

T.C  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN GENİŞLETİLMİŞ  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODU İLE  
ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esmâ ULUTAŞ

(08221101)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 Aralık 2010

ELAZIĞ - 2011

T.C  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN GENİŞLETİLMİŞ  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODU İLE  
ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esma ULUTAŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 Aralık 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 7 Ocak 2011

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mustafa İNÇ

Diğer Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Reşat YILMAZER

: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

ELAZIĞ - 2011



# ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Doç. Dr. Mustafa İNÇ'e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

**Esmâ ULUTAŞ**

**ELAZIĞ, 2011**

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                                          | <u>Sayfa No</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| ÖNSÖZ.....                                                                                               | II              |
| İÇİNDEKİLER.....                                                                                         | III             |
| ÖZET .....                                                                                               | V               |
| SUMMARY.....                                                                                             | VI              |
| ŞEKİLLER LİSTESİ.....                                                                                    | VII             |
| SEMBOLLER LİSTESİ.....                                                                                   | XII             |
| KISALTMALAR.....                                                                                         | XII             |
| <br>                                                                                                     |                 |
| 1. BÖLÜM.....                                                                                            | 1               |
| 1.1. Temel Tanım ve Teoremler .....                                                                      | 1               |
| <br>                                                                                                     |                 |
| 2. BÖLÜM.....                                                                                            | 7               |
| 2.1. Genelleştirilmiş KdV Denklemi.....                                                                  | 7               |
| 2.2. Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi.....                                                     | 8               |
| 2.3. Burgers' Denklemi .....                                                                             | 11              |
| 2.4. mBBM Denklemi .....                                                                                 | 13              |
| 2.5. Boussinesq Denklemi.....                                                                            | 13              |
| <br>                                                                                                     |                 |
| 3. BÖLÜM.....                                                                                            | 15              |
| 3.1. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodu .....                                      | 15              |
| 3.2. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodunun KdV Denklemine Uygulanması .            | 19              |
| 3.3. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodunun mKdV Denklemine Uygulanması             | 31              |
| 3.4. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodunun KdV Denklemine Uygulanması .            | 38              |
| 3.5. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodunun mBBM Denklemine Uygulanması             | 49              |
| 3.6. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Açılım Metodunun Boussinesq Denklemine Uygulanması ..... | 66              |

|                |    |
|----------------|----|
| KAYNAKÇA ..... | 77 |
| ÖZGEÇMİŞ ..... | 83 |

# ÖZET

Bu tez üç bölüm olarak düzenlenmiştir.

İlk bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; Genelleştirilmiş KdV, Burgers', mBBM, Boussinesq denklemleri ve soliton kavramları anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; Genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  –açılım metodu anlatılmış ve bu metodla KdV, mKdV, Burgers', mBBM ve Boussinesq denklemlerinin soliton çözümleri elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** KdV Denklemleri, mKdV Denklemleri, Burgers' Denklemleri, mBBM Denklemleri, Boussinesq Denklemleri, Genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  –Açılım Metodu.

# SUMMARY

## SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY EXTENDED $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -EXPANSION METHOD

This study is prepared as three chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems, which will be used in the later chapters, are given.

In the second chapter, Generalized KdV, Burgers', mBBM and Boussinesq equations and the concept of soliton are explained.

In the third chapter, Extended  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method is explained and soliton solutions of KdV, mKdV, Burgers', mBBM and Boussinesq equations are obtained.

**Key Words:** KdV Equation, mKdV Equation, Burgers' Equation, mBBM Equation, Boussinesq Equation, Extended  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method.

# ŞEKİLLER LİSTESİ

|                                                                                                                                                                               | <u>Sayfa No</u> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| <b>Şekil 2.1.</b> Tek dalga ( Solitary wave ) .....                                                                                                                           | 9               |
| <b>Şekil 3.1</b> (3.13) çözümünde $a_0 = 5, \alpha = 2, v = 2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....           | 21              |
| <b>Şekil 3.2</b> (3.14) çözümünde $a_0 = 4, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. ....  | 22              |
| <b>Şekil 3.3</b> (3.15) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = -2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. ....   | 22              |
| <b>Şekil 3.4</b> (3.16) çözümünde $a_0 = -3, \alpha = 2, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....          | 23              |
| <b>Şekil 3.5</b> (3.17) çözümünde $a_0 = -1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. ....  | 23              |
| <b>Şekil 3.6</b> (3.18) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. ....    | 24              |
| <b>Şekil 3.7</b> (3.19) çözümünde $a_0 = 2, \alpha = -3, v = 2, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = 4$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....           | 24              |
| <b>Şekil 3.8</b> (3.22) çözümünde $a_0 = 5, \alpha = 2, v = 2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....           | 26              |
| <b>Şekil 3.9</b> (3.23) çözümünde $a_0 = -1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. ....  | 27              |
| <b>Şekil 3.10</b> (3.24) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. .... | 27              |
| <b>Şekil 3.11</b> (3.25) çözümünde $a_0 = -1, \alpha = 4, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = 3, B = -2$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....          | 29              |
| <b>Şekil 3.12</b> (3.26) çözümünde $a_0 = 1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. ....  | 30              |

|                                                                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 3.13</b> (3.27) çözümünde $a_0 = -3, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....    | 30 |
| <b>Şekil 3.14</b> (3.28) çözümünde $a_0 = -1, \alpha = 4, v = 1, \lambda = 2, \mu = 1, A = 3, B = -2$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....            | 31 |
| <b>Şekil 3.15</b> (3.34) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 2, v = 2, \lambda = 4, \mu = -2, A = -2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....            | 34 |
| <b>Şekil 3.16</b> (3.35) çözümünde $a_0 = 5, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.9$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....    | 35 |
| <b>Şekil 3.17</b> (3.36) çözümünde $a_0 = 5, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....    | 35 |
| <b>Şekil 3.18</b> (3.37) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 1, v = 3, \lambda = 3, \mu = 4, A = -2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....              | 36 |
| <b>Şekil 3.19</b> (3.38) çözümünde $a_0 = -1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi .....   | 37 |
| <b>Şekil 3.20</b> (3.39) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi .....    | 37 |
| <b>Şekil 3.21</b> (3.34) çözümünde $a_0 = -1, \alpha = -3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 1, A = 3, B = -2$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....            | 38 |
| <b>Şekil 3.22</b> (3.45) çözümünde $a_0 = 3, \epsilon = 5, v = -2, \lambda = 4, \mu = -2, A = 2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.. ....        | 40 |
| <b>Şekil 3.23</b> (3.46) çözümünde $a_0 = -1, \epsilon = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi..... | 41 |
| <b>Şekil 3.24</b> (3.47) çözümünde $a_0 = -1, \epsilon = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.8$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi..... | 41 |
| <b>Şekil 3.25</b> (3.48) çözümünde $a_0 = 3, \epsilon = 1, v = -1, \lambda = 2, \mu = 4, A = 2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. ....          | 42 |
| <b>Şekil 3.26</b> (3.49) çözümünde $a_0 = 3, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.8$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....    | 43 |
| <b>Şekil 3.27</b> (3.50) çözümünde $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 3, t = 0.1$ ve $t = 0.8$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....   | 43 |
| <b>Şekil 3.28</b> (3.51) çözümünde $\epsilon = 1, v = -1, \lambda = 2, \mu = 1, A = 1, B = -2$                                                                                  |    |

|                                                                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....                                                                                                                                      | 44 |
| <b>Şekil 3.29</b> (3.53) çözümünde $a_0 = 1, \epsilon = 5, v = -2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....                            | 45 |
| <b>Şekil 3.30</b> (3.54) çözümünde $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....                    | 46 |
| <b>Şekil 3.31</b> (3.55) çözümünde $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....                    | 46 |
| <b>Şekil 3.32</b> (3.56) çözümünde $a_0 = 5, \epsilon = 1, v = -1, \lambda = 2, \mu = 4, A = 2, B = 1$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....                               | 47 |
| <b>Şekil 3.33</b> (3.57) çözümünde $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 3, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....                      | 47 |
| <b>Şekil 3.34</b> (3.58) çözümünde $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 3, t = 0.1$ ve $t = 0.9$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....                      | 48 |
| <b>Şekil 3.35</b> (3.59) çözümünde $\epsilon = 3, v = -1, A = 1, B = -2$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....                                                             | 48 |
| <b>Şekil 3.36</b> (3.64) çözümünde $a_0 = -3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi....         | 51 |
| <b>Şekil 3.37</b> (3.65) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi...  | 52 |
| <b>Şekil 3.38</b> (3.66) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = -1, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi... | 52 |
| <b>Şekil 3.39</b> (3.67) çözümünde $a_0 = -3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi....         | 53 |
| <b>Şekil 3.40</b> (3.68) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 1, \mu = 3, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi...   | 54 |
| <b>Şekil 3.41</b> (3.69) çözümünde $a_0 = 3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = 1, t = 0.1$ ve $t = 0.9$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. .    | 54 |
| <b>Şekil 3.42</b> (3.70) çözümünde $a_0 = 1, \alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 5, v = 3, \lambda = 2, \mu = 1, A = 2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....           | 55 |
| <b>Şekil 3.43</b> (3.71) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, v = -2, \lambda = 4, \mu = -2, A = 2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi....         | 56 |

|                                                                                                                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 3.44</b> (3.72) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. . .               | 57 |
| <b>Şekil 3.45</b> (3.73) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. . .               | 57 |
| <b>Şekil 3.46</b> (3.74) çözümünde $a_0 = -3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. . .                       | 58 |
| <b>Şekil 3.47</b> (3.75) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 1, \mu = 3, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. . .                | 59 |
| <b>Şekil 3.48</b> (3.76) çözümünde $a_0 = 3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = 1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. . .                 | 59 |
| <b>Şekil 3.49</b> (3.77) çözümünde $a_0 = 1, \alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 5, v = 3, \lambda = 2, \mu = 1, A = 2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. . . . .                      | 60 |
| <b>Şekil 3.50</b> (3.78) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, v = -2, \lambda = 4, \mu = -2, A = 2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. . . .                     | 61 |
| <b>Şekil 3.51</b> (3.79) çözümünde $a_0 = 3, a_1 = 1; v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. . . . .  | 62 |
| <b>Şekil 3.52</b> (3.80) çözümünde $a_0 = 2, a_1 = 1; v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = -1, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. . . . . | 62 |
| <b>Şekil 3.53</b> (3.81) çözümünde $a_0 = 3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 5, A = -2, B = -3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. . .                        | 63 |
| <b>Şekil 3.54</b> (3.82) çözümünde $a_0 = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. .                 | 64 |
| <b>Şekil 3.55</b> (3.83) çözümünde $a_0 = 3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = 1, t = 0.1$ ve $t = 0.9$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi. . .                 | 64 |
| <b>Şekil 3.56</b> (3.84) çözümünde $a_0 = 1, a_1 = 1; \alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 5, v = 3, \lambda = 2, \mu = 1, A = 2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. .                   | 65 |
| <b>Şekil 3.57</b> (3.89) çözümünde $a_0 = 5, v = 2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi. . . . .                                                       | 68 |
| <b>Şekil 3.58</b> (3.90) çözümünde $a_0 = 5, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.5$                                                                                                                 |    |

|                                                                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....                                                                                                   | 69 |
| <b>Şekil 3.59</b> (3.91) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$ ve $t = 0.9$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi..... | 69 |
| <b>Şekil 3.60</b> (3.92) çözümünde $a_0 = 5, v = 2, \lambda = 2, \mu = 5, A = 1, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....            | 71 |
| <b>Şekil 3.61</b> (3.93) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.9$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....  | 71 |
| <b>Şekil 3.62</b> (3.94) çözümünde $a_0 = 4, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....  | 72 |
| <b>Şekil 3.63</b> (3.95) çözümünde $a_0 = 4, v = 2, \lambda = 2, \mu = 1, A = -2, B = 2$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....           | 72 |
| <b>Şekil 3.64</b> (3.96) çözümünde $a_0 = 4, v = 2, \lambda = 3, \mu = -1, A = 2, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....           | 74 |
| <b>Şekil 3.65</b> (3.97) çözümünde $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi..... | 74 |
| <b>Şekil 3.66</b> (3.98) çözümünde $a_0 = 4, v = 1, \lambda = 2, \mu = -2, t = 0.1$ ve $t = 0.8$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....  | 75 |
| <b>Şekil 3.67</b> (3.99) çözümünde $a_0 = 2, v = 1, \lambda = 2, \mu = 5, A = 4, B = 3$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....            | 76 |
| <b>Şekil 3.68</b> (3.100) çözümünde $a_0 = 4, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi.....  | 76 |
| <b>Şekil 3.69</b> (3.101) çözümünde $a_0 = 4, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$ ve $t = 0.5$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi..... | 77 |
| <b>Şekil 3.70</b> (3.102) çözümünde $a_0 = 4, v = 2, \lambda = 2, \mu = 1, A = -2, B = 2$ alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi.....          | 77 |

## SEMBOLLER LİSTESİ

|               |                      |
|---------------|----------------------|
| $\delta$      | :Delta               |
| $\omega$      | :Omega               |
| $\nabla$      | :Nabla               |
| $R$           | :Reel sayılar kümesi |
| $\xi$         | :Xi                  |
| $\alpha$      | :Alpha               |
| $\beta$       | :Beta                |
| $\gamma$      | :Gama                |
| $\eta$        | :Eta                 |
| $\lambda$     | :Lambda              |
| $\varepsilon$ | :Epsilon             |

## KISALTMALAR

|             |                                                 |
|-------------|-------------------------------------------------|
| <b>KdV</b>  | :Korteweg-de Vries Denklemi                     |
| <b>GKdV</b> | :Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries Denklemi    |
| <b>FPU</b>  | :Fermi,Pasta,Ulam Sistemi                       |
| <b>BBM</b>  | :Bona Benjamin Mahony Denklemi                  |
| <b>mBBM</b> | :Modifiye Edilmiş Bona Benjamin Mahony Denklemi |

## 1. BÖLÜM

### 1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

#### 1.1.1 Tanım

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

veya genel olarak

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,$$

şeklinde yazılır. Burada  $y$  bağımlı değişken,  $x$  bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklemler, adi diferansiyel denklemler olarak adlandırılır [1].

#### 1.1.2 Tanım

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan denkleme kısmi türevli denklem adı verilir [2].

$z$  bağımlı,  $x$  ve  $y$  bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0,$$

şeklindedir.

#### 1.1.3 Tanım

Bir diferansiyel denklemde ki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin derecesine denklemin derecesi denir [2].

Eğer bir diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit yada bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y) z_x + Q(x, y) z_y + R(x, y) z = S(x, y),$$

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y).$$

### 1.1.1 Örnek

$$xz_x - yz_y = \sin x,$$

denklemini birinci mertebeden, birinci dereceden, lineer bir denklemdir.

### 1.1.2 Örnek

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z} + z^3,$$

denklemini ikinci mertebeden, ikinci dereceden, lineer olmayan bir denklemdir.

### 1.1.4 Tanım

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) denklem adı verilir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z) z_x + Q(x, y, z) z_y = R(x, y, z),$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y) z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y) z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0.$$

### 1.1.3 Örnek

a)  $z_x z_{xx} + x z z_y = \sin y$

b)  $z_{xy} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (z_x^2 + z) - 6 x z^3 \sin y = 0$

c)  $z_y z_{xx} - 3 x^3 z z_{xy} + 2 z_x - x^3 y z = 0$

denklemlerinin tümü yarı-lineer denklemlerdir.

### 1.1.5 Tanım

Bir  $f$  fonksiyonu  $A$  kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki  $f$  ve  $f$  'in  $k$ . mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman  $f$  fonksiyonuna  $C^k - sınıfındandır$  denir.

### 1.1.6 Tanım

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir [2].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y) z_{xx} + B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

formundadır. Burada  $A, B, C \in C^2[D]$  dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y) C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1)  $\Delta(x, y) > 0$  eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik;
- 2)  $\Delta(x, y) = 0$  eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik;
- 3)  $\Delta(x, y) < 0$  eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

### 1.1.4 Örnek

a)  $x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = t + 1$

b)  $3xu_{xx} + 4xyu_{yy} + 5xz^3u_{zz} + 2zu_{xy} - 4u_{yz} + u^2u_x - u_y + xye^z = 0$

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

### 1.1.5 Örnek

$$(x^2 - 1) z_{xx} + 2yz_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0$$

denkleminin tipini belirtiniz.

**Çözüm:**

$$A(x, y) = x^2 - 1, B(x, y) = 2y, C(x, y) = -1$$

olduğundan  $\Delta(x, y)$  fonksiyonu

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 4y^2 - 4(x^2 - 1)(-1) = 4(x^2 + y^2) - 4$$

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen denklem

$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1, x, y \in \mathbb{R}\}$  bölgesinde hiperbolik;

$D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$  çemberi üzerinde parabolik;

$D_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbb{R}\}$  açık diskinde eliptik tiptendir.

### 1.1.6 Örnek

$$x^2 z_{xx} + xy z_{xy} + z_{yy} + x z_x + y z_y + z = 0$$

denkleminin tipini belirleyiniz.

**Çözüm:**

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = x^2(y^2 - 4)$$

olup

$y = \pm 2$  doğruları üzerinde parabolik;

$-2 < y < 2$  şeridi içinde eliptik;

$y < -2$  bölgesi ile  $y > 2$  bölgesinde hiperbolik tiptendir.

### 1.1.7 Tanım

$X$  ve  $Y$  keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler vs...) cümlesi olmak üzere  $X$  uzayının her bir elemanına  $Y$  uzayının bir elemanını karşılık getiren dönüşüme operatör denir.

### 1.1.8 Tanım

Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden biri olan  $\nabla$  Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla U = 0,$$

şeklindeki bir denkleme de  $\nabla'$  nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir.

Bu denklemde  $c$  pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe,  $t$  zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca  $\nabla U$ ,  $t$  ye göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0,$$

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0,$$

formundadır. Bu tip denklemler elektro manyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve quantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını ifade eder [2].

Matematiksel fiziğin diğer bazı denklemlerini şöyle verebiliriz [3];

**a) İki boyutlu Laplace denklemi**

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

**b) Helmholtz denklemi**

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0,$$

**c) İki boyutlu Poisson denklemi**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

**d) Biharmonik denklem**

$$\nabla^4 u = 0,$$

**e) Biharmonik dalga denklemi**

$$\nabla^4 u = \nabla^2 (\nabla^2 u) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

**f) Telegraf denklemi**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial T} + Au = 0,$$

g) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 u + \alpha [E - V(x, y, z)] u = 0,$$

h) Klein-Gordon denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0.$$

### 1.1.1 Teorem

(Birinci mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi):

$P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  ve  $R(x, y, z)$  fonksiyonları  $(x_0, y_0, z_0)$  noktasını kapsayan bir  $D \subset R^3$  bölgesinde  $C^1$  sınıfından olsunlar ve kabul edelim ki

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0,$$

olsun. O zaman  $(x_0, y_0)$  noktasının bir  $U$  komşuluğunda,  $U$ 'nun içinde yatan  $\check{C}$  eğrisinin her noktasında  $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$  başlangıç şartını ve  $Pz_x + Qz_y = R$  denklemini sağlayan bir tek  $z = z(x, y)$  çözümü vardır.

### 1.1.2 Teorem (Cauchy-Kowalewski teoremi):

$$Lz = A(x, y) z_{xx} + 2B(x, y) z_{xy} + C(x, y) z_{yy} + D(x, y) z_x + E(x, y) z_y + F(x, y) z = G(x, y),$$

denklemindeki katsayılar ve  $G$  fonksiyonu,  $xy$ -düzleminde, orjini kapsayan bir  $\Omega \subset R^2$  bölgesinde analitik olsunlar.  $\Omega$  da  $C(x, y) \neq 0$  olsun.  $x$ -ekseninin  $\Omega$  tarafından kapsanan parçasında tanımlanmış keyfi, analitik  $h(x)$  ve  $\sigma(x)$  fonksiyonları verilsin. O zaman  $(0, 0)$  noktasının bir  $N$  komşuluğu vardır ve  $N$  de  $Lz = G$  denkleminin bir tek analitik  $z = \varphi(x, y)$  çözümü vardır, Öyle ki  $N$  komşuluğu tarafından kapsanan  $x$ -ekseni üzerinde  $\varphi(x, 0) = h(x)$ ,  $\varphi_y(x, 0) = \sigma(x)$  sağlanır.

## 2. BÖLÜM

### 2.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİ

KdV denklemi olarak bilinen denklem, 1885 yılında D.J.Korteweg ve G.de Vries [4] adındaki iki bilim adamı tarafından sığ sulardaki dalga yayılımının gözlenmesiyle oluşturulmuştur. Bu denklem geçen yüzyıldan beri bilinmesine rağmen fiziksel özellikleri tam olarak elde edilememiştir. KdV denklemi 1844’de John Scott Russell tarafından gözlemlenmiş tek dalgalar (solitary wave) için en basit ve faydalı modellerden biridir. Martin Kruskal ve Norman Zabusky [5] adındaki iki bilim adamı, dalga hareketine benzer tekrarlamaları KdV denklemi ile oluşmuş bir sistemle gözlemlemişlerdir. Bu tek dalganın önemli özelliklerinden biri de birbirleriyle çarpışmaları ve bu çarpışma hareketi sonunda şekil ve biçimlerini korumalarıdır. Bu da tek dalgalar için KdV denkleminin elastik olduğunu gösterir. Dalganın doğal yapısından dolayı, Zabusky ve Kruskal bu tek dalga’yı “soliton” olarak adlandırmışlardır. Ayrıca Zabusky ve Kruskal [5], periyodik sınır şartlarıyla KdV denkleminin sayısal çözümünü gözlemlemişlerdir. Soliton kavramı ilk olarak Fermi, Pasta, Ulam [6] sistemindeki modellerle anlatılmıştır.

Lineer olmayan dalga yapısı hakkındaki bilgiler, modern matematiksel fiziğin gelişmesinde önemli kavramlardan biri olan soliton tanımının kullanıldığı fizik ve matematik arasındaki ortak çalışmalarla elde edilir. KdV denkleminin çözümünde solitonlar dağılma özelliği göstermezler. Klasik KdV denklemi lineer olmayan bazı fiziksel bölgelerde gözlemlenebilir. Başlangıç olarak Karpman [7] ve Bisognano [8] tarafından lineer olmayan nötr yüzeylerdeki dalga hareketi ve dairesel bir çemberdeki şiddetli ışınlar için KdV denkleminin yararlanılarak teorik modeller geliştirilmiştir. Bu denklem; katı, sıvı, gaz ve plazma; soğuk bir yüzeydeki magnetik hidro-dinamiklerde; lineer olmayan yaylarla birleştirilmiş eşit kütleli bir boyutlu kafeslerdeki boylamsal dalga yayılımlarında; Fermi probleminde; soğuk bir plazmadaki akustik iyon dalgalarında; tüpteki akışkanın yönünde ve elastiki çubuklardaki boylamsal dalgalarda ve bunlar gibi daha bir çok fiziksel uygulamaya sahiptir.

Geçen 50 yıl boyunca lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerinin yorumları için geniş bir araştırma sahası oluşturulmuştur. Lineer olmayan denklemler içerisinde en iyi bilinenlerden biride KdV denklemdir. Bununla birlikte matematik ve fiziğin çeşitli dallarında lineer olmayan KdV denklemi kullanılmaktadır.

Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi (GKdV)

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0,$$

şeklinde verilebilir. Buradaki ikinci  $u^n u_x$  ve üçüncü  $u_{xxx}$  terimleri sırasıyla iletim ve dağılma terimlerini gösterir. GKdV denkleminin solitonları lineer olmayan iletim ve dağılma terimleri arasındaki ilişkiyle oluşur. Dağılma etkisi dalgaformunun hızını oluştururken lineer olmayan iletim etkisi de dalga formunun şeklini oluşturur. Bu iki terimin karşılıklı etkileşimlerinden sabit bir dalgaformu oluşur (solitary wave). Her bir soliton karşılıklı etkileşimlerine rağmen değişmez. Solitonların yapısı sistemin parametrelerinin zamana bağlı olduğunu garanti eder ve böylece solitonların stabil (kararlı) olduğu görülür. GKdV denkleminin en önemli durumlarından biri modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemdir. Bu denklem  $n = 2$  için GKdV denkleminin türetilmesiyle oluşur ve bu

denklem elektrodinamikler de, ince tabakalardaki elektromagnetik dalgalarda, yoğunluk katmanlarının iç kısımlarında, elastik araçlarda ve trafik akışları gibi birçok fiziksel uygulama alanına sahiptir.

## 2.2 SOLİTON VE SOLİTON ETKİLEŞİMİNİN TARİHÇESİ

1834’de John Scott Russell tek dalga (solitary wave)’yı, Edinburg-Glasgow kanalında, şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgası olarak gözlemlemiştir. Bu dalgayı “büyük dalga kayması” olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844’de “Dalgalar üzerine rapor (Report on Wave)” makalesinde açıklamıştır. Bu makalede, tek dalganın periyodik bir dalga olmayıp şeklini değiştirmeyen, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş şekilde yayılan bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bunu takiben, benzer dalgaların üretilmesiyle daha yoğun çalışmalar yapılmıştır. Bu deneysel bilgilere dayalı olarak Russell, tek dalganın  $u$  hızı ve sonlu bir  $h$  derinliğindeki sıvının serbest yüzey üzerindeki maksimum genliği arasında

$$u^2 = g(h + a) \tag{2.1}$$

formunda önemli bir bağıntı bulmuştur. Burada  $g$  yerçekimi ivmesidir. Su dalgalarıyla ilgili, Airy ve Stokes'in teorilerine zıt olan bu görüşler, yani Russell'in tek dalga hakkındaki yorumu, tek dalganın varlığı ve bu dalganın bir sıvı ortamında şeklini değiştirmeden yayılmasıyla ilgili düşüncesiyle birlikte pek çok problem ortaya çıkmıştır. 1870'lere kadar bu fikirler pek kabul görmemesine rağmen, yalnız 1871'de Boussinesq [9] ve 1876'da Rayleigh [10] tarafından benimsenmiştir. Bu bilim adamları da yapışkan olmayan ve sıkıştırılamayan sıvıların hareket denklemini (2.1) formunda belirtmişlerdir. Gerçekten de onlar tek dalga profilini Şekil 1'deki, herhangi bir  $a > 0$  için  $z = \eta(x, t)$ ,

$\beta^2 = 3a / \{4h^2(h + a)\}$  olmak üzere;

$$\eta(x, t) = a \sec h^2 \{ \beta(x - ut) \} \quad (2.2)$$

çözümünü bulmuşlardır.

### Şekil 1.1 Tek dalga

Bu yazarlar sadece  $a < h$  olmak üzere geçerli olan  $\sec h^2$  çözümünü bulmalarına rağmen, (2.2)'yi çözüm kabul eden herhangi bir diferansiyel denklem bulamamışlardır. Bununla birlikte Boussinesq,  $c = \sqrt{gh}$  sığ su dalgalarının hızı olmak üzere böylesi uzun dalgalar için;

$$\eta_{tt} = c^2 \left[ \eta_{xx} + \frac{3}{2} \left( \frac{\eta^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxx} \right]$$

şeklinde lineer olmayan yayılma denklemini ortaya koymuştur. Bu denklem Boussinesq [9] denklemi olarak bilinir ve bunun çözümü;

$$\eta(x, t) = a \sec h^2 \left[ \left( \frac{3a}{h^3} \right)^{1/2} (x \pm ut) \right]$$

şeklinde. Bu çözüm ise hem pozitif hem de negatif yönde hareket eden dalgayı gösterir.

Bu çalışmadan 60 yıl sonra, 1885’de D.J.Korteweg ve G.de. Vries [4] adındaki iki Hollandalı bilim adamı, Scott tarafından yapılan gözlemlerin bir açıklamasını veren matiksel bir model ortaya koyarak,  $p$  yoğunluklu bir su yüzeyi üzerinde tek yöndeki dalgaların yayılışı için

$$\eta_t = \frac{c}{h} \left[ \left( \epsilon + \frac{3}{2}\eta \right) \eta_x + \frac{1}{2}\sigma\eta_{xxx} \right]$$

denklemini elde etmişlerdir. Bu denklem KdV denklemi olarak bilinir.

1955’de Fermi Pasta ve Ulam’ın [6], Los Alamos bilim laboratuvarındaki lineer olmayan kütle-yay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine raporlarıyla, KdV denkleminin tek dalgasıyla ilgili teori ve uygulamada ki gelişmeler devam etmiştir. 1914’de Debye iddia etti ki; “Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yalardaki lineer olmayan kuvvetler yüzündendir.” Bu görüş Fermi, Pasta ve Ulam’ı düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığına inandırmıştır. Fakat onların çalışmaları şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağılmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyesine geri döner. Bu gerçek Fermi, Pasta ve Ulam’ın (FPU) tekrarlanan olayı olarak bilinir.

(FPU)’nın dikkate değer bu araştırması, Martin Kruskal ve Norman Zabusky’nin [5], tekrarlanmanın nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan kütle-yay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmelerine neden olmuştur. Kruskal ve Zabusky Bölüm 2.1 de bahsedildiği gibi bu tek dalgaları solitonlar olarak adlandırmışlardır.

Daha sonra, Gardner ve diğerleri [11] ve Hirota [12]–[13] herhangi bir pozitif  $n$  tamsayısı için  $n$ –soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [14], Hammack ve Segur [15], Weidman ve Maxworthy [16] tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bunların bu buluşları son 30 yıl boyunca yaygın, teorik, deneysel ve işlemsel çalışmalara yol açmıştır. Şimdi

benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup uygulamalı matematikte ve fizikte çeşitli branşlara ayrılmıştır. Bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metod geliştirilmiştir [17]–[18]. Son olarak aşağıdaki ifadeleri vermemiz uygun olacaktır. Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle ilişkilendirilebilir. KdV

denklemini ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka bir ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca KdV denkleminin başka denklemler için tek dalga çözümü  $\sec h^2$  fonksiyonu olmayabilir, fakat  $\sec h$  veya  $\tan^{-1}(e^{ax})$  olabilir. Gerçekten de bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümüne sahip olup solitonlara sahip olmazken, KdV denklemini gibi denklemler solitonlar olan tek dalgalara sahiptirler. Gerçekten soliton kavramı matematiksel fizikte yeni bir paradizim olarak şekillenmiştir. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin; lineer olmayan Schrödinger

denklemini (NLS) [19]: plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgalarını temsil eder ve NLS denklemini sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Fiziksel olarak, önceki çalışmalarda bu tür solitonlara düşük frekanslı solitonlar denirdi daha sonra Makhankov yaptığı çalışmalarda bu solitonların yüksek frekanslı solitonlar olduğunu söylemiştir [20]–[22]. Bir başka önemli model denklemini de Sine-Gordon (SG) denklemidir. Bu denklemde elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. SG denklemini ise soliton, antisoliton (veya kinks, antikinks) ve aynı eksene göre simetrik solitonlara (breather solitonlara) sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalganın genliğine bağlı değildir.

## 2.3 BURGERS' DENKLEMİ

Burgers' denklemini olarak bilinen

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

bir boyutlu non-lineer parabolik kısmi diferansiyel denklem ilk olarak 1915’de Bate-man’ın makalesinde görülmüştür [23]. Denklemin bilim dünyasında popüler olması 1939-1965 yılları arasında denkleme ismini veren Burgers’in turbulans teorisi üzerine yaptığı çalışmalar sayesinde olmuştur [24]-[25]. Burgers turbulansın değişik yönlerini inceleyerek, bir boyutlu turbulans ve şok dalgaları için denklemini model olarak kullanmayı önermiştir [26]. Daha sonraki yıllarda denklem bir çok alanda model problem olarak kullanılmıştır. Lagerstrom vd. [27] denklemin küçük bir parametreyle “ $\varepsilon$ ” çarpılmış yüksek mertebeden türevleri içermesinden dolayı denklemin Navier-Stokes denklemlerine benzediğini vurgulamıştır. Cole [28] denklemin çok dalga teorisi ve turbulans teorisi ile ilişkisini vermiştir. Denklemin sonlu genlikli enine hidromagnetik dalgalarla olan ilişkisi Goldberg [29], izotropik katılardaki elastik dalgalarla ilişkisi Pospelov [30], termoviskos sıvılarda sonlu genlikli dalgalarla ilişkisi Blackstock [31], Keck ve Bayer [32], Mendousse [33], Soluyan ve Khokhlov [34] ve sayılar teorisi ile olan ilişkisi ise Van der Pol [35] tarafından verilmiştir.

Bir çok araştırmacı problemin çözümü için değişik yollar önermiştir. Denklemin ana-analitik çözümleri ile ilgili oldukça kapsamlı bir çalışma Benton ve Platzman [36] tarafından yapılmıştır. Burgers denkleminin en ilginç çözümlerinden biri Fay [37] tarafından verilmiştir. Bu çözüm Fubini-Ghiron [38]’un çalışması ile akustik literatürde Fubini çözümleri olarak bilinmektedir. Fay’ın bu çözümü daha sonra probleme bir başlangıç şartı eklenerek Cole [28] tarafından tekrar ele alınarak geliştirilmiştir. Bu başlangıç şartıyla birlikte göz önüne alınan denklemin tam çözümü Benton tarafından verilmiştir [39]-[40]. Blackstock [41] Burgers denkleminin Fay tarafından verilen çözümü ile bir boyutlu pistonun sinüzoidal hareketiyle meydana gelen ses alanı arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. Yaklaşık olarak aynı zamanda fakat birbirlerinden bağımsız olarak Hopf [42] ve Burgers [43] denklemin çözümü için

$$U = t^{-1/2}S(z), \quad z = (4\varepsilon t)^{-1/2}x,$$

benzerlik dönüşümünü kullanmışlardır. Bu benzerlik dönüşümü altında Burgers denkle

minin Riccati denklemine dönüştüğü Rodin [44] tarafından gösterilmiştir. Bu dönüştürmenin yanısıra bir çok çalışmada Hopf-Cole dönüştürmesi olarak bilinen

$$U = -2\varepsilon \frac{\theta x}{\theta}$$

dönüştürmesi ile problemin çözümü aranmıştır. Bu dönüştürme, Burgers' denklemi ile ısı denklemi arasındaki yakın ilişkiyi göstermektedir. Bu dönüştürme altında Burgers' denklemi lineer ısı denklemine dönüşmektedir. Hopf-Cole dönüştürmesi ilk olarak Lagerstrom vd.[27] 'a ait bir teknik raporda görülmüş ve daha sonra Cole [28] tarafından yayınlanmıştır. Ayrıca, Hopf-Cole dönüştürmesinin hidrodinamik uygulamaları Ames [45] , Chu [46] , Shvets ve Meleshko [47] tarafından tartışılmıştır.

Bir çok fiziksel olayın matematiksel modeli olarak karşımıza çıkan Burgers denklemi matematiksel açıdan da ilginç özellikler taşımaktadır. Burgers denklemi  $\varepsilon'$ un çok küçük olması durumunda parabolik yapısını yitirerek hiperbolik bir yapı kazanır. Bu sebepten dolayı bir çok araştırmacı, özellikle  $\varepsilon'$ un küçük değerleri için denklemin matematiksel yapısını koruyacak çözümler üretmeye çalışmış ve çeşitli nümerik teknikler önermiştir. Örneğin Miller [48] predictor-corrector metodunu, Varoğlu vd. [49] ağırlıklı rezidü metodunu, Caldwell vd. [50], Arminjon vd. [51], Öziş vd [52] sonlu eleman yöntemini, Evans vd [53] group explicit metodunu, Mittal vd. [54] Galerkin metodunu, Kutluay vd. [55], Bahadır [56] sonlu fark yöntemlerini, Öziş vd. [57] direkt varyasyonel metodunu, Wei vd. [58] conjugate filter yaklaşımını kullanarak çeşitli  $\varepsilon$  değerleri için problemin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir.

## 2.4 mBBM DENKLEMİ

Benjamin-Bona-Mahony (BBM) olarak bilinen

$$u_t + u_x + u^n u_x + u_{xxt} = 0,$$

denklemini fiziksel uygulamalarda karşımıza çıkmaktadır. Bu denklem lineer olmayan bir dağılım sisteminde uzun dalga modelidir. BBM denkleminin çözümü bazı bilinen teoriler tarafından açıklanamayan soliton benzeri davranışları sergilemektedir [59]. Ayrıca BBM denklemi bir kanaldaki suyun yüzeyinde uzun dalga genliğinin tek yönlü yayılımını tanımlamaktadır. Bu yönüyle KdV denklemine alternatif olması söz konusudur. BBM

denklemini sıvılardaki yüzey dalga analizinde, soğuk plazmalardaki hidromanyetik dalgalarda, sıkıştırılabilir akışkanlardaki akustik çekimlerde ve anharmonik kristallerdeki akustik dalgalarda kullanılmaktadır.  $n=2$  olduğunda BBM denklemi modifiye edilmiş Bona-Benjamin-Mahony (mBBM) denklemi adını almaktadır.

Yusufoğlu ve Bekir [60] mBBM denkleminin çözümlerini elde etmek için tanh ve sin-cosin metodunu kullanmışlardır. Yusufoğlu [61] exp-fonksiyon metodu yardımıyla mBBM denkleminin çözümlerini elde etmiştir. Layeni ve Akinola [62] hiperbolik yardımcı fonksiyon metodunu kullanarak mBBM denkleminin bazı yeni çözümlerini ortaya koymuştur. Omrani [63] mBBM denklemi için tamamen farklı Galerkin yaklaşımlarını kullanmış ve metodun yakınsaklığını göstermiştir.

## 2.5 BOUSSINESQ DENKLEMİ

Klasik Boussinesq denklemi ilk olarak Boussinesq tarafından formüle edilmiştir. Yalnızca zayıf dağılım ve zayıf nonlineerliği gösteren bu denklemler oldukça sık sularda kullanılmaktadır. Son yirmi yılda Boussinesq-tipi denklemlerin birçok yeni formu geliştirilmiştir. Witting [64] bir tek yatay boyut için kullanılan bir Boussinesq denklem takımını sunmuştur. Madsen ve Sorensen [65] momentum denklemlerinde yararlanılan derinlik-entegre hızlarında kullanılan batimetri için geliştirilmiş yeni bir Boussinesq denklem takımı oluşturmuşlardır. Nwogu [66] keyfi bir derinlikteki yatay hızın bağımsız bir değişken olarak kullanılması için geliştirilmiş bir Boussinesq modeli elde etmiştir. Beji ve Nadaoka [67] momentum denklemlerine bir

dağılma terimi ekleyerek ve çıkararak yeni bir Boussinesq denklem takımı ortaya koymuşlardır. Zou [68] yapay bir hız ve hafif eğim varsayımı ile yüksek dereceden Boussinesq denklemlerini oluşturmuştur. Her model biçim ve dağılım terimlerinin düzenlenmesi açısından farklıdır. Ancak hepsinde lineer dalgaların tam dağılım ilişkisi ikinci dereceden Pade' yaklaşımına götürmektedir. Geliştirilmiş nonlinearlik ile daha iyi dağılım ilişkisi bulunduran yüksek mertebeden başka Boussinesq denklemleri de vardır. Bu Boussinesq denklemleri arasında tipik ve diğerlerine nazaran basit bir metod Beji ve Nadaoka [67] tarafından türetilmiş Boussinesq modeliyle ortaya konulmuştur. Ancak denklemler klasik Boussinesq denklemleri olarak aynı zayıf nonlinearliğe sahiptirler. Boussinesq-tipi denklemlerin nonlinearlik özelliklerine nazaran lineer dağılım ve lineer sığlaşma özelliklerinin geliştirilmesi ise daha kolaydır.

Abdou [69] genişletilmiş tanh metodunu, Wang [70] genişletilmiş rasyonel açılım metodunu kullanarak Boussinesq denkleminin kesin çözümlerini, İnç [71] de denklemin Jacobi elliptic fonksiyon çözümlerini elde etmiştir.

### 3. BÖLÜM

#### 3.1 GENİŞLETİLMİŞ $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODU

Bu bölümde lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodunu kullanacağız. Bu metod ilk olarak Wang et al [72] tarafından ortaya koyulmuş, Bekir [73], Zhang vd. [74], Aslan ve Öziş [75] tarafından çeşitli denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Farzedelim ki lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem iki bağımsız  $x$  ve  $t$  değişkeni ile şu şekilde verilsin.

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

Burada  $u = u(x, t)$  bilinmeyen bir fonksiyon,  $P, u = u(x, t)$  de ve onun çeşitli kısmi türevlerinde yüksek mertebeden türevler ve lineer olmayan terimler içeren bir polinomdur.  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodunun temel adımları aşağıdaki gibidir.

**Adım 1 :**  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenler,  $u$  bağımlı değişken olmak üzere (3.1) denkleminde

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = x - vt, \quad (3.2)$$

dönüşümünü uygulırsa,

$$P(u, -vu', u', v^2u'', -vu'', u'', \dots) = 0. \quad (3.3)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir.

**Adım 2 :** (3.3) adi diferansiyel denkleminin çözümü  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu ile polinom olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i, \quad (3.4)$$

(3.3) adi diferansiyel denkleminin genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu ile çözümü ise polinom türünden

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G}\right)^{-i}, \quad (3.5)$$

formundadır. Burada  $G = G(\xi)$  olmak üzere

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (3.6)$$

ikinci dereceden lineer bir adi diferansiyel denklemdir. Burada  $\lambda$  ve  $\mu$  keyfi sabitlerdir.

(3.5) denklemindeki  $m$  pozitif tamsayısı (3.3) adi diferansiyel denkleminde görülen en yüksek mertebeden türev ile lineer olmayan terim arasındaki homojen denge bağıntısından bulunur.

**Adım 3 :** (3.5) bağıntısı, (3.3) denkleminde yerine yazılır ve (3.6) ikinci dereceden lineer adi diferansiyel denklemi kullanılarak  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  'nin kuvvetlerine göre ayrılırsa (3.3) denkleminin sol tarafı bir başka polinoma döndürür. Bu polinomun her bir katsayısını sıfıra eşitleyerek  $a_0, a_i, b_i, c, v, \lambda$  ve  $\mu$  için cebirsel denklem sistemi bulunur.

Bu cebirsel denklem sisteminin çözümüyle  $a_0, a_i, b_i, c, v, \lambda$  ve  $\mu$  sabitleri elde edilir. Elde edilen sabitler (3.5) denkleminde yerlerine yazılır ve (3.6) ikinci dereceden lineer adi diferansiyel denkleminin çözümleri kullanılırsa (3.1) lineer olmayan kısmi türevli denklemin soliton çözümleri elde edilmiş olur. (3.6) denkleminin genel çözümü ise aşağıdaki gibidir.

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0,$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\varphi(k) = k^2 + \lambda k + \mu = 0,$$

şeklinde dir. Bu karakteristik denklemin kökleri ise

$$\Delta = \lambda^2 - 4\mu,$$

$$k_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}, \quad k_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2},$$

formundadır.  $\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$  ise

$$G(\xi) = c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi},$$

genel çözümü bulunur. Genel çözümde  $\xi$  'ye göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$G'(\xi) = k_1 c_1 e^{k_1 \xi} + k_2 c_2 e^{k_2 \xi},$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{k_1 c_1 e^{k_1 \xi} + k_2 c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} + c_2 \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-c_1 \frac{\lambda}{2} e^{k_1 \xi} - c_1 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} - c_2 \frac{\lambda}{2} e^{k_2 \xi} + c_2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\frac{\lambda}{2} [c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}] + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} [-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}]}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{[c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}] + \left[ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left( \frac{-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \right) - \frac{\lambda}{2} \right]}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \right] - \frac{\lambda}{2},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{-c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}}{c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}} \right] - \frac{\lambda}{2},$$

$$\begin{aligned} \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \cdot \\ &\left[ \frac{-c_1 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{c_1 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] \\ &- \frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{(-c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{(-c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2},$$

bulunur. Bu son ifadede

$$-c_1 + c_2 = A, \quad c_1 + c_2 = B,$$

alnırsa

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2},$$

elde edilir.

Benzer şekilde  $\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[ \frac{-A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi}{A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2},$$

ve  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  durumunda ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A}{A\xi + B} - \frac{\lambda}{2},$$

bulunur.

### 3.2 GENİŞLETİLMİŞ $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODUNUN KdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

$$u_t + \alpha uu_x - u_{xxx} = 0 \quad (3.7)$$

formundaki KdV denklemini göz önüne alalım. (3.7) denkleminde

$$u(\xi) = u(x, t), \quad \xi = x - vt, \quad (3.8)$$

dönüşümünü uygulanırsa,  $u = u(\xi)$  için

$$-vu' + \alpha uu' + u''' = 0$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı  $\xi'$ e göre integre edilirse;

$$c - vu + \frac{\alpha}{2}u^2 - u'' = 0, \quad (3.9)$$

bulunur. Burada  $c$  bir integrasyon sabitidir.

(3.9) denkleminde lineer olmayan  $u^2$  terimi ile en yüksek mertebeden türev olan  $u''$  terimi arasındaki dengeleme terimi

$$D \left[ \frac{d^q u}{d\xi^q} \right] = m + q, \quad D \left[ u^p \left( \frac{d^q u}{d\xi^q} \right)^s \right] = mp + s(m + q),$$

eşitlikleri kullanılarak;

$$m + 2 = 2m \Rightarrow m = 2,$$

bulunur. Böylece (3.7) KdV denkleminin çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'}{G} \right) + a_2 \left( \frac{G'}{G} \right)^2 + b_1 \left( \frac{G'}{G} \right)^{-1} + b_2 \left( \frac{G'}{G} \right)^{-2}, \quad (3.10)$$

formunda aranır. (3.10) denkleminde  $u^2(\xi)$  ve  $u''(\xi)$  ifadeleri bulunup (3.9) denkleminde yerine yazılır ve  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin kuvvetlerine göre ayrılırsa, (3.9) denkleminin sol tarafı başka bir polinoma dönüşür. Bu polinomların katsayıları sıfıra eşitlenerek  $a_0, a_i, b_i, c, v, \lambda$  ve  $\mu$  sabitleri için aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \left( \frac{G'}{G} \right)^{-4} : \quad & \frac{1}{2}b_2^2\alpha + 6b_2\mu^2 = 0, \\ \left( \frac{G'}{G} \right)^{-3} : \quad & b_1b_2\alpha + 10b_2\lambda\mu + 2b_1\mu^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} &: -b_2v + \frac{1}{2}b_1^2\alpha + a_0b_2\alpha + 4b_2\lambda^2 + 8b_2\mu + 3b_1\lambda\mu = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} &: -b_1v + a_0b_1\alpha + 6b_2\lambda + b_1\lambda^2 + 2 + a_1\lambda = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^0 &: 2b_2 + c - a_0v + \frac{1}{2}a_0^2\alpha + a_1b_1\alpha + a_2b_2\alpha + b_1\lambda + a_1\lambda\mu + 2a_2\mu^2 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^1 &: -a_1v + a_0a_1\alpha + a_2b_1\alpha + a_1\lambda^2 + 2a_1\mu + 6a_2\lambda\mu = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^2 &: -a_2v + \frac{1}{2}a_1^2\alpha + a_0a_2\alpha + 3a_1\lambda + 4a_2\lambda^2 + 8a_2\mu = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^3 &: 2a_1 + a_1a_2\alpha + 10a_2\lambda = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^4 &: 6a_2 + \frac{1}{2}a_2^2\alpha = 0,
\end{aligned}$$

Bu cebirsel denklemlerin çözülmesiyle iki farklı durum elde edilir ve aşağıdaki soliton çözümleri bulunur.

**Durum 1:**

$$\begin{aligned}
\alpha &\neq 0, \quad a_1 = -\frac{12\lambda}{\alpha}, \quad a_2 = -\frac{12}{\alpha}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad v = \alpha_0\alpha + \lambda^2 + 8\mu, \quad (3.11) \\
c &= \frac{1}{2}(a_0^2\alpha + 2a_0\lambda^2 + 16a_0\mu - 2a_1\lambda\mu - 4a_2\mu^2),
\end{aligned}$$

burada  $\lambda, \mu$  ve  $a_0$  keyfi sabitlerdir.

(3.11) ifadeleri (3.10) denkleminde yerine yazılırsa;

$$u(\xi) = a_0 - \frac{12\lambda}{\alpha} \left(\frac{G'}{G}\right) - \frac{12}{\alpha} \left(\frac{G'}{G}\right)^2, \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada  $\xi = x - (\alpha_0\alpha + \lambda^2 + 8\mu)t$  dir. (3.12) denklemini (3.9) denkleminin bir çözümüdür.

(3.6) denkleminin genel çözümünü (3.12) denkleminde yerine koyarsak (3.7) KdV denkleminin soliton çözümleri şu şekilde olur.

**$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;**

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + b_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + b_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-2},$$

bağıntısından

$$u(\xi) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &-(A^2 - B^2)(a_0\alpha + 6(\lambda^2 - 2\mu)) + (A^2 + B^2)(a_0\alpha + 12\mu). \\ &\cosh[(x - vt)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}] + 2AB(a_0\alpha + 12\mu) \sinh[(x - vt)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}] \end{aligned} \right\}}{2\alpha(B \cosh[\frac{1}{2}(x - vt)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}] + A \sinh[\frac{1}{2}(x - vt)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}])^2},$$

$$p = \frac{A \cosh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt)\right] + B \sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt)\right]}{A \sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt)\right] + B \cosh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt)\right]},$$

olarak alınır;sa;

$$u(\xi) = \frac{1}{\alpha}(a_0\alpha + 3\lambda^2 - 3p^2\lambda^2 + 12p^2\mu), \quad (3.13)$$

elde edilir.

**Şekil 3.1** (3.13) çözümünde  $a_0 = 5, \alpha = 2, v = 2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.13) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alırsak;

$$u(\xi) = \frac{a_0\alpha + 3\lambda^2 - 3(\lambda^2 - 4\mu) \tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt)\right]^2}{\alpha}, \quad (3.14)$$

$$u(\xi) = \frac{a_0\alpha + 3\lambda^2 - 3(\lambda^2 - 4\mu) \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]^2}{\alpha}, \quad (3.15)$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.2** (3.14) çözümünde  $a_0 = 4, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.3** (3.15) çözümünde  $a_0 = 3, \alpha = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = -2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**$\lambda^2 - 4\mu < 0$  alınırsa;**

$$u(\xi) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &(A^2 + B^2)(a_0\alpha + 6(\lambda^2 - 2\mu)) + (A^2 - B^2)(a_0\alpha + 12\mu) \\ &\cos[(x - vt)\sqrt{4\mu - \lambda^2}] + 2AB(a_0\alpha + 12\mu) \sin[(x - vt)\sqrt{4\mu - \lambda^2}] \end{aligned} \right\}}{2\alpha(A \cos[\frac{1}{2}(x - vt)\sqrt{4\mu - \lambda^2}] + B \sin[\frac{1}{2}(x - vt)\sqrt{4\mu - \lambda^2}])^2},$$

veya

$$q = \frac{-A \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]},$$

olmak üzere

$$u(\xi) = \frac{1}{\alpha}(a_0\alpha + 3((1+q^2)\lambda^2 - 4q^2\mu)), \quad (3.16)$$

elde edilir.

**Şekil 3.4** (3.16) çözümünde  $a_0 = -3, \alpha = 2, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.16) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alırsak;

$$u(\xi) = \frac{1}{\alpha}(a_0\alpha + 3\lambda^2 + 3(\lambda^2 - 4\mu) \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]^2), \quad (3.17)$$

$$u(\xi) = \frac{1}{\alpha}(a_0\alpha + 3\lambda^2 + 3(\lambda^2 - 4\mu) \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]^2), \quad (3.18)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.5** (3.17) çözümünde  $a_0 = -1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.2$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.6** (3.18) çözümünde  $a_0 = 3, \alpha = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**$\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise;**

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3}{\alpha} \left( -\frac{4A^2}{(B + A(x - vt))^2} + \lambda^2 \right), \quad (3.19)$$

rasyonel çözümü bulunur.

**Şekil 3.7** (3.19) çözümünde  $a_0 = 2, \alpha = -3, v = 2, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = 4$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

**Durum 2:**

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \quad a_2 = 0, \quad \alpha\mu \neq 0, \quad b_1 = -\frac{12\lambda\mu}{\alpha}, \quad b_2 = -\frac{12\mu^2}{\alpha}, \quad b_1 \neq 0, \\ v &= \frac{1}{b_1}\alpha_0 b_1 \alpha + 6b_2 \lambda + b_1 \lambda^2 + 2b_1 \mu, \quad c = \frac{1}{2}(-4b_2 + 2a_0 v - a_0^2 \alpha - 2b_1 \lambda), \end{aligned} \quad (3.20)$$

burada  $\lambda, \mu$  ve  $a_0$  keyfi sabitlerdir.

(3.20) ifadelerini (3.10) denkleminde yerine yazarsak;

$$u(\xi) = a_0 - \frac{12\lambda\mu}{\alpha} \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} - \frac{12\mu^2}{\alpha} \left(\frac{G'}{G}\right)^{-2}, \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21) denklemini (3.9) denkleminin bir çözümüdür.

(3.6) denkleminin genel çözümünü (3.21) denkleminde yerine koyarsak (3.7) KdV denkleminin soliton çözümleri şu şekilde elde edilir.

**$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;**

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + b_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + b_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-2},$$

bağıntısından

$$u(\xi) = a_0 + \frac{24\mu}{\alpha} \left( - \frac{2\mu}{\left( \lambda - \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left\{ \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right) + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right\}}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right)^2 - \frac{\lambda}{- \lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right) \right),$$

veya

$$u(\xi) = a_0 + \frac{24 \left( \lambda^2 - p\lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} - 2\mu \right) \mu}{\alpha \left( \lambda - p\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right)^2}, \quad (3.22)$$

elde edilir.

**Şekil 3.8** (3.22) çözümünde  $a_0 = 5, \alpha = 2, v = 2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.22) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{24\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - \lambda \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{\alpha \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)^2}, \quad (3.23)$$

$$u(\xi) = a_0 + \frac{24\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - \lambda \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{\alpha \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)^2}, \quad (3.24)$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.9** (3.23) çözümünde  $a_0 = -1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.10** (3.24) çözümünde  $a_0 = 3, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;

$$u(\xi) = \frac{24\mu}{\alpha} \left( -\frac{\lambda}{\left( \sqrt{4\mu - \lambda^2} \left\{ \left( \frac{B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] -}{A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right) \right\} \right)^2} - \lambda + \frac{1}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right) - \frac{2\mu}{\lambda + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( -B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + A \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]}} \right),$$

veya

$$u(\xi) = a_0 + \frac{24\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - q\lambda\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right)}{\alpha \left( \lambda - q\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right)^2}, \quad (3.25)$$

elde edilir.

**Şekil 3.11** (3.25) çözümünde  $a_0 = -1, \alpha = 4, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = 3, B = -2$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.25) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{24\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - \lambda \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{\alpha \left( \lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)^2}, \quad (3.26)$$

$$u(\xi) = a_0 + \frac{24\mu \left( \lambda^2 - 2\mu + \lambda \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{\alpha \left( \lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)^2}, \quad (3.27)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.12** (3.26) çözümünde  $a_0 = 1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.13** (3.27) çözümünde  $a_0 = -3, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**$\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise;**

$$u(\xi) = a_0 + \frac{12 \left( -\frac{A\lambda}{B + A(x - vt)} + \frac{\lambda^2}{2} - \mu \right) \mu}{\alpha \left( \frac{A}{B + A(x - vt)} - \frac{\lambda}{2} \right)^2}, \quad (3.28)$$

rasyonel çözümü elde edilir.

**Şekil 3.14** (3.28) çözümünde  $a_0 = -1, \alpha = 4, v = 1, \lambda = 2, \mu = 1, A = 3, B = -2$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

Yukarıdaki çözümlerden (3.13), (3.16), (3.19) ve (3.22), (3.25), (3.28) çözümleri KdV denklemi için yeni çözümler olup ; (3.14), (3.15), (3.17), (3.18) ve (3.23), (3.24), (3.26), (3.27) soliton çözümleri ise sabitlerin uygun seçilerek Tanh-coth, Sine-cosine, Hirota'nın bilineer metodu gibi yöntemlerin KdV denkleminde uygulanmasıyla elde edilen yani literatürde var olan çözümlere karşılık gelir [76].

### 3.3 GENİŞLETİLMİŞ $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODUNUN mKdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

$$u_t + \alpha u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.29)$$

formundaki mKdV denklemini gözönüne alalım. (3.29) denkleminde  $\xi = x - vt$  dönüşümünü uygulanır ve  $\xi'$  ye göre bir kez integre edilirse,

$$c - vu + \frac{\alpha}{3}u^3 + u'' = 0, \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.30) denklemindeki lineer olmayan  $u^3$  terimi ile en yüksek mertebeden  $u''$  türevini ihtiva eden terim arasındaki dengelenmeden

$$m + 2 = 3m \Rightarrow m = 1,$$

olur. Böylece (3.29) denkleminin genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metoduyla çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + b_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} \quad (3.31)$$

formunda aranabilir. (3.31) denkleminden  $u^3(\xi)$  ve  $u''(\xi)$  ifadeleri bulunup (3.30) denkleminde yerine yazılır ve  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin kuvvetlerine göre ayrılırsa, (3.30) denkleminin sol tarafı başka bir polinoma döndürür. Bu polinomların katsayıları sıfıra eşitlenerek  $a_0, a_1, b_1, c, v, \lambda$  ve  $\mu$  sabitleri için aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{G'}{G}\right)^{-3} : \frac{1}{3}b_1^3\alpha + 2b_1\mu^2 &= 0, \\ \left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} : a_0b_1^2\alpha + 3b_1\lambda\mu &= 0, \\ \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} : -b_1v + a_0^2b_1\alpha + a_1b_1^2\alpha + b_1\lambda^2 + 2b_1\mu &= 0, \\ \left(\frac{G'}{G}\right)^0 : c - a_0v + \frac{1}{3}a_0^3\alpha + 2a_0a_1b_1\alpha + b_1\lambda + a_1\lambda\mu &= 0, \\ \left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -a_1v + a_0^2a_1\alpha + a_1^2b_1\alpha + a_1\lambda^2 + 2a_1\mu &= 0, \\ \left(\frac{G'}{G}\right)^2 : a_0a_1^2\alpha + 3a_1\lambda &= 0, \\ \left(\frac{G'}{G}\right)^3 : 2a_1 + \frac{1}{3}a_1^3\alpha &= 0, \end{aligned}$$

Bu cebirsel denklemlerin çözülmesiyle sabitler şu şekilde bulunur:

$$\alpha \neq 0, \left( a_0 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}i\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda, a_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}i\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda \right), a_0 \neq 0, a_1 = -\frac{3\lambda}{a_0\alpha}, \lambda \neq 0, \quad (3.32)$$

$$b_1 = \frac{2a_0\mu}{\lambda}, v = \frac{1}{2}(2a_1b_1\alpha - \lambda^2 + 4\mu), c = 4a_0\mu,$$

(3.32) ifadeleri ve (3.6) denkleminin genel çözümü, (3.31) denkleminde yerine yazılırsa (3.29) mKdV denkleminin soliton çözümleri aşağıdaki gibi olur.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{4a_0\mu}{\lambda \left( -\lambda + \frac{\left\{ \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right) \right\}}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right)} \quad (3.33)$$

$$- \frac{3\lambda \left( -\lambda + \frac{\left\{ \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right) \right\}}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right)}{2a_0\alpha},$$

veya

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\lambda \left( \lambda - p\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right)}{2a_0\alpha} - \frac{4a_0\mu}{\lambda^2 - p\lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, \quad (3.34)$$

elde edilir.

**Şekil 3.15** (3.34) çözümünde  $a_0 = 3, \alpha = 2, v = 2, \lambda = 4, \mu = -2, A = -2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.34) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa

$$\begin{aligned}
 u(\xi) = & a_0 - \frac{4a_0\mu}{\lambda \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)} \\
 & + \frac{3\lambda \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{2a_0\alpha},
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 u(\xi) = & a_0 - \frac{4a_0\mu}{\lambda \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)} \\
 & + \frac{3\lambda \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{2a_0\alpha},
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.16** (3.35) çözümünde  $a_0 = 5, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.9$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.17** (3.36) çözümünde  $a_0 = 5, \alpha = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{4a_0\mu}{\lambda \left( -\lambda + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left\{ \left( \frac{B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] -}{A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right\}}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right)} - \frac{3\lambda \left( -\lambda + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left\{ \left( \frac{B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] -}{A \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right\}}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right)}{2a_0\alpha} \right),$$

veya

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\lambda(\lambda - q\sqrt{4\mu - \lambda^2})}{2a_0\alpha} - \frac{4a_0\mu}{\lambda^2 - q\lambda\sqrt{4\mu - \lambda^2}}, \quad (3.37)$$

elde edilir.

**Şekil 3.18** (3.37) çözümünde  $a_0 = 3, \alpha = 2, v = 3, \lambda = 1, \mu = 2, A = 1, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.37) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = a_0 - \frac{4a_0\mu}{\lambda \left( \lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)} + \frac{3\lambda \left( \lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{3\lambda}, \quad (3.38)$$

$$u(\xi) = \left\{ a_0 - \frac{4a_0\mu}{\lambda \left( \lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)} + \frac{3\lambda \left( \lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{2a_0\alpha} \right\}, \quad (3.39)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.19** (3.38) çözümünde  $a_0 = -1, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.20** (3.39) çözümünde  $a_0 = 3, \alpha = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\lambda}{2a_0\alpha} \left( -\frac{2A}{B + A(x - vt)} + \lambda \right) + \frac{2a_0\alpha}{\lambda \left( \frac{A}{B + A(x - vt)} - \frac{\lambda}{2} \right)}, \quad (3.40)$$

formundaki rasyonel çözüm elde edilir.

**Şekil 3.21** (3.34) çözümünde  $a_0 = -1, \alpha = -3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 1, A = 3, B = -2$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

Yukarıdaki çözümlerden (3.34) , (3.37) ve (3.40) çözümleri mKdV denklemi için yeni çözümler olup ; (3.35) , (3.36) , (3.38) ve (3.39) soliton çözümleri ise sabitlerin uygun seçilerek Tanh-coth, Sine-cosine, Hirota'nın bilineer metodu gibi yöntemlerin mKdV denkleminde uygulanmasıyla elde edilen yani literatürde var olan çözümlere karşılık gelir [76].

### 3.2 GENİŞLETİLMİŞ $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODUNUN BURGERS' DENKLEMİNE UYGULANMASI

$$u_t + uu_x - \epsilon u_{xx} = 0 \quad (3.41)$$

formundaki Burgers' denkleminde  $\xi = x - vt$  dönüşümü uygulanır ve  $\xi$ ' ye göre bir kez integre edilirse,

$$c - vu + \frac{1}{2}u^2 - \epsilon u' = 0, \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.42) denklemindeki lineer olmayan  $u^2$  terimi ile en yüksek mertebeden  $u'$  türevini ihtiva eden terim arasındaki dengelenmeden

$$m + 1 = 2m \Rightarrow m = 1,$$

bulunur. Böylece (3.41) Burgers' denkleminin genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metoduyla çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + b_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} \quad (3.43)$$

formunda aranabilir. (3.43) denkleminde  $u^2(\xi)$  ve  $u'(\xi)$  ifadeleri bulunup (3.42) denkleminde yerine yazılır ve  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin kuvvetlerine göre açılırsa;

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} : \frac{1}{2}b_1^2 - b_1\epsilon\mu = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} : -b_1v + b_1a_0 - b_1\epsilon\lambda = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : c - a_0v + \frac{a_0^2}{2} + a_1b_1 - b_1\epsilon + a_1\epsilon\mu = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -a_1v + a_0a_1 + a_1\epsilon\lambda = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : \frac{1}{2}a_1^2 + a_1\epsilon = 0,$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler Mathematica programı yardımı ile çözümlerse aşağıdaki iki farklı durum oluşur.

**Durum 1:**

$$a_1 = 0, \lambda \neq 0, b_1 = 2\epsilon\mu, v = a_0 - \epsilon\lambda, c = \frac{1}{2}(a_0^2 - 2a_0\epsilon\lambda + 4\epsilon^2\mu),$$

burada  $\lambda, \mu$  ve  $a_0$  keyfi sabitlerdir.

Bu değerler (3.43) denkleminde yerine yazılırsa (3.41) Burgers' denkleminin soliton çözümleri

$$u(\xi) = a_0 + 2\epsilon\mu \left( \frac{G'}{G} \right)^{(-1)}, \quad (3.44)$$

formunda aranır.

(3.6) denkleminin genel çözümleri (3.44) denkleminde yerine koyulursa denklemin soliton çözümleri řu şekilde elde edilir.

$$\lambda^2 - 4\mu > 0 \text{ ise;}$$

$$u(\xi) = v + \epsilon\lambda + 4\epsilon\mu.$$

$$\left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)} \right),$$

veya kısaca

$$u(\xi) = v + \epsilon \left( \lambda - \frac{4\mu}{\lambda - p\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \right), \quad (3.45)$$

bulunur.

**Şekil 3.22** (3.45) çözümünde  $a_0 = 3, \epsilon = 5, v = -2, \lambda = 4, \mu = -2, A = 2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.45) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = v + \epsilon \left( \lambda - \frac{4\mu}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right), \quad (3.46)$$

$$u(\xi) = v + \epsilon \left( \lambda - \frac{4\mu}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right), \quad (3.47)$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.23** (3.46) çözümünde  $a_0 = -1, \epsilon = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.24** (3.47) çözümünde  $a_0 = -1, \epsilon = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.8$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  soliton çözümü,

$$u(\xi) = v + \epsilon \left[ \lambda + \frac{4\mu}{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( \frac{B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] - A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]}{-\lambda + \frac{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right)} \right]$$

veya

$$u(\xi) = v + \epsilon \left( \lambda - \frac{4\mu}{\lambda - q \sqrt{4\mu - \lambda^2}} \right) \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir.

**Şekil 3.25** (3.48) çözümünde  $a_0 = 3, \epsilon = 1, v = -1, \lambda = 2, \mu = 4, A = 2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.48) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = v + \epsilon \left( \lambda - \frac{4\mu}{\lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right) \quad (3.49)$$

$$u(\xi) = v + \epsilon \left( \lambda - \frac{4\mu}{\lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right) \quad (3.50)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.26** (3.49) çözümünde  $a_0 = 3, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.8$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.27** (3.50) çözümünde  $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 3, t = 0.1$  ve  $t = 0.8$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise;

$$u(\xi) = v + \epsilon \left( \lambda + \frac{2\mu}{\frac{A}{B + A(x - vt)} - \frac{\lambda}{2}} \right) \quad (3.51)$$

formundaki rasyonel çözümü elde edilir.

**Şekil 3.28** (3.51) çözümünde  $\epsilon = 1, v = -1, \lambda = 2, \mu = 1, A = 1, B = -2$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

**Durum 2:**

$$a_1 = -2\epsilon, \quad b_1 = 0, \quad v = a_0 + \epsilon\lambda, \quad c = \frac{1}{2} (a_0^2 + 2a_0\epsilon\lambda + 4\epsilon^2\mu),$$

burada  $\lambda, \mu$  ve  $a_0$  keyfi sabitlerdir.

Bu değerleri (3.43) denkleminde yerine yazarsak Burgers' denkleminin çözümü

$$u(\xi) = a_0 - 2\epsilon \left( \frac{G'}{G} \right), \quad (3.52)$$

formunda aranabilir. Böylece (3.41) Burgers' denkleminin soliton çözümleri aşağıdaki formdadır.

**$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;**

$$u(\xi) = v - \epsilon\lambda - \epsilon \left[ -\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( \frac{A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right)}{1} \right],$$

veya kısaca

$$u(\xi) = v - p\epsilon\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \quad (3.53)$$

şeklindedir.

**Şekil 3.29** (3.53) çözümünde  $a_0 = 1, \epsilon = 5, v = -2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.53) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = v - \epsilon\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right], \quad (3.54)$$

$$u(\xi) = v - \epsilon\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right], \quad (3.55)$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.30** (3.54) çözümünde  $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.31** (3.55) çözümünde  $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;** soliton çözümü

$$u(\xi) = v - \epsilon\lambda - \epsilon \cdot \left( -\lambda + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] - A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right)$$

veya kısaca

$$u(\xi) = v - q\epsilon\sqrt{4\mu - \lambda^2} \quad (3.56)$$

şeklinde elde edilir.

**Şekil 3.32** (3.56) çözümünde  $a_0 = 5, \epsilon = 1, v = -1, \lambda = 2, \mu = 4, A = 2, B = 1$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.56) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = v - \epsilon \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \quad (3.57)$$

$$u(\xi) = v + \epsilon \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \quad (3.58)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.33** (3.57) çözümünde  $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 3, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.34** (3.58) çözümünde  $a_0 = -1, \epsilon = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 3, t = 0.1$  ve  $t = 0.9$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**$\lambda^2 - 4\mu = 0$  alınırsa;**

$$u(\xi) = \frac{Bv + A(v(x - vt) - 2\epsilon)}{B + A(x - vt)} \quad (3.59)$$

formundaki rasyonel çözüm elde edilir.

**Şekil 3.35** (3.59) çözümünde  $\epsilon = 3, v = -1, A = 1, B = -2$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

Yukarıdaki çözümlerden (3.45), (3.48), (3.51) ve (3.53), (3.56), (3.59) çözümleri Burgers' denklemleri için yeni çözümler olup ; (3.46), (3.47), (3.49), (3.50) ve (3.54), (3.55), (3.57), (3.58) soliton çözümleri ise sabitlerin uygun seçilerek Tanh-coth, Hopf Cole dönüşüm metodu gibi yöntemlerin Burgers' denklemlerine uygulanmasıyla elde edilen yani literatürde var olan çözümlere karşılık gelir [76].

### 3.2 GENİŞLETİLMİŞ $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODUNUN mBBM DENKLEMİNE UYGULANMASI

$$u_t + \alpha u_x + \beta u^2 u_x - \gamma u_{xxt} = 0, \quad (3.60)$$

formundaki mBBM denklemlerine  $\xi = x - vt$  dönüşümünü uygulanır ve  $\xi$ ' ye göre bir kez integre edilirse,

$$c - vu + \alpha u + \frac{\beta}{3} u^3 + v\gamma u'' = 0, \quad (3.61)$$

elde edilir. (3.61) denklemindeki lineer olmayan  $u^3$  terimi ile en yüksek mertebeden  $u''$  türevini ihtiva eden terim arasındaki dengelenmeden

$$m + 2 = 3m \Rightarrow m = 1,$$

bulunur.

Böylece (3.60) mBBM denkleminin genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metoduyla çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + b_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}, \quad (3.62)$$

formunda aranabilir. (3.62) denklemden  $u^3(\xi)$  ve  $u''(\xi)$  ifadeleri bulunup (3.61) denkleminde yerine yazılır ve  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin kuvvetlerine göre ayrılırsa;

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-3} : \frac{1}{3} b_1^3 \beta + 2b_1 v \gamma \mu^2 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} : a_0 b_1^2 \beta + 3b_1 v \gamma \lambda \mu = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} &: -b_1v + b_1\alpha + a_0^2b_1\beta + a_1b_1^2\beta + b_1v\gamma\lambda^2 + 2b_1v\gamma\mu = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^0 &: c - a_0v + a_0\lambda + \frac{1}{3}a_0^3\beta + 2a_0a_1b_1\beta + b_1v\gamma\lambda + a_1v\gamma\lambda\mu = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^1 &: -a_1v + a_1\alpha + a_0^2a_1\beta + a_1^2b_1\beta + a_1v\gamma\lambda^2 + 2a_1v\gamma\mu = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^2 &: a_0a_1^2\beta + 3a_1v\gamma\lambda = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^3 &: \frac{1}{3}a_1^3\beta + 2a_1v\gamma = 0,
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler Mathematica programı yardımı ile çözümlürse aşağıdaki üç farklı durum ortaya çıkar.

**Durum 1:**

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-2\beta - \beta\gamma\lambda^2 + 4\beta\gamma\mu}}, a_1 = \frac{3(\alpha\gamma\lambda + a_0^2\beta\gamma\lambda)}{a_0\beta(-1 + \gamma\lambda^2 + 2\gamma\mu)}, b_1 = 0, \\
v &= \frac{1}{3}(3\alpha + 3a_0^2\beta - a_0a_1\beta\lambda - a_1^2\beta\mu), \\
c &= \frac{1}{3}(2a_0^3\beta + a_0\alpha\gamma\lambda^2 + a_0^3\beta\gamma\lambda^2 + a_1\alpha\gamma\lambda^3 - 4a_0\alpha\gamma\mu - 4a_0^3\beta\gamma\mu + 2a_1\alpha\gamma\lambda\mu),
\end{aligned}$$

burada  $\lambda, \mu$  ve  $a_0$  keyfi sabitlerdir.

Bu değerler (3.62) denkleminde yerine yazılırsa mBBM denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-2\beta - \beta\gamma\lambda^2 + 4\beta\gamma\mu}} + \frac{3(\alpha\gamma\lambda + a_0^2\beta\gamma\lambda)}{a_0\beta(-1 + \gamma\lambda^2 + 2\gamma\mu)} \left(\frac{G'}{G}\right) \quad (3.63)$$

formunda aranabilir.

(3.6) denkleminin genel çözümü (3.63) denkleminde yerine koyulursa (3.60) mBBM denkleminin soliton çözümleri şu şekilde elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2+\gamma(\lambda^2-4\mu))}} + \frac{3(\alpha+a_0^2\beta)\gamma\lambda}{2a_0\beta(-1+\gamma(\lambda^2+2\mu))} \left\{ \left[ -\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}(x-vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}(x-vt) \right] \right)}{B \cosh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}(x-vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}(x-vt) \right]} \right] \right\}$$

veya

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2+\gamma(\lambda^2-4\mu))}} - \frac{3(\alpha+a_0^2\beta)\gamma\lambda \left[ \lambda - p\sqrt{\lambda^2-4\mu} \right]}{2a_0\beta(-1+\gamma(\lambda^2+2\mu))} \quad (3.64)$$

elde edilir.

**Şekil 3.36** (3.64) çözümünde

$a_0 = -3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.64) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2 + \gamma(\lambda^2 - 4\mu))}} - \frac{3(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda \left[ \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] \right]}{2a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))} \quad (3.65)$$

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2 + \gamma(\lambda^2 - 4\mu))}} - \frac{3(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda \left[ \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] \right]}{2a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))} \quad (3.66)$$

şeklindeki soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.37** (3.65) çözümünde

$a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.38** (3.66) çözümünde

$a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = -1, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla

elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2+\gamma(\lambda^2-4\mu))}} + \frac{\left\{ \begin{aligned} & 3(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda. \\ & \sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( \begin{aligned} & B \cos \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] \\ & - A \sinh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] \end{aligned} \right) \\ & -\lambda + \frac{\quad}{A \cos \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right]} \end{aligned} \right\}}{2a_0\beta(-1+\gamma(\lambda^2+2\mu))}$$

veya

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2+\gamma(\lambda^2-4\mu))}} - \frac{3(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda \left[ \lambda - q\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right]}{2a_0\beta(-1+\gamma(\lambda^2+2\mu))} \quad (3.67)$$

elde edilir.

**Şekil 3.39** (3.67) çözümünde

$a_0 = -3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.67) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2+\gamma(\lambda^2-4\mu))}} - \frac{3(\alpha+a_0^2\beta)\gamma\lambda\left[\lambda-\sqrt{4\mu-\lambda^2}\cot\left[\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}(x-vt)\right]\right]}{2a_0\beta(-1+\gamma(\lambda^2+2\mu))} \quad (3.68)$$

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2+\gamma(\lambda^2-4\mu))}} - \frac{3(\alpha+a_0^2\beta)\gamma\lambda\left[\lambda-\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}(x-vt)\right]\right]}{2a_0\beta(-1+\gamma(\lambda^2+2\mu))} \quad (3.69)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.40** (3.68) çözümünde

$a_0 = 3, v = -2, \lambda = 1, \mu = 3, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.41** (3.69) çözümünde  $a_0 = 3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = 1, t = 0.1$  ve  $t = 0.9$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise;

$$u(\xi) = \frac{\lambda\sqrt{3\alpha\gamma}}{\sqrt{-\beta(2 + \gamma(\lambda^2 - 4\mu))}} - \frac{3(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\left(\frac{A}{B + A(x - vt)} - \frac{\lambda}{2}\right)\lambda}{a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))} \quad (3.70)$$

formundaki rasyonel çözüm elde edilir.

**Şekil 3.42** (3.70) çözümünde

$a_0 = 1, \alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 5, v = 3, \lambda = 2, \mu = 1, A = 2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

**Durum 2:**

$$a_0 = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{3(\alpha\gamma\lambda\mu + a_0^2\beta\gamma\lambda\mu)}{a_0\beta(-1 + \gamma\lambda^2 + 2\gamma\mu)}, \quad v = \frac{-b_1^2\beta - a_0b_1\beta\lambda + 3\alpha\mu + 3a_0^2\beta\mu}{3\mu},$$

$$c = \frac{1}{3}(3a_0v - 3a_0\alpha - a_0^3\beta - 3b_1v\gamma\lambda),$$

Bu değerler (3.62) denkleminde yerine yazılırsa (3.60) mBBM denkleminin çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{\left\{ \left( \frac{a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] \right)} \right) \right\}}$$

veya

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{a_0\beta(\lambda - p\sqrt{\lambda^2 - 4\mu})(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))} \quad (3.71)$$

olur.

**Şekil 3.43** (3.71) çözümünde

$a_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, v = -2, \lambda = 4, \mu = -2, A = 2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.71) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt)\right]\right)} \quad (3.72)$$

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt)\right]\right)} \quad (3.73)$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.44** (3.72) çözümünde

$a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.45** (3.73) çözümünde

$a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{\left\{ \left( \begin{array}{c} a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu)) \cdot \\ \sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( \begin{array}{c} B \cos \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] - \\ A \sinh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] \end{array} \right) \end{array} \right) \right\}}$$

veya

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))(-\lambda + q\sqrt{4\mu - \lambda^2})} \quad (3.74)$$

elde edilir.

**Şekil 3.46** (3.74) çözümünde

$a_0 = -3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 3, \mu = 5, A = -2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.74) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))\left(\lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot\left[\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt)\right]\right)} \quad (3.75)$$

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{6(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{a_0\beta(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))\left(\lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt)\right]\right)} \quad (3.76)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.47** (3.75) çözümünde

$a_0 = 3, v = -2, \lambda = 1, \mu = 3, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.48** (3.76) çözümünde  $a_0 = 3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = 1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**$\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise;**

$$u(\xi) = -\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{3(\alpha + a_0^2\beta)\gamma\lambda\mu}{a_0\beta\left(\frac{A}{A + B(x - vt)} - \frac{\lambda}{2}\right)(-1 + \gamma(\lambda^2 + 2\mu))} \quad (3.77)$$

formundaki rasyonel çözüm elde edilir.

**Şekil 3.49** (3.77) çözümünde

$a_0 = 1, \alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 5, v = 3, \lambda = 2, \mu = 1, A = 2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen  
soliton çözümün üç boyutlu resmi

**Durum 3:**

$$a_0 \neq 0, \quad a_1 = \frac{2a_0}{\lambda}, \quad b_1 = a_1\mu, \quad v = \frac{1}{3} \left( -a_0a_1\beta\lambda + 2a_1^2\beta\mu \right), \quad c = \frac{1}{3} \left( -2a_0\alpha + a_1\alpha\lambda - 2a_0a_1^2\beta\mu \right),$$

Bu değerler (3.62) denkleminde yerine yazılarak mBBM denkleminin soliton  
çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{2a_1\mu}{-\lambda + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]}$$

$$+ \frac{a_0 \left( -\lambda + \frac{\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \\ \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right) \end{array} \right\}}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right)}{\lambda}$$

veya

$$p = \frac{A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]}{A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]},$$

olmak üzere;

$$u(\xi) = \frac{-2a_1\lambda\mu + a_0p \left( -p\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + 4p\mu \right)}{\lambda \left( \lambda - p\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right)} \quad (3.78)$$

elde edilir.

**Şekil 3.50** (3.78) çözümünde

$a_0 = 3, \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, v = -2, \lambda = 4, \mu = -2, A = 2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.78) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = \frac{a_0}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] - \frac{2a_1\mu}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \quad (3.79)$$

$$u(\xi) = \frac{a_0}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] - \frac{2a_1\mu}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \quad (3.80)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.51** (3.79) çözümünde

$a_0 = 3, a_1 = 1; v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = 3, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.52** (3.80) çözümünde

$a_0 = 2, a_1 = 1; v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, \alpha = -1, \gamma = 1, \beta = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$

alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{2a_1\mu}{-\lambda + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] - A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]}$$

$$+ \frac{a_0 \left( -\lambda + \frac{\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cdot \\ \left( B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] - A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right) \end{array} \right\}}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right)}{\lambda}$$

veya

$$u(\xi) = \frac{-2a_1\lambda\mu + a_0q \left( q(\lambda^2 - 4\mu) + \lambda\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right)}{\lambda \left( \lambda - q\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right)} \quad (3.81)$$

elde edilir.

**Şekil 3.53** (3.81) çözümünde

$a_0 = 3, \alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1, v = 1, \lambda = 2, \mu = 5, A = -2, B = -3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.81) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = \frac{1}{\lambda} \left( a_0 \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right) - \frac{2a_1\mu}{\lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]}, \quad (3.82)$$

$$u(\xi) = -\frac{1}{\lambda} \left( a_0 \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right) - \frac{2a_1\mu}{\lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]}, \quad (3.83)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.54** (3.82) çözümünde

$a_0 = 1, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.55** (3.83) çözümünde  $a_0 = 3, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, \alpha = 1, \gamma = 2, \beta = 1, t = 0.1$  ve  $t = 0.9$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**$\lambda^2 - 4\mu = 0$  alınırsa;**

$$u(\xi) = \frac{2Aa_0}{(B + A(x - vt))\lambda} + \frac{\frac{a_1\mu}{A}}{\frac{B + A(x - vt)}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}} \quad (3.84)$$

formundaki rasyonel çözüm elde edilir.

**Şekil 3.56** (3.84) çözümünde

$a_0 = 1, a_1 = 1; \alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 5, v = 3, \lambda = 2, \mu = 1, A = 2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

Yukarıdaki çözümlerden (3.64), (3.67), (3.70), (3.71), (3.74), (3.77) (3.78), (3.81) ve (3.84) çözümleri mBBM denklemi için yeni çözümler olup ; (3.65), (3.66), (3.68), (3.69) - (3.72), (3.73), (3.75), (3.76) ve (3.79), (3.80), (3.82), (3.83) soliton çözümleri ise sabitlerin uygun seçilerek Tanh-coth, Sine-cosine, Hirota'nın bilineer metodu gibi yöntemlerin mBBM denkleminde uygulanmasıyla elde edilen yani literatürde var olan çözümlere karşılık gelir.

### 3.5 GENİŞLETİLMİŞ $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -AÇILIM METODUNUN BOUSSINESQ DENKLEMİNE UYGULANMASI

$$u_{tt} - uu_x + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (3.85)$$

formundaki Boussinesq denkleminin  $\xi = x - vt$  dönüşümü uygulanır ve  $\xi$ ' ye göre bir kez integre edilirse,

$$c + v^2u - u - u^2 + u'' = 0, \quad (3.86)$$

elde edilir. (3.86) denklemindeki lineer olmayan  $u^2$  terimi ile en yüksek mertebeden  $u''$  türevini ihtiva eden terim arasındaki dengelenmeden

$$m + 2 = 2m \Rightarrow m = 2,$$

bulunur. Böylece (3.85) mBBM denkleminin genişletilmiş  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metoduyla çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + b_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + b_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-2}, \quad (3.87)$$

formunda aranabilir. (3.87) denkleminden  $u^2(\xi)$  ve  $u''(\xi)$  ifadeleri bulunup (3.86) denkleminde yerine yazılır ve  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin kuvvetlerine göre ayrılırsa;

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-4} : b_2^2 + 6b_2\mu^2 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-3} : 2b_1b_2 + 10b_2\lambda\mu + 2b_1\mu^2 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} : b_1^2 - b_2 + 2a_0b_2 + b_2v^2 + 4b_2\lambda^2 + 8b_2\mu + 3b_1\lambda\mu = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} : -b_1 + 2a_0b_1 + 2a_1b_2 + b_1v^2 + 6b_2\lambda + b_1\lambda^2 + 2b_1\mu = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : -a_0 + a_0^2 + 2a_1b_1 + 2b_2 + 2a_2b_2 + c + a_0v^2 + b_1\lambda + a_1\lambda\mu + 2a_2\mu^2 = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -a_1 + 2a_0a_1 + 2a_2b_1 + a_1v^2 + a_1\lambda^2 + 2a_1\mu + 6a_2\lambda\mu = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : a_1^2 - a_2 + 2a_0a_2 + a_2v^2 + 3a_1\lambda + 4a_2\lambda^2 + 8a_2\mu = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : 2a_1 + 2a_1a_2 + 10a_2\lambda = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : 6a_2 + a_2^2 = 0,$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica programı yardımı ile çözümlirse aşağıdaki iki farklı durum oluşur.

**Durum 1:**

$$a_1 = 0, \ a_2 = 0, \ \mu \neq 0, \ b_1 = -6\lambda\mu, \ b_2 = -6\mu^2, \ v = \sqrt{1 - 2a_0 - 8\mu}, \ c = a_0^2 + 8a_0\mu + 12\mu^2,$$

burada  $\lambda, \mu$  ve  $a_0$  keyfi sabitlerdir.

Bu değerler (3.87) denkleminde yerine yazılarak Boussiesq denkleminin çözümü

$$u(\xi) = a_0 - 6\lambda\mu \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} - 6\mu^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} \quad (3.88)$$

formunda aranabilir. Böylece (3.85) Boussinesq denkleminin soliton çözümleri şu şekilde elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;

$$u(\xi) = a_0 + 12\mu.$$

$$\left( -\frac{2\mu}{\left( \lambda - \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right)^2} - \frac{\lambda}{- \lambda + \frac{\left\{ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{\left( A \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + B \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)} \right\}}{B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]} \right) \right),$$

veya kısaca

$$u(\xi) = a_0 + \frac{12 \left( \lambda^2 - p\lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} - 2\mu \right) \mu}{\left( \lambda - p\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right)^2} \quad (3.89)$$

şeklinde yazılabilir.

**Şekil 3.57** (3.89) çözümünde  $a_0 = 5, v = 2, \lambda = 4, \mu = -1, A = -2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.89) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alırsak;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{12\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - \lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{\left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)^2} \quad (3.90)$$

$$u(\xi) = a_0 + \frac{12\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - \lambda\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)}{\left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right] \right)^2} \quad (3.91)$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.58** (3.90) çözümünde  $a_0 = 5, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.59** (3.91) çözümünde  $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -1, t = 0.1$  ve  $t = 0.9$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;

$$u(\xi) = u(\xi) = a_0 + 12\mu \left( -\frac{\lambda}{-\lambda + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] - A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} - \frac{2\mu}{\left( \lambda + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \left( -B \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] \right)}{A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]} \right)^2} \right),$$

veya kısaca

$$u(\xi) = a_0 + \frac{12\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - q\lambda\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right)}{\left( \lambda - q\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right)^2}, \quad (3.92)$$

olur.

**Şekil 3.60** (3.92) çözümünde  $a_0 = 5, v = 2, \lambda = 2, \mu = 5, A = 1, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.92) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa

$$u(\xi) = a_0 + \frac{12\mu \left( \lambda^2 - 2\mu - \lambda\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right) \cot \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right]}{\left( \lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] \right)^2} \quad (3.93)$$

$$u(\xi) = a_0 + \frac{12\mu \left( \lambda^2 - 2\mu + \lambda\sqrt{4\mu - \lambda^2} \right) \tan \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right]}{\left( \lambda + \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left[ \frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] \right)^2} \quad (3.94)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.61** (3.93) çözümünde  $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.9$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.62** (3.94) çözümünde  $a_0 = 4, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  için,

$$u(\xi) = a_0 + \frac{6 \left( -\frac{A\lambda}{B + A(x - vt)} + \frac{\lambda^2}{2} - \mu \right) \mu}{\left( \frac{A}{B + A(x - vt)} - \frac{\lambda}{2} \right)^2} \quad (3.95)$$

şeklindeki rasyonel çözüm elde edilir.

**Şekil 3.63** (3.95) çözümünde  $a_0 = 4, v = 2, \lambda = 2, \mu = 1, A = -2, B = 2$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

**Durum 2:**

$$\begin{aligned} a_1 &= -6\lambda, \quad a_2 = -6, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad v = \sqrt{1 - 2a_0 - \lambda^2 - 8\mu}, \\ c &= a_0^2 + a_0\lambda^2 + 8a_0\mu + 6\lambda^2\mu + 12\mu^2, \end{aligned}$$

Bu değerler (3.87) denkleminde yerine yazılırsa Boussinesq denkleminin çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur.

**$\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise;**

$$u(\xi) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &-(A^2 - B^2)(a_0 + 3\lambda^2 - 6\mu) + (A^2 + B^2)(a_0 + 6\mu) \\ &\cosh \left[ \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] + 2AB(a_0 + 6\mu) \sinh \left[ \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] \end{aligned} \right\}}{2 \left( B \cosh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] + A \sinh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(x - vt) \right] \right)^2}$$

veya

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3}{2} \left( -(-1 + p^2) \lambda^2 + 4p^2 \mu \right), \quad (3.96)$$

elde edilir.

**Şekil 3.64** (3.96) çözümünde  $a_0 = 4, v = 2, \lambda = 3, \mu = -1, A = 2, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.96) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa;

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\lambda^2}{2} - \frac{3}{2}(\lambda^2 - 4\mu) \tanh \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]^2, \quad (3.97)$$

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\lambda^2}{2} - \frac{3}{2}(\lambda^2 - 4\mu) \coth \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (x - vt) \right]^2, \quad (3.98)$$

soliton çözümleri bulunur.

**Şekil 3.65** (3.97) çözümünde  $a_0 = 3, v = -2, \lambda = 2, \mu = -2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.66** (3.98) çözümünde  $a_0 = 4, v = 1, \lambda = 2, \mu = -2, t = 0.1$  ve  $t = 0.8$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise;

$$u(\xi) = \frac{\left\{ \begin{array}{c} (A^2 + B^2)(a_0 + 3\lambda^2 - 6\mu) + (A^2 - B^2)(a_0 + 6\mu) \\ \cos \left[ \sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] + 2AB(a_0 + 6\mu) \sin \left[ \sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] \end{array} \right\}}{2 \left( A \cos \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] + B \sin \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2}(x - vt) \right] \right)^2}$$

veya

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3}{2} \left( (1 + q^2) \lambda^2 + 4q^2 \mu \right) \quad (3.99)$$

elde edilir.

**Şekil 3.67** (3.99) çözümünde  $a_0 = 2, v = 1, \lambda = 2, \mu = 5, A = 4, B = 3$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

(3.99) çözümünde sırasıyla,  $A = 0, B \neq 0$  ve  $A \neq 0, B = 0$  alınırsa

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\lambda^2}{2} + \frac{3}{2}(\lambda^2 - 4\mu) \cot \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]^2, \quad (3.100)$$

$$u(\xi) = a_0 + \frac{3\lambda^2}{2} + \frac{3}{2}(\lambda^2 - 4\mu) \tan \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (x - vt) \right]^2, \quad (3.101)$$

çözümleri bulunur.

**Şekil 3.68** (3.100) çözümünde  $a_0 = 4, v = 1, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

**Şekil 3.69** (3.101) çözümünde  $a_0 = 4, v = -2, \lambda = 2, \mu = 2, t = 0.1$  ve  $t = 0.5$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün iki boyutlu resmi

$\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise;

$$u(\xi) = a_0 - \frac{6A^2}{(B + A(x - vt))^2} + \frac{3\lambda^2}{2} \quad (3.102)$$

elde edilir.

**Şekil 3.70** (3.102) çözümünde  $a_0 = 4, v = 2, \lambda = 2, \mu = 1, A = -2, B = 2$  alınmasıyla elde edilen soliton çözümün üç boyutlu resmi

Yukarıdaki çözümlerden (3.89), (3.92), (3.95) ve (3.96), (3.99), (3.102) çözümleri Boussinesq denklemi için yeni çözümler olup ; (3.90), (3.91), (3.93), (3.94) ve (3.97), (3.98), (3.100), (3.101) soliton çözümleri ise sabitlerin uygun seçilerek Tanh-coth, Hirota metodu gibi yöntemlerin Boussinesq denkleminde uygulanmasıyla elde edilen yani literatürde var olan çözümlere karşılık gelir [76].

## KAYNAKÇA

- [1] **Yaşar, İ., B.**, 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [2] **Koca, K.**, 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [3] **Pala, Y.**, 2006. Modern Fizik Uygulamaları, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [4] **Korteweg, D.J., de Vries, G.**, 1895. On the change of from of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, Phil. Mag., **39**, 422-443.
- [5] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phsy. Rev. lett., **15**, 240-243.
- [6] **Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S.**, 1955. Studies of nonlinear problems, Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A.C. Newell) Amer. Math. Soc., **15** (1974), 143-156.
- [7] **Karpman, VI, Lynov, J.P, Michelsen, P., Pecselli, H.L, Rasmussen, J.J, Turikov, V.A.**, 1980. Modification of plasma solitons by resonant particles, Phys Fluids ; **23**, 1782.
- [8] **Bisognano, JJ.**, 1996.In: Proceedings of the 1996 European particle accelerator conference, Sitges. Bristol, UK: IOP; 328-30.
- [9] **Boussinesq, J.**, 1871. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire Comptes Rendus, **72**, 755-759.
- [10] **Rayleigh, L.**, 1876. On waves, Phil. Mag. **1**, 257-279.

- [11] **Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M.**, 1974. Korteweg-de Vries equation and generalizations, Methods for exact solution, Comm. Pure Appl. Math., **27**, 9-133.
- [12] **Hirota, R.**, 1971. Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett. **27**, 1192-1194.
- [13] **Hirota, R.**, 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, J. Math. Phys. **14**, 805-809.
- [14] **Zabusky, N.J., Galvin, C.J.**, 1971. Shallow water waves, the KdV equation and solitons, J.Fluid Mech. **47**, 811-824.
- [15] **Hammack, J.L., Segur, H.**, 1974. The Korteweg-de Vries equation and water waves, J. Fluid Mech. **65**, 289-314.
- [16] **Weidman, P.D., Maxworthy, T.**, 1978. Experiments on strong interactions between solitary waves, J. Fluid Mech. **85**, 417-431.
- [17] **Hirota, R.**, 1980. Direct Methods in Soliton Theory, Solitons, Springer, Berlin.
- [18] **Ablowitz, M., Segur, H.**, 1981. Solitons and Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia.
- [19] **Öziş, T., Yıldırım, A.**, 2008. Reliable analysis for obtaining exact solutions of nonlinear Schrödinger (NLS) equation, Chaos , Solitons and Fractals **38**, 209-212.
- [20] **Makhankov, V.G., Fedyanin, V. K.**, 1978. Soliton-like solution of the S3-equation pertubed by resonance interaction, Physics Letters A **68**, 169-171.
- [21] **Katyshev, Y.V., Makhaldiani, N.V., Makhankov, V.G.**, 1978. On the stability of soliton solutions to the Schrödinger equation with nonlinear term of the form  $\Psi\Psi^v$ , Physics Letter A **66**, 456-458.
- [22] **Makhankov, V.G.**, 1978. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems), Physics Reports **35**, 1-128.

- [23] **Bateman, H.**, 1915. Some recent researches on the motion of fluids, *Mon. Weather Rev.*, **43**, 163-170.
- [24] **Burgers, J. M.**, 1939. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci.*, **17**, 1-5.
- [25] **Burgers, J. M.**, 1939. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci.*, **17**, 1-53.
- [26] **Burgers, J. M.**, 1948. Mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*<sup>1</sup>, Academic Press, New York.
- [27] **Lagerstrom, P. A., Cole, J. D., and Trilling, L.**, 1949. Problems in the theory of viscous compressible fluids, *Calif. Inst. Tech., Note*.
- [28] **Cole, J. D.**, 1951. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quart. Apply. Math.*, **9**, 179-181.
- [29] **Goldberg, A.**, 1962. Finite amplitude waves in magnetohydrodynamics, *Sviet Phys. JETP*, **15**, 179-181.
- [30] **Pospelov, L. A.**, 1966. Propagation of finite-amplitude elastic waves, *Soviet Phys. Acoust.*, **11**, 302-304.
- [31] **Blackstock, D. T.**, 1964. Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite-amplitude sound waves, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **36**, 534-542.
- [32] **Keck, W. and Beyer, R. T.**, 1960. Frequency spectrum of finite amplitude ultrasonic waves in liquids, *Phys. Fluids*, **3**, 346-352.
- [33] **Mendousse, J. S.**, 1953. Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitude, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **25**, 51-54.
- [34] **Soluyan, S. I. and Khokhlov, R. V.**, 1961. Decay of finite-amplitude acoustic waves, in a dissipative medium, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. III. Fiz. Astronom.*, **3**, 52-61.

- [35] **Van der Pol, B.**, 1951. On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobean theta-functions, with aritmetical applications, Proc. Acad. Sci., **A13**, 261-284.
- [36] **Benton, E. R. and Platzman, G. W.**, 1974. A table of solution of the one-dimensional Burgers' equation, Quart. Appl. Math., 195-212.
- [37] **Fay, R. D.**, 1931. Plane sound waves of finite-amplitude, J. Acoust. Soc. Amer., **3**, 222-241.
- [38] **Fubini-Ghiron, E.**, 1935. Anomalie nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza, Ala Freuenza **4**, 530-581.
- [39] **Benton, E. R.**, 1966. Some new exact, viscous, nonsteady solutions of Burgers' equation, Phys. Fluids **9**, 1247-1248.
- [40] **Benton, E. R.**, 1967. solutions illustrating the decay of dissipation layers in Burgers' nonlinear diffusion equation, Phys. Fluids **10**, 2113-2119.
- [41] **Blackstock, D. T.**, 1966. Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite-amplitude, J. Acoust. Soc. Amer., **39**, 2113-2119.
- [42] **Hopf, E.**, 1966. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ , Comm. Pure. appl. Math., **3**, 201-230.
- [43] **Burgers, J. M.**, 1950. Correlation problems in a one-dimensional model of turbulence, Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., **53**, 247-260, 393-406, 718-742.
- [44] **Rodin, E. Y.**, 1974. A Riccati solution for Burgers' equaiton, Quart. Appl. Math., **27**, 541-545.
- [45] **Ames, W. F.**, 1965. Nonlinear partial differential equations in engineering, Academic Press, New York.
- [46] **Chu, C. W.**, 1965. A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations, Quart. Appl. Math., **23**, 257-278.

- [47] **Shvets, M. E. and Meleshko, V. P.**, 1965. Numerical algorithm of a solution of the system equations of hydrodynamics of the atmosphere, *Izv. Acad. Sci. USSR Atmosphere Ocean. Phys.*, **1**, 519-520.
- [48] **Miller, E. L.**, 1966. Predictor-Corrector studies of Burgers' model of turbulent flow, Master's Thesis, Univ. of Delaware, Newark.
- [49] **Varoğlu, E. and Finn, W. D. L.**, 1980. Space-time finite elements incorporating characteristics for the Burgers' equation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **16**, 171-184.
- [50] **Caldwell, J., Wanless, P. and Cook, E.**, 1981. A finite element approach to Burgers' equation, *Appl. Math. Modelling*, **5**, 189-193.
- [51] **Arminjon, P. and Beauchamp**, 1978. A finite element method for Burgers' equation in hydrodynamics *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 415-428.
- [52] **Öziş, T., Aksan E. N., Özdeş, A.**, 2003. A finite element approach for solution of Burgers' equation, *Appl. Math. Comput.*, **139**, 417-428.
- [53] **Evans D.J., and Abdullah**, 1984. The group explicit method for the solution of Burgers' equation, *Computing*, **32**, 239-253.
- [54] **Mittal, R. C. and Singhal, P.**, 1993. Numerical solution of Burgers' equation, *Comm. Num. Meth. Eng.*, **9**, 397-406.
- [55] **Kutluay, S., Bahadır, A. R., Özdeş**, 1999. A Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *J. Comput. Appl. Math.*, **103**, 251-256.
- [56] **Bahadır, A. R.**, 1999. Numerical solutions for one-dimensional Burgers' equation using a fully implicit finite difference method, *Int. J. Appl. Math.*, **1**, 163-175.
- [57] **Öziş, T., Özdeş, A.**, 1996. A direct variational methods to Burgers' equation, *J. Comput. Appl. Math.* **71**, 163-175.

- [58] **Wei, G. W., Gu, Yun.,** 2002. Conjugate filter approach for solving Burgers' equation, J. Comput. Appl. Math. **149**, 439-456.
- [59] **Bona J.,** 1981. On solitary waves and their role in the evolution of long waves, applications of nonlinear analysis. Boston, MA: Pitman.
- [60] **Yusufoglu, E., Bekir, A.,** 2008. The tanh and the sine-cosine methods for exact solutions of the mBBM and the Vakhnenko equations. Chaos, Solitons and Fractals **38**, 1126-33.
- [61] **Yusufoglu, E.** 2008. New solitonary solutions for the mBBM equations using Exp-function method. Phys. Lett. A. **372**, 442-6.
- [62] **Layeni, OP., Akinola, AP.,** 2010. A new hyperbolic auxiliary function method and exact solutions of the mBBM equation. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. **15**, 135-8.
- [63] **Omrani, K.** 2006. The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the BBM equation. Appl. Math. Comput. **180**, 614-21.
- [64] **Witting, J.M.,** 1984. A unified model for the evolution of nonlinear water waves. J. Comp. Physial. **56**, 203-236.
- [65] **Madsen, P.A., Sorensen, O.R.,** 1992. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. Coastal Eng. **18**, 183-204.
- [66] **Nwogu, O.,** 1993. An alternative form of the Boussinesq Equations for near shore wave propogation. J. Waterway port Coast Ocean Eng. **119**, 618-638.
- [67] **Beji, S., Nadaoka, K.,** 1996. A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth. Ocean Eng. **23**, 691-704.
- [68] **Zou, Z.L.,** 1999. Higher order Boussinesq equations. Ocean Eng. **26**, 767-792.
- [69] **Abdou, M.A.,** 2007. The extended tanh method and its applications for solving nonlinear phsical models. Appl. Math. Comp **190**, 988-996.

- [70] **Wang, D.**, 2007. New extended rational expansion method and exact solutions of Boussinesq and Jimbo-Miva equations. **189**, 878-886.
- [71] **İnc, M.** 2008. New solitary wave solutions with compact support and Jacobi elliptic function solutions for the nonlinearly dispersive Boussinesq equations. *Chaos, Solitons and Fractals* **37**, 792-798.
- [72] **Wang, M., Li, X., Zhang, J.**, 2008. The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A* **372**, 417-423.
- [73] **Bekir, A.**, 2008. Application of the  $(G'/G)$ -expansion method for nonlinear evolution equations, *Phys. Lett. A* **372**, 3400-3406.
- [74] **Zhang, J., Wei, X., Lu, Y.**, 2008. A generalized  $(G'/G)$ -expansion method and its applications, *Phys. Lett. A* **372**, 3653-3658.
- [75] **Aslan, İ., Öziş, T.**, 2009. On the validity and reliability of the  $(G'/G)$ -expansion method by using higher-order nonlinear equations, *Appl. Math Comput.* **211**, 531-536.
- [76] **Wazwaz, A.M.**, 2009. *Partial differensial equations and solitary waves theory*, Chicago.

## ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Adilcevaz'da doğdum. İlkokulu 100. Yıl Atatürk İlköğretim Okulunda, ortaokul ve liseyi Bitlis Anadolu Lisesinde okudum. 2004-2008 yılları arasında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen Matematik Bölümünde lisansüstü eğitimimi sürdürmekteyim.

**Esmâ ULUTAŞ**