

169288

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAREKETLİ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

Mehmet ÇINAR

Tez yöneticisi:
Prof. Dr. Hasan KÜRÜM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2005

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAREKETLİ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

Mehmet ÇINAR

Yüksek Lisans Tezi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu tez , 19.08.2005..... tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği ~~ley~~ ~~çokluğu~~ ile başarılı ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Hasan KÜRÜM

Üye :Prof.Dr. Mehmet CEBECİ

Üye :Yrd.Doç.Dr. Selçuk YILDIRIM

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 07.09.2005 tarih ve 2005/..29-..38. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının tamamlanmasında, bana her türlü desteği veren çok kıymetli hocam Prof.Dr.Hasan KÜRÜM'e içtenlikle ve samimiyetle teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR

İÇİNDEKİLER.....	I
ŞEKİLLER LİSTESİ	III
SİMGELER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
ABSTRACT	VI

1.GİRİŞ.....	1
1.1 Tezin Amacı	5
1.2 Tezin İçeriği	6
2.KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER	7
2.1. Tanımlar.....	7
2.2 Hiperbolik , Parabolik, Eliptik Denklemlerin Çözümü.....	8
2.2.1Hiperbolik Tip Denklemin Çözümü.....	8
2.2.2 Parabolik Tip Denklemin Çözümü.....	9
2.2.3 Eliptik Tip Denklemin Çözümü.....	9
3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	14
3.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Çözüm Denklemlerinin Elde Edilmesi.....	17
3.1.1 Giriş.....	17
3.1.2 Üçgenlerin Birleştirilmesi.....	23
3.2 Akı Yolu Çizimleri.....	25
4. HAREKETLİ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ.....	29
4.1.Bir Boyutlu Durumda Hareketli Sonlu Elemanlar Yötemi.....	30
4.1.1 Giriş.....	30
4.1.2 Global Hareketli Sonlu Eleman Yöntemi.....	30
4.1.3 Bölgesel Hareketli Sonlu Eleman Yöntemi.....	34
4.1.4 HSE'in Varyasyonel Türetimi.....	37
4.1.5 Eğimi Ağırlaştırılmış HSE.....	40

4.1.6 Karakteristiklere Lagrangian Yaklaşımı.....	41
4.2 İki Boyutlu Durumda Hareketli Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	43
4.2.1 Giriş.....	43
4.2.2 Global Hareketli Sonlu Eleman Yöntemi.....	44
4.2.3 Bölgesel Temel Elemanlar.....	47
4.2.4 Eğimi Ağırlaştırılmış HSE.....	50
4.2.5 Bölgesel Hareketli sonlu elemanlar yöntemi.....	52
4.2.6 Lagrangian Yöntemleri.....	54
4.2.7 Koordinat Dönüşümü.....	55
4.2.8 Monitor Fonksiyonun Seçimi.....	57
5. UYGULAMA.....	62
5.1 Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Bir Transformatörün Manyetik Büyüklüklerinin Hesaplanması.....	62
5.1.1 Çözüm Bölgesinin Belirlenmesi.....	62
5.1.2 Çözüm Ağının Oluşturulması	63
5.1.3 Çözüm Elde Edilmesi.....	64
5.2 Hareketli Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Transformatörün Manyetik Büyüklüklerinin Hesaplanması.....	65
5.3 Geliştirilen Program Yapısı ve Sonuçlar.....	66
5.3.1 Yaygın Olarak Kullanılan Sonlu Elemanlar Analizi Programı.....	66
5.3.2 Hareketli Sonlu Elemanlar Analizi Programı.....	67
6. SONUÇ	75
KAYNAKLAR.....	76
ÖZGEÇMİŞ	
EKLER	
EK-1: Program Listesi	

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Hareketli ızgara üretme tekniği	5
Şekil 1.2 Çözüm ağı üzerinde düğümlerin global yer değiştirmesi	5
Şekil 3.1 Bir üçgen eleman.....	17
Şekil 3.2 Çok sayıda üçgen eleman.....	23
Şekil 3.3 A_L noktasının vektör potansiyeli.....	27
Şekil 3.4 Eş potansiyel eğrilerinin çizim akış diyagramı.....	28
Şekil 4.1 α ve β temel fonksiyonlar.....	32
Şekil 4.2 Bölgesel temel fonksiyonlar.....	35
Şekil 4.3 Düğümler ve elemanlar arasından sıçramalar.....	42
Şekil 4.4 İki Boyutlu durumda temel fonksiyonlar.....	45
Şekil 4.5 İki boyutlu durumda bölgesel temel eleman fonksiyonları.....	47
Şekil 5.1 Sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş olduğumuz transformatör.....	62
Şekil 5.2 Coons Yüzeyi.....	63
Şekil 5.3 a)Bezier eğrisi b)B_Spline eğrisi.....	64
Şekil 5.4 Transformatörün 1/4'lük kısmı.....	65
Şekil 5.5 Yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar program yapısı.....	66
Şekil 5.6 Hareketli sonlu eleman kullanılarak elde edilen sonlu elemanlar program yapısı.....	67
Şekil 5.7 Transformatörün çözüm ağı üretimi.....	68
Şekil 5.8 Transformatörün eş potansiyel eğrileri(15 eğri).....	69
Şekil 5.9 Transformatörün eş potansiyel eğrileri(45 eğri).....	70
Şekil 5.10 Transformatörün eş potansiyel eğrileri(100 eğri).....	71
Şekil 5.11 Transformatörün eş potansiyel eğrileri(250 eğri).....	72
Şekil 5.12 Hareketli sonlu eleman kullanarak transformatörün çözüm ağı üretilmiş hali.....	73
Şekil 5.13 Transformatörün eş potansiyel eğrileri(250 eğri).....	74
Şekil 5.14 Transformatörün $x=12.8$ ve $y=[0\ 14]$ cm' lik kısmı için A magnetik vektör potansiyel değerleri	74

SİMGELER LİSTESİ

HSE	: Hareketli Sonlu Elemanlar
S	: Sonlu eleman ana matrisi
A	: Vektör potansiyel değeri
ϕ_i	: Eleman interpolasyon fonksiyonu
KDE	: Kısmi diferansiyel eşitlik
L	: u 'nun türevlerini içeren diferansiyel bir operatör
$W(x)$	: Pozitif ağırlık fonksiyonu
R	: Deneme fonksiyonu
EAHSE	: Eğimi ağırlaştırılmış hareketli sonlu elemanlar
M	: Monitör fonksiyon
G_1	: Matris şeklinde monitör fonksiyon
B	: Manyetik akı yoğunluğu
ν	: Manyetik relüktüvite

