemlerinde Caputo türevi daha kullanışlı olmaktadır.

Kesirli hesap için birden çok tanımın olması ve matematiksel işlemlerde farklı tanımların kullanılması bir çok zorluğa sebep olmuştur. Ancak zamanla problem türleri daha iyi sınıflandırılmış ve hangi problemde ne tür bir tanımın daha kullanışlı olabileceği netlik kazanmıştır. Bilinen analitik yöntemlerin uygulanıp sistemlerin davranışları tam olarak açıklanamadığı durumlarda kesirli hesabın uygulanması gerekebilir [3].

1695'den bu yana, fen ve mühendislik bilimlerinin birçok teori ve uygulama alanlarında kullanılan kesirli diferintegral tekniği ve bu teknik üzerine yapılan çalışmalar; matematik, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik vb. alanlarda çeşitli uygulamalara imkan sağlamıştır. Bunun temel sebebi; iletim hatları teorisi, izafiyet teorisi, elektromanyetik teorisi, esneklik teorisi, viskoelastik madde özelliklerinin ölçümü ve sönüm, ısı transferi, difüzyon, robot teknolojisi, akışkanlar dinamiği, kesirli türevli trafik model, visko-plastik modelleme, kontrol teorisi, ekonomi, nükleer manyetik rezonans, mekanik problemleri, geometrik mekanik, optik, sinyal işleme, PID (*Proportional (Oransal), Integral (İntegral), Derivative (Türev)*) kontrol sistemleri, Schrödinger denklemi, dalga denklemi, kaos, yayılım ve dalga hareketleri, malzeme birimi, sıvıların kimyasal analizi, insan kemiğinde yayılan ultrasonik dalgalar, ses dalgaları, filtreleme ve tersinemezlik, kontrolör tasarımı, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketi, elektrokimyasal kinetikler vb. birçok alanda kesirli hesabın gerçeğe daha uygun modelleme ve açıklama yapabilmesidir [1,2].

Temeli kesirli analize dayanan bu çalışmada ise, kesirli hesaba ait önemli çalışmalar, tanımlar, teoremler ve çeşitli özellikler ele alınmıştır. Ardından, fizik alanında kuantum mekaniğinin en önemli denklemlerinden biri olan Schrödinger denkleminin radyal bileşeninden oluşan denklemin elde edilişi verilmiş ve radyal Schrödinger denklemlerinin açık çözümleri, uygun dönüşümler ve kesirli analize ait tanım ve teoremler yardımıyla elde edilmiştir. Aynı zamanda, bulunan çözümler hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazılmış ve aynı radyal denklemlerin özel çözümleri ise, N -kesirli hesap operatörü uygulanarak elde edilmiştir.

1.1. Kesirli Diferintegral ve Gelişimi



Şekil 1.1.1. Kesirli Hesabın Tarihi Gelişimi

1695’de L’Hopital’in Leibniz’e yazdığı mektupta, “Eğer $n = 1/2$ şeklinde bir kesir olursa, $d^n y/dx^n$ ifadesinden ne anlaşılır?” sorusunu sormasıyla kesirli türev ve integral (diferintegral) kavramı ortaya çıkmıştır. Leibniz ise, önceleri bir çelişki olarak görünen ama sonrasında çok önemli sonuçlar ortaya çıkaran “ $d^{1/2}y/dx^{1/2} = 2\sqrt{x/\pi}$ ” cevabını vermiştir.

Aynı zamanda, $d^{1/2}x$ ifadesinin $x\sqrt{dx}:x$ e eşit olabileceğini ve daha sonraları da sonsuz serilerin kesirli hesaplamayı ifade edebileceğini düşünmüştür.

Kesirli hesap konusu Leibniz'in yanı sıra bir çok ünlü bilim adamının da dikkatini çekmiş ve bu konuda onlar da çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Böylece, Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Fourier (1822) gibi 18. yy'daki ve 19. yy'daki pek çok matematikçinin çalışmaları eklenmiş ve yeni bir teori gelişmeye başlamıştır.

* *L. Euler (1730)*, serilerin interpolasyonunun yararlı olabileceğinden bahsetmiştir.

* *J. L. Lagrange (1772)*, geliştirmiş olduğu,

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y$$

şeklindeki mertebesi tamsayı olan diferensiyel operatörler için üsler kuralında, m ve n kesirli olduğunda, kuralın geçerli olup olmadığını sorgulamıştır.

* *P. S. Laplace (1812)*, bir integral vasıtasıyla bazı kesirli türev ifadeleri tanımlamış ve ilk olarak 1819'da keyfi mertebeli bir türevden söz etmiştir.

* *S. F. Lacroix (1819)*, m pozitif bir tamsayı olmak üzere tümevarımdan faydalanarak, $y = x^m$ nin n . mertebeden türevini,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad (m \geq n)$$

şeklinde geliştirmiştir. Daha sonra Gamma fonksiyonunu kullanarak,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

formülünü vermiştir. Buradan da $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olmak üzere, $y = x$ ve $n = 1/2$ alarak,

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

tanımına ulaşmıştır.

* *J. B. J. Fourier (1822)*,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x - \alpha) dp$$

formülü ile keyfi mertebeli türevlerden söz etmiştir. n bir tamsayı olmak üzere,

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos p(x - \alpha) = p^n \cos \left[p(x - \alpha) + \frac{1}{2} n\pi \right]$$

şeklinde alıp, bunu da genelleştirip n yerine keyfi ν değerini yazarak,

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^\nu \cos \left[p(x - \alpha) + \frac{1}{2} \nu\pi \right] dp$$

tanımını vermiştir. Fourier, buradaki ν sayısının pozitif veya negatif herhangi bir değer olabileceğini belirtmiştir.

* *N. H. Abel (1823)*, kesirli işlemleri ilk olarak kullanan bilim adamıdır. Abel, Riemann-Liouville kesirli integrali ile tanımlanan bir integral eşitliği biçiminde tautochrone probleminin çözümünü elde etmiştir. Böylece, yerçekiminin etkisinde, sürtünmesiz bir ortamda yukarıdan aşağıya sarkıtılan bir cismin salınımı sonucunda oluşan eğrinin bulunması problemi olan tautochrone mühendislik problemi, kesirli hesap ile formüle edilen ilk problem olmuştur. Abel'in integral denklemi,

$$k = \int_0^x (x - t)^{-1/2} f(t) dt$$

şeklindedir. Bu denklemin sağ tarafına $\sqrt{\pi} [d^{-1/2}/dx^{-1/2}] f(x)$ yazarak düzenleme yapmış ve

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x)$$

formülünü vermiştir. Bu denklemde $f(x)$ i belirleyerek kesirli hesapta önemli bir başarı sağlamıştır.

* *J. Liouville (1832-1834)*, $(d^{1/2}/dx^{1/2})e^{2x}$ ifadesini düşünmüş ve kesirli operatörleri kullanarak mekanik ve geometrinin bazı problemlerini çözmüştür.

Ayrıca, keyfi mertebeden türevler için,

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

tanımını geliştirmiştir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad (\operatorname{Re} a_n > 0),$$

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}$$

formundaki seride, bir $f(x)$ fonksiyonunun keyfi türevinin açık olarak yazılabileceğini düşünmüştür. İkinci bir tanım elde etmek için Gamma fonksiyonu ile ilişkili,

$$\Gamma = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \quad (a > 0, x > 0)$$

şeklindeki belirli integrali kullanmıştır. Burada $xu = t$ alarak,

$$\Gamma = x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = x^{-a} \Gamma(a),$$

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \Gamma$$

formüllerini vermiştir. Bu son denkleme D^ν operatörünü uygulayarak da,

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+\nu-1} e^{-xu} du,$$

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}, \quad a > 0$$

tanımına ulaşmıştır. $d^n y/dx^n = 0$ integral denkleminin $y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ şeklinde tamamlayıcı bir çözüme sahip olduğunu belirtmiş ve keyfi ν değeri için, $d^\nu y/dx^\nu = 0$ denkleminin de tamamlayıcı bir çözüme sahip olup olmadığını tartışmıştır.

* *D. F. Gregory (1841)*, operatörler hesabı tanımının kurucusu olup,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{dz}{dy}$$

formundaki ısı denkleminin çözümünü,

$$z = Ae^{y\beta^{1/2}} + Be^{y\beta^{1/2}}$$

ile vermiştir. Burada, $\beta = a^{-1}(d/dx)$ şeklindedir.

* *B. Riemann (1847)*, Taylor serilerini genelleştirerek kesirli integral tanımını,

$$\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x) = D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

şeklinde vermiştir. Bu tanıma tamamlayıcı bir fonksiyon eklemeyi uygun görmüştür. Burada, integralin alt limiti olan c nin ve tamamlayıcı fonksiyonun değeri ‘0’ alınarak, kesirli integrasyon tanımına uygun hale getirilmiştir.

* *C. J. Hargreave (1848)*, n . mertebeden genelleştirilmiş Leibniz türevi üzerine çalışmıştır. Böylece,

$$D^\nu [f(x)g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} D^n f(x) D^{\nu-n} g(x)$$

formülünü vermiştir. Burada, D^n n . mertebeden diferensiyel operatör, $D^{\nu-n}$ kesirli bir operatör ve

$$\binom{\nu}{n} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{n! \Gamma(\nu-n+1)}$$

şeklindedir.

* *A. K. Grünwald (1867)*,

$$\theta = \int_0^x (x-t)^\nu f(t) dt$$

formülünü elde etmiştir ki burada θ , x in bilinen fonksiyonudur.

* *A. V. Letnikov (1868)*,

$$[D^\mu D^\nu f(x)]_{x_0}^x = [D^{\mu+\nu} f(x)]_{x_0}^x$$

formülünü ispatlamıştır. Ayrıca, Cauchy integral formülünden yararlanarak,

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$$

tanımını vermiş ve n yerine $\nu \in \mathbb{R}$ yazarak,

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{\nu+1}} d\omega$$

formülünü elde etmiştir.

* *P. A. Nekrassov (1888)*, Liouville'un ν . merteben diferensiyel için geliştirdiği,

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

formülünü kullanarak $(x - a)^q$ nun keyfi mertebeli türevini bulmuştur.

* *O. Heaviside (1892)*, kablolardaki elektrik akımının iletkenlik teorisindeki metotlarını kullanarak mühendislere çok fayda sağlamıştır. a^2 bir sabit ve u ise sıcaklık olmak üzere bir boyutlu ısı denklemini,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

olarak belirlemiştir. Burada $\partial/\partial t = p$ alarak, $D^2 u = a^2 p$ biçiminde düzenlemiştir. Bu denklemin çözümünü ise Gregory (1841),

$$u(x, t) = A e^{xap^{1/2}} + B e^{-xap^{1/2}}$$

şeklinde elde etmiştir.

* *E. Post (1919)*, kesirli hesap operatörleri ile alakalı iki probleme iki farklı çözüm üretmeye çalışmıştır.

İlk çözümünde,

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

şeklindeki Liouville'un kesirli mertebeli integrasyon tanımını, $c = -\infty$ olarak kullanmıştır. İkinci çözümünde ise Riemann tanımından yararlanmıştır.

* *M. T. Naraniengar (1919)*,

$$D^{1/2}(x^n) = R(n)x^{n-(1/2)}$$

denklemini üzerine çalışmış ve $\Gamma(n+1)/\Gamma[n+(1/2)]$ değerine karşılık gelen $R(n)$ katsayısını geliştirmiştir.

* *G. H. Hardy (1922)*, özellikle toplam ve süreklilik teoremlerinin kesirli mertebeden integral özelliklerini, tamsayı mertebeli olanlarla benzerliklerini göz önünde bulundurarak incelemiştir.

* *W. C. Brenke (1922)*, fizikte kullanmak için,

$$Q(h) = c \int_0^h (h-t)^{1/2} f(t) dt$$

şeklindeki denklem ve bu denklemin uygulamaları üzerine çalışmıştır.

* *P. Levy (1923)*, e^{iz} ifadesinin kesirli türevini düşünmüş ve bunun üzerine çeşitli çalışmalar yapmıştır.

* *H. T. Davis (1924-1927)*, kesirli hesap operatörlerini tanımlamada kullanılan çeşitli notasyonları ele almıştır.

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

ifadesini tanımlamak için ${}_c D_x^{-\nu} f(x)$ notasyonunu kullanmıştır. ${}_c D_x^{1/2} u + \lambda u = f(x)$ gibi kesirli üsse sahip bazı diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için de bu notasyonu uygulamıştır.

* *D. Marchaud (1927)*, $0 < \nu < \ell$ için,

$$D^\nu f(x) = \frac{1}{C_{\nu,\ell}} \int_0^\infty \frac{\Delta_u^\ell f(x)}{u^{1+\nu}} du$$

kesirli türev tanımını vermiştir.

* *G. H. Hardy ve J. E. Littlewood (1928)*, standart sınıftan bazı fonksiyonların keyfi mertebeli türev ve integrali için tanımlanan Riemann-Liouville tanımını geliştirmeyi amaçlamışlardır.

* *M. Riesz (1949)*, Riemann uzayındaki dalga denklemi, izafiyet teorisi, Lorenz uzayı ve olasılık teorisinde,

$$I^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

şeklindeki kesirli integralin çeşitli yönlerinden bahsetmiştir.

* *N. Stuloff (1950)*,

$$\Delta^\nu x_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\nu}{k} x_{n+k}$$

eşitliği ile kesirli mertebenin farklarını ele almıştır.

* *B. Kuttner (1953)*,

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} f(t) dt$$

ve

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_x^1 (t-x)^{n-k-1} f(t) dt$$

şeklindeki iki integral arasındaki ilişkiyi düşünmüştür.

* M. Caputo (1967),

$${}_a^C D_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\nu+1-n}}, \quad (n - 1 < \nu < n)$$

şeklindeki kesirli türev formülünü tanımlamıştır.

* K. B. Oldham ve J. Spanier (1970), adi diferensiyel olarak adlandırdıkları, $1/2$ mertebeli $d^{1/2}f(t)/dt^{1/2}$ şeklindeki operatör yardımıyla elektrokimyasal kinetikleri açıklayabilecekleri yeni bir yöntem bulduklarını iddia etmişlerdir.

* K. S. Miller ve B. Ross (1993),

$$D^\nu f(t) = D^{\nu_1} D^{\nu_2} \dots D^{\nu_n} f(t), \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n)$$

eşitliğini vermişlerdir [4-9].

Başlangıcından bu yana, bir çok bilim adamının dikkatini çekerek geniş bir uygulama alanına sahip olan ve her geçen gün popülaritesini arttıran kesirli diferintegral konusu ile alakalı çeşitli konferanslar da düzenlenmiştir. Bu doğrultuda ilk konferans; Haziran 1974'te ABD'nin New Haven Üniversitesi'nde, ikincisi; Ağustos 1984'te İskoçya'nın Strathclyde Üniversitesi'nde, üçüncüsü ise; Mayıs-Haziran 1989'da Japonya'nın Nihon Üniversitesi'nde “*Uluslararası Kesirli Hesap ve Uygulamaları Konferansı*” adı altında gerçekleştirilmiştir. “*Kesirli Türevler ve Uygulamaları Sempozyumu (FDTA)*” adlı konferanslar ABD’de olmak üzere sırasıyla; 2003’te Şikago’da, 2005 ve 2009’da Kaliforniya’da, 2007’de Las Vegas’ta ve 2013’te Portland’da düzenlenmiştir. Düzenli olarak yapılan konferanslardan bir diğeri “*Kesirli Diferensiyel ve Uygulamaları Çalıştayı (FDA)*” ise; 2004’te Bordo (Fransa)’da, 2006’da Porto (Portekiz)’da, 2008’de Ankara (Türkiye)’da, 2010’da Badajoz (İspanya)’da, 2012’de Nankin (Çin)’de, 2013’te Grenoble (Fransa)’da ve 2014’te Katanya (İtalya)’da bu konuya ilgi duyan bir çok bilim adamının yoğun katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Son yıllarda farklı ülkelerde, benzer konferanslar, sempozyumlar ve çalıştaylar, birçoğu düzenli olmak üzere sıklıkla ve yeni gelişmelere olanak sağlayacak şekilde düzenlenmiş ve düzenlenmeye devam etmektedir.

1.2. Temel Tanımlar

Tanım (Basit Kutup Noktası): Bir f karmaşık fonksiyonu, bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f ye, z_0 noktasında *analitik fonksiyon* denir. Eğer f , bir A kümesinin bütün noktalarında analitikse, A üzerinde *analitik fonksiyon*, $\mathbb{C}$ nin bütün noktalarında analitikse, *tam fonksiyon* olur. Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının ε –komşuluğu; $D(z_0, \varepsilon) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$ şeklindedir. Burada, z_0 noktasına *komşuluğun merkezi*, ε sayısına ise *komşuluğun yarıçapı* ve $D(z_0, \varepsilon)$ kümesine de *açık disk* denir. $\bar{D}(z_0, \varepsilon) = \{z: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesine ise *kapalı disk* denir. Bir $D(z_0, \varepsilon)$ komşuluğu verildiğinde, $D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\} = N_0$ kümesine z_0 ın *delinmiş komşuluğu* denir. Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $D(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik, fakat z_0 da analitik değilse f , z_0 da bir *ayrık aykırı (singüler) noktaya* sahiptir. Eğer $w = f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında ayrık aykırılığı varsa, bu noktanın delinmiş bir $A = \{z: s_1 < |z - z_0| < s_2\}$ komşuluğunda f nin

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

şeklinde seri açılımı vardır. Bu seriye, f nin z_0 delinmiş komşuluğundaki *Laurent serisi* denir. z_0 , f nin bir ayrık aykırı noktası olmak üzere, Laurent açılımında a_{-n} katsayılarından sonlu sayıdakiler hariç diğerlerinin tümü sıfıra eşitse z_0 , f nin bir *kutup noktası* olur. Eğer k , $a_{-k} \neq 0$ özelliğindeki en büyük sayı ise z_0 , f nin k . mertebeden *kutup noktası*, özel olarak $k = 1$ ise, bir *basit kutup noktası* olur [10].

Tanım (Bölge): $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Bir $z \in S$ noktası için $D(z, \varepsilon) \subset S$ olacak şekilde bir ε varsa, z ye S nin bir *iç noktası* denir. Eğer $\forall z \in S$ noktası S nin bir iç noktası ise, S ye *açık küme* denir. $S_1 = S \cap A_1 \neq \emptyset$, $S_2 = S \cap A_2 \neq \emptyset$ ve $S = S_1 \cup S_2$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ içinde ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri bulunamıyorsa, S ye *bağlantılı küme* denir. Bağlantılı bir S kümesinin herhangi iki noktası S içinde kalan bir kırık çizgi ile birleştirilebilir. Bağlantılı açık kümeye ise *bölge* denir [10].

Tanım (Kapalı Çevre): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, sürekli bir $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir *eğri* denir. Burada, $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla *eğrinin başlangıç ve bitim noktaları* denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ , *diferensiyellenebilir eğri (yay)* adını alır.

γ diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere, $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ ya, *düzgün eğri* (*regüler eğri*) denir. Sonlu sayıda γ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) düzgün eğrileri verilsin. Eğer bütün $j = 1, 2, \dots, n - 1$ değerleri için γ_j nin bitim noktası γ_{j+1} in başlangıç noktası ile çakışiyorsa, bu γ_j eğrilerinin birleşimi olan γ eğrisine *çevre* (*parçalı düzgün eğri*) denir. Özel olarak γ_1 in başlangıç noktası γ_n nin bitim noktası ile çakışiyorsa *kapalı çevre* denir [10].

Tanım (Cauchy İntegral ve Türev Formülü): Kompleks düzlemde B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı çevre olsun. Eğer a , γ içinde bir nokta ve $f(z)$, B de analitik ise;

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

dir. Kompleks düzlemde $w = f(z)$ fonksiyonu, bir γ kapalı çevresinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer a , γ nın içinde bir nokta ise;

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

dir [10].

Tanım (Adi Diferensiyel Denklem): Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini veya diferensiyellerini içeren bağıntıya *diferensiyel denklem* denir. Bir diferensiyel denklemde bir tek bağımsız değişken varsa, denkleme *adi diferensiyel denklem* denir. y bağımlı, x bağımsız değişkenli bir adi diferensiyel denklem,

$$F(x, y, y'y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır [11].

Tanım (İntegral Denklemler): $f(x)$ ve $g(x)$ bilinen fonksiyonlar, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(x, t)$ çekirdek fonksiyon, a ve b sabitler olmak üzere integral denklemler:

Tablo 1.2.1. İntegral Denklemler

	<i>Volterra İntegral Denklemleri</i>	<i>Fredholm İntegral Denklemleri</i>
1.Cins	$g(x) = \int_a^x K(x, t)u(t)dt$ $g(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt$	$g(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt$ $g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt$
2.Cins	$u(x) = \int_a^x K(x, t)u(t)dt$ $u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt$	$u(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt$ $u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt$
3.Cins	$u(x)g(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt$	$u(x)g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt$

şeklindedir. $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olmak üzere, en genel haliyle Volterra ve Fredholm integral denklemleri sırasıyla,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt,$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilirler [12].

Tanım (Diferensiyel Denklemin Çözümleri): F fonksiyonu, $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ gibi $(n + 2)$ değişkenli bir reel fonksiyon olmak üzere;

i.) f , bir I reel aralığında bütün x ler için tanımlı ve n . türeve sahip bir reel fonksiyon olsun. $\forall x \in I$ için, $F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x))$ tanımlı ve sıfıra eşitse $y = f(x)$, (1.1)'in bir *açık çözümü* olur.

ii.) Bir $g(x, y) = 0$ fonksiyonu, bir I aralığında (1.1)'i sağlarsa buna (1.1)'in *kapalı çözümü* denir.

iii.) (1.1)'in, $f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ şeklinde $c_1, c_2, \dots, c_n$ gibi n tane keyfi sabit içeren çözümüne *genel çözüm* denir.

iv.) Genel çözümdeki n keyfi sabite belli değerler verilerek elde edilen çözüme *özel çözüm* denir.

v.) Genel çözümdeki n keyfi sabitin herhangi bir şekilde seçimi ile elde edilemeyen çözüme de *tekil çözüm* denir [11].

Tanım (Legendre Denklemi): $y = y(x)$ olmak üzere,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell + 1)y = 0 \quad (1.3)$$

formundaki denkleme *Legendre diferensiyel denklemi* denir ($\ell \in \mathbb{R}^+$). (1.3)'ün tekil noktaları; $x = \pm 1$ dir. Bunların dışındaki tüm noktalar, özellikle $x = 0$ bir adi noktadır. Bu nokta civarındaki çözümler, $|x| < 1$ aralığında yakınsak kuvvet serisi açılımına sahiptirler [13].

Tanım (Bessel Denklemi): $y = y(x)$ olmak üzere,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

diferensiyel denklemine *Bessel denklemi* denir ($v \geq 0, v \in \mathbb{R}$). $x = 0$, denklemin bir düzgün aykırı noktasıdır. Bessel denklemi de kuvvet serileri cinsinden çözümlere sahiptir [13].

Tanım (Laguerre Denklemi): $y = y(x)$ olmak üzere,

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0 \quad (1.4)$$

şeklindeki lineer diferensiyel denkleme *Laguerre denklemi* denir. Bu denklemin çözümleri polinomlar cinsinden olup, bu polinomlara *Laguerre polinomları* denir.

(1.4)'ün tekil olmayan çözümleri, yalnızca n negatif olmayan tamsayı ise vardır. Laguerre polinomları, kuantum mekaniğinde Schrödinger denkleminin radyal kısmının çözümlenmesinde ortaya çıkar. Laguerre polinomları,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

ile verilir [14].

Tanım (Gegenbauer Denklemi):

$$(1 - x^2) \frac{d^2 C_n^\lambda(x)}{dx^2} - (2\lambda + 1)x \frac{dC_n^\lambda(x)}{dx} + n(n + 2\lambda)C_n^\lambda(x) = 0$$

denkleminde *Gegenbauer denklemi* denir. Bu denklem, $\lambda = 1/2$ değeri için Legendre denkleminde indirgenir. n parametresinin tamsayı olması durumunda denklemin çözümü,

$$C_n^\lambda(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{\Gamma(n - r + \lambda)}{\Gamma(\lambda)r!(n - 2r)!} (2x)^{n-2r}$$

şeklinde *Gegenbauer polinomları* yardımıyla ifade edilir [6].

Tanım (Vektör Uzayı): $V \neq \emptyset$ ve $\mathbb{F}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $x, y \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $V \times V \rightarrow V$ tanımlı, $+: (x, y) \rightarrow x + y$ işlemi ve $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ tanımlı, $\cdot: (\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$ işlemi, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall x, y, z \in V$ için,

$$(i) \quad x + y = y + x, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(ii) \quad x + 0 = x \text{ olacak biçimde } x \text{ den bağımsız bir tek } 0 \in V \text{ vardır.}$$

$$(iii) \quad x + (-x) = 0 \text{ olacak biçimde bir tek } -x \in V \text{ vardır.}$$

$$(iv) \quad 1 \cdot x = x, \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$$

$$(v) \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

aksiyomlarını sağlarsa V kümesine $\mathbb{F}$ üzerinde bir *lineer uzay (vektör uzayı)* denir. Eğer $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise *reel vektör uzayı*, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise *kompleks vektör uzayı* denir. $\mathbb{F}$ nin elemanlarına *skaler*, V nin elemanlarına da *vektör* denir [15].

Tanım (İç Çarpım Uzayı): V bir reel vektör uzay olsun. $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için, V üzerinde bir iç çarpım;

i.) $\langle x, x \rangle \geq 0$

ii.) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii.) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

iv.) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

özelliklerini sağlayan bir $\langle ., . \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonudur. V bir kompleks veya reel vektör uzay ve $\langle ., . \rangle$, V üzerinde bir iç çarpım ise; $(V, \langle ., . \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir [15].

Tanım (Afin Uzay): $A \neq \emptyset$ ve V de reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Eğer bir $\psi: A \times A \rightarrow V$ dönüşümü; $P, Q \in A$ noktaları için, $(P, Q) \rightarrow (\overrightarrow{PQ}) \in V$ şeklinde tanımlanmış ve

i.) $\forall P, Q, R \in A$ için, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

ii.) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için, $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası var

aksiyomlarını sağlıyorsa A ya, V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir [16].

Tanım (Öklid uzayı): 3-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına 3-boyutlu öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir. 3-boyutlu öklid uzayında bir nokta X ve bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları (x_1, x_2, x_3) olsun. $x_i = E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bileşenlerine E^3 ün i . koordinat fonksiyonu denir. $\mathbb{R}^3$ standart reel afin uzay olmak üzere, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ için, $\mathbb{R}^3$ de bir $\langle ., . \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ iç çarpımı;

$$\langle ., . \rangle(X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlansın. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ de standart iç çarpım (öklid iç çarpımı) denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^3$ afin uzayına 3-boyutlu standart öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir.

$E = \mathbb{R}$: 1-boyutlu standart öklid uzayı, reel sayılar eksenini olarak reel sayılar sistemiyle birleştirilen *öklid doğrusudur*.

E^2 : 2-boyutlu standart öklid uzayı, *reel düzlem (öklid düzlemi)* olarak bilinir.

E^3 : 3-boyutlu standart öklid uzayıdır [16].

Tanım (Özdeğerler ve Özfonksiyonlar): p, q ve r fonksiyonları, $a \leq x \leq b$ aralığındaki bütün x değerleri için reel fonksiyonlar ve bu aralıkta q ve r fonksiyonları ile p fonksiyonunun türevi sürekli olsun. λ sayısı x e bağlı olmayan bir parametre, (a, b) aralığında her x değeri için $p(x) > 0, r(x) > 0, A_1, A_2, B_1$ ve B_2 reel sabitler olmak üzere,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0,$$

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0 \text{ ve } B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0$$

ile verilen probleme *Sturm-Liouville problemi* denir. Bu problemin sıfır çözümünden başka çözüm veren λ değerlerine *özdeğerler* ve bu değerlerin kullanılmasıyla bulunan çözümlere de *özfonksiyonlar* denir [17].

Tanım (Enerji Seviyesi): Atom çekirdeğinin etrafında katman katman biçiminde bulunan kısımların her birine *enerji seviyesi (yörünge)* denir. Bu yörüngelerde elektronlar bulunur. Bir atomda bulunan proton sayısına *atom numarası* denir ve Z ile gösterilir [18].

Tanım (Dalga Fonksiyonu): *Dalga fonksiyonu*; Schrödinger denklemini sağlayan ve parçacığın enerjisi, momentumu gibi bilgileri içinde bulunduran bir fonksiyondur. *Momentumun operatör ifadesi*,

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

şeklinde olmak üzere, parçacığın toplam enerjisini veren *Hamiltonyen dalga operatörü*,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

biçimindedir [19].

Tanım (Açısal momentum): Fizikte herhangi bir cismin sahip olduğu dönüş miktarına *açısal momentum* denir ve bu miktar cismin kütesine, şekline ve hızına bağlıdır. Açısal momentum bir vektör birimidir ve genelde $\mathbf{L}$ sembolü ile gösterilir. Açısal momentum operatörü $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$ şeklinde tanımlı olup, dik koordinat sistemindeki bileşenleri,

$$L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

formundadır.

Küresel koordinatlarda ise,

$$L_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad L_y = -i\hbar \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

ve

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

olmak üzere L^2 operatörü,

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (1.5)$$

biçimindedir [19,20].

Tanım (Açısal Uzaklık): İki noktayı ya da nesneyi, bu iki nokta veya nesneden farklı bir yerde bulunan gözlemciye birleştiren doğrular arasındaki açı ya da açının boyuna *açısal uzaklık* denir [20].

Tanım (Üç Kuantum Sayısı): Elektronların atom çekirdeği etrafındaki yörüngelerde bulunma olasılığının en fazla olduğu hacimsel bölgelere *orbital* denir. *Baş kuantum sayısı*; elektron bulutunun atomun çekirdeğine olan uzaklığıyla alakalı bir büyüklüktür. Bunlar enerji seviyelerini ifade eder. Bu enerji seviyelerine *elektron kabukları* da denir. Baş kuantum sayısı ‘ n ’ ile sembolize edilir ($n = 1, 2, 3, \dots$). *Yörünge açısal momentum kuantum sayısı*; elektron bulutlarının şeklini ve şekillerin farklılığından kaynaklanan enerji seviyelerindeki ayrılmaların olabileceğini belirtmek için kullanılır. Bir yörünge kaç orbitale sahip olduğunu belirten sayıdır. Bu sayılar ‘ l ’ ile gösterilir ve *yan kuantum sayısı* olarak da adlandırılırlar ($l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$).

Manyetik Kuantum Sayısı; manyetik alan etkisinde kalan orbitallerin uzaydaki yönelim biçimini ve alt enerji düzeyinde kaç orbital olduğunu gösterir. Alt enerji düzeyindeki orbital sayısı, $ml = 2l + 1$ formülüyle hesaplanır [18,20].

Tanım (Kinetik ve Potansiyel Enerji): Bir cismin hareketinden dolayı sahip olduğu enerjiye *kinetik enerji* ($E = (mv^2)/2$), cisimlerin bir alanda bulundukları fiziksel durumlardan ötürü depoladığı enerjiye ise *potansiyel enerji* ($V = mgh$) denir [20].

Tanım (Harmonik Osilatör): Bir cisim bir yayın ucunda basit harmonik hareket yaparken, yay cisme bir kuvvet uygular. Bu kuvvete *geri çağırıcı kuvvet* denir. Bu kuvvet başlangıç noktasından itibaren yer değiştirme ile orantılıdır. k bir reel sabit ve x de uzama miktarı olmak üzere, $F = -kx$ ifadesi geri çağırıcı kuvveti verir. *Harmonik Osilatör*; bir m kütesine etki eden bir geri çağırıcı kuvvetin etkisiyle ortaya çıkar [19].

Tanım (Küresel koordinat sistemi): *Küresel koordinat sistemi*, üç boyutlu uzayda nokta belirtmenin bir yoludur. Küre üzerindeki bir nokta bu sistemde üç tane bileşenle ifade edilir. Bunlar r, θ ve ϕ dir.

r (*radyal uzaklık*): Düzlemde bir $P(x, y, z)$ noktası ile orijin arasındaki uzaklıktır.

$0 \leq r < \infty$ aralığında tanımlıdır.

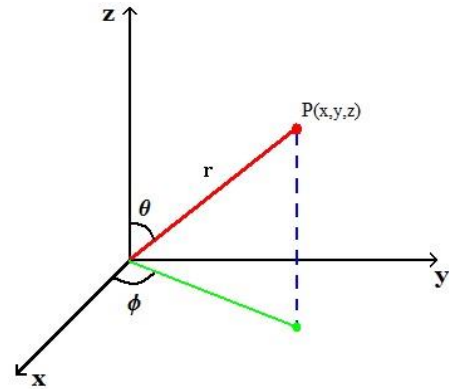
θ (*kutupsal açı*): z -ekseni ile r arasındaki açıdır.

$0 \leq \theta < \pi$ aralığında tanımlıdır.

ϕ (*boylam açısı*): x -ekseni ile r nin xy – düzlemine izdüşümü arasındaki açıdır.

$0 \leq \phi < 2\pi$ aralığında tanımlıdır. *Azimutal*

açı (azimut) da denir [19].



Şekil 1.2.1. Küresel Koordinat Sistemi

2. KESİRLİ DİFERİNGRALLER

Bu bölümde, herhangi keyfi reel veya kompleks mertebeden türev ve integral hesabını kapsayan, koordinat ve eş türev tanımlarının uygun bir koşulda n tamsayı mertebeden ν keyfi mertebeye $\{x^n, \partial^n/\partial x^n\} \rightarrow \{x^\nu, \partial^\nu/\partial x^\nu\}$ genişletilmesini sağlayan aksiom ve metotların bir kümesini oluşturan kesirli hesap teorisi için gerekli temel tanımlara, teoremlere ve özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca bölüm sonunda, hipergeometrik fonksiyonlar ve Gauss diferensiyel denklemi ifade edilmiştir.

Tanım 2.1. (*Gamma Fonksiyonu*)

$\Gamma(\cdot)$ notasyonu ile gösterilen ve $x > 0$ değerleri ile sınırlı olan,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Gamma fonksiyonu* denir. Gamma fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun reel ve kompleks sayılara genişlemesi olan bir fonksiyondur. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Gamma(z)$ fonksiyonu, kompleks düzlemin sağ yarısında yakınsaktır.

Teorem 2.1. (2.1) integrali, $x > 0$ için yakınsak, $x \leq 0$ için ıraksaktır.

İspat. (2.1) ile tanımlanan Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy = \int_0^1 e^{-y} y^{x-1} dy + \int_1^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy \quad (2.2)$$

biçiminde de yazılabilir.

i.) $x \geq 1$ ise; (2.2)'nin sağındaki ilk integral belirli integraldir. Çünkü integrant $[0,1]$ aralığında süreklidir. Sağdaki ikinci integral birinci çeşit bir genelleştirilmiş integral olup,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^2 (y^{x-1} e^{-y}) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{x+1}}{e^y} = 0$$

olacağından yakınsaktır ($p = 2 > 1$).

ii.) $0 < x < 1$ ise; (2.2)'nin sağındaki ilk integral ikinci çeşit bir genelleştirilmiş integral olup,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-x} (y^{x-1} e^{-y}) = 1$$

olacağından bu integral de yakınsaktır ($p = 1 - x < 1$). İkinci integralin $0 < x < 1$ için yakınsak olduğu,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^2 (y^{x-1} e^{-y}) = 0$$

ifadesinden elde edilir ($p = 2 > 1$).

iii.) $x = 0$ ise; (2.2) integral bağıntısı,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_0^1 \frac{e^{-y}}{y} dy + \int_1^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

şeklini alır.

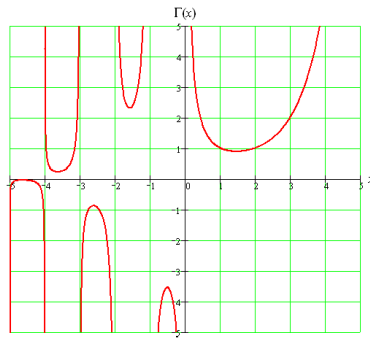
$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y \left(\frac{e^{-y}}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{-y} = 1$$

olduğundan ilk integral ıraksaktır ($p = 1$). O halde, $\Gamma(x)$ integrali $x = 0$ için ıraksaktır.

iv.) $x < 0$ ise;

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y (y^{x-1} e^{-y}) = +\infty$$

(2.2)'nin sağındaki ilk integral ıraksaktır ($p = 1$). Dolayısıyla verilen integral ıraksaktır. Şu halde (2.1) integrali, $x > 0$ için yakınsak ve $x \leq 0$ için ıraksaktır [21].



Şekil 2.1.1. Gamma fonksiyonu eğrisi [6].

Gamma fonksiyonunun temel özellikleri:

$$\textbf{i.)} \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x! \quad (2.3)$$

$$\textbf{ii.)} \quad \Gamma(v-k) = (-1)^k \frac{\Gamma(v)\Gamma(1-v)}{\Gamma(k+1-v)}, \quad (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}; v \in \mathbb{R}) \quad (2.4)$$

iii.) Gamma fonksiyonu $x = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) noktalarında basit kutba sahiptir.

iv.) Gamma fonksiyonunun limit gösterimi,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n! n^x}{x[x+1][x+2] \dots [x+n]} \right\}$$

dir.

$$\textbf{v.} \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$\textbf{vi.} \quad \Gamma(-x) = \frac{-\pi \csc(\pi x)}{\Gamma(x+1)}$$

$$\textbf{vii.} \quad \Gamma(2x) = \frac{4^x \Gamma(x) \Gamma[x + (1/2)]}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\textbf{viii.} \quad \Gamma(nx) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{n^x}{\sqrt{2\pi}} \right]^n \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma[x + (k/n)]$$

şeklindedir [1,6,9].

Tablo 2.1.1. Bazı x değerleri için gamma fonksiyonunun değerleri [6].

$\Gamma(-3/2) = (4/3)\sqrt{\pi}$	$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(-1) = \pm\infty$	$\Gamma(3/2) = (1/2)\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$	$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma(0) = \pm\infty$	$\Gamma(5/2) = (3/4)\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(3) = 2$

Tanım 2.2. (Beta Fonksiyonu)

$p, q > 0$ olmak üzere beta fonksiyonunun tanımı,

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

ile verilir. $t = 1 - x$ değişken dönüşümü ile beta fonksiyonu argümanlarına göre simetrik olup en belirgin özelliği,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p)$$

şeklindedir [22].

Tanım 2.3. (Mittag-Leffler Fonksiyonları)

$\alpha > 0$ olmak üzere, $E_\alpha(\cdot)$ notasyonu ile gösterilen bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

ile verilir. Üstel fonksiyonun bir genelleştirmesi olan bu fonksiyon, 1903 yılında Mittag-Leffler tarafından tanımlanmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonları, kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinde ortaya çıkar.

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere, $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ notasyonu ile gösterilen iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

ile verilir ve bu denklemde $\alpha = 1$ ve $\beta = 1, 2, \dots, m$ alınırsa, en genel haliyle,

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right\}$$

elde edilir.

Bu fonksiyon, 1953 yılında R. P. Agarwal ve Erdelyi tarafından tanımlanmıştır. α ve β parametrelerinin özel seçimleri ile $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonu bilinen bazı fonksiyonlara dönüşür. Örneğin;

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

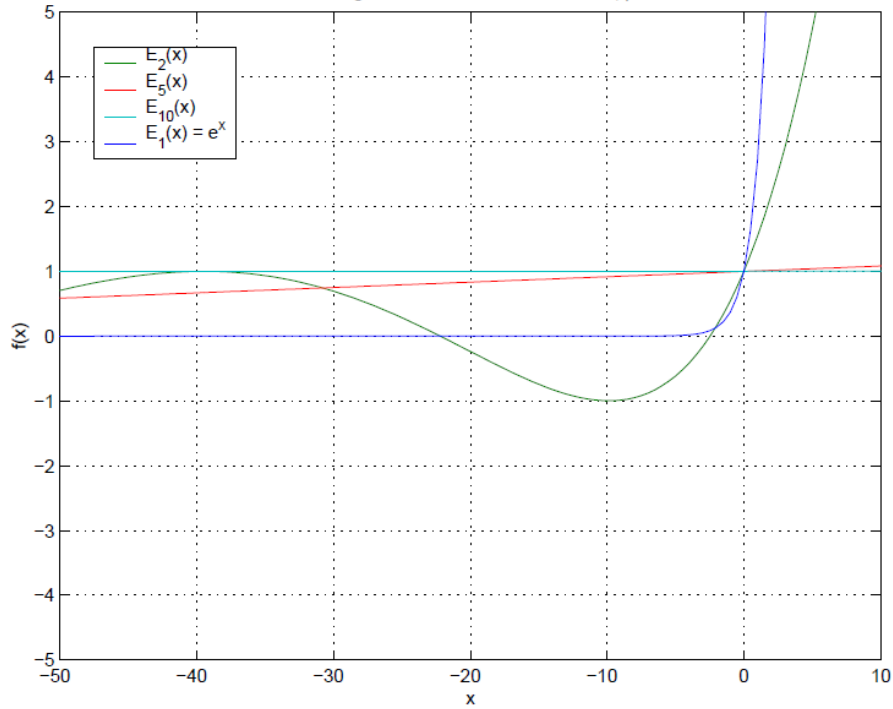
$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z},$$

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_{\alpha}(z)$$

şeklindedir [1,6].



Şekil 2.3.1. $\alpha, \beta = 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonu

Tanım 2.4. (Hata Fonksiyonu)

Gauss hata fonksiyonu olarak da adlandırılan *Hata fonksiyonu*,

$$\operatorname{erf}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, & x > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 e^{-t^2} dt, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır [8].

Tanım 2.5. (Laplace Dönüşümü)

Lineer diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden birisi integral dönüşümüdür. Bir integral dönüşüm,

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt \quad (2.5)$$

şeklinde dir. (2.5) yardımıyla, verilen bir $f(t)$ fonksiyonu diğer bir $F(s)$ fonksiyonuna dönüştürülür. $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ nin integral dönüşümü ve $K(s, t)$ ye de integral dönüşümün çekirdeği denir. Bu dönüşümün $K(s, t)$ çekirdeği değıştikçe, dönüşüm farklı adlar alır. f fonksiyonu, $t > 0$ reel değışkenli ve kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere, $K(s, t) = e^{-st}$ seçilirse,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ \alpha \rightarrow 0}} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (0 < \alpha < \beta)$$

şeklinde tanımlanan $f(t)$ nin Laplace dönüşümü elde edilir. Burada s bir kompleks değışkendir [23].

Tanım 2.6. (Ters Laplace Dönüşümü)

$t > 0$ olmak üzere $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olsun. $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü $\mathcal{L}^{-1}$ notasyonu ile gösterilir.

Ters Laplace Dönüşümü,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (c = \text{Re}(s) > c_0) \quad (2.6)$$

ile tanımlanır. Burada c_0 , (2.6)'nın yakınsak olduğu bölgenin sağ yarısında yer alır [24].

Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri:

i.) Lineerlik: c_1 ve c_2 keyfi sabitler, f_1 ve f_2 de Laplace dönüşümü mevcut iki fonksiyon ise; $\mathcal{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2\}$ dir.

ii.) $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise;

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$G(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ f(t - a), & t > a \end{cases}; \quad (\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{as} F(s))$$

dir [13].

iii.) Konvolüsyon Özelliği: $t > 0$ olmak üzere $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan $*$ çarpımlarının Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s)$$

dir. Burada $F(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla, $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleridir.

iv.) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevinin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0)$$

şeklindedir [24].

2.1. Kesirli Diferintegral Tanımları

Tanım 2.1.1. (Grünwald-Letnikov Tanımı)

$\nu > 0$ bir reel sayı, her sonlu $[a, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli, integrallenebilir ve $m \in \mathbb{Z}$, $m < \nu < m + 1$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun ν -katlı Grünwald - Letnikov kesirli integrali;

$${}_a D_t^{-\nu} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{\nu+k}}{\Gamma(\nu+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun ν . mertebeden Grünwald - Letnikov kesirli türevi ise;

$${}_a D_t^{\nu} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\nu+k}}{\Gamma(-\nu+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\nu+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\nu} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklindedir [1].

Tanım 2.1.2. (Riemann-Liouville Tanımı)

$\nu > 0$ bir reel sayı, her sonlu $[a, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli, integrallenebilir ve $k \in \mathbb{Z}^+$, $k - 1 \leq \nu < k$ olsun. f fonksiyonunun ν -katlı Riemann - Liouville kesirli integrali;

$${}_a D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun ν . mertebeden Riemann - Liouville kesirli türevi ise;

$${}_a D_t^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\nu)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-\nu-1} f(\tau) dt$$

şeklindedir [1].

Tanım 2.1.3 (Caputo Kesirli Türevi)

Kesirli diferensiyel tekniğinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur.

$\nu > 0$ bir reel sayı, her sonlu $[a, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli, integrallenebilir ve $n \in \mathbb{Z}^+$, $n - 1 < \nu < n$ olsun. Caputo kesirli türevi;

$${}^c D_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\nu+1-n}}$$

ile verilir [1].

Tanım 2.1.4. (Weyl Kesirli Hesap Tanımı)

$\nu \in \mathbb{R}^+$ ve $t > 0$ olmak üzere, Weyl kesirli integrali,

$$W_t^{-\nu}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_t^\infty (\tau - t)^{\nu-1} f(\tau) d\tau$$

şeklindedir. Her yerde integrallenebilen fonksiyonların bir sınıfı A ve $f \in A$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun Weyl kesirli türevi ise,

$$W_t^\nu[f(t)] = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(-\nu)} \int_t^\infty (\tau - t)^{-\nu-1} f(\tau) d\tau, \quad (\nu < 0)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $n > \nu \geq 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı için,

$$W_t^\nu[f(t)] = \frac{d^n}{dt^n} \{W_t^{n-\nu}[f(t)]\}$$

dir [8,25].

Tanım 2.1.5. (Marchaud Kesirli Türevi)

1927’de Marchaud, mertebesi ν olan kesirli türev tanımını,

$$I^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty u^{-\nu-1} f(x - u) du, \quad (\nu > 0) \quad (2.7)$$

eşitliği ile vermiştir. Ancak, orijinde $u^{-\nu-1}$ in tekilliğinden dolayı (2.7)’deki integral iraksaktır.

Böylece Marchaud,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{\epsilon}^{\infty} u^{-\nu-1} [f(x-u) - f(x)] du, \quad (0 < \nu < 1)$$

limitinden ve $\Gamma(1-\nu) = -\nu\Gamma(-\nu)$ özelliğinden faydalanarak,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_{\epsilon}^{\infty} u^{-\nu} f'(x-u) du = {}_{-\infty}I_x^{1-\nu} f'(x) \quad (2.8)$$

eşitliğini elde etmiştir. ℓ , f nin en yüksek mertebesi olmak üzere, $\nu > 1$ durumunda (2.8)'i genişletmek için,

$$\Delta_u^{\ell} f(x) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \binom{\ell}{j} f(x - ju)$$

toplamından faydalanarak,

$$D^{\nu} f(x) = \frac{1}{C_{\nu, \ell}} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_u^{\ell} f(x)}{u^{1+\nu}} du, \quad (0 < \nu < \ell)$$

şeklindeki mertebesi ν olan kesirli türev tanımını vermiştir. Burada,

$$C_{\nu, \ell} = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-u})^{\ell}}{u^{1+\nu}} du$$

olmak üzere,

$$C_{\nu, \ell} = \begin{cases} \Gamma(-\nu) \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^j \binom{\ell}{j} j^{\nu}, & (0 < \nu < \ell, \ell \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}) \\ \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^j \binom{\ell}{j} j^{\nu} \log j, & (\nu = 1, 2, \dots, \ell - 1) \end{cases}$$

elde edilir [4].

Tanım 2.1.6 (Riesz Kesirli İntegrali)

$\nu > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $\nu \neq 2k + 1$ olmak üzere, ν mertebeli Riesz kesirli integrali (Riesz potansiyeli),

$$I^\nu f(x) = \frac{I_+^\nu f(x) + I_-^\nu f(x)}{2 \cos(\nu\pi/2)} = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \cos(\nu\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{|x - y|^{1-\nu}} dy$$

ile verilir. $\nu > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $\nu \neq 2k$ olmak üzere genelleştirilmiş Riesz potansiyeli ise,

$$\tilde{I}^\nu f(x) = \frac{I_+^\nu f(x) - I_-^\nu f(x)}{2 \sin(\nu\pi/2)} = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \sin(\nu\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn}(x - y)f(y)}{|x - y|^{1-\nu}} dy$$

şeklindedir [5].

Tanım 2.1.7 (Miller-Ross Ardışık Kesirli Türevi)

Bir $f(t)$ fonksiyonunun tamsayı mertebeden ardışık türevi,

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt}}_n f(t), \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçimindedir. Benzer şekilde, $0 \leq \nu \leq 1$ olmak üzere ardışık kesirli türev,

$$D^{n\nu} f(t) = \underbrace{D^\nu D^\nu \dots D^\nu}_n f(t) \quad (2.9)$$

ile ifade edilir. Miller ve Ross, (2.9)'u daha genel bir ifadeyle,

$$D^\nu f(t) = D^{\nu_1} D^{\nu_2} \dots D^{\nu_n} f(t), \quad (\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n)$$

şeklinde tanımlamış ve bunu ardışık kesirli türev olarak adlandırmışlardır. Aynı zamanda Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri aşağıdaki gibi ardışık türevlerin özel halleridir. Riemann-Liouville kesirli türevi:

$${}_a D_t^\nu f(t) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} {}_a D_t^{-(n-\nu)} f(t), \quad (n - 1 \leq \nu < n)$$

formunda yazılabilir.

Caputo kesirli türevi ise:

$${}_a^C D_t^\nu f(t) = {}_a D_t^{-(n-\nu)} \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt} f(t), \quad (n-1 < \nu \leq n)$$

şeklindedir. Burada her iki türevin mertebesi ν olmasına rağmen, d/dt ve ${}_a D_t^{-(n-\nu)}$ türev operatörlerinin farklı sıralanışları bu iki türevin özelliklerinin farklı olduğunu gösterir.

Örneğin; $\nu < 0$ ve $\mu < 0$ olması durumunda ya da buna denk olarak Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli integralleri için,

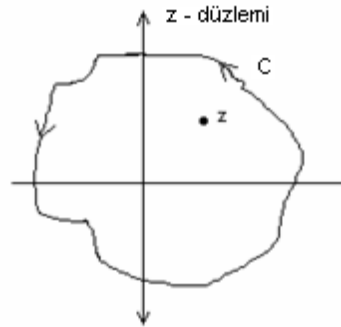
$$D^\nu D^\mu f(t) = D^\mu D^\nu f(t) = D^{\nu+\mu} f(t)$$

özellği geçerlidir. Ancak bu özellik $\nu, \mu > 0$ olması durumunda ya da buna denk bir ifadeyle kesirli türev durumunda geçerli değildir. Gerçekte bu özellik Riemann-Liouville ve Caputo türevleri arasındaki farkı gösterir.

Ardışık kesirli türevler bazı fizik ve uygulamalı matematik problemlerinin formüle edilmesinde doğal olarak ortaya çıkar. Böylece, fiziksel süreçleri veya objeleri modelleyen diferensiyel denklemler, kesirli türevle ifade edilen bir durumun yine kesirli türevle ifade edilen bir başka durum içinde işleme alınmasının bir sonucu olarak ortaya çıkar.

Eğer her bir durumu ifade eden diferensiyel denklem kesirli türev içeriyorsa, bu durumların ardışık sıralanması ile elde edilen diferensiyel denklem ardışık kesirli türevler içerir [1].

Tanım 2.1.8. (Cauchy İntegral Formülü Yardımı ile Diferintegral Tanımı)



Şekil 2.1.8.1. Cauchy integral formülünün C yolu [6].

C^- ; $-\infty$ dan başlayıp saatin dönme yönüne ters olarak bir kez z noktasını çevreleyip tekrar $-\infty$ noktasına dönen, z ve $-\infty + i\text{Im}(z)$ noktalarını birleştiren kesit boyunca uzanan bir yol ve C^+ ; ∞ dan başlayıp saatin dönme yönüne ters olarak bir kez z noktasını çevreleyip tekrar ∞ noktasına dönen, z ve $\infty + i\text{Im}(z)$ noktalarını birleştiren kesit boyunca uzanan bir yol ve $C = \{C^-, C^+\}$ olmak üzere, eğer $f(z)$ fonksiyonu, bu C yolunun içinde ve üzerinde analitik (*regüler*) ise,

$$f_\nu(z) = (f(z))_\nu = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)dt}{(t - z)^{\nu+1}}, \quad (\nu \neq -1, -2, \dots)$$

ve

$$f_{-n}(z) = \lim_{\nu \rightarrow -n} f_\nu(z), \quad (n \in \mathbb{Z}^+),$$

dir. Burada $t \neq z$ olup,

$$C^- \text{ için } -\pi \leq \arg(t - z) \leq \pi$$

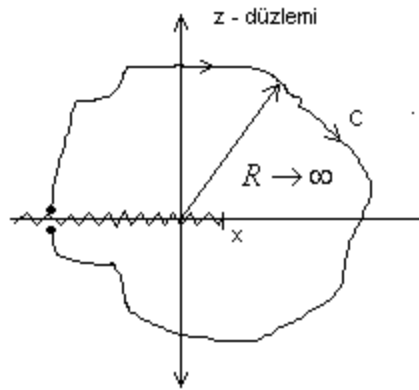
ve

$$C^+ \text{ için } 0 \leq \arg(t - z) \leq 2\pi$$

dir. Böylece,

$$|f_\nu(z)| < \infty \quad (\nu \in \mathbb{R}) \quad (2.10)$$

olmak üzere; $f_\nu(z)$ ye, $\nu > 0$ için $f(z)$ nin mertebesi ν olan kesirli türevi ve $\nu < 0$ için de $f(z)$ nin mertebesi ν olan kesirli integrali denir [26,27].



Şekil 2.1.8.2. Diferintegral formülündeki C yolu [6].

Tanım 2.1.9. (Riemann Formülü)

$\nu > 0$, $\mu > -1$ olacak şekilde birer reel sayı, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n - 1 \leq \nu < n$ olsun. $f(t) = (t - a)^\mu$ fonksiyonunun ${}_a D_t^\nu f(t)$ şeklindeki kesirli türevi;

$${}_a D_t^\nu ((t - a)^\mu) = \frac{\Gamma(1 + \mu)}{\Gamma(1 + \mu - \nu)} (t - a)^{\mu - \nu} \quad (2.11)$$

formülü ile hesaplanabilir [1].

Tanım 2.1.10. (Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri)

$\nu > 0$ bir reel sayı, $n \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}$ ve her sonlu $[0, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir olsun. $n - 1 \leq \nu < n$ olmak üzere, Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\nu f(t); s \} = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0 D_t^{\nu-k-1} f(t)]_{t=0}$$

şeklindedir. $n - 1 < \nu \leq n$ olmak üzere, Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{ {}_0^C D_t^\nu f(t); s \} = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\nu-k-1} f^{(k)}(0)$$

ile verilir. $m < \nu < m + 1$ olmak üzere, Grünwald-Letnikov kesirli türevinin Laplace dönüşümü ise;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\nu f(t); s \} &= \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) \mathcal{L}\left\{ \frac{t^{-\nu+k}}{\Gamma(-\nu+m+1)}; s \right\} + \mathcal{L}\left\{ \frac{t^{m-\nu}}{\Gamma(-\nu+m+1)} * f^{(m+1)}(t); s \right\} \\ &= \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) s^{\nu-k-1} + s^{\nu-m-1} \left(s^{m+1} F(s) - \sum_{k=0}^m f^{(k)}(0) s^{m-k} \right) \\ &= s^\nu F(s) \end{aligned}$$

şeklindedir. Miller-Ross ardışık kesirli türevi için,

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^m \nu_j, \quad 0 < \nu_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\sigma_m} &\equiv {}_aD_t^{\nu_m} {}_aD_t^{\nu_{m-1}} \dots {}_aD_t^{\nu_1} \\ {}_aD_t^{\sigma_{m-1}} &\equiv {}_aD_t^{\nu_{m-1}} {}_aD_t^{\nu_{m-2}} \dots {}_aD_t^{\nu_1} \end{aligned}$$

notasyonları tanımlansın. Böylece, ardışık türevin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^{\sigma_m} f(t); s \} = s^{\sigma_m} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\sigma_m - \sigma_{m-k}} [{}_0D_t^{\sigma_{m-k-1}} f(t)]_{t=0} \quad (2.12)$$

$${}_aD_t^{\sigma_{m-k-1}} \equiv {}_aD_t^{\nu_{m-k-1}} {}_aD_t^{\nu_{m-k-2}} \dots {}_aD_t^{\nu_1}, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

ile verilir [1].

2.2. Varlık ve Teklik Teoremleri

Bu bölümde, kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç - değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir. Burada, denklemlerin tüm sonuçları Miller - Ross ardışık kesirli türevi cinsinden verilmiştir. Bunun nedeni ise, elde edilen sonuçların Miller - Ross ardışık kesirli türevlerinin özel durumları olan Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevlerine direkt olarak uygulanabilmesidir.

İlk olarak, değişken katsayılı lineer kesirli diferansiyel denklemler incelenip, bir terimli ve n -terimli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremi ispatlanmıştır. Daha sonra, genel formda kesirli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremi incelenmiştir [1].

2.2.1. Lineer Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde, ardışık türevli lineer kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç - değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği incelenmiştir.

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) {}_0D_t^{\sigma_{n-j}}y(t) + p_n(t)y(t) = f(t), \quad (0 < t < T < \infty) \quad (2.13)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_{k-1}}y(t)]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.14)$$

başlangıç - değer problemi ele alınsın. Burada,

$${}_aD_t^{\sigma_k} \equiv {}_aD_t^{\nu_k} {}_aD_t^{\nu_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\nu_1}$$

$${}_aD_t^{\sigma_{k-1}} \equiv {}_aD_t^{\nu_{k-1}} {}_aD_t^{\nu_{k-2}} \dots {}_aD_t^{\nu_1}$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \nu_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad 0 < \nu_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

biçimindedir. $f(t) \in L_1(0, T)$ yani,

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

şeklindedir. Kolaylık açısından, $t > T$ için $f(t) \equiv 0$ olduğu kabul edilsin.

İlk olarak, $p_k(t) \equiv 0$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ durumu ele alınsın [1].

Teorem 2.2.1. Eğer, $f(t) \in L_1(0, T)$ ise,

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t) \quad (2.15)$$

denklemini (2.14) başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $y(t) \in L_1(0, T)$ çözümüne sahiptir.

İspat. (2.12) ardışık kesirli türevin Laplace dönüşüm formülü (2.15)'e uygulanırsa;

$$s^{\sigma_n} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\sigma_n - \sigma_{n-k}} [{}_0D_t^{\sigma_{n-k-1}} y(t)]_{t=0} = F(s)$$

olur. Burada $Y(s)$ ve $F(s)$, sırasıyla $y(t)$ ve $f(t)$ nin Laplace dönüşümleridir. Ayrıca (2.14) başlangıç koşulları kullanılarak,

$$Y(s) = s^{-\sigma_n} F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} s^{-\sigma_{n-k}}$$

yazılabilir. Ters Laplace dönüşümüyle,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{\Gamma(\sigma_{n-k})} t^{\sigma_{n-k} - 1}$$

veya $i = n - k$ alınmasıyla,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i - 1} \quad (2.16)$$

elde edilir. $k = 1, 2, \dots, n$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, (2.11) Riemann formülünün uygulanması ve

$$\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

durumunun dikkate alınmasıyla,

$${}_0D_t^{\sigma_k} \left(\frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} t^{\sigma_i - \sigma_k - 1} / \Gamma(\sigma_i - \sigma_k), & (k < i) \\ 0, & (k \geq i) \end{cases} \quad (2.17)$$

$${}_0D_t^{\sigma_k} \left(\frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} t^{\sigma_i - \sigma_k} / \Gamma(1 + \sigma_i - \sigma_k), & (k < i) \\ 1, & (k = i) \\ 0, & (k > i) \end{cases} \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.16)'dan $y(t) \in L_1(0, T)$ dir. (2.17) ve (2.18) kullanılarak; (2.14) başlangıç koşulları ve (2.15)'de (2.16) ile tanımlanan $y(t)$ fonksiyonunun yerine yazılması, $y(t)$ nin bu şartları sağladığını gösterir. Buradan çözümün var olduğu söylenebilir.

Laplace dönüşümünün özelliğinden ve kesirli diferintegralin lineerliğinden çözümün tekliğinin var olduğu söylenebilir. Gerçekten de, $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ gibi iki tane çözümün varlığı düşünülürse, $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$ fonksiyonu ${}_0D_t^{\sigma_n} z(t) = 0$ denklemini sağlamalıdır. Bu takdirde $z(t)$ nin Laplace dönüşümü $Z(s) = 0$ dır. Bu sebeple, $z(t) = 0$ olup hemen hemen her aralıkta $L_1(0, T)$ deki çözüm tektir.

Şimdi, (2.13)-(2.14) probleminin çözümünün varlığı ve tekliğinin ispatı verilsin [1].

Teorem 2.2.2. Eğer, $f(t) \in L_1(0, T)$ ve $p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ise bu takdirde (2.13)-(2.14) başlangıç - değer problemi $y(t) \in L_1(0, T)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

İspat. (2.13)-(2.14) problemi $y(t)$ çözümüne sahip ve

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \phi(t) \quad (2.19)$$

olsun. Teorem 2.2.1 kullanılarak,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} \phi(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \quad (2.20)$$

yazılabilir. (2.20), (2.13)'de yerine yazılırsa,

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) {}_0D_t^{\sigma_k} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t)$$

denklemini ve (2.17) kullanılarak da $\phi(t)$ fonksiyonu için,

$$\phi(t) + \int_0^t K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau = g(t) \quad (2.21)$$

ikinci cins Volterra integral denklemini elde edilir.

Burada,

$$K(t, \tau) = p_n(t) \frac{(t - \tau)^{\sigma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \frac{(t - \tau)^{\sigma_n - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_k)},$$

$$g(t) = f(t) - p_n(t) \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \sum_{i=k+1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)}$$

şeklindedir. $p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları, $[0, T]$ aralığında sürekli olduklarından ve $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq T$ koşulları altında $K^*(t, \tau)$ sürekli olmak üzere, $K(t, \tau)$ çekirdek fonksiyonu,

$$K(t, \tau) = \frac{K^*(t, \tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \quad (2.22)$$

singüler formda yazılabilir ve

$$\alpha = \min\{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \sigma_n - \sigma_{n-2}, \dots, \sigma_n - \sigma_1\} = \min\{\sigma_n, \nu_n\}$$

formundadır. Benzer şekilde, $g^*(t)$, $[0, T]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{t^{1-\beta}}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \beta &= \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_n - \sigma_1; \sigma_3 - \sigma_2, \dots, \sigma_n - \sigma_2; \dots; \sigma_n - \sigma_{n-1}\} \\ &= \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \nu_2, \dots, \nu_n\} \\ &= \min\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}, \quad (0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1) \end{aligned}$$

biçimindedir.

(2.22)'deki singüler çekirdek ile verilen (2.21) ve $g(t) \in L_1(0, T)$ fonksiyonunun sağ tarafı, $\phi(t) \in L_1(0, T)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir. Bu takdirde, Teorem 2.2.1'e göre (2.19)'un tek çözümü $y(t) \in L_1(0, T)$ olup, aynı zamanda (2.14) çözümü, (2.20) kullanılarak elde edilebilir. Böylece Teorem 2.2.2'nin ispatı tamamlanır.

Bir çok uygulamalı problemlerde, $y(t)$ fonksiyonunda sıfır başlangıç koşulları ve bunun tamsayı mertebeden türevleri kullanılır. Bunun üç temel sebebi vardır.

- $y(t)$ fonksiyonunun başlangıç zamanında gösterdiği davranışın fiziksel olarak yorumlanabilmesi,
- (2.14) başlangıç koşullarının nümerik yaklaşımlarla hesaplanmasının zorluğu,
- $y(t)$ çözümü için tanımlanan sıfır başlangıç koşulları ve tamsayı mertebeden türevli başlangıç koşulları, Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov, Caputo ve Miller - Ross kesirli türevlerinin uyumunu sağlar. Bu uyum ise problemin formüle edilmesinin ve çözümünün yanlış yorumlanmasını önler.

$m - 1 \leq \sigma_n < m$ olmak üzere,

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, m - 1)$$

olsun. Bu durumda, Riemann - Liouville kesirli türevleri için birleşme kuralı kullanılarak, aynı σ_k mertebeli Riemann - Liouville kesirli türevleri tarafından (2.13)'deki tüm ardışık kesirli türevler yer değiştirebilir. Böylece,

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) {}_0D_t^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t) \quad (2.23)$$

elde edilir [1].

Teorem 2.2.3. $f(t)$ ve $p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları $[0, T]$ aralığında sürekli ise, bu takdirde,

$$m - 1 \leq \sigma_n < m, \quad \sigma_n > \sigma_{n-1} > \sigma_{n-2} > \dots > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$$

olmak üzere (2.23) problemi, $[0, T]$ aralığında sürekli olan tek bir $y(t)$ çözümüne sahiptir [1].

2.2.2. Genel Formda Kesirli Diferensiyel Denklem

Uygulamalarda lineer kesirli diferensiyel denklemlerin yanı sıra lineer olmayan diferensiyel denklemler de görülmektedir. Bundan dolayı bu bölümde, Miller - Ross ardışık kesirli türevleri cinsinden kesirli diferensiyel denklemlerin genel formu için başlangıç - değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği incelenmiştir. Miller - Ross, Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleri birbiriyle ilişkili olduğundan, aşağıda verilen sonuçlar kesirli diferensiyelin tüm bu dönüşümleri için kullanılabilir.

$${}_aD_t^{\sigma_k} \equiv {}_aD_t^{\nu_k} {}_aD_t^{\nu_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\nu_1},$$

$${}_aD_t^{\sigma_{k-1}} \equiv {}_aD_t^{\nu_{k-1}} {}_aD_t^{\nu_{k-2}} \dots {}_aD_t^{\nu_1},$$

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^k \nu_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad 0 < \nu_j \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

olmak üzere,

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t, y) \quad (2.24)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_{k-1}} y(t)]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.25)$$

başlangıç-değer problemi ele alınsın. $f(t, y)$ fonksiyonu, (t, y) düzleminin G çevresinde tanımlı olsun. h ve K sabitler olmak üzere,

$$0 < t < h, \quad \left| t^{1-\sigma_1} y(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K$$

eşitsizliğini sağlayan $(t, y) \in G$ noktalar kümesi için, $R(h, K) \subset G$ bölgesi tanımlansın [1].

Teorem 2.2.4. $f(t, y)$, G çevresinde tanımlı, reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun ve her $(t, y) \in G$ için, $|f(t, y)| \leq M < \infty$ olmak üzere, y ye göre $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|$ Lipschitz şartını sağlasın. Ayrıca,

$$K \geq \frac{Mh^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}$$

olsun.

Bu durumda, (2.24)-(2.25) probleminin $R(h, K)$ bölgesinde sürekli bir $y(t)$ çözümü var ve tektir.

İspat. (2.16) çözümü kullanılarak,

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (2.26)$$

elde edilir. Eğer $y(t)$, (2.24)-(2.25) denklemini sağlarsa, aynı zamanda (2.26)'yı da sağlar. Diğer yandan, eğer $y(t)$, (2.26)'nın bir çözümü ise, (2.17) formülü ve ${}_a D_t^{\sigma_n}$ ardışık kesirli türev operatörü (2.26)'ya uygulanırsa, $y(t)$ için (2.24) kesirli diferensiyel denklemi elde edilir. Aynı zamanda (2.18)'in kullanılmasıyla, $y(t)$ (2.26)'yı sağlarsa, (2.25) koşullarını da sağlar. Bu nedenle (2.26) denklemi, (2.24)-(2.25) başlangıç-değer problemine eşdeğer olmaktadır.

Şimdi, $y_0(t), y_1(t), y_2(t), \dots$ fonksiyonlar dizisi,

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1} \quad (2.27)$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau, (m = 1, 2, \dots) \quad (2.28)$$

bağıntılarıyla tanımlansın. $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t)$ limitinin varlığı ve (2.26)'nın $y(t)$ çözümünü sağladığı gösterilecektir.

İlk olarak, $0 < t \leq h$ olmak üzere, her m için $y_m(t) \in R(h, K)$ tümevarım metoduyla gösterilsin. Ek olarak,

$$\begin{aligned} \left| t^{1-\sigma_1} y_m(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| &= \left| \frac{t^{1-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \frac{M t^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq \frac{M h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq K \end{aligned} \quad (2.29)$$

şeklindedir.

Aynı nedenden dolayı $y_1(t)$ için de,

$$\left| t^{1-\sigma_1} y_1(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq \frac{M h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq K$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca tümevarım metoduyla her m için,

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \frac{MA^{m-1} t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)}$$

olduğu gösterilebilir ve bu eşitsizlik kullanılarak $m = 1$ için,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \frac{Mt^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)}, \quad (0 < t \leq h) \quad (2.30)$$

olur.

$$|y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)| \leq \frac{MA^{m-2} t^{(m-1)\sigma_n}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)}, \quad (0 < t \leq h) \quad (2.31)$$

olsun. Böylece (2.11), (2.28) ve (2.31) kullanılarak,

$$\begin{aligned} |y_m(t) - y_{m-1}(t)| &\leq \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n} |y_{m-1}(\tau) - y_{m-2}(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \tau^{(m-1)\sigma_n} d\tau \\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} {}_0D_t^{-\sigma_n} t^{(m-1)\sigma_n} \\ &= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n) t^{(m-1)\sigma_n+\sigma_n}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n+\sigma_n)} \\ &= \frac{MA^{m-1} t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)} \end{aligned}$$

bulunur.

$$y^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m(t) - y_0(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j(t) - y_{j-1}(t)) \quad (2.32)$$

serisi ele alınsın.

(2.30)'a göre, $0 \leq t \leq h$ için (2.32) serisinin terimlerinin gerçek değeri,

$$M \sum_{j=1}^{\infty} \frac{MA^{j-1}h^{j\sigma_n}}{\Gamma(1+j\sigma_n)} = \frac{M}{A} (E_{\sigma_n,1}(Ah_n^\sigma) - 1)$$

şeklindeki seriye denk olan yakınsak nümerik serilerin terimlerinden daha küçüktür. (2.32) serisinin her bir $(y_j(t) - y_{j-1}(t))$ terimi, $0 \leq t \leq h$ için t nin sürekli bir fonksiyonudur. Böylece, (2.32) serilerinin toplamı $y^*(t)$, $0 \leq t \leq h$ için sürekli bir fonksiyon olup,

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t) = y_0(t) + y^*(t), \quad (0 \leq t \leq h)$$

fonksiyonu da sürekli dir. $y_m(t)$ dizisinin düzgün yakınsak olması, (2.28)'de $m \rightarrow \infty$ iken limit alınmasını sağlar. Bu ise, (2.27) ve (2.28) tarafından tanımlanan $y(t)$ limit fonksiyonunun (2.26)'nın çözümü olduğunu gösterir.

Son olarak, çözümün tekliğini göstermek için, (2.26)'nın bir başka çözümü $0 < t \leq h$ aralığında sürekli olan $\tilde{y}(t)$ olsun. $z(t) = 0$ olmak üzere, (2.26)'dan $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ fonksiyonu,

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, z(\tau)) d\tau$$

denklemini sağlar. Böylece $0 \leq t \leq h$ için, $z(t)$ sürekli olur. B sabit olmak üzere, $0 \leq t \leq h$ için $|z(t)| < B$ ve $z(t)$ ile,

$$|z(t)| \leq \frac{ABt^{\sigma_n}}{\Gamma(1 + \sigma_n)}, \quad 0 \leq t \leq h$$

elde edilir. Verilen eşitsizlik j kez tekrarlanırsa,

$$|z(t)| \leq \frac{A^j B t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)}, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.33)$$

bulunur. Eşitsizliğin sağında (yani B ye kadar olan tarafta) serinin genel fonksiyonunun $E_{\sigma_n,1}(At_n^\sigma)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olduğu görülür.

Bu yüzden her t için,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^j t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)} = 0$$

elde edilir. (2.33)'ün $j \rightarrow \infty$ iken limiti alınır, $z(t) \equiv 0$ olduğu sonucuna varılır ve $0 < t \leq h$ için $\tilde{y}(t) \equiv y(t)$ olduğunu gösterir. Böylece Teorem 2.2.4'ün ispatı tamamlanır [1].

2.3. Kesirli Diferintegrallerin Genel Özellikleri

i) Homojenlik

C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\frac{d^\nu(Cf)}{d(x-a)^\nu} = C \frac{d^\nu f}{d(x-a)^\nu}$$

şeklindedir [6].

ii) Ölçek Değişikliği

Deformasyonları kontrol altında tutmak amacıyla düzlem koordinatlar (x, y) , *ölçek faktörü (küçültme)* olarak adlandırılan bir katsayı ile (0.9996) çarpılırlar.

Bir fonksiyonun alt limit α ya göre ölçek değişikliği; $x \rightarrow \beta(x - \alpha) + \alpha$ şeklindedir. Buradaki β ölçek faktörü olup sabittir. Eğer alt limit sıfır ise, $x \rightarrow \beta x$ olur. Alt limitin sıfırdan farklı olduğu durumlarda ölçek değişikliğinin diferintegrale etkisi,

$$\frac{d^\nu f(\beta(x - \alpha) + \alpha)}{[d(\beta(x - \alpha))]^\nu} = \beta^{-\nu} \frac{d^\nu f(\beta(x - \alpha) + \alpha)}{[d(x - \alpha)]^\nu}$$

şeklinde verilir. $\alpha = 0$ olduğu durumlardaki ölçek değişikliği,

$$\frac{d^\nu f(\beta x)}{[d(\beta x)]^\nu} = \beta^{-\nu} \frac{d^\nu f(\beta x)}{[dx]^\nu}$$

olarak verilir [6].

iii) Bir Serinin Diferintegralı

Diferintegral operatörünün doğrusallık özelliğinden, bütün ν değerleri için düzgün yakınsak bir serinin diferintegralı,

$$\frac{d^\nu}{d(x-a)^\nu} \sum_{j=0}^{\infty} f_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^\nu f_j}{d(x-a)^\nu}$$

şeklinde alınır ki bu seri de düzgün yakınsak olur [6].

iv) Birleşme Özelliği

$$D^\nu D^\mu = D^\mu D^\nu, \quad D^\nu D^\mu = D^{\nu+\mu}, \quad D^\nu f = g \rightarrow f = D^{-\nu} g$$

şeklindeki işlemler belirli durumlarda geçerlidir. ν ve μ pozitif tamsayılar olmak üzere $\nu - \mu < 0$ olduğu zaman,

$${}_a D_t^\nu [{}_a D_t^{-\mu} f(t)] = {}_a D_t^{\nu-\mu}$$

durumu geçerlidir. Fakat önce türevin sonra da integralin alındığı durumlarda ise,

$${}_a D_t^{-\mu} [{}_a D_t^\nu f(t)] = {}_a D_t^{\nu-\mu} f(t) - \sum_{k=\mu-\nu}^{\mu-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(\nu+k-\mu)}(a)$$

eşitliği geçerlidir.

Diferintegrallerin diğer bazı özellikleri:

$$(e^{\lambda z})_\nu = \lambda^\nu e^{\lambda z} \quad (\lambda \neq 0; \nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}) \quad (2.34)$$

$$(e^{-\lambda z})_\nu = e^{-i\pi\nu} \lambda^\nu e^{-\lambda z} \quad (\lambda \neq 0; \nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}) \quad (2.35)$$

$$(z^\lambda)_\nu = e^{-i\pi\nu} \frac{\Gamma(\nu - \lambda)}{\Gamma(-\lambda)} z^{\lambda-\nu}, \quad \left(\nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}; \left| \frac{\Gamma(\nu - \lambda)}{\Gamma(-\lambda)} \right| < \infty \right) \quad (2.36)$$

şeklindedir. Burada, λ değeri sabittir [6,8,28].

Lemma 2.3.1. (Lineerlik)

$f(z)$ ve $g(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_ν ve g_ν türevleri mevcutsa, bu durumda;

$$(h_1 f(z) + h_2 g(z))_\nu = h_1 f_\nu(z) + h_2 g_\nu(z) \quad (2.37)$$

biçimindedir. Burada, $\nu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ ve h_1, h_2 sabitlerdir [1].

Lemma 2.3.2. (İndis Kuralı)

$f(z)$ ve $g(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $(f_\nu)_\mu$ ve $(f_\mu)_\nu$ türevleri mevcutsa, bu durumda;

.

$$(f_\nu(z))_\mu = f_{\nu+\mu}(z) = (f_\mu(z))_\nu \quad (2.38)$$

şeklindedir. Burada, $\nu, \mu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$ ve $\left| \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)} \right| < \infty$ dur [1].

Lemma 2.3.3. (Genelleştirilmiş Leibniz Kuralı)

$f(z)$ ve $g(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_ν ve g_ν türevleri mevcutsa, bu durumda;

$$(f(z).g(z))_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-m)\Gamma(m+1)} f_{\nu-m}(z) g_m(z) \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlanır. $f_k = d^k f / dz^k = f_k(z); f_0 = f = f(z); g_0 = g = g(z) = z^n$ olmak üzere, (2.39) yardımıyla,

$$\begin{aligned} N^\nu(f_k(z)g(z)) &= (f_k z^n)_\nu = \sum_{m=0}^n \binom{\nu}{m} (f_k)_{\nu-m} (z^n)_m \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-m)\Gamma(m+1)} (f_k)_{\nu-m} (z^n)_m \end{aligned} \quad (2.40)$$

N -kesirli hesap operatörü tanımlanır. Burada, $\nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}; k, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $\left| \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-m)\Gamma(m+1)} \right| < \infty$ dur [1].

2.4. Kesirli Diferintegraller İçin Bazı Teoremler

Teorem 2.4.1. z nin dereceleri p ve q olmak üzere, $P(z; p)$ ve $Q(z; q)$ polinomları sırasıyla,

$$P(z; p) = \sum_{k=0}^p a_k z^{p-k} = a_0 \prod_{j=1}^p (z - z_j), \quad (a_0 \neq 0; p \in \mathbb{N})$$

ve

$$Q(z; q) = \sum_{k=0}^q b_k z^{q-k}, \quad (b_0 \neq 0; q \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, verilen Y fonksiyonu için $Y_{-\nu} \neq 0$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} P(z; p) f_{\mu}(z) + \left[\sum_{k=1}^p \binom{\nu}{k} P_k(z; p) + \sum_{k=1}^q \binom{\nu}{k-1} Q_{k-1}(z; q) \right] f_{\mu-k}(z) \\ + \binom{\nu}{q} q! b_0 f_{\mu-q-1}(z) = Y(z), \quad (\mu, \nu \in \mathbb{R}; p, q \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

şeklindeki homojen olmayan lineer adi kesirli diferintegral denklem,

$$f(z) = \left[\left(\frac{Y_{-\nu}(z)}{P(z; p)} e^{\mathcal{H}(z; p, q)} \right)_{-1} e^{-\mathcal{H}(z; p, q)} \right]_{\nu-\mu+1}, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}) \quad (2.42)$$

formunda özel bir çözüme sahiptir. Burada,

$$\mathcal{H}(z; p, q) = \int_z^{\xi} \frac{Q(\xi; q)}{P(\xi; p)} d\xi, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}) \quad (2.43)$$

biçimindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} P(z; p) f_{\mu}(z) + \left[\sum_{k=1}^p \binom{\nu}{k} P_k(z; p) + \sum_{k=1}^q \binom{\nu}{k-1} Q_{k-1}(z; q) \right] f_{\mu-k}(z) \\ + \binom{\nu}{q} q! b_0 f_{\mu-q-1}(z) = 0, \quad (\mu, \nu \in \mathbb{R}; p, q \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

şeklindeki homojen lineer adi kesirli diferintegral denklem,

$$f(z) = K(e^{-\mathcal{H}(z;p,q)})_{v-\mu+1}$$

formundaki çözümlere sahiptir. Burada, K keyfi bir sabit ve $\mathcal{H}(z;p,q)$ ise (2.43)'de tanımlandığı gibidir.

İspat. (2.41)'de,

$$f(z) = \mathcal{W}_v(z), \quad (v \in \mathbb{R}) \quad (2.44)$$

dönüşümünün kullanılması ve Lemma 2.3.2 ile Lemma 2.3.3'ün uygulanmasıyla,

$$[P(z;p)\mathcal{W}_\mu(z)]_v + [Q(z;q)\mathcal{W}_{\mu-1}(z)]_v = Y(z)$$

olur. $|Y_{-v}(z)| < \infty$ olduğundan,

$$\mathcal{W}_\mu(z) + \frac{Q(z;q)}{P(z;p)}\mathcal{W}_{\mu-1}(z) = \frac{Y_{-v}(z)}{P(z;p)}, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\})$$

elde edilir.

$$\mathcal{W}_{\mu-1}(z) = w(z), \quad \mathcal{W}_\mu(z) = \frac{dw}{dz} \quad (2.45)$$

dönüşümlerinden faydalanılırsa,

$$\frac{dw}{dz} + \frac{Q(z;q)}{P(z;p)}w = \frac{Y_{-v}(z)}{P(z;p)}, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}) \quad (2.46)$$

olacak şekilde 1.mertebeden lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. $\mathcal{H}(z;p,q)$, (2.43) ile verilen formda olmak üzere (2.46)'nın,

$$w(z) = \left(\frac{Y_{-v}(z)}{P(z;p)} e^{\mathcal{H}(z;p,q)} \right)_{-1} e^{-\mathcal{H}(z;p,q)}, \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}) \quad (2.47)$$

şeklinde özel bir çözümü vardır.

Son olarak, (2.44), (2.45) ve (2.47)'nin birleştirilmesiyle Teorem 2.4.1'in (2.42) ile verilen özel çözümü elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Homojen denklemin ispatı da benzer şekilde gösterilebilir [29].

Teorem 2.4.1’de,

$$\mu = 2, \quad p = q = 1, \quad a_0 = h \neq 0, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = s \neq 0 \quad \text{ve} \quad b_1 = t \quad (2.48)$$

alınırsa,

$$P(z; 1) = hz, \quad P_1(z; 1) = h$$

ve

$$Q(z; 1) = sz + t, \quad Q_1(z; 1) = s$$

olur. Böylece (2.43)’den,

$$\mathcal{H}(z; 1, 1) = \int^z \frac{Q(\xi; 1)}{P(\xi; 1)} d\xi = \int^z \frac{s\xi + t}{h\xi} d\xi = \ln[(hz)^{t/h} e^{sz/h}]$$

eşitliği elde edilir [30].

Teorem 2.4.2. Eğer, Y fonksiyonu, $|Y_\nu(z)| < \infty, \nu \in \mathbb{R}$ ve $Y_{-\nu} \neq 0$ ile verilmişse,

$$hz \frac{d^2 f}{dz^2} + (sz + \nu h + t) \frac{df}{dz} + \nu s f(z) = Y(z), \quad (h \neq 0, \nu \in \mathbb{R})$$

şeklindeki homojen olmayan lineer adi diferensiyel denklemi,

$$f(z) = \left[(Y_{-\nu}(z)(hz)^{(t-h)/h} e^{sz/h})_{-1} (hz)^{-t/h} e^{-sz/h} \right]_{(\nu-1)}$$

formunda özel bir çözüme sahiptir. Ayrıca, K keyfi bir sabit olmak üzere,

$$hz \frac{d^2 f}{dz^2} + (sz + \nu h + t) \frac{df}{dz} + \nu s f(z) = 0, \quad (h \neq 0, \nu \in \mathbb{R})$$

şeklindeki homojen lineer adi diferensiyel denklemi,

$$f(z) = K[(hz)^{-t/h} e^{-sz/h}]_{(\nu-1)}$$

formunda çözümlere sahiptir [30].

Bessel diferensiyel denkleminin bir sınıfı olarak,

$$Az^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + (Bz + C) \frac{df}{dz} + (Dz^2 + Ez + F)f(z) = Y(z) \quad (2.49)$$

formundaki ikinci mertebeden homojen olmayan lineer adi diferensiyel denklemi ele alınsın. Burada, $A \neq 0, B, C, D \neq 0, E$ ve F parametreleri özel olarak,

$$A = B = D = 1, \quad C = E = 0 \quad \text{ve} \quad F = -\nu^2$$

şeklinde seçilsin. (2.49) homojen olmayan non-Fuchsian diferensiyel denkleminin özel çözümlerini bulmak için Teorem 2.4.1 uygulanır. Bunun için,

$$f(z) = z^\rho e^{\lambda z} \psi(z) \quad (2.50)$$

dönüşümü yapılır. Böylece,

$$\frac{df}{dz} = z^{\rho-1} e^{\lambda z} \left[z \frac{d\psi}{dz} + (\rho + \lambda z) \psi(z) \right] \quad (2.51)$$

ve

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = z^{\rho-2} e^{\lambda z} \left\{ z^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2} + 2(\rho + \lambda z) z \frac{d\psi}{dz} + [\lambda^2 z^2 + 2\rho\lambda z + \rho(\rho - 1)] \psi(z) \right\} \quad (2.52)$$

elde edilir [31].

Son olarak, (2.50), (2.51) ve (2.52)'nin (2.49)'da yerlerine yazılması ile Teorem 2.4.1'in aşağıdaki uygulaması elde edilir.

Teorem 2.4.3. Eğer verilen Y fonksiyonu, $|Y_\nu(z)| < \infty$ ($\nu \in \mathbb{R}$) ve $Y_{-\nu} \neq 0$ kısıtlamalarını sağlıyorsa,

$$Az^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + Bz \frac{df}{dz} + (Dz^2 + Ez + F)f(z) = Y(z), \quad (A \neq 0, D \neq 0)$$

homojen olmayan lineer adi diferensiyel denklemin,

$$f(z) = z^\rho e^{\lambda z} \left[\left(A^{-1} z^{-\nu-1+(2A\rho+B)/A} \left(z^{-\rho-1} e^{-\lambda z} Y(z) \right) \right) \right]_{-\nu}^{-1} \\ \cdot [z^{\nu-(2A\rho+B)/A} e^{-2\lambda z}]_{(\nu-1)}, \quad (A \neq 0; D \neq 0; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

formunda özel bir çözümü vardır. Burada,

$$\rho = \frac{A - B \pm \sqrt{(A - B)^2 - 4AF}}{2A}, \quad \lambda = \pm i \sqrt{\frac{D}{A}}, \quad \nu = \frac{(2A\rho + B)\lambda + E}{2A\lambda} \quad (2.53)$$

şeklindedir. Benzer olarak,

$$Az^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + Bz \frac{df}{dz} + (Dz^2 + Ez + F)f(z) = 0$$

homojen lineer adi diferensiyel denklemin,

$$f(z) = Kz^\rho e^{\lambda z} \left[z^{\nu - (2A\rho + B)/A} e^{-2\lambda z} \right]_{(\nu-1)}, \quad (A \neq 0; D \neq 0; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

formunda çözümleri vardır. Burada K keyfi sabit, ρ , λ ve ν ise (2.53)'de verildiği gibidir [31].

2.5. Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Gauss Diferensiyel Denklemleri

Singüler katsayılı diferensiyel denklemlerin, uygun tanım, teorem veya dönüşümler kullanılarak, kesirli analiz yardımıyla açık çözümleri elde edilebilir. Bu kesirli çözümler de uygun koşullarda hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Bundan dolayı bu kısımda, çözümlerin hipergeometrik formları için gerekli tanımlar ve özellikler ele alınmıştır.

Tanım 2.5.1. (*Polhammer Sembolü*)

$z \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için,

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_k = z(z+1)(z+2) \dots (z+k-1) = \frac{(z+k-1)!}{(z-1)!}$$

şeklinde tanımlanan $(z)_k$ matematiksel ifadesine *polhammer sembolü* denir. Örneğin,

$$(1)_k = 1.2.3 \dots k = k!, \quad (4)_3 = 4.5.6 = 120$$

yazılabilir.

$z = -m$ negatif bir tamsayı olduğunda polhammer sembolü,

$$(z)_k = \begin{cases} (-m)_k, & m \geq k \\ 0, & m < k \end{cases}$$

ile tanımlanır. Örneğin,

$$(-5)_3 = (-5).(-4).(-3) = -60, \quad (-3)_4 = 0$$

dır.

Gamma fonksiyonunun $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ($\text{Re } z > 0$) özelliği, $\text{Re } z \leq 0$ yarı düzleminde,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(k+z)}{(z)_k} \Leftrightarrow (z)_k = \frac{\Gamma(k+z)}{\Gamma(z)} \quad (2.54)$$

şeklinde genişletilebilir.

Tanım 2.5.2. (Gauss Denklemi)

İkinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklemler bir çok singüler noktalara sahip olabilirler. Özel olarak singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan denklem,

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0 \quad (2.55)$$

formunda verilebilir. Bu denkleme, hipergeometrik denklem (*Gauss diferensiyel denklemi*) ve çözümlerine de *hipergeometrik fonksiyonlar* denir. Burada, z kompleks değişken, α, β, γ lar z den bağımsız kompleks veya reel değer alabilen sabitler ve denklemin parametreleridir. (2.55)'in $|z| < 1$ bölgesinde tek bir çözümü $y_1 = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ dir.

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z^3}{3!} + \dots$$

serisi ile Gauss denkleminin doğruluğu gösterilebilir. Gauss denklemine alternatif bir form olarak,

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + \gamma - 1\right)y = \left(z\frac{d}{dz} + \alpha\right)\left(z\frac{d}{dz} + \beta\right)y$$

yazılabilir ve

$$\left(z\frac{d}{dz} + \alpha\right)y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k! (\gamma)_k} (k+\alpha)z^k$$

eşitliğiyle uygun bir çözüm elde edilir. Bundan dolayı,

$$\left(z\frac{d}{dz} + \alpha\right)\left(z\frac{d}{dz} + \beta\right)y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{k! (\gamma)_k} z^k$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz} + \gamma - 1\right)y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k! (\gamma)_{k-1}} z^k$$

dır.

Böylece,

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} + \gamma - 1 \right) y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_{k-1}} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1} (\beta)_{k+1}}{k! (\gamma)_k} z^k$$

elde edilir. 0 ve 1 singüler noktalar olmak üzere, Gauss denklemi,

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\frac{\gamma}{z(1-z)} - \frac{1+\alpha+\beta}{z(1-z)} z \right] \frac{dy}{dz} - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)} y = 0$$

formunda tekrar düzenlenebilir. Ayrıca, $\Delta \equiv z(d/dz)$ operatörü yardımıyla,

$$\Delta(\Delta + \gamma - 1)y = z(\Delta + \alpha)(\Delta + \beta)y$$

yazılabilir.

Tanım 2.5.3. (Gauss Hipergeometrik Seri)

α, β reel ya da kompleks sabitler, γ sıfırdan farklı negatif olmayan bir sabit olmak üzere,

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

şeklinde ifade edilen seriye *Gauss hipergeometrik seri* ya da *hipergeometrik seri* denir.

Ayrıca,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (2.56)$$

ile tanımlanabilir. Burada, $(\alpha)_k$ ifadesi Polchammer sembolü ve ${}_iF_j$ için, i indisi paydaki, j indisi ise paydadaki Polchammer sembol sayısidir. Hipergeometrik serinin geliştirilmiş hali ise,

$${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k (\beta_2)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

dir. Hipergeometrik seri $|z| < 1$ için yakınsak, $|z| > 1$ için ıraksak, $|z| = 1$ için ise $\gamma > \alpha + \beta$ olduğunda mutlak yakınsak ve $z = -1$ için $\gamma > \alpha + \beta - 1$ olduğunda yakınsaktır [32].

3. RADYAL SCHRÖDINGER DENKLEMİ

Erwin Schrödinger (1887-1961), dalga özelliğine sahip elektronların, hareketlerini kontrol eden bir dalga denklemine sahip olacağını ileri sürmüştür. Bu dalgaların sağladığı dalga denklemini yazarak, hidrojen atomunun enerji düzeylerini hesaplamıştır.

Kuantum fiziğinin anlaşılması ile birlikte Schrödinger mekaniği kullanılarak atomların ve moleküllerin fiziksel özellikleri daha iyi açıklanabilmiştir. Kuantum mekaniğinde iki potansiyelin kesin çözümü vardır. Bunlardan birisi harmonik osilatör $V = kx^2/2$ potansiyeli, diğeri ise $V = -e^2/r$ Coulomb potansiyelidir. Coulomb potansiyeli kartezyen koordinat sisteminde,

$$V(x, y, z) = -\frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = V(r) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır.

Coulomb potansiyeli zamandan bağımsız olduğu için, hidrojen atomunun Schrödinger dalga denklemi, değişkenlerine ayrılarak çözülebilmektedir. İlk olarak açılara ve yarıçapa bağlı kısımlar değişkenlerine ayrılır ve açılara bağlı kısım *küresel harmonikler*, yarıçapa bağlı kısım ise *radyal denklem* olarak adlandırılır. Küresel harmonikleri oluşturan fonksiyon, hidrojen atomunda elektronun sabit yarıçaplı küre yüzeyi üzerindeki harmonik hareketini temsil eder. Küresel harmoniklerin çözümleri bulunurken, Schrödinger denklemi, değişken değiştirme işlemleri yapılarak Legendre diferensiyel denklemine dönüştürülüp bu denklemin çözümleri olan Legendre polinomları bulunur. Schrödinger denkleminin yarıçapa bağlı kısmının çözümleri de asimtotik limitlerde veya ara bölge için uygun bir fonksiyon belirlenerek çözülmektedir. Ara bölge için Schrödinger denklemi, bazı değişken değişiklikleri yapılarak, Laguerre diferensiyel denklemine dönüştürülür ve bu denklemin çözümleri olan Laguerre polinomları bulunur [33-37].

Bu bölümde, radyal Schrödinger denkleminin elde edilmesine yer verilmiştir. Sonraki bölümlerde ise, kesirli diferintegraller yardımıyla radyal denklemlerin kesirli çözümleri bulunmuş ve bu çözümlerin hipergeometrik formları elde edilmiştir.

Kütlesi m ve momentumu $\hat{p} = mv$ olan parçacık, bir potansiyel içerisinde değilse (*serbestse*) toplam enerji,

$$E = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (3.2)$$

olacak şekilde kinetik enerjiden ibarettir. Sabit bir V potansiyeli içinde hareket eden parçacığın toplam enerjisi ise,

$$E = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V \quad (3.3)$$

şeklindedir. $\hat{p}^2$ ve E nin operatör ifadeleri sırasıyla,

$$\hat{p}^2 \rightarrow -\hbar^2 \nabla^2, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

biçiminde tanımlanmak üzere (3.3) denklemi,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \quad (3.4)$$

şeklinde yazılarak, toplam enerji denklemi operatör formunda elde edilir. Schrödinger denklemi, bir Ψ dalga fonksiyonuna (3.4)'ün uygulanmasıyla,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanır. Buradaki ∇^2 ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

şeklinde tanımlanan bir operatördür. (3.5) Schrödinger denklemi, Hamiltonyen dalga operatörünün kullanılmasıyla,

$$H\Psi = E\Psi$$

formunda da yazılabilir.

Küresel koordinat sisteminde,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad [r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}]$$

şeklindedir.

Elektronun Coulomb potansiyeli altındaki Schrödinger denklemi,

$$\nabla^2 \Psi(r, \theta, \phi) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \Psi(r, \theta, \phi) = 0 \quad (3.6)$$

ile ifade edilir. Schrödinger denklemini küresel koordinatlarda yazabilmek için, kısmi türevleri (r, θ, ϕ) cinsinden yazmak gerekir.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.7)$$

kısmi türevini hesaplayabilmek için,

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \quad [rdr = xdx + ydy + zdz], \\ \cos \theta &= \frac{z}{r}, \quad \left[-\sin \theta d\theta = -\frac{(zx)dx + (zy)dy + (z^2 - r^2)dz}{r^3} \right], \\ \tan \phi &= \frac{y}{x}, \quad \left[\frac{1}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{xdy - ydx}{x^2} \right] \end{aligned}$$

bağıntılarının kullanılması ve $dy = dz = 0$ alınmasıyla,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}$$

bulunur. Bu türevlerin (3.7)'de yerine yazılmasıyla,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle, devam edilirse, $\partial^2 \Psi / \partial x^2, \partial^2 \Psi / \partial y^2, \partial^2 \Psi / \partial z^2$ kısmi türevleri de hesaplanabilir. Böylece küresel koordinatlarda, hidrojen atomuna ait elektronun Schrödinger dalga denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \Psi = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada,

$$\nabla^2(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.9)$$

denklemini ∇^2 operatörünün küresel koordinatlardaki karşılığıdır.

Coulomb potansiyeli zamandan bağımsız olduğu için (3.8) denklemini değişkenlerine ayrılarak çözülebilir. Elektronun bağıl harekete ait dalga fonksiyonu,

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (3.10)$$

radyal ve açısal iki çarpandan oluşacak şekilde yazılabilir. Bu çözüm, sistemdeki r bağımlılığının (θ, ϕ) den yani, yönden bağımsız olduğunu göstermektedir.

(3.10)'un (3.8)'de yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) Y(\theta, \phi) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] R(r) Y(\theta, \phi) \\ &= - \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) R(r) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) R(r) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklinde elektronun bağıl hareketinin küresel koordinatlardaki diferensiyel denklemini elde edilir. (3.11)'in $r^2/R(r)Y(\theta, \phi)$ ile çarpılmasıyla,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] \\ &= - \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

bulunur. (3.12)'nin sağ tarafı açısal bileşenleri, sol tarafı ise radyal bileşenleri içerir.

(3.12)'nin (r, θ, ϕ) bağımsız değişkenlerinin değişim sınırları içinde doğrulanabilmesi, ancak denklemin bir sabite eşit olmasıyla mümkündür ve bu sabite *ayırma sabiti* denir. Denklemin ayırma sabiti C olmak üzere radyal denklem,

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = C \quad (3.13)$$

şeklinde. Açılara bağlı kısmın çözümü $Y(\theta, \phi)$ ile gösterilir ve *küresel harmonik* adını alır. Radyal kısmın çözümünden $R(r)$ ile gösterilen *radyal dalga fonksiyonu* elde edilir.

(3.13)'de $C = l(l + 1)$ yazılıp, denklem yeniden düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{l(l + 1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R(r) = 0 \quad (3.14)$$

şeklindeki radyal Schrödinger denklemi elde edilir. m kütleli bir parçacığın 3-boyutlu bir uzayda, $V(r) = -Ze^2/r$ potansiyelindeki hareketi için (3.14) radyal Schrödinger denklemi,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \frac{1}{r} - \frac{l(l + 1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (3.15)$$

formunda yazılır. Radyal denklemi boyutsuz hale getirmek için, boyutsuz bir z değişkeni ile,

$$z = \alpha r \quad (3.16)$$

dönüşümü ele alınsın. n enerji parametresi ve α sırasıyla,

$$n = \frac{Ze^2}{\hbar} \sqrt{-\frac{m}{2E}}, \quad \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}, \quad (E < 0) \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlansın. $Z = 1$ alınmasıyla, (3.15), (3.16) ve (3.17)'den,

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dR}{dz} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{2me^2}{\hbar^2 \alpha z} - \frac{l(l + 1)}{z^2} \right] R(z) = 0 \quad (3.18)$$

formundaki radyal denklem elde edilir [19,20,38].

4. RADYAL SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN KESİRLİ DİFERİNTİTEGRAL YARDIMIYLA AÇIK ÇÖZÜMLERİ

(I). Bu bölümde, (3.18) radyal Schrödinger denklemi için uygun dönüşümler yapılarak açık çözümleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir. Bölüm sonunda ise, bu çözümlerin hipergeometrik gösterimleri elde edilmiştir.

Teorem 4.1. (3.18) ile verilen radyal denklem,

$$R(z) = Kz^{\nu - [(\lambda + n/2\lambda) + 1/2]} e^{\lambda z} [z^{-\nu + (n/\lambda)} e^{-2\lambda z}]_{(v-1)}, \quad (\nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (4.1)$$

formundaki kesirli çözüme sahiptir (K keyfi sabit).

İspat. (3.18) denklemine $R = g/z$ dönüşümü uygulanırsa ($g = g(z)$),

$$\frac{dR}{dz} = \frac{1}{z} \frac{dg}{dz} - \frac{g}{z^2} \quad (4.2)$$

ve

$$\frac{d^2 R}{dz^2} = -\frac{1}{z^2} \frac{dg}{dz} + \frac{1}{z} \frac{d^2 g}{dz^2} - \frac{1}{z^2} \frac{dg}{dz} + \frac{2g}{z^3} \quad (4.3)$$

olmak üzere,

$$-\frac{2}{z^2} \frac{dg}{dz} + \frac{1}{z} \frac{d^2 g}{dz^2} + \frac{2g}{z^3} + \frac{2}{z^2} \frac{dg}{dz} - \frac{2g}{z^3} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{2me^2}{\hbar^2 \alpha z} - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] \frac{g}{z} = 0,$$

$$\frac{d^2 g}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{2me^2}{\hbar^2 \alpha z} - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] g = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir. $g(z) = z^{1/2} f(z)$ dönüşümü kullanılarak,

$$\frac{dg}{dz} = z^{1/2} \left[\frac{df}{dz} + \frac{1}{2z} f \right]$$

ve

$$\frac{d^2 g}{dz^2} = z^{1/2} \left[\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} - \frac{1}{4z^2} f \right] \quad (4.5)$$

bulunur.

(4.5)'in (4.4)'de yerine yazılması ve denklemin her iki yanının z^2 ile çarpılmasıyla,

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + \left[-\frac{z^2}{4} + \frac{2me^2}{\hbar^2 \alpha} z - \frac{1}{4} - l(l+1) \right] f = 0$$

elde edilir. Burada,

$$n = \frac{2me^2}{\hbar^2 \alpha}, \quad l(l+1) = \frac{k^2 - 1}{4}, \quad (k = 2l + 1) \quad (4.6)$$

olmak üzere denklem,

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + \left[-\frac{z^2}{4} + nz - \frac{k^2}{4} \right] f = 0 \quad (4.7)$$

formuna dönüşür. Teorem 2.4.3'ün hipotezinden,

$$A = B = 1, \quad D = -\frac{1}{4}, \quad E = n, \quad F = -\frac{k^2}{4} \quad (4.8)$$

olur. (2.53)'den,

$$\rho = \pm \frac{k}{2}, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{(2\rho + 1)\lambda + n}{2\lambda}, \quad (4.9)$$

$$\left[\rho = \nu - \left(\frac{\lambda + n}{2\lambda} \right), \quad \nu - (2\rho + 1) = -\nu + \frac{n}{\lambda} \right]$$

yazılabilir. Böylece, (4.7) homojen adi lineer diferensiyel denklemin,

$$f(z) = K z^{\nu - (\lambda + n/2\lambda)} e^{\lambda z} \left[z^{-\nu + (n/\lambda)} e^{-2\lambda z} \right]_{(v-1)}, \quad (\nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (4.10)$$

formunda çözümleri vardır. Burada, K keyfi sabittir. Tersine işlemlerle,

$$R(z) = K z^{\nu - [(\lambda + n/2\lambda) + 1/2]} e^{\lambda z} \left[z^{-\nu + (n/\lambda)} e^{-2\lambda z} \right]_{(v-1)}$$

çözümü bulunur.

(II). α -boyutlu uzayda,

$$l^2 \Psi(r, \theta) = \left[-\frac{\hbar^2}{\sin^{\alpha-2} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^{\alpha-1} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \Psi(r, \theta) = l(l + \alpha - 2) \Psi(r, \theta) \quad (4.11)$$

olmak üzere, $\delta = 3$ için $1/4\pi\epsilon_0$ değerine sahip k_δ sabiti,

$$k_\delta = \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)}{2\pi^{\delta/2}(\delta-2)\epsilon_0}, \quad (\delta > 2)$$

bağıntısıyla verilsin. Buradan, $Z = 1$ için $V(r)$ nin (3.1)'deki tanımını da kullanılarak kesirli Schrödinger denklemini,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^{\alpha-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l^2}{2mr^2} - e^2 \frac{k_\delta}{r^{\delta-2}} \right] \Psi(r, \theta) = E \Psi(r, \theta) \quad (4.12)$$

şeklinde verilir $[(1 \leq \alpha \leq 3), (0 \leq r \leq \infty)$ ve $(0 \leq \theta \leq \pi)]$.

(4.12)'nin, $\Psi(r, \theta) = R(r)Y(\theta)$ şeklindeki çözümleri incelenirse, kesirli Schrödinger denkleminin radyal ve açısal formları sırasıyla,

$$R''(r) + \frac{\alpha-1}{r} R'(r) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E + e^2 \frac{k_\delta}{r^{\delta-2}} \right) - \frac{l(l-\alpha-2)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (4.13)$$

ve

$$Y''(\theta) + (\alpha-2) \cot \theta Y'(\theta) + l(l-\alpha-2)Y(\theta) = 0 \quad (4.14)$$

olarak bulunur. H_l normalleştirme faktörü,

$$H_l(\alpha) = \begin{cases} \Gamma(\alpha/2-1) \left[\frac{l! (l+\alpha/2-1)}{2^{3-\alpha} \pi \Gamma(l+\alpha-2)} \right]^{1/2}, & (\alpha \neq 2) \\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} & (l \neq 0) \text{ veya } \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}, \quad (l=0), \quad (\alpha=2) \end{cases}$$

şeklinde olup (4.14)'ün,

$$Y_l(\theta) = H_l(\alpha) C_l^{\alpha/2-1}(\cos \theta), \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Gegenbauer polinomları cinsinden çözümleri vardır.

$k^2 = -2mE/\hbar^2$ olmak üzere, (4.13) radyal denklemine,

$$R(r) = r^l e^{-kr} f(r)$$

dönüşümü uygulanır. Burada,

$$z = 2kr, \quad b = \frac{me^2 k_\delta}{\hbar^2}$$

alınırsa,

$$f'(r) = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dr} = 2kf'(z), \quad (4.15)$$

$$f''(r) = \frac{d(2kf')}{dz} \frac{dz}{dr} = 4k^2 f''(z), \quad (4.16)$$

$$R'(r) = r^l e^{-kr} [lr^{-1} f(r) - kf(r) + f'(r)] \quad (4.17)$$

ve

$$R''(r) = r^l e^{-kr} [f''(r) + 2(lr^{-1} - k)f'(r) + (l^2 r^{-2} - lr^{-2} - 2klr^{-1} + k^2)f(r)] \quad (4.18)$$

türevleri bulunur. Bu türev değerleri (4.13)'de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$zf''(z) + [(2l + \alpha - 1) - z]f'(z) + \left[\frac{b}{2^{3-\delta} k^{4-\delta}} z^{3-\delta} - \frac{2l + \alpha - 1}{2} \right] f(z) = 0 \quad (4.19)$$

olur. Burada,

$$\tau = 2l + \alpha - 1, \quad \sigma = \frac{b}{2^{3-\delta} k^{4-\delta}} \quad (4.20)$$

olmak üzere (4.19) denklemi,

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (\tau - z) \frac{df}{dz} + \left(\sigma z^{3-\delta} - \frac{\tau}{2} \right) f(z) = 0 \quad (4.21)$$

formuna dönüşür [2,39].

Burada, farklı δ değerlerine karşılık gelen diferensiyel denklemlerin, kesirli diferentegraller yardımıyla açık çözümleri elde edilebilir.

Teorem 4.2. $\nu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve K keyfi bir sabit olmak üzere, (4.21) denkleminin,

$$f(z) = K z^{\nu - (\tau/2)} e^{[\lambda + (1/2)]z} [z^{-\nu} e^{-2\lambda z}]_{(\nu-1)}, \quad (\delta = 2)$$

$$f(z) = K \left[z^{-(\frac{\tau}{2} + \sigma)} e^z \right]_{(\frac{\tau}{2} - \sigma - 1)}, \quad (\delta = 3)$$

$$f(z) = K z^{\nu - (\tau/2)} e^{[\lambda + (1/2)]z} [z^{-\nu} e^{-2\lambda z}]_{(\nu-1)} \quad (\delta = 4)$$

formunda kesirli çözümleri vardır.

İspat. 1.Durum. (4.21)'de $\delta = 2$ alınırsa,

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (\tau - z) \frac{df}{dz} + \left(\sigma z - \frac{\tau}{2} \right) f(z) = 0 \quad (4.22)$$

bulunur. (4.22) denklemine,

$$f(z) = e^{z/2} z^{-\tau/2} u(z) \quad (4.23)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \left[\frac{1}{2} e^{z/2} z^{-\tau/2} + e^{z/2} \left(\frac{-\tau}{2} \right) z^{(-\tau/2)-1} \right] u + e^{z/2} z^{-\tau/2} \frac{du}{dz}, \\ \frac{df}{dz} &= e^{z/2} z^{(-\tau/2)-1} \left[z \frac{du}{dz} + \frac{1}{2} (z - \tau) u \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dz^2} &= e^{z/2} z^{(-\tau/2)-2} \left\{ z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \left[\frac{z - \tau - 2}{2} + 1 + \frac{1}{2} (z - \tau) \right] z \frac{du}{dz} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(z - \tau)^2 - 2(z - \tau)}{4} + \frac{z}{2} \right] u \right\}, \\ \frac{d^2 f}{dz^2} &= e^{z/2} z^{(-\tau/2)-2} \left\{ z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z(z - \tau) \frac{du}{dz} + \frac{1}{4} [(z - \tau)^2 + 2\tau] u \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

türevleri bulunur.

(4.23)-(4.25) değerleri (4.22)'de yerlerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& z \frac{d^2 u}{dz^2} + (z - \tau) \frac{du}{dz} + \frac{1}{4} [z - 2\tau + \tau^2 z^{-1} + 2\tau z^{-1}] u \\
& + (\tau - z) \left[\frac{du}{dz} + \frac{(1 - \tau z^{-1})u(z)}{2} \right] + \left(\sigma z - \frac{\tau}{2} \right) u = 0, \\
& z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \left[\frac{2\tau - \tau^2}{4} + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) z^2 \right] u = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (4.26) denklemine,

$$u(z) = z^{1/2} w(z) \tag{4.27}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{du}{dz} = \frac{z^{-1/2}}{2} w + z^{1/2} \frac{dw}{dz} = z^{1/2} \left[\frac{dw}{dz} + \frac{1}{2z} w \right]$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{z^{-1/2}}{2} \left[\frac{dw}{dz} + \frac{1}{2z} w \right] + z^{1/2} \left[\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{1}{2z^2} w + \frac{1}{2z} \frac{dw}{dz} \right], \\
\frac{d^2 u}{dz^2} &= z^{1/2} \left[\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \frac{1}{4z^2} w \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - \frac{1}{4} w + \frac{2\tau - \tau^2}{4} w + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) z^2 w = 0, \\
& z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + \left[\left(\frac{\sqrt{4\sigma - 1}}{2} z \right)^2 - \left(\frac{\tau - 1}{2} \right)^2 \right] w = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

denklemi elde edilir.

(4.29) denklemi ile Teorem 2.4.3 karşılaştırılırsa,

$$A = B = 1, \quad D = \frac{4\sigma - 1}{4}, \quad C = E = 0, \quad F = -\left(\frac{\tau - 1}{2}\right)^2$$

olur. Böylece, (4.29) homojen lineer adi diferensiyel denklemi,

$$w(z) = Kz^{\nu-1/2}e^{\lambda z}(z^{-\nu}e^{-2\lambda z})_{(\nu-1)}, \quad (\nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (4.30)$$

formundaki çözüme sahiptir. Burada K keyfi bir sabit olup,

$$\rho = \pm \frac{(\tau - 1)}{2}, \quad \lambda = \pm i \frac{\sqrt{4\sigma - 1}}{2}, \quad \nu = \frac{2\rho + 1}{2}, \quad (4.31)$$

$$(\rho = \nu - 1/2, \quad \nu - 2\rho - 1 = -\nu)$$

şeklindedir. Tersine işlemlerle,

$$f(z) = Kz^{\nu-(\tau/2)}e^{[\lambda+(1/2)]z}[z^{-\nu}e^{-2\lambda z}]_{(\nu-1)}$$

çözümü bulunur [2].

2.Durum. (4.21)'de $\delta = 3$ alınırsa,

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (\tau - z) \frac{df}{dz} + \left(\sigma - \frac{\tau}{2}\right) f(z) = 0 \quad (4.32)$$

bulunur. (4.32) denklemine,

$$f(z) = e^{z/2} z^{-\tau/2} \vartheta(z) \quad (4.33)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{df}{dz} = e^{z/2} z^{(-\tau/2)-1} \left[z \frac{d\vartheta}{dz} + \frac{1}{2} (z - \tau) \vartheta \right] \quad (4.34)$$

ve

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = e^{z/2} z^{(-\tau/2)-2} \left\{ z^2 \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} + z(z - \tau) \frac{d\vartheta}{dz} + \frac{1}{4} [(z - \tau)^2 + 2\tau] \vartheta \right\} \quad (4.35)$$

olmak üzere (4.32),

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{\tau-1}{2}\right)^2}{z^2} \right] \vartheta = 0$$

formuna dönüşür. Teorem 2.4.2’de,

$$h = 1, \quad s = -1, \quad t = \frac{\tau}{2} + \sigma, \quad v = \frac{\tau}{2} - \sigma$$

olarak alınır, (4.32) homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. Burada K keyfi bir sabit olmak üzere,

$$f(z) = K \left[z^{-\left(\frac{\tau}{2} + \sigma\right)} e^z \right]_{\left(\frac{\tau}{2} - \sigma - 1\right)} \quad (4.36)$$

ve

$$\vartheta(z) = K z^{\tau/2} e^{-z/2} \left[z^{-\left(\frac{\tau}{2} + \sigma\right)} e^z \right]_{\left(\frac{\tau}{2} - \sigma - 1\right)} \quad (4.37)$$

çözümleri elde edilir [30].

3.Durum. (4.21)’de $\delta = 4$ alınır,

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (\tau - z) \frac{df}{dz} + \left(\frac{\sigma}{z} - \frac{\tau}{2} \right) f(z) = 0 \quad (4.38)$$

bulunur. (4.38) denkleminde,

$$f(z) = e^{z/2} z^{-\tau/2} \eta(z) \quad (4.39)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{df}{dz} = e^{z/2} z^{(-\tau/2)-1} \left[z \frac{d\eta}{dz} + \frac{1}{2} (z - \tau) \eta \right] \quad (4.40)$$

ve

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = e^{z/2} z^{(-\tau/2)-2} \left\{ z^2 \frac{d^2 \eta}{dz^2} + z(z - \tau) \frac{d\eta}{dz} + \frac{1}{4} [(z - \tau)^2 + 2\tau] \eta \right\} \quad (4.41)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& z \frac{d^2 \eta}{dz^2} + (z - \tau) \frac{d\eta}{dz} + \frac{1}{4} [z - 2\tau + \tau^2 z^{-1} + 2\tau z^{-1}] \eta \\
& + (\tau - z) \left[\frac{d\eta}{dz} + \frac{(1 - \tau z^{-1})\eta(z)}{2} \right] + \left(\frac{\sigma}{z} - \frac{\tau}{2} \right) \eta = 0, \\
& 4z^2 \frac{d^2 \eta}{dz^2} + [4\sigma - \tau^2 + 2\tau - z^2] \eta = 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (4.42) denklemine tekrar,

$$\eta(z) = z^{1/2} w(z) \tag{4.43}$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{d\eta}{dz} = z^{1/2} \left[\frac{dw}{dz} + \frac{1}{2z} w \right]$$

ve

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = z^{1/2} \left[\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \frac{1}{4z^2} w \right] \tag{4.44}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - \left[\frac{z^2}{4} + \left(\frac{\tau^2 - 2\tau + 1 - 4\sigma}{4} \right) \right] w = 0, \\
& z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - \left[\left(\frac{z}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma}}{2} \right)^2 \right] w = 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

denklemini bulunur. Teorem 2.4.3'e göre,

$$A = B = 1, \quad D = \frac{-1}{4}, \quad C = E = 0, \quad F = \sigma - \left(\frac{\tau - 1}{2} \right)^2$$

olduğundan, (4.45) homojen lineer adi diferensiyel denklemini,

$$w(z) = K z^{\nu-1/2} e^{\lambda z} (z^{-\nu} e^{-2\lambda z})_{\nu-1}, \quad (\nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \tag{4.46}$$

formundaki çözüme sahiptir.

Burada K keyfi bir sabit ve

$$\rho = \pm \sqrt{\left(\frac{\tau-1}{2}\right)^2 - \sigma}, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{2\rho+1}{2}, \quad (4.47)$$

$$(\rho = \nu - 1/2, \quad \nu - [2(\nu - 1/2) + 1] = -\nu)$$

şeklindedir. Tersine işlemlerle,

$$f(z) = K z^{\nu-(\tau/2)} e^{[\lambda+(1/2)]z} [z^{-\nu} e^{-2\lambda z}]_{(\nu-1)}$$

çözümü bulunur [2].

Elde edilen bu kesirli çözümlerin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden gösterimi de aşağıdaki teoremler yardımıyla verilmiştir.

Teorem 4.3. ${}_2F_0$ Gauss hipergeometrik fonksiyon olmak üzere, $\left| [z^{-\nu+(n/\lambda)}]_m \right| < \infty$ ($m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$), $z \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\left| -\frac{1}{2\lambda z} \right| < 1$ için, (2.39) yardımıyla (4.10) çözümü,

$$f(z) = z^{[-\lambda+(n/2\lambda)]} e^{-\lambda z} {}_2F_0 \left[1-\nu, 1-m-\nu+(n/\lambda); -\frac{1}{2\lambda z} \right] \quad (4.48)$$

formunda yazılır.

İspat. (4.10) çözümüne (2.39) Leibniz formülü uygulanırsa,

$$f(z) = K z^{\nu-(\lambda+n/2\lambda)} e^{\lambda z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(m+1)} (e^{-2\lambda z})_{\nu-1-m} (z^{-\nu+(n/\lambda)})_m \quad (4.49)$$

bulunur. (2.35) ve (2.36) özelliklerinden faydalananarak sırasıyla,

$$(e^{-2\lambda z})_{\nu-1-m} = e^{-i\pi(\nu-1-m)} (2\lambda)^{\nu-1-m} e^{-2\lambda z}, \quad (4.50)$$

$$(z^{-\nu+(n/\lambda)})_m = e^{-i\pi m} \frac{\Gamma[m+\nu-(n/\lambda)]}{\Gamma[\nu-(n/\lambda)]} z^{-\nu+(n/\lambda)-m}, \quad (4.51)$$

$$\left(m \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}; \left| \frac{\Gamma[m+\nu-(n/\lambda)]}{\Gamma[\nu-(n/\lambda)]} \right| < \infty \right)$$

elde edilir.

(4.50) ve (4.51), (4.49)'da yerlerine yazılırsa,

$$f(z) = K z^{[-\lambda+(n/2\lambda)]} e^{-\lambda z} (2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-m)} \frac{\Gamma[m+\nu-(n/\lambda)]}{\Gamma[\nu-(n/\lambda)]} (2\lambda z)^{-m} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \quad (4.52)$$

bulunur. (2.3) ve (2.4) ile tanımlı Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden faydalanarak (4.52) çözümü,

$$f(z) = K z^{[-\lambda+(n/2\lambda)]} e^{-\lambda z} (2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\Gamma[m+1-(m+\nu-(n/\lambda))]}{\Gamma[1-(m+\nu-(n/\lambda))]} \left(-\frac{1}{2\lambda z}\right)^m \frac{1}{m!} \quad (4.53)$$

şeklinde yazılır. (2.54)'de tanımlanan,

$$(\nu)_m = \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(\nu)}$$

Polchammer sembolü (4.53)'de kullanılırsa,

$$f(z) = K z^{[-\lambda+(n/2\lambda)]} e^{-\lambda z} (2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1} \times \sum_{m=0}^{\infty} (1-\nu)_m [1-m-\nu+(n/\lambda)]_m \left(-\frac{1}{2\lambda z}\right)^m \frac{1}{m!} \quad (4.54)$$

olarak yazılır. Hipergeometrik fonksiyon ve

$$\frac{1}{K} = (2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1}$$

eşitliğinin kabulüyle,

$$f(z) = z^{[-\lambda+(n/2\lambda)]} e^{-\lambda z} {}_2F_0 \left[1-\nu, 1-m-\nu+(n/\lambda); -\frac{1}{2\lambda z} \right] \quad (4.55)$$

olur ve böylece (3.18) radyal denklemin çözümü de,

$$R(z) = z^{[-\lambda+(n/2\lambda)-1/2]} e^{-\lambda z} {}_2F_0 \left[1-\nu, 1-m-\nu+(n/\lambda); -\frac{1}{2\lambda z} \right]$$

formunda yazılır.

Teorem 4.4. ${}_2F_0$ Gauss hipergeometrik fonksiyon olmak üzere, $|(z^{-\nu})_m| < \infty$ ($m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$), $z \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\left| -\frac{1}{2\lambda z} \right| < 1$ için, (2.39) yardımıyla (4.30) ve (4.46) çözümleri,

$$w(z) = z^{-1/2} e^{-\lambda z} {}_2F_0 \left[\nu, 1 - \nu; -\frac{1}{2\lambda z} \right] \quad (4.56)$$

formunda yazılırlar.

İspat. (4.30) ve (4.46) çözümlerine (2.39) Leibniz formülü uygulanırsa,

$$w(z) = K z^{\nu-1/2} e^{\lambda z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(m+1)} (e^{-2\lambda z})_{\nu-1-m} (z^{-\nu})_m \quad (4.57)$$

bulunur. (2.35) ve (2.36) özelliklerinden faydalanarak sırasıyla,

$$(e^{-2\lambda z})_{\nu-1-m} = e^{-i\pi(\nu-1-m)} (2\lambda)^{\nu-1-m} e^{-2\lambda z}, \quad (4.58)$$

$$(z^{-\nu})_m = e^{-i\pi m} \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(\nu)} z^{-\nu-m}, \quad \left(m \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}; \left| \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(\nu)} \right| < \infty \right) \quad (4.59)$$

elde edilir. (4.58) ve (4.59), (4.57)'de yerlerine yazılırsa,

$$w(z) = K z^{-1/2} e^{-\lambda z} (-2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(\nu-m)} (2\lambda z)^{-m} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \quad (4.60)$$

olur. (2.3) ve (2.4) ile tanımlı Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden faydalanarak (4.60) çözümü,

$$w(z) = K z^{-1/2} (-2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1} e^{-\lambda z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\nu)\Gamma(m+1-\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \left(-\frac{1}{2\lambda z} \right)^m \frac{1}{m!} \quad (4.61)$$

şekline dönüşür. (2.54) özelliği kullanılırsa (4.61)'den,

$$w(z) = K z^{-1/2} (-2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1} e^{-\lambda z} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu)_m (1-\nu)_m \left(-\frac{1}{2\lambda z} \right)^m \frac{1}{m!} \quad (4.62)$$

elde edilir. Hipergeometrik fonksiyon ve

$$\frac{1}{K} = (-2\lambda e^{-i\pi})^{\nu-1}$$

eşitliğinin kabulüyle,

$$w(z) = z^{-1/2} e^{-\lambda z} {}_2F_0 \left[\nu, 1 - \nu; -\frac{1}{2\lambda z} \right] \quad (4.63)$$

bulunur. Böylece (4.21)'in çözümü de,

$$f(z) = z^{-\tau/2} e^{[(1/2)-\lambda]z} {}_2F_0 \left[\nu, 1 - \nu; -\frac{1}{2\lambda z} \right], \quad (\delta = 2, \delta = 4)$$

formunda yazılır.

Teorem 4.5. ${}_2F_0$ Gauss hipergeometrik fonksiyon olmak üzere, $\left| \left[z^{-(\frac{\tau}{2}+\sigma)} \right]_m \right| < \infty$ ($m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$), $z \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ için, (2.39) yardımıyla (4.37) çözümü,

$$\vartheta(z) = K z^{\left(\frac{\tau}{2}-\sigma\right)} e^{z/2} {}_2F_0 \left[1 - \nu, \frac{\tau}{2} + \sigma; \frac{1}{z} \right] \quad (4.64)$$

formunda yazılır.

İspat. (4.37) çözümüne (2.39) Leibniz formülü uygulanırsa,

$$\vartheta(z) = K z^{\tau/2} e^{-z/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(m+1)} (e^z)^{\frac{\tau}{2}-\sigma-1-m} \left[z^{-(\frac{\tau}{2}+\sigma)} \right]_m \quad (4.65)$$

bulunur. (2.34) ve (2.36) özelliklerinden faydalanarak sırasıyla,

$$(e^z)^{\frac{\tau}{2}-\sigma-1-m} = e^z, \quad (4.66)$$

$$\left[z^{-(\frac{\tau}{2}+\sigma)} \right]_m = e^{-i\pi m} \frac{\Gamma\left(m + \frac{\tau}{2} + \sigma\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau}{2} + \sigma\right)} z^{-(\frac{\tau}{2}+\sigma)-m}, \quad (4.67)$$

$$\left(m \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}; \left| \frac{\Gamma\left(m + \frac{\tau}{2} + \sigma\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau}{2} + \sigma\right)} \right| < \infty \right)$$

elde edilir. (4.66) ve (4.67), (4.65)'de yerlerine yazılırsa,

$$\vartheta(z) = K z^{\tau/2} e^{-z/2} z^{-(\frac{\tau}{2}+\sigma)} e^z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-m)} \frac{\Gamma\left(m + \frac{\tau}{2} + \sigma\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau}{2} + \sigma\right)} e^{-i\pi m} z^{-m} \frac{1}{\Gamma(m+1)}$$

ve $(e^{i\pi})^{-m} = (\cos \pi + i \sin \pi)^{-m} = (-1)^{-m}$ eşitliği kullanılarak,

$$\vartheta(z) = Kz^{\left(\frac{\tau}{2}-\sigma\right)} e^{z/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-m)} \frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{2}+\sigma+m\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau}{2}+\sigma\right)} \frac{1}{\Gamma(m+1)} (-z)^{-m} \quad (4.68)$$

olur. (2.3) ve (2.4) ile tanımlı Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden faydalanarak (4.68) çözümü,

$$\begin{aligned} \vartheta(z) &= Kz^{\left(\frac{\tau}{2}-\sigma\right)} e^{z/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\tau}{2}-\sigma\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\tau}{2}-\sigma-m\right)} \left(-\frac{1}{z}\right)^m \frac{1}{m!}, \\ \vartheta(z) &= Kz^{\left(\frac{\tau}{2}-\sigma\right)} e^{z/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\Gamma\left(m+\frac{\tau}{2}+\sigma\right)}{\Gamma\left(\frac{\tau}{2}+\sigma\right)} \left(\frac{1}{z}\right)^m \frac{1}{m!} \end{aligned} \quad (4.69)$$

şekline dönüşür. (2.54) özelliği kullanılırsa (4.69)'dan,

$$\vartheta(z) = Kz^{\left(\frac{\tau}{2}-\sigma\right)} e^{z/2} \sum_{m=0}^{\infty} (1-\nu)_m \left(\frac{\tau}{2}+\sigma\right)_m \left(\frac{1}{z}\right)^m \frac{1}{m!} \quad (4.70)$$

elde edilir. Buradan,

$$\vartheta(z) = Kz^{\left(\frac{\tau}{2}-\sigma\right)} e^{z/2} {}_2F_0 \left[1-\nu, \frac{\tau}{2}+\sigma; \frac{1}{z} \right] \quad (4.71)$$

ve böylece (4.21)'in çözümü de,

$$f(z) = Kz^{-\sigma} e^z {}_2F_0 \left[1-\nu, \frac{\tau}{2}+\sigma; \frac{1}{z} \right], \quad (\delta = 3)$$

formunda yazılır.

5. N-KESİRLİ HESAP OPERATÖRÜNÜN SİNGÜLER KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Bu bölümde, uygun dönüşümler yardımıyla elde edilen (4.7), (4.22), (4.32) ve (4.38)'de tanımlı singüler katsayılı diferensiyel denklemlerin çözümleri, N -kesirli hesap operatörü uygulanarak elde edilmiştir.

Teorem 5.1. $f \in \{f: 0 \neq |f_\mu| < \infty; \mu \in \mathbb{R}\}$ olsun. (4.7)'de verilen,

$$z^2 f_2 + z f_1 + \left(-\frac{z^2}{4} + nz - \frac{k^2}{4}\right) f = 0, \quad (z \neq 0) \quad (5.1)$$

singüler katsayılı homojen diferensiyel denklem,

$$f^{(I)} = A z^{k/2} e^{z/2} \left[z^{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)} e^{-z} \right]_{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)},$$

$$f^{(II)} = B z^{k/2} e^{-z/2} \left[z^{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)},$$

$$f^{(III)} = C z^{-k/2} e^{z/2} \left[z^{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)} e^{-z} \right]_{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)},$$

$$f^{(IV)} = D z^{-k/2} e^{-z/2} \left[z^{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)}$$

formundaki özel çözümlere sahiptir. Burada, $f_n = d^n f / dz^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); $z \in \mathbb{C}$; $f_0 = f = f(z)$; A, B, C, D sabitler, k ve n sabitleri ise (4.6)'da tanımlandığı gibidir.

İspat. $g = g(z)$ olmak üzere,

$$f = z^v g, \quad (z \neq 0) \quad (5.2)$$

olsun. Böylece,

$$f_1 = v z^{v-1} g + z^v g_1 \quad (5.3)$$

ve

$$f_2 = v(v-1)z^{v-2}g + 2vz^{v-1}g_1 + z^v g_2 \quad (5.4)$$

olur.

(5.2)-(5.4), (5.1)'de yerlerine yazılırsa,

$$z^v \left\{ z^2 [v(v-1)z^{-2}g + 2vz^{-1}g_1 + g_2] + z[vz^{-1}g + g_1] + \left(-\frac{z^2}{4} + nz - \frac{k^2}{4} \right) g \right\} = 0,$$

$$[v(v-1)g + 2vzg_1 + z^2g_2] + [vg + zg_1] + \left(-\frac{z^2}{4} + nz - \frac{k^2}{4} \right) g = 0,$$

$$z^{-1} \left\{ z^2g_2 + (2v+1)zg_1 + \left[\left(n - \frac{z}{4} \right) z + v^2 - \frac{k^2}{4} \right] g \right\} = 0,$$

$$zg_2 + (2v+1)g_1 + \left[n - \frac{z}{4} + \left(v^2 - \frac{k^2}{4} \right) z^{-1} \right] g = 0 \quad (5.5)$$

elde edilir. v ,

$$v^2 - \frac{k^2}{4} = 0 \quad (5.6)$$

olacak şekilde seçilsin. Böylece,

$$v = \pm \frac{k}{2} \quad (5.7)$$

olur.

1. Durum. $v = k/2$ olsun. Bu değer, (5.2) ve (5.5)'de yerine yazılırsa,

$$f = z^{k/2}g \quad (5.8)$$

ve

$$zg_2 + (1+k)g_1 + \left(n - \frac{z}{4} \right) g = 0 \quad (5.9)$$

elde edilir. Şimdi de, $h = h(z)$ olmak üzere,

$$g = e^{\lambda z}h, \quad (z \neq 0) \quad (5.10)$$

dönüşümü (5.9) denkleminde uygulanırsa,

$$z(e^{\lambda z}h)_2 + (1+k)(e^{\lambda z}h)_1 + \left(n - \frac{z}{4} \right) (e^{\lambda z}h) = 0 \quad (5.11)$$

olur.

(5.11)'deki gerekli türevler hesaplanırsa,

$$(e^{\lambda z} h)_1 = e^{\lambda z} (\lambda h + h_1) \quad (5.12)$$

ve

$$(e^{\lambda z} h)_2 = e^{\lambda z} (\lambda^2 h + 2\lambda h_1 + h_2) \quad (5.13)$$

olarak elde edilir. (5.12) ve (5.13) türevleri yerlerine yazılırsa,

$$zh_2 + (2\lambda z + 1 + k)h_1 + \left[z \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) + \lambda(1 + k) + n \right] h = 0 \quad (5.14)$$

bulunur. λ değeri,

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad (5.15)$$

olacak şekilde seçilirse,

$$\lambda = \pm \frac{1}{2} \quad (5.16)$$

olur.

(1-i). $\lambda = 1/2$ olsun. Böylece, (5.10) ve (5.14) sırasıyla,

$$g = e^{z/2} h \quad (5.17)$$

ve

$$zh_2 + (z + 1 + k)h_1 + \left(\frac{1 + k}{2} + n \right) h = 0 \quad (5.18)$$

şeklinde yazılırlar. (5.18)'in her iki yanına (2.40) ile tanımlı N^μ operatörü uygulanırsa,

$$(zh_2)_\mu + (zh_1)_\mu + (1 + k)h_{1+\mu} + \left(\frac{1 + k}{2} + n \right) h_\mu = 0 \quad (5.19)$$

elde edilir. (2.40) bağıntısından,

$$(h_2 z)_\mu = \sum_{k=0}^1 \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1 - k)\Gamma(k + 1)} (h_2)_{\mu-k} (z)_k = zh_{2+\mu} + \mu h_{1+\mu} \quad (5.20)$$

ve

$$(h_1 z)_\mu = \sum_{k=0}^1 \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1 - k)\Gamma(k + 1)} (h_1)_{\mu-k} (z)_k = zh_{1+\mu} + \mu h_\mu \quad (5.21)$$

bulunur. Bunlar, (5.19)'da yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$zh_{2+\mu} + [\mu + z + 1 + k]h_{1+\mu} + \left(\mu + \frac{1+k}{2} + n\right)h_{\mu} = 0 \quad (5.22)$$

elde edilir.

μ değeri, $\mu + \frac{1+k}{2} + n = 0$ olacak şekilde seçilirse,

$$\mu = \frac{-k - 2n - 1}{2} \quad (5.23)$$

bulunur. (5.22)'de, her terim z^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[h_{\left(\frac{-k-2n+1}{2}\right)}\right]_1 + \left[\left(\frac{k-2n+1}{2}\right)z^{-1} + 1\right]h_{\left(\frac{-k-2n+1}{2}\right)} = 0 \quad (5.24)$$

elde edilir.

$$h_{\left(\frac{-k-2n+1}{2}\right)} = u = u(z), \quad \left[h(z) = u_{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)}\right] \quad (5.25)$$

olsun. Bu eşitlik, (5.24)'de yerine yazılırsa,

$$u_1 + \left[\left(\frac{k-2n+1}{2}\right)z^{-1} + 1\right]u = 0 \quad (5.26)$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. (5.26)'nın çözümü,

$$u = Ae^{-\int \left[\left(\frac{k-2n+1}{2}\right)z^{-1} + 1\right]dz}, \quad \left[u = Az^{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)}e^{-z}\right]$$

şeklindedir. $f^{(I)}$ için tersine işlemlerle,

$$h = A \left[z^{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)} e^{-z} \right]_{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)}$$

bulunur. Buradan,

$$f^{(I)} = Az^{k/2}e^{z/2} \left[z^{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)} e^{-z} \right]_{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)}$$

formunda bir özel çözüm elde edilir.

(1-ii). $\lambda = -1/2$ olsun. (1-i)'de yapılanlara benzer işlemler ile,

$$\mu = \frac{-k + 2n - 1}{2}$$

ve

$$h_{\left(\frac{-k+2n+1}{2}\right)} = w = w(z), \quad \left[h(z) = w_{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)} \right]$$

bulunur. Buradan,

$$w_1 + \left[\left(\frac{k + 2n + 1}{2} \right) z^{-1} - 1 \right] w = 0$$

şeklinde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$w = B z^{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)} e^z$$

biçimindedir. $f^{(II)}$ için tersine işlemlerle,

$$h = B \left[z^{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)}$$

olur ve

$$f^{(II)} = B z^{k/2} e^{-z/2} \left[z^{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)}$$

formunda bir özel çözüm elde edilir.

2. Durum. $v = -k/2$ olsun. Bu değer, (5.2) ve (5.5) eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$f = z^{-k/2} g$$

ve

$$z g_2 + (1 - k) g_1 + \left(n - \frac{z}{4} \right) g = 0$$

elde edilir. Bu denkleme, 1. Durumda olduğu gibi (5.10) dönüşümü uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

elde edilir.

(2-i). $\lambda = 1/2$ olsun. (1-i)'de yapılanlara benzer işlemler ile,

$$\mu = \frac{k - 2n - 1}{2}$$

ve

$$h_{\left(\frac{k-2n+1}{2}\right)} = \vartheta = \vartheta(z), \quad \left[h(z) = \vartheta_{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)} \right]$$

bulunur. Buradan,

$$\vartheta_1 + \left[\left(\frac{-k - 2n + 1}{2} \right) z^{-1} + 1 \right] \vartheta = 0$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$\vartheta = C z^{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)} e^{-z}$$

şeklindedir. $f^{(III)}$ için tersine işlemlerle,

$$h = C \left[z^{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)} e^{-z} \right]_{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)}$$

olur ve

$$f^{(III)} = C z^{-k/2} e^{z/2} \left[z^{\left(\frac{k+2n-1}{2}\right)} e^{-z} \right]_{\left(\frac{-k+2n-1}{2}\right)}$$

formunda bir özel çözüm elde edilir.

(2-ii). $\lambda = -1/2$ olsun. (1-ii)'de yapılanlara benzer işlemler ile,

$$\mu = \frac{k + 2n - 1}{2}$$

ve

$$h_{\left(\frac{k+2n+1}{2}\right)} = \eta = \eta(z), \quad \left[h(z) = \eta_{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)} \right]$$

bulunur. Buradan,

$$\eta_1 + \left[\left(\frac{-k+2n+1}{2} \right) z^{-1} - 1 \right] \eta = 0$$

şeklinde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$\eta = Dz^{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)} e^z$$

biçimindedir. $f^{(IV)}$ için tersine işlemlerle,

$$h = D \left[z^{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)}$$

olur ve

$$f^{(IV)} = Dz^{-k/2} e^{-z/2} \left[z^{\left(\frac{k-2n-1}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{-k-2n-1}{2}\right)}$$

formunda bir özel çözüm elde edilir.

Teorem 5.2. $f \in \{f: 0 \neq |f_\mu| < \infty; \mu \in \mathbb{R}\}$ olsun. (4.22)'de verilen,

$$zf_2 + (\tau - z)f_1 + \left(\sigma z - \frac{\tau}{2}\right)f = 0 \quad (5.27)$$

singüler katsayılı homojen diferensiyel denklem,

$$f^{(I)} = Az^{1-\tau} e^{(1-\sqrt{1-4\sigma})z/2} \left[z^{\frac{(\tau-2)}{2}} e^{\sqrt{1-4\sigma}z} \right]_{\left(-\frac{\tau}{2}\right)},$$

$$f^{(II)} = Bz^{1-\tau} e^{(1+\sqrt{1-4\sigma})z/2} \left[z^{\frac{(\tau-2)}{2}} e^{-\sqrt{1-4\sigma}z} \right]_{\left(-\frac{\tau}{2}\right)}$$

formundaki özel çözümlere sahiptir. Burada, $f_n = d^n f / dz^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); $z \in \mathbb{C}$; $f_0 = f = f(z)$; A, B sabitler, σ ve τ sabitleri ise, $\delta = 2$ için (4.20)'de tanımlandığı gibidir.

İspat. Teorem 5.1'e benzer işlemlerle; $g = g(z)$ için (5.2)-(5.4), (5.27)'de yerlerine yazılırsa,

$$f = z^v g, \quad (z \neq 0)$$

$$zg_2 + (2v + \tau - z)g_1 + \left[v(v + \tau - 1)z^{-1} - v + \sigma z - \frac{\tau}{2} \right] g = 0 \quad (5.28)$$

elde edilir. v değeri,

$$v(v + \tau - 1) = 0 \quad (5.29)$$

olacak şekilde seçilsin. Böylece,

$$v = 0 \quad \text{veya} \quad v = 1 - \tau \quad (5.30)$$

olur.

1.Durum. $v = 0$ olduğunda, (5.28)'den (5.27) elde edilir.

2.Durum. $v = 1 - \tau$ olsun. Bu değer, (5.28)'de yerine yazılırsa,

$$f = z^{1-\tau} g \quad (5.31)$$

ve

$$zg_2 + (2 - \tau - z)g_1 + \left(\sigma z + \frac{\tau}{2} - 1 \right) g = 0 \quad (5.32)$$

elde edilir. (5.10) dönüşümü (5.32) denkleminde uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$zh_2 + [(2\lambda - 1)z + (2 - \tau)]h_1 + \left[z(\lambda^2 - \lambda + \sigma) + \lambda(2 - \tau) + \frac{\tau}{2} - 1 \right] h = 0 \quad (5.33)$$

bulunur. λ değeri,

$$\lambda^2 - \lambda + \sigma = 0 \quad (5.34)$$

olacak şekilde seçilirse,

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\sigma}}{2} \quad (5.35)$$

elde edilir.

(2-i). $\lambda = (1 - \sqrt{1 - 4\sigma})/2$ olsun. Böylece,

$$g = e^{(1-\sqrt{1-4\sigma})z/2} h$$

alınırsa (5.33) denklemi,

$$zh_2 + [-\sqrt{1-4\sigma}z + (2-\tau)]h_1 + [\sqrt{1-4\sigma}\left(\frac{\tau}{2}-1\right)]h = 0 \quad (5.36)$$

şeklinde yazılır. (5.36)'nın her iki yanına (2.40) ile tanımlı N^μ operatörü uygulanırsa,

$$zh_{2+\mu} + [\mu - \sqrt{1-4\sigma}z + (2-\tau)]h_{1+\mu} + \sqrt{1-4\sigma}\left(-\mu + \frac{\tau}{2} - 1\right)h_\mu = 0 \quad (5.37)$$

elde edilir. μ değeri, $\left(-\mu + \frac{\tau}{2} - 1\right) = 0$ olacak şekilde seçilirse,

$$\mu = \frac{\tau}{2} - 1 = -\frac{(2-\tau)}{2} \quad (5.38)$$

bulunur. (5.37)'de, her terim z^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[h_{\left(\frac{\tau}{2}\right)}\right]_1 + \left[\frac{(2-\tau)}{2}z^{-1} - \sqrt{1-4\sigma}\right]h_{\left(\frac{\tau}{2}\right)} = 0 \quad (5.39)$$

elde edilir.

$$h_{\left(\frac{\tau}{2}\right)} = u = u(z), \quad \left[h(z) = u_{\left(-\frac{\tau}{2}\right)}\right] \quad (5.40)$$

olsun. Bu eşitlik, (5.39)'da yerine yazılırsa,

$$u_1 + \left[\frac{(2-\tau)}{2}z^{-1} - \sqrt{1-4\sigma}\right]u = 0 \quad (5.41)$$

şeklinde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. (5.41)'in çözümü,

$$u = Az^{\frac{(\tau-2)}{2}}e^{\sqrt{1-4\sigma}z}$$

dir. $f^{(1)}$ için tersine işlemlerle,

$$h = A \left[z^{\frac{(\tau-2)}{2}} e^{\sqrt{1-4\sigma}z} \right]_{\left(-\frac{\tau}{2}\right)}$$

olur ve

$$f^{(1)} = Az^{1-\tau}e^{(1-\sqrt{1-4\sigma})z/2} \left[z^{\frac{(\tau-2)}{2}} e^{\sqrt{1-4\sigma}z} \right]_{\left(-\frac{\tau}{2}\right)}$$

şeklinde bir özel çözüm elde edilir.

(2-ii). $\lambda = (1 + \sqrt{1 - 4\sigma})/2$ olsun. Benzer işlemler ile,

$$\mu = \frac{\tau}{2} - 1 = -\frac{(2 - \tau)}{2}$$

ve

$$h_{(\frac{\tau}{2})} = w = w(z), \quad \left[h(z) = w_{(-\frac{\tau}{2})} \right]$$

bulunur. Buradan,

$$w_1 + \left[\frac{(2 - \tau)}{2} z^{-1} + \sqrt{1 - 4\sigma} \right] w = 0$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$w = B z^{\frac{(\tau-2)}{2}} e^{-\sqrt{1-4\sigma}z}$$

dir. $f^{(II)}$ için tersine işlemlerle,

$$h = B \left[z^{\frac{(\tau-2)}{2}} e^{-\sqrt{1-4\sigma}z} \right]_{(-\frac{\tau}{2})}$$

olur ve

$$f^{(II)} = B z^{1-\tau} e^{(1+\sqrt{1-4\sigma})z/2} \left[z^{\frac{(\tau-2)}{2}} e^{-\sqrt{1-4\sigma}z} \right]_{(-\frac{\tau}{2})}$$

şeklinde bir özel çözüm elde edilir.

Teorem 5.3. $f \in \{f: 0 \neq |f_\mu| < \infty; \mu \in \mathbb{R}\}$ olsun. (4.32)'de verilen,

$$z f_2 + (\tau - z) f_1 + \left(\sigma - \frac{\tau}{2} \right) f(z) = 0 \quad (5.42)$$

singüler katsayılı homojen diferensiyel denklem,

$$f^{(I)} = A \left[z^{(-\sigma-\frac{\tau}{2})} e^z \right]_{(-\sigma+\frac{\tau}{2}-1)},$$

$$f^{(II)} = Bz^{1-\tau} \left[z^{\left(\frac{\tau}{2}-\sigma-1\right)} e^z \right]_{\left(-\sigma-\frac{\tau}{2}\right)}$$

formundaki özel çözümlere sahiptir. Burada, $f_n = d^n f / dz^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); $z \in \mathbb{C}$; $f_0 = f = f(z)$; A, B sabitler, σ ve τ sabitleri ise, $\delta = 3$ için (4.20)'de tanımlandığı gibidir.

İspat. 1.Durum. (5.42)'nin her iki yanına (2.40) ile tanımlı N^μ operatörü doğrudan uygulanırsa,

$$zf_{2+\mu} + (\mu + \tau - z)f_{1+\mu} + \left(-\mu + \sigma - \frac{\tau}{2}\right)f_\mu = 0 \quad (5.43)$$

olur. μ değeri, $-\mu + \sigma - \frac{\tau}{2} = 0$ olacak şekilde seçilirse,

$$\mu = \sigma - \frac{\tau}{2} \quad (5.44)$$

bulunur. (5.43)'de, her terim z^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[f_{\left(\sigma-\frac{\tau}{2}+1\right)} \right]_1 + \left[\left(\sigma + \frac{\tau}{2} \right) z^{-1} - 1 \right] f_{\left(\sigma-\frac{\tau}{2}+1\right)} = 0 \quad (5.45)$$

elde edilir.

$$f_{\left(\sigma-\frac{\tau}{2}+1\right)} = u = u(z), \quad \left[f(z) = u_{\left(-\sigma+\frac{\tau}{2}-1\right)} \right] \quad (5.46)$$

olsun. Bu eşitlik, (5.45)'de yerine yazılırsa,

$$u_1 + \left[\left(\sigma + \frac{\tau}{2} \right) z^{-1} - 1 \right] u = 0 \quad (5.47)$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. (5.47)'nin çözümü,

$$u = Az^{\left(-\sigma-\frac{\tau}{2}\right)} e^z$$

olur ve

$$f^{(I)} = A \left[z^{\left(-\sigma-\frac{\tau}{2}\right)} e^z \right]_{\left(-\sigma+\frac{\tau}{2}-1\right)}$$

şeklinde bir özel çözüm elde edilir.

2.Durum. Teorem 5.1'e benzer işlemlerle, (5.2)-(5.4), (5.42)'de yerlerine yazılırsa,

$$f = z^v g \quad (z \neq 0)$$

$$z g_2 + (2v + \tau - z) g_1 + \left[v(v + \tau - 1) z^{-1} - v + \sigma - \frac{\tau}{2} \right] g = 0 \quad (5.48)$$

elde edilir. v ,

$$v(v + \tau - 1) = 0 \quad (5.49)$$

olacak şekilde seçilsin. Böylece,

$$v = 0 \quad \text{veya} \quad v = 1 - \tau \quad (5.50)$$

olur.

(2-i). $v = 0$ olduğunda, (5.48)'den (5.42) elde edilir.

(2-ii). $v = 1 - \tau$ olsun. Bu değer, (5.48)'de yerine yazılırsa,

$$f = z^{1-\tau} g \quad (5.51)$$

ve

$$z g_2 + (2 - \tau - z) g_1 + \left(\sigma + \frac{\tau}{2} - 1 \right) g = 0 \quad (5.52)$$

elde edilir. (5.52)'nin her iki yanına (2.40) ile tanımlı N^μ operatörü uygulanırsa,

$$z g_{2+\mu} + (\mu - \tau - z + 2) g_{1+\mu} + \left(-\mu + \sigma + \frac{\tau}{2} - 1 \right) g_\mu = 0 \quad (5.53)$$

olur. μ değeri, $-\mu + \sigma + \frac{\tau}{2} - 1 = 0$ olacak şekilde seçilirse,

$$\mu = \sigma + \frac{\tau}{2} - 1 \quad (5.54)$$

bulunur. (5.53)'de, her terim z^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[g_{\left(\sigma + \frac{\tau}{2}\right)} \right]_1 + \left[\left(\sigma - \frac{\tau}{2} + 1 \right) z^{-1} - 1 \right] g_{\left(\sigma + \frac{\tau}{2}\right)} = 0 \quad (5.55)$$

elde edilir.

$$g_{\left(\sigma + \frac{\tau}{2}\right)} = w = w(z), \quad \left[g(z) = w_{\left(-\sigma - \frac{\tau}{2}\right)} \right] \quad (5.56)$$

olsun.

Bu eşitlik, (5.55)'de yerine yazılırsa,

$$w_1 + \left[\left(\sigma - \frac{\tau}{2} + 1 \right) z^{-1} - 1 \right] w = 0 \quad (5.57)$$

şeklinde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. (5.57)'nin çözümü,

$$w = B z^{\left(\frac{\tau}{2} - \sigma - 1\right)} e^z$$

dir. $f^{(II)}$ için tersine işlemlerle,

$$g = B \left[z^{\left(\frac{\tau}{2} - \sigma - 1\right)} e^z \right]_{\left(-\sigma - \frac{\tau}{2}\right)}$$

olur ve

$$f^{(II)} = B z^{1-\tau} \left[z^{\left(\frac{\tau}{2} - \sigma - 1\right)} e^z \right]_{\left(-\sigma - \frac{\tau}{2}\right)}$$

şeklinde bir özel çözüm elde edilir.

Teorem 5.4. $f \in \{f: 0 \neq |f_\mu| < \infty; \mu \in \mathbb{R}\}$ olsun. (4.38)'de verilen,

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (\tau - z) \frac{df}{dz} + \left(\frac{\sigma}{z} - \frac{\tau}{2} \right) f(z) = 0 \quad (5.58)$$

singüler katsayılı homojen diferensiyel denklem,

$$f^{(I)} = A z^{\left[(1-\tau) + \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}\right]/2} \left[z^{\left(\frac{-1 - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{-1 + \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2}\right)},$$

$$f^{(II)} = B z^{\left[(1-\tau) - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}\right]/2} \left[z^{\left(\frac{-1 + \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2}\right)} e^z \right]_{\left(\frac{-1 - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2}\right)}$$

formundaki özel çözümlere sahiptir. Burada, $f_n = d^n f / dz^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); $z \in \mathbb{C}$; $f_0 = f = f(z)$; A, B sabitler, σ ve τ sabitleri ise, $\delta = 4$ için (4.20)'de tanımlandığı gibidir.

İspat. Teorem 5.1'e benzer işlemlerle, (5.2)-(5.4), (5.58)'de yerlerine yazılırsa,

$$zg_2 + (2v + \tau - z)g_1 + \left[(v^2 + v(\tau - 1) + \sigma)z^{-1} - \left(v + \frac{\tau}{2}\right)\right]g = 0 \quad (5.59)$$

elde edilir. v ,

$$v^2 + v(\tau - 1) + \sigma = 0 \quad (5.60)$$

olacak şekilde seçilsin. Böylece,

$$v = \frac{(1 - \tau) \pm \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma}}{2} \quad (5.61)$$

olur.

1.Durum. $v = \left[(1 - \tau) + \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma}\right]/2$ olsun. Böylece,

$$f = z^{\left[(1-\tau)+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}\right]/2}g$$

$$zg_2 + \left(1 + \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma} - z\right)g_1 - \left(\frac{1 + \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma}}{2}\right)g = 0 \quad (5.62)$$

elde edilir. (5.62)'nin her iki yanına (2.40) ile tanımlı N^μ operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} zg_{2+\mu} + \left(\mu + 1 + \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma} - z\right)g_{1+\mu} \\ + \left(-\mu - \frac{1 + \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma}}{2}\right)g_\mu = 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

olur. μ değeri, $-\mu - \frac{1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2} = 0$ olacak şekilde seçilirse,

$$\mu = \frac{-1 - \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma}}{2} \quad (5.64)$$

bulunur. (5.63)'de, her terim z^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[g\left(\frac{1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right)\right]_1 + \left[\left(\frac{1 + \sqrt{(\tau - 1)^2 - 4\sigma}}{2}\right)z^{-1} - 1\right]g\left(\frac{1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right) = 0 \quad (5.65)$$

elde edilir.

$$g\left(\frac{1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right) = u = u(z), \quad \left[g(z) = u\left(\frac{-1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right) \right] \quad (5.66)$$

olsun. Bu eşitlik, (5.65)'de yerine yazılırsa,

$$u_1 + \left[\left(\frac{1 + \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2} \right) z^{-1} - 1 \right] u = 0 \quad (5.67)$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. (5.67)'nin çözümü,

$$u = Az^{\left(\frac{-1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right)} e^z$$

olur ve

$$f^{(1)} = Az^{\left[(1-\tau)+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}\right]/2} \left[z^{\left(\frac{-1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right)} e^z \right]^{\left(\frac{-1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right)}$$

şeklinde bir özel çözüm elde edilir.

2.Durum. $v = \left[(1-\tau) - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}\right]/2$ olsun. Böylece,

$$f = z^{\left[(1-\tau)-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}\right]/2} g$$

$$zg_2 + \left(1 - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma} - z\right) g_1 - \left(\frac{1 - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2}\right) g = 0 \quad (5.68)$$

elde edilir. (5.68)'in her iki yanına (2.40) ile tanımlı N^μ operatörü uygulanırsa,

$$zg_{2+\mu} + \left(\mu + 1 - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma} - z\right) g_{1+\mu} + \left(-\mu - \frac{1 - \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2}\right) g_\mu = 0 \quad (5.69)$$

olur. μ değeri, $-\mu - \frac{1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2} = 0$ olacak şekilde seçilirse,

$$\mu = \frac{-1 + \sqrt{(\tau-1)^2 - 4\sigma}}{2} \quad (5.70)$$

bulunur. (5.69)'da, her terim z^{-1} ile çarpılır ve μ nün değeri yerine yazılırsa,

$$\left[g\left(\frac{1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right) \right]_1 + \left[\left(\frac{1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2} \right) z^{-1} - 1 \right] g\left(\frac{1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right) = 0 \quad (5.71)$$

elde edilir.

$$g\left(\frac{1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right) = w = w(z), \quad \left[g(z) = w\left(\frac{-1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2}\right) \right] \quad (5.72)$$

olsun. Bu eşitlik, (5.71)'de yerine yazılırsa,

$$w_1 + \left[\left(\frac{1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2} \right) z^{-1} - 1 \right] w = 0 \quad (5.73)$$

biçiminde birinci mertebeden homojen lineer adi diferensiyel denklem elde edilir. (5.73)'ün çözümü,

$$w = B_Z \left(\frac{-1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2} \right) e^z$$

olur ve

$$f^{(II)} = B_Z \left[(1-\tau) - \sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma} \right] / 2 \left[Z \left(\frac{-1+\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2} \right) e^z \right] \left(\frac{-1-\sqrt{(\tau-1)^2-4\sigma}}{2} \right)$$

şeklinde bir özel çözüm elde edilir.

6. SONUÇ

Kesirli diferintegrallerin uygulamaları, fen ve mühendisliğe ait birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple ikinci bölümde, kesirli diferintegrallerin temel özelliklerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tezin asıl uygulama alanını oluşturan radyal Schrödinger denkleminin elde edilişi verilmiştir.

Tez çalışmasının ilk orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümde, radyal Schrödinger denkleminin kesirli çözümleri ve bu çözümlerin hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden gösterimleri elde edilmiştir. Radyal denklemler, uygun dönüşümler yardımıyla kesirli diferintegral teoremlerinin uygulanabileceği forma getirilmiş ve böylece denklemlerin açık çözümleri kesirli olarak ifade edilmiştir. Ayrıca kesirli çözümler, hipergeometrik fonksiyonların ve kesirli diferintegrallerin özellikleri kullanılarak hipergeometrik formda yazılmıştır. Böylece, çözümlerin farklı formlarda yazılabileceği sonucuna varılmıştır.

İkinci orijinal kısım olan beşinci bölümde, radyal denklemi çözmek için N -kesirli hesap operatörü kullanılmıştır. Öncelikle, dördüncü bölümdeki radyal denklemler, N -kesirli hesap operatörünün uygulanabileceği forma getirilmiştir. Bunun için çeşitli varsayımlar ve dönüşümlerden yararlanılmıştır. Radyal denklemlerin genel çözümleri, dördüncü bölümde ilgili teoremler yardımıyla bulunurken, beşinci bölümde ise aynı denklemlerin özel çözümleri, N -kesirli hesap operatörü ile doğrudan olarak elde edilmiştir. Böylece, aynı türden denklemlerin genel veya özel çözümlerinin, kesirli diferintegrallerin farklı özellikleri, teoremleri ya da yöntemleri aracılığıyla bulunabileceği sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmada, radyal Schrödinger denklemlerine kesirli diferintegraller uygulanarak denklemlerin açık çözümlerine ulaşıldı. Farklı türden diferensiyel denklemlere de aynı yöntemler uygulanabilir veya başka yöntemler de geliştirilebilir. Bu denklemlerin uygulama alanları da göz önüne alındığında, çok önemli sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Podlubny, I.**, 1999, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. **198**, *Academic Press*, New York, London, Tokyo and Toronto.
- [2] **Yilmazer, R., Ozturk, O.**, 2013, Explicit Solutions of Singular Differential Equation by means of Fractional Calculus Operators, *Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis*, Article ID 715258, 6 pages, Vol. **2013**.
- [3] **Kiriş, M. E.**, 2007, Kesirli Türevlere Sahip Diferensiyel Denklemler ve Pantograf Denklemlerin Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi ile Çözümlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.
- [4] **Butzer P.L., Westphal U.**, 2000, An Introduction to Fractional Calculus, *World Scientific Publ. Co.*, Singapore.
- [5] **Hilfer R.**, **2008**, Threelfold Introduction to Fractional Derivatives, *Wiley-VCH*, Germany.
- [6] **Bayın, S.**, 2006, Mathematical Methods in Science and Engineering, *Wiley Interscience*, New Jersey.
- [7] **Carpinteri, A., Mainardi, F. (Editors)**, 1997, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, *Springer Verlag*, Wien and New York.
- [8] **Miller, K. S., Ross, B.**, 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation, *Wiley Interscience*, New York.
- [9] **Oldham, K. B., Spainer, J.**, 1974, The Fractional Calculus, *Academic Press*, New York.
- [10] **Başkan, T.**, 2010, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, *Dora Yayınları*, Bursa.
- [11] **Sezer, M., Daşcioğlu, A.**, 2012, Diferansiyel Denklemler 1, *Dora Yayınları*, Bursa.
- [12] **Aksoy, Y.**, 1998, İntegral Denklemler, *Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi*, İstanbul.
- [13] **Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S.**, 2012, Adi Diferensiyel Denklemler, *Dora Yayınları*, Bursa.

- [14] **Pala, Y.**, 2006, Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler, *Nobel Yayıncılık*, Ankara.
- [15] **Soykan, Y.**, 2012, Fonksiyonel Analiz, *Nobel Yayıncılık*, Ankara.
- [16] **Hacısalıhoğlu, H. H.**, 2005, 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri, *Hacısalıhoğlu Yayıncılık*, Ankara.
- [17] **Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., Oturanç, G.**, 2009, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, *Barış Yayınları*, İzmir.
- [18] **Orchin, M., Macomber, R. S., Pinhas, A., Wilson, R. M.**, 2005, Atomic Orbital Theory, *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.
- [19] **Karaoğlu, B.**, 1997, Kuantum Mekanikine Giriş, *Bilgi Tek Yayıncılık*, İstanbul.
- [20] **Aygün, E., Zengin, M.**, 1992, Kuantum Fiziği-Atom ve Molekül Fiziği, *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara.
- [21] **Balcı, M.**, 2011, Matematik Analiz-2, *Balcı Yayınları*, Ankara.
- [22] **Güngör, F.**, 1995, Diferansiyel Denklemler, *Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş.*, İstanbul.
- [23] **Cesur, Y.**, 2011, Diferansiyel Denklemler ve Mathematica, İstanbul.
- [24] **Distefano, J. J., Stubberud, A. R., Williams, I. J.**, 1995, Schaum's Outline of Theory and Problems of Feedback and Control Systems, *McGraw-Hill Pub.*, New York.
- [25] **Raina R. K.**, 1986, The Weyl Fractional Operator of a System of Polynomials, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, Vol. **76**, Italy.
- [26] **Nishimoto, K.**, 1984, 1987, 1989, 1991 and 1996, Fractional Calculus, Vols. **I, II, III, IV** and **V**, *Descartes Press*, Koriyama.
- [27] **Ortigueira, M. D.**, 2011, Fractional Calculus for Scientists and Engineers, *Springer Dordrecht Heidelberg London New York*.

- [28] **Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.**, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies, Vol. **204**, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York.
- [29] **Tu, S-T., Chan, D-K., Srivastava, H. M.**, 2001, Some Families of Ordinary and Partial Fractional Differintegral Equations, *Integral Trans. And Special Funct.*, Vol. **11**, No:3, 291-302.
- [30] **Yilmazer, R., Bas, E.**, 2012, Explicit Solutions of Fractional Schrödinger Equation via Fractional Calculus Operators, *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, Vol. **5**, No:2.
- [31] **Lin, S. D., Ling, W. C., Nishimoto, K., Srivastava, H. M.**, 2005, A simple Fractional-Calculus Approach to the Solutions of the Bessel Differential Equation of General Order and Some of its Applications, *Comput. Math. Appl.* **49**, 1487-1498.
- [32] **Slater, L. J.**, 1966, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge.
- [33] **Cowan, R. D.**, 1981, The Theory of Atomic Structure and Spectra, *University of California Press*, Berkeley and Los Angeles, California.
- [34] **Bransden, B. H., Joachain, C. J.**, 1989, Introduction to Quantum Mechanics, *Longman Group UK Limited and John Wiley & Sons, Inc.*, New York.
- [35] **Gros, F.**, 1993, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.
- [36] **Mandl, F.**, 1992, Quantum Mechanics, *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.
- [37] **Modinos, A.**, 1996, Quantum Theory of Matter: A Novel Introduction, *John Wiley & Sons, Inc.*, New York.
- [38] **Mills, R. L.**, 2000, The Hydrogen Atom Revisited, *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. **25**, Issue 12, 1171-1183.
- [39] **Eid, R., Muslih, S. I., Baleanu, D., Rabei, E.**, 2009, On Fractional Schrödinger Equation in α -dimensional Fractional Space, *Nonlinear Analysis: RWA*, **10**, 1299-1304.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Gaziantep'in İslahiye ilçesinde doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi İslahiye'de tamamladım. 2005 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2009 yılında bu bölümden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2010 yılı Eylül ayında Bitlis Eren Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevliliği kadrosunu kazandım. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora başladım. 2012 yılı Ocak ayında görevlendirme ile Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevliliği kadrosuna atandım. Halen Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım. Evli ve bir çocuk babasıyım.