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

HAREKETLİ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

Mehmet ÇINAR

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
2005, Sayfa:79

Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden birisi sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yöntemi ile çözülecek diferansiyel denklem için, sınırlara dikkat edilmek şartıyla çözüm bölgesi , çözüm ağı olarak adlandırılan alt bölümlere ayrıştırılır. Bu bölge üzerindeki kısmi diferansiyel denklem çözümünde sonlu elemanlar yöntemi çoğu zaman yeterlidir. Ancak zaman bağımlı kısmi diferansiyel denklemlerde ve çözüm ağının bölgesel olarak değiştiği durumlarda , sonlu elemanlar yöntemi yerine hareketli sonlu elemanlar yöntemi kullanılması faydalıdır.

Bu tez çalışmasında, hareketli sonlu elemanlar yöntemi incelenmiştir. Bu yöntem için gerekli olan koordinat dönüşümünün nasıl yapıldığı, çözüm ağı üzerindeki bölgesel değişikliğin nasıl olacağı ve bu değişikliklerde önemli bir etken olan monitor fonksiyonu seçimi konuları bir ve iki boyutlu durumda detaylandırılmıştır. Uygulama olarak, C++ tabanlı bir yazılım gerçekleştirilerek transformatörün klasik ve hareketli sonlu elemanlar durumuna göre analizi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çözüm ağı üretimi, sonlu elemanlar yöntemi, hareketli ızgara teknikleri, hareketli sonlu elemanlar yöntemi.

ABSTRACT
Master Thesis

INVESTIGATION OF THE MOVING FINITE ELEMENTS METHOD

Mehmet ÇINAR

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering
2005, Page:79

The one of the commonly used methods for solution of partial differential equations is the finite element method. While a differential equation is solved by means of finite element method, the solution domain has to divide subregions called as mesh. The classical finite element method is sufficient for instance solution of partial differential equations. But, when time-dependent partial differential equations have existed and the mesh has changed through time, instead of classical finite element method, moving finite element method is employed. The use of moving finite element method provides to obtain a quick solution on the changing regions of mesh.

In this thesis, moving finite element method is considered. For this purpose, transformation of coordinate, selection of monitor function which is very important for local modifications is detailed in one and high dimensions. As application, a software is realised based on C++.

Key words: Mesh generation, moving finite element method, moving mesh methods.

1.GİRİŞ

Mühendislikte ve fiziki bilimlerde daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonrada bunlarla ilgili bazı sınır şartlarını, başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebelerden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit bir matematiksel ifadeye diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemler, özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler, teorik ve pratik bakımlardan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilimi dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulmaktadır. Bu tez çalışmasında diferansiyel denklem çeşitlerinden olan kısmi diferansiyel denklem üzerinde durulacaktır.

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısının iki veya daha fazla olması ve bu durumda denklemin herhangi mertebeden en az bir kısmi türev içermesi durumunda bu denkleme “Kısmi Diferansiyel Denklemler” denir. Bu tür denklemler bir çok mühendislik dallarında kullanılmaktadır. Genel olarak bir kısmi diferansiyel denklem $x,y...$ ler bağımsız değişkenler ve $u(x,y...)$ bağılı değişken olmak üzere;

$$F(x, y, ...u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, ...) = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada $u_x, u_y, u_{xx}, ...$ bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre kısmi türevleridir ve bunların her biri;

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, ... \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Bir kısmi diferansiyel denklemin türevinin en yüksek mertebesine, diferansiyel denklemin mertebesi denir. Bilinmeyen u fonksiyonu ve kısmi türevleri birinci dereceden ise denklem doğrusaldır. Genel olarak iki bağımsız değişkenli, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = G(x, y) \quad (1.3)$$

Bilinmeyen $u=u(x,y)$ fonksiyonunun ve kısmi türevlerinin katsayılarının sabit sayılar olması halinde ise sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Böyle bir denklem,

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y) \quad (1.4)$$

şeklinde yazılır.

İkinci mertebeden kısmi türevler, diferansiyel denklemin sınıflandırılmasında önemli rol oynar. $B^2 - 4AC$ diskriminant değerinin işaretine göre, yukarıdaki denklem hiperbolik, parabolik ve eliptik tip olarak sınıflandırılır. Buna göre yukarıdaki diferansiyel denkleme

$B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik,

$B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik

$B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik

tip diferansiyel denklem denir.

Matematik ve fiziğin en önemli denklemleri olan ısı ve dalga denklemleri de yukarıdaki şekilde sınıflandırılabilir.

x konum, t zaman değişkeni olmak üzere bir boyutlu dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{hiperbolik tip}$$

Bir boyutlu ısı denklemi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{parabolik tip}$$

x ve y konum değişkenleri olmak üzere $u(x,y)$ fonksiyonu için iki boyutlu Laplace denklemi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

ve Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad (1.6)$$

eliptik tip denklemlerdir[1].

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümündeki en önemli konulardan biri çözüm ağı veya ızgaranın uyarlamalı üretimidir. İki boyutlu uzaysal durumda çözüm ağı üretimi ve adaptasyonu için yaygın olarak varyasyonel yaklaşım kullanılır. Varyasyonel yaklaşım matematiksel analizin bir bölümüdür. Matematiksel ve fizikle ilgili problemlere ve birçok mühendislik problemlerinin çözümüne uygulanmaktadır. Bu amaçla örnek bir problem incelenecektir.

Bir düzlem üzerinde verilen iki noktayı birleştiren en kısa yolun bulunması problemi:

Geometrik olarak problemin çözümünün iki noktayı birleştiren doğru parçası olduğu kolayca görülmektedir. Bu bir varyasyonel problem olarak düşünüldüğünde, xy düzleminde verilen iki nokta $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları olmak üzere, $y = y(x)$ bu iki noktadan geçen bir eğrinin denklemi ise:

$$y_1 = y(x_1) \quad , \quad y_2 = y(x_2) \quad (1.7)$$

şartları sağlanır ve AB yayının uzunluğu;

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$ integrali yardımıyla hesaplanır. $y = y(x)$ fonksiyonunun seçimine bağlı olan integral değeri $I[y(x)]$ sembolü ile gösterilmektedir.

A ve B noktalarından geçen eğrileri gösteren her $y=y(x)$ fonksiyonuna karşı bir I uzunluğu bulunur. $I[y(x)]$ e , $y(x)$ değişken fonksiyonuna bağlı bir fonksiyonel denir. Verilen örnek problemi, bir varyasyonel problemi olarak;

$y_1 = y(x_1) \quad , \quad y_2 = y(x_2)$ şartlarını sağlayan ve

$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$ fonksiyoneli minimum yapan $y(x)$ fonksiyonunun bulunması şeklinde

düşünülürse; problemin cevabı , verilen iki noktanın koordinatlarının sağlandığı $y=mx+n$ şeklinde bir doğru denklemi elde edilir.

Bir veya daha fazla değişkene bağlı fonksiyonların ekstremum değerlerinin bulunması diferansiyel hesabın konusudur. Varyasyonel yaklaşımda ise fonksiyonelleri ekstremum yapan fonksiyonlar aranır. Bu varyasyonel yaklaşımda çözüm ağı üretimi için gerekli olan koordinat dönüşümünü elde edebilmek için bir fonksiyonel kullanılır[2]. Bu formülasyonu elde edebilmek

için kullanıcının belirlediği monitor fonksiyon kullanılır. Özellikle x, y değişkenli fiziksel ortam Ω_p ve ξ, η değişkenli hesapsal ortam Ω_c arasındaki koordinat dönüşümünü gerçekleştiren fonksiyonel minimize edilir. Fonksiyonel, minimizasyonun kısmi diferansiyel denklem çözümü için gerekli olan parametreler yardımıyla uygun bir şekilde yapacak şekilde seçilir. Fonksiyonelin nasıl formüle edildiğine ve minimizasyon probleminin nasıl çözüldüğüne bağlı olarak farklı çözüm ağları üretilir [3].

Zaman bağımlı kısmi diferansiyel denklemlerin adaptif teknikler kullanılarak çözümünde üç yöntem kullanılır. Bu yöntemler aşağıdaki gibidir [4]:

h-düzgünleştirme (refinement): Bölgesel ızgara çözünürlüğünü geliştirmek için var olan çözüm ağına ekstra düğümler ekler.

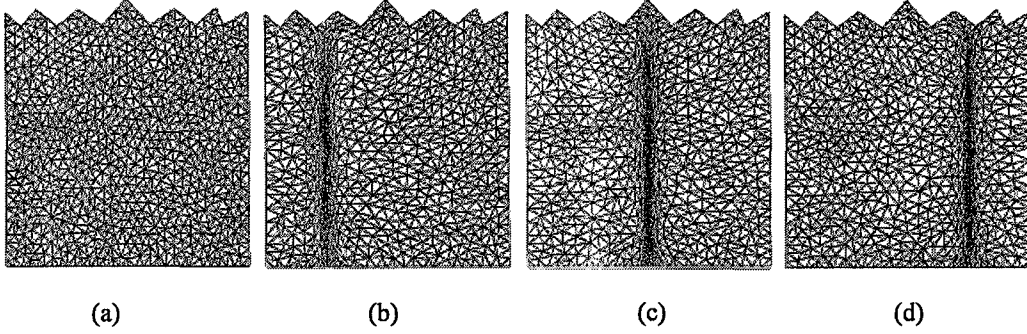
p-düzgünleştirme (refinement): Çözümlerin doğruluğuna bağlı olarak sonlu elemanlar yaklaşımında kullanılan her bir elemanın derecesini uygun bir şekilde seçerek çözüm elde edilir.

r-düzgünleştirme (refinement): Hareketli çözüm ağı metotları olarak da bilinir. İstenilen bölgede yoğunlaşan çözüm ağı noktalarının çözülen diferansiyel denkleme göre yeniden yerleştirilmesini sağlar. Bunun için önce varolan düğüm sayılarını kontrol eder, sonra da onları çalışılan bölge üzerinde çözüme uygun olarak yeniden yerleştirir.

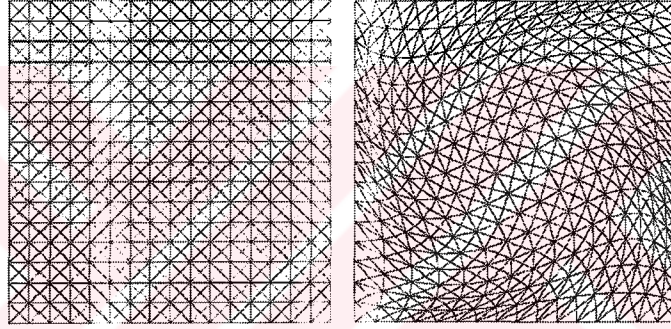
p-düzgünleştirme metodu sonlu elemanlar topluluğu arasında daha az popüler olmuştur. Bunun temel sebepleri güvenilirlik, verim eksikliği ve çözüm ağı hareketini elde etmede genel bir formülasyonunun olmayışıdır. r metodunun, h ve p metotlarına göre üstünlükleri vardır. r metodunda çözüm ağı sürekli olarak değişir. Böylece kullandığımız diferansiyel denkleme bir zaman türeticisi eklemek kolaylaşır. Programın veri yapısı kolay olur ve kolay bir şekilde uygulaması yapılır. Sonlu eleman yaklaşımını kullanan kısmi diferansiyel eşitlik algoritmalarının yanında, sonlu farklar tabanlı hareketli çözüm ağı algoritma çalışmaları da literatürde mevcuttur[5]. Sonlu farklar metodu tabanlı hareketli çözüm ağı metotları lineer olmayan hiperbolik problemlerde kolayca uygulanmakta ve uygulaması yapılabilmektedir. Ancak sonlu farklar yöntemi özellikle eğrisel sınırlara sahip bölgeler üzerinde çözüm aşamasında çoğu zaman yetersiz kalmakta ve çözümün doğruluk derecesi azalmaktadır. Bu tür ortamlarda çalışılması gerektiği zaman sonlu elemanlar yöntemi daha doğru sonuçlar verir. Ayrıca, çözüm ortamının esnekliğinin sağlanmasından başka sonlu farklar yerine sonlu elemanlar kullanılmasının avantajları şöyle sıralanır [6]:

1. Sonlu elemanlar metoduyla birçok sonlu farklar hareketli çözüm ağı metotlarında kullanılan interpolasyon adımlarına gerek kalmaz. Böylece işlemler daha hızlı yapılabilmektedir.

2. Hareketli sonlu elemanlar metoduyla; bazı monitor fonksiyonu olarak da seçilebilen hata tahmini tabanlı göstergeler mevcuttur. Bu göstergeler çözüm ağı adaptasyonunun sağlanmasına yardımcı olur.



Şekil 1.1. Hareketli ızgara üretme tekniği [7].



Şekil 1.2. Çözüm ağı üzerinde düğümlerin global yer değiştirmesi

Şekil 1.1 ve 1.2 ' den görüldüğü gibi hareketli ızgara üretme tekniğinin amacı belli bir bölgede kontrollü bir şekilde yoğunlaşmanın sağlanmasıdır. Bu yoğunluk işlemi monitor fonksiyonu olarak bilinen bir fonksiyon yardımıyla gerçekleştirilir. Monitor fonksiyonu kullanıcının belirlediği bir fonksiyondur. Bu fonksiyon yardımıyla çözüm ağı yoğunluğu kontrol edilir. Bu kontrolün başarılı ve doğru sonuçlar elde edebilmesi uygun monitor fonksiyonu seçimiyle sağlanır [8].

1.1. Tezin Amacı

Bu tezin amacı hareketli sonlu eleman yönteminin matematiksel ve teorik yapısının incelenerek bir transformatörün hareketli sonlu elemanlar kullanarak manyetik alan dağılımının incelenmesidir. Bilindiği gibi sonlu elemanlar analizi yapılırken çözüm bölgesi alt bölümlere ayrıştırılır. Burada kullanılan elemanlar üçgen elemanlardır. Hareketli sonlu elemanlar yöntemi kullanılırken çözüm bölgesindeki değişimin fazla olacağı yeri tespit etmek için uygun monitor fonksiyon seçilir. Bu monitor fonksiyon sayesinde çözüm ağı üzerinde istenilen bölgede daha fazla

eleman oluşturulması sağlanarak daha hızlı bir şekilde çözüme gidilir. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak transformatörün her bölgesi aynı sayıdaki elemanla bölmelendirilerek sonlu elemanlar analizi yapılacak; daha sonra manyetik alan değişiminin çok olduğu demir bölgede toplam eleman sayısı değişmemek şartıyla uygun monitor fonksiyon yardımıyla daha fazla üçgen eleman kullanıp hareketli sonlu eleman analizi yapılacaktır. Böylece elde edilen vektör potansiyel (A) ve manyetik akı yoğunluğu (B) değerleri karşılaştırılacaktır. Bunu elde edebilmek için uygun koordinat dönüşümü yapılır ve uygun monitor fonksiyonu yardımıyla çözüm ağında istenilen bölge daha fazla elemanla bölmelendirilerek analiz işlemi yapılacaktır.

1.2. Tezin İçeriği

Üst kısımda belirtilen amaca göre tez için yapılan düzenleme aşağıdaki gibidir:

Bölüm 2: Kısmi türevli diferansiyel denklemler

Bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklem tanımları ve çözüm yöntemleri fazla detaylandırılmadan anlatılmıştır.

Bölüm 3: Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yönteminin belli bir diferansiyel denklemin çözümünde ortam şartları göz önüne alınarak nasıl çözüleceği verilmiştir. Sonlu eleman analiz için kullanılan fonksiyonların seçimleri ve uygulama adımları detaylandırılmıştır. Bu bölümde sonlu elemanlar yönteminin teorisinden bahsedilmiştir.

Bölüm 4: Hareketli Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde bir ve iki boyutlu durumda hareketli sonlu elemanlar yöntemi üzerinde durulmuştur. Kullanılan kısmi diferansiyel denklemin seçimi ve bu denklemin çözümü için gerekli olan bazı parametrelerin seçimi ve çözüm yöntemi bir boyutlu duruma göre anlatılmıştır ve detaylandırılmıştır. Özellikle ızgara (çözüm ağı) üzerinde ne gibi bir etkinin olması gerektiği ve düğüm noktalarının hareket etmesi durumunda kısmi diferansiyel denklemin zamana göre çözüm aşamaları belirtilmiştir. Çalışılan kısmi diferansiyel denklemin zamana göre değiştiği ve aynı zamanda ızgaranın da monitor fonksiyonuna göre değiştiği durumda denklemin nasıl çözüleceği detaylandırılmıştır.

Bölüm 5: Sonlu Elemanlar Yönteminin Teorisi

Geliştirilen program yardımıyla bir trafonun bilinen sonlu elemanlar ve hareketli sonlu elemanlar analizi yapılarak A vektör potansiyel ve B magnetik akı yoğunlukları hesaplanmış ve eş potansiyel eğrileri çizdirilmiştir. Her iki analiz sonucunda elde edilen A vektör potansiyel değerleri karşılaştırılmıştır.

Bölüm 6: Sonuç

Elde edilen sonuçlar değerlendirilecektir.

2. KİSMİ TÜREVİLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1. Tanımlar

$x, y, \dots$ bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin bir z fonksiyonu ve bu fonksiyonun kısmi türevleri arasındaki bağıntıya kısmi diferansiyel denklem veya kısmi türevli denklem denir.

Böyle bir denklem sembolik olarak,

$$F(x, y, \dots, u, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^\alpha \dots \partial u^\lambda}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilebilir.

Kısmi türevli bir denklemin mertebesi, denklemde en yüksek mertebeli türevin mertebesidir. Kısmi türevli bir denklemin çözümü, bu denklemi özdeş olarak sağlayan bir

$$z = f(x, y, \dots, u) \quad (2.2)$$

fonksiyonudur. z fonksiyonu x ve y gibi iki değişkenli bir fonksiyon ise, kısmi türevli denklemin bütün çözümleri, açık olarak

$$z = f(x, y) \quad (2.3)$$

veya kapalı olarak

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2.4)$$

şeklindedir.

Geometrik olarak bu denklemlerin gösterdiği yüzeylere, integral yüzeyleri denir.

n . mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümünde, n tane keyfi sabit bulunmaktadır. n . mertebeden bir kısmi türevli denklemin genel çözümü de, n tane keyfi fonksiyon içerir.

Örneğin, $z = f(x - y, y - z)$ fonksiyonu, ne şekilde olursa olsun,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

kısmi türevli denkleminin genel çözümüdür.

Gerçekten $u = x - y$, $v = y - z$ kabul edilirse,

$$z = f(u, v) \quad (2.6)$$

olur. Bu fonksiyon bir bileşik fonksiyon olup, türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \quad (2.8)$$

elde edilir. Bunlar kısmi türevli denklemde yerine konulursa

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (2.9)$$

olarak $z = f(x - y, y - z)$ in denklemi sağladığı görülür.

Birinci mertebeden keyfi bir kısmi türevli denklemin genel çözümü, bir tane keyfi fonksiyon içerir.

2.2 Hiperbolik, Parabolik, Eliptik Denklemlerin Çözümü

2.2.1 Hiperbolik Tip Denklemin Çözümü

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \quad (2.10)$$

Hiperbolik denklemin her iki tarafının v ye göre integrali alınır,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(u) \quad (2.11)$$

ve bu denklemin her iki tarafının da u 'ya göre integrali alınır

$$z = \int f(u)du + G(v) \quad (2.12)$$

$$z = F(u) + G(v) \quad (2.13)$$

bulunur. O halde denkleminin çözümü

$$z = F(x + \alpha y) + G(x + \beta y) \quad (2.14)$$

dir. F ve G keyfi fonksiyonlardır,

2.2.2 Parabolik Tip Denklemin Çözümü

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \quad (2.15)$$

Parabolik denklemin her iki tarafının v ye göre iki defa integrali alınır

$$\frac{\partial z}{\partial v} = F(u) \quad (2.16)$$

$$z = vF(u) + G(u)$$

bulunur. O halde (2.36) denkleminin çözümü

$$z = (x + \beta y)F(x + \alpha y) + G(x + \alpha y) \text{ olur.} \quad (2.17)$$

2.2.3 Eliptik Tip Denklemin Çözümü

Eliptik denklem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \quad (2.18)$$

olup bu denklem Laplace denklemi adını alır. Bu denklemi sağlayan $z(u, v)$ fonksiyonlarına *harmonik fonksiyonlar* denir. Bu denklemin çözümü için iki yol kullanılır.

1.yol

$$u + iv = X \quad ; \quad u - iv = Y \quad (2.19)$$

dönüştürmeleri yapılarak,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial Y} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y \partial X} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} \frac{\partial Y}{\partial u} \quad (2.21)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = i \left(\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y} \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = i \left[\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} i - \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} i + \frac{\partial^2 z}{\partial Y \partial X} (-i) - \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} (-i) \right] \quad (2.24)$$

$$= -\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} \quad (2.25)$$

olarak denklem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (2.26)$$

veya

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (2.27)$$

şeklini alır. Bu denklem ise hiperbolik tip olup , çözümlerse

$$z = F(X) + G(Y) \quad (2.28)$$

ve Laplace denkleminin çözümü olarak da

$$z = F(u + iv) + G(u - iv) \quad (2.29)$$

elde edilir.

2.yol

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \quad (2.30)$$

denkleminin çözümü $z = f(u, v)$ şeklindedir. $X = X(u)$, $Y = Y(v)$ olarak

$$z = XY = X(u).Y(v) \quad (2.31)$$

şeklinde bir çözüm (değişkenlere ayırma kuralı) aranacaktır.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = Y \frac{dX}{du} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = X \frac{dY}{dv} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = Y \frac{d^2 X}{du^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = X \frac{d^2 Y}{dv^2} \quad (2.33)$$

olup $z = XY$ nin denklemi sağlama şartı,

$$Y \frac{d^2 X}{du^2} + X \frac{d^2 Y}{dv^2} = 0 \quad (2.34)$$

şeklindedir. Denklemin her iki tarafı XY çarpımına bölünürse,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{du^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dv^2} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{du^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dv^2} \quad (2.36)$$

elde edilir. $X = X(u)$ ve $Y = Y(v)$ olduğundan son denklemin birinci tarafı v yi ve ikinci tarafı da u yu içermemektedir. O halde birbirine eşit olan bu iki ifade bir sabite eşit olmak zorundadır. O halde K^2 bir sabit olarak,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{du^2} = K^2 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2 X}{du^2} - K^2 X = 0 \quad (2.37)$$

$$- \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dv^2} = K^2 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2 Y}{dv^2} + K^2 Y = 0 \quad (2.38)$$

denklemleri elde edilir. Bunlardan ise

$$X = c_1 e^{ku} + c_2 e^{-ku} \quad (2.39)$$

$$Y = a \cos Kv + b \sin Kv \quad (2.40)$$

bulunur. O halde denklemin z çözümü

$$z = XY = (c_1 e^{ku} + c_2 e^{-ku}) (a \cos Kv + b \sin Kv) \quad (2.41)$$

dir. Bu çözümden

$$\begin{aligned} z &= P e^{ku} \sin Kv & , & & z = R e^{-ku} \sin Kv \\ z &= M e^{ku} \cos Kv & , & & z = N e^{-ku} \cos Kv \end{aligned} \quad (2.42)$$

özel çözümleri de kolayca çıkarılabilir [10].



3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

Fiziksel ortam ile çalışan çoğu bilim adamları iki önemli konu ile karşı karşıya kalmaktadır. Bunlar, fiziksel ortamın matematiksel formülasyonu ve diğeri de matematiksel modelin sayısal analizidir. Fiziksel ortamın matematiksel modelinin çıkarılması çoğu zaman temel matematik, fizik bilgisini gerektirir. Matematiksel formülasyondaki çoğu ifadeler sistemle ilgili diferansiyel denklem tipindedir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü, çalışılan fiziksel sistemin herhangi bir andaki davranışı hakkında bilgi verir [11].

Çoğu problemler için ilgili denklemin türetilmesi zor değildir. Fakat bu denklemlerin tam çözümlerini elde etmek her zaman mümkün değildir. Bu durumda tam çözüm bulmak yerine yaklaşım yöntemleri kullanılarak, belirli bir hata ile çözüme gidilmeye çalışılır. Bunlar arasında sonlu farklar ve varyasyonel yöntemler (örneğin Rayleigh-Ritz ve Galerkin yöntemleri) literatürde en yaygın kullanılan yöntemlerdir. Diferansiyel denklemin sonlu farklar yaklaşımında, sonraki türevler fark bölümleriyle temsil edilir. Böylece, verilen fiziksel ortamın sınır şartları zorlanarak, elde edilen cebirsel denklem çözülür ve sonuç elde edilir. Varyasyonel yöntemlerde ise , denklem, ağırlıklı integral şekline dönüştürülür ve daha sonra domen üzerinde yaklaşık çözümün doğrusal birleşimli olduğu kabul edilir. Çözüm için seçilecek katsayıların seçimi orijinal diferansiyel denklemde ki katsayılarla uyusacak şekilde seçilmelidir [12]. Varyasyonel yöntemler arasında yaygın kullanılan integral şekli ve ağırlık fonksiyonu açısından birbirinden farklı olan Rayleigh-Ritz, en küçük kareler yöntemi, Galerkin yöntemi gibi yöntemler mevcuttur. Bu yaklaşımlar, keyfi bir domen üzerinde çalışma yapılacağı zaman yaklaşım fonksiyonu oluşturulması açısından bazı dezavantajlara sahiptir[13].

Sonlu elemanlar yöntemi , yukarıda belirtilen geleneksel varyasyonel yöntemlerin dezavantajlarını azaltır .Yöntem basit bir problem için aşağıdaki adımları kullanır:

1.Verilen bölgenin sonlu eleman çözüm ağının oluşturulması:

Bu adım sonlu eleman denklem formülasyonu bitirilene kadar bir gecikmeye sebep olabilir. Süreklilik problemlerinde alan değişkeni, çözüm bölgesindeki noktalara ilişkin bir fonksiyondur. Dolayısıyla alan değişkeninin sonsuz sayıda değerleri vardır ve problem sonsuz sayıda bilinmeyenlidir. Problemin sonlu sayıda bilinmeyenli duruma indirgenmesi amacıyla birinci adım olarak çözüm bölgesi sonlu sayıda eleman ile bölmelenir. Elemanlar üçgen, dörtgen, hexahedron, izoparametrik, vb. şekillerde ve değişik büyüklüklerde seçilebilir. Bu seçim, problemin tek, iki veya üç boyutlu olması durumu ve inceleme altındaki malzeme veya cihazın sınırları da göz önüne alınarak yapılır. Düzensiz şekillerde ve geliş güzel bölümlendirmelerde üçgen elemanlar

kolaylık sağlar. Bu elemanlar sınır yüzeylere kolaylıkla uyum sağlar. Böylece çözüm bölgesi, istenilen büyüklük ve sıklıkta elemanlar ile bölmenerek düğüm sayısı ve dolayısıyla çözüm denklemlerinin sayısı değiştirilebilir. Bu elemanlarla bölmeleme yapıldıktan sonra elemanlara uygun düğüm numaraları ve eleman numaraları verilir [14].

2. Çözüm ağı üzerindeki bütün eleman tipleri için şekil fonksiyonlarının türetilmesi

İkinci adımda; her bir elemanı belirleyen adımlar yardımıyla o eleman üzerinde veya içinde alan değişkeninin değişimini gösteren şekil fonksiyonun tipi seçilir. Alan değişkeni skalar, vektörel veya yüksek dereceli bir tensör olabilir. Çoğu zaman alan değişkeni için polinomlar seçilir. Çünkü bunların integral ve türevlerini almak kolaydır. Polinomlar lineer, kuadratik , kübik , vb. yapıda olabilirler.

3. Sisteme ait uygun sınır şartları belirlenir.

4. Eleman özelliklerinin bulunması

Her bir elemanın özelliklerini tanımlayan matris eşitliklerinin bulunması, üçüncü adımı oluşturur. Bunun için kullanılan yaklaşımlardan bazıları ; direkt yaklaşım , varyasyonel yaklaşım, ağırlıklı artıklar yaklaşımı ve enerji dengesi yaklaşımı şeklindedir.

5. Eleman özelliklerinin birleştirilmesi:

Tüm sistemi modelleyen özellikleri bulmak için elemanların ayrı ayrı olan özellikleri birleştirilir ve problemin sınır şartları sisteme yerleştirilerek sonuç denklem sistemi çözüme hazır hale getirilir.

6. Denklem sisteminin çözümü:

Uygun hesaplamalar yapıldıktan sonra ana matris (S) matrisi elde edilerek aşağıdaki denklem sistemi çözülür.

$$[S^e] \{A^e\} = \{R^e\} \quad (3.1)$$

Dördüncü adımda elde edilen sonuç denklem sistemi, alan değişkeninin bilinmeyen değerlerini hesaplamak üzere çeşitli yöntemlerden yararlanarak çözülür. Eğer denklemler lineer ise; Gauss Eliminasyon , Cholesky Decomposition gibi direkt yöntemler veya Gauss Seidel, SOR (Successive Over Relaxion) gibi iteratif yöntemler kullanılabilir. Eğer denklemler nonlineer ise, bunların çözümünü elde etmek daha zordur ve Newton-Raphson gibi iteratif yöntemlerden yararlanır.

ϕ_i , eleman interpolasyon fonksiyon seçimi ve türetilmesi.

İnterpolasyon fonksiyonu alan değişkeninin eleman üzerindeki değişimini temsil etmektedir. İnterpolasyon fonksiyonunun belirlenmesi seçilen eleman tipine ve çözülecek denklemin derecesine bağlıdır. Ayrıca interpolasyon fonksiyonları şu şartları sağlamalıdır:

- a) İnterpolasyon fonksiyonunda bulunan alan değişkeni ve alan değişkeninin en yüksek mertebeden bir önceki mertebeye kadar olan kısmi türevleri eleman sınırlarında sürekli olmalıdır.
- b) İnterpolasyon fonksiyonunda bulunan alan değişkeninin bütün türevleri, eleman boyutları limitte sıfıra gitse bile alan değişkenini karakterize etmelidir.
- c) Seçilen interpolasyon fonksiyonu koordinat değişimlerinden etkilenmemelidir.

Hem bu şartları sağlamaları hem de türev ve integral almadaki kolaylığından dolayı interpolasyon fonksiyonu genelde polinomlar olarak seçilir. Seçilen polinom, yukarıdaki şartların gerçekleşmesi için uygun terimleri ihtiva etmelidir.

6. İstenen diğer hesaplamaların yapılması:

Sisteme ait bazı önemli parametreleri hesaplamak için denklem sisteminin çözüm sonuçları kullanılabilir. Örnek olarak, elektrik alanlarının incelenmesini sağlayan Laplace denkleminin ilişkin çözüm sonuçları sistemin potansiyel dağılımını verir. Eğer istenirse, düğümlerin potansiyel değerlerinden yararlanılarak alan şiddeti, depolanan enerji ve kapasite gibi hesaplamalar da yapılabilir.

Sonlu elemanlar metodunu diğer nümerik metodlardan üstün kılan başlıca özellikleri şöyle sıralanabilir:

- a) Kullanılan sonlu elemanların boyutlarının ve şekillerinin değişkenliği nedeniyle ele alınan bir cismin geometrisi tam olarak ifade edilebilir.
- b) Bir veya birden çok delik veya köşeleri olan bölgeler kolaylıkla incelenebilir.
- c) Değişik malzeme ve geometrik özellikleri bulunan cisimler incelenebilir.
- d) Sınır şartları kolayca uygulanabilir.

Sonlu elemanlar yönteminin bütün mühendislik dallarına uygulaması yapılabilmektedir. Elektrik mühendisliği uygulamalarına baktığımızda daha çok Laplace ve Poisson tipindeki kısmi diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmaktadır. x ve y konum değişkenleri olmak üzere $u(x,y)$ fonksiyonu için iki boyutlu Laplace denklemi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

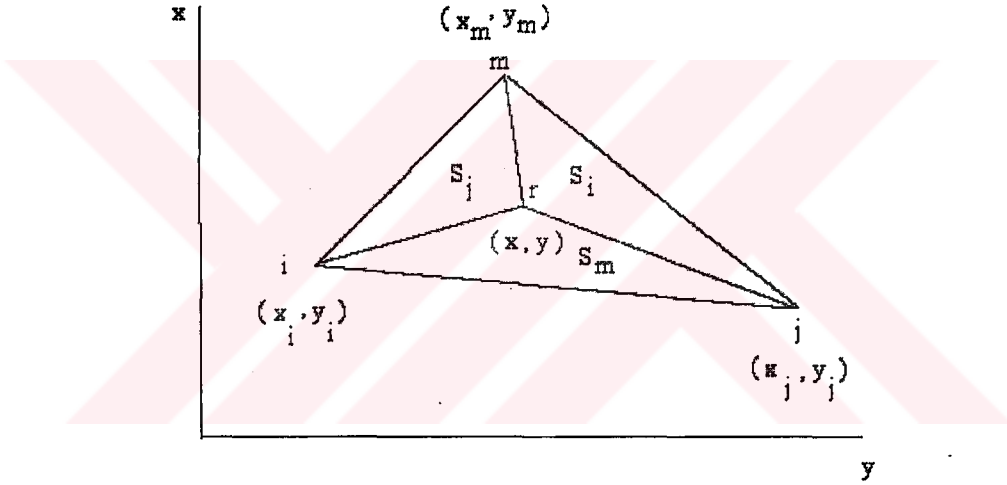
ve Poisson denklemi ise,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad (3.3)$$

şeklindedir.

3.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Çözüm Denklemlerinin Elde Edilmesi

3.1.1 Giriş



Şekil 3.1 Bir üçgen eleman

Şekil 3.1’de görülen üçgen elemanın i, j ve m no’lu köşelerindeki potansiyellerin sırası ile A_i, A_j, A_m olduğu biliniyor. Üçgen eleman yeterince küçük alınırsa üçgen eleman içerisindeki potansiyel dağılımının lineer olduğu kabul edilebilir. Üçgen elemanın kenarlarındaki veya içindeki herhangi bir r noktasının potansiyeli

$$A(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (3.4)$$

şeklinde birinci dereceden bir polinomla deneme fonksiyonu olarak ifade edelim. Bu polinomda yer alan $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ katsayıları köşe potansiyelleri cinsinden hesaplanarak yerlerine yazılacaktır. i, j, m noktalarındaki potansiyeller bilindiğine göre

$$A_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i$$

$$A_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j \quad (3.5)$$

$$A_m = \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m$$

yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Şekil 3.1'deki üçgenin alanı

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} [(x_j y_m - x_m y_j) + (x_m y_i - x_i y_m) + (x_i y_j - x_j y_i)] \quad (3.8)$$

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_i & x_i & y_i \\ A_j & x_j & y_j \\ A_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{2\Delta} \quad (3.9)$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$a_j = x_m y_i - x_i y_m \quad (3.10)$$

$$a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

kısaltmaları kullanılarak

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(a_i A_i + a_j A_j + a_m A_m) \quad (3.11)$$

aynı şekilde

$$b_i = y_j - y_m$$

$$b_j = y_m - y_i \quad (3.12)$$

$$b_m = y_i - y_j$$

kısaltmalarıyla

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(b_i A_i + b_j A_j + b_m A_m) \quad (3.13)$$

$$c_i = x_m - x_j$$

$$c_j = x_i - x_m \quad (3.14)$$

$$c_m = x_j - x_i$$

kısaltmalarıyla

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(c_i A_i + c_j A_j + c_m A_m) \text{ bulunan bu ifadeler (3.4) eşitliğinde yerlerine yazılırsa}$$

$$A(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \sum_{l=i}^m (a_l + b_l x + c_l y) A_l \quad (3.15)$$

Şekil 3.1'deki S_i, S_j, S_m üçgenlerinin alanları olmak üzere

$$\begin{aligned} S_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2 \\ S_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2 \\ S_m &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{S_i}{\Delta} \\ N_j &= \frac{S_j}{\Delta} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} N_m &= \frac{S_m}{\Delta} \\ N_i + N_j + N_m &= 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$A(x, y) = N_i A_i + N_j A_j + N_m A_m \quad (3.19)$$

Burada N_i, N_j, N_m şekil olarak adlandırılır. i, j ve m noktalarından herhangi biri üzerinde o noktaya ait şekil fonksiyonu değeri bir, diğer noktaların şekil fonksiyon değerleri sıfırdır. Böylece herhangi bir r noktasındaki A vektör potansiyel değeri üçgen köşelerindeki vektör potansiyel değerleri cinsinden ifade edilmiş oldu. Vektör potansiyel ifadesi artık bilindiğine göre buradan B manyetik akı yoğunluğu ifadesi de çıkarılabilir.

$$B = \text{Rot } A \quad (3.20)$$

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax & Ay & Az \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Burada iki boyutlu alanlar için manyetik vektör potansiyeli A' 'nın sadece z yönünde bileşeninin olduğu gö zönüne alınarak hesaplamalar yapıldığından A_x ve A_y 'nin sıfır olduğu görülür. Bu durumda

$$B(x, y) = (i \frac{\partial}{\partial y} - j \frac{\partial}{\partial x}) A_z(x, y) \quad (3.22)$$

$$B(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \sum_{l=1}^m (b_l A_l i + c_l A_l j) \quad (3.23)$$

x, y düzleminde sınırlı bir R bölgesinde akım yoğunluğu vektörü z yönünde ise manyetik vektör potansiyeli $A(x, y) = A_z(x, y)$ manyetik relüktüvite ν 'nün uzayında uygun sınır şartlarındaki Poisson denkleminin gerçekleştiği aşağıdaki denklemle ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nu \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial A}{\partial y}) = -J \quad (3.24)$$

ile ifade edilir. Bu yöntemde (3.24) denkleminin çözümü ile uğraşmak yerine lineer olmayan enerji fonksiyoneli olan denk (3.25)

$$F = \iint_R \left(\int_0^B \nu b \, db \right) dx \, dy - \iint_R J A \, dx \, dy \quad (3.25)$$

ifadesini minimize eden A fonksiyonu araştırılır. Bu minimizasyon işlemi

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = 0 \quad (3.26)$$

ile sağlanır. Çözüm bölgesinde ele alınan üçgenler için

$$F = \sum \left[\iint_R \left(\int_0^B \nu b \, db \right) dx \, dy - \iint_R J A \, dx \, dy \right] \quad (3.27)$$

t.terim için bu ifade

$$F_i = \iint \left(\int_0^B v b \, db - J A \right) dx \, dy \quad (3.28)$$

Buradan çözüm bölgesi için

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \sum \frac{\partial F_k}{\partial A_k} \quad (3.29)$$

olarak yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial A_k} = \frac{\partial}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial A_k} \quad (3.30)$$

ifadesi kullanılarak

$$\frac{\partial F}{\partial A_k} = \iint \left(\frac{\partial}{\partial B} \left(\int_0^B v b \, db \right) \frac{\partial B}{\partial A_k} - J \frac{\partial A}{\partial A_k} \right) dx = \iint \left(v B \frac{\partial B}{\partial A_k} - J \frac{\partial A}{\partial A_k} \right) dx \, dy \quad (3.31)$$

buradan

$$S_{ii} = \frac{b_i^2 + c_i^2}{4\Delta}$$

$$S_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta} \quad (3.32)$$

$$S_{im} = \frac{b_i b_m + c_i c_m}{4\Delta}$$

$$S_{jj} = \frac{b_j^2 + c_j^2}{4\Delta} \quad (3.33)$$

$$S_{jm} = \frac{b_j b_m + c_j c_m}{4\Delta}$$

$$S_{mm} = \frac{b_m^2 + c_m^2}{4\Delta}$$

$$S_{im} = S_{mi}, S_{ij} = S_{ji}, S_{im} = S_{mi} \quad (3.34)$$

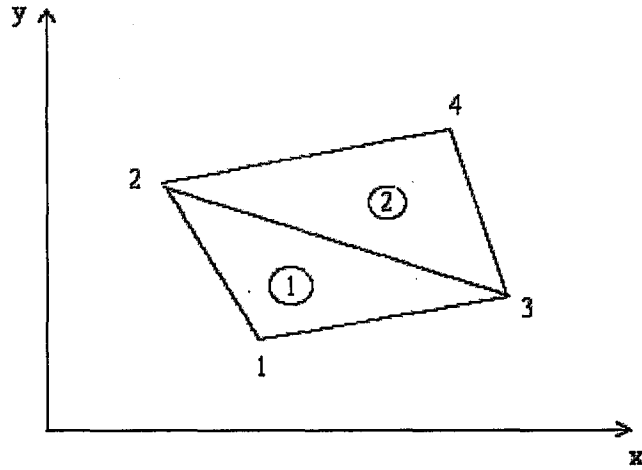
kısaltmaları kullanılarak

$$v \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{im} \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} J \Delta \quad (3.35)$$

elde edilir. Böylece çözüm bölgesi içinde bulunan üçgen elemana ait ifade çıkartılmış olur. Problem çözümü için tüm üçgenlere ait ifadelerin birleştirilmesi gerekir.

3.1.2 Üçgenlerin Birleştirilmesi

Şimdi bir problemin çözümü için üçgen elemanlara ait ifadelerin birleştirilmesine bir örnek olarak iki komşu üçgen elemanı olan bir problem ele alınacaktır (Şekil 3.2)



Şekil 3.2 Çok sayıda üçgen eleman

Şimdi şekil 3.2’de görülen iki üçgen eleman için (3.36) ifadelerini yazalım. Birinci eleman için i,j,m düğümleri sırasıyla 1 ,3 ve 2 numaralı düğümdür.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{12} \\ S_{31} & S_{33} & S_{32} \\ S_{21} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

ikinci üçgen elemanın i,j,m düğümleri sırası ile 2 , 3 ve 4 numaralı düğümdür.

$$\begin{bmatrix} S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Yukarıdaki eşitlikler incelenirse S_{22} , S_{33} ve $S_{23} = S_{32}$ ifadelerinin her iki eşitlikte de yer aldığı görülüyor. Her iki eleman için geçerli olan bir eşitliği yazacak olursak

$$\begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 & S_{13}^1 & 0 \\ S_{21}^1 & S_{22}^{1+2} & S_{23}^{1+2} & S_{24}^2 \\ S_{31}^1 & S_{32}^{1+2} & S_{33}^{1+2} & S_{34}^2 \\ 0 & S_{42}^2 & S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Bu ifadeden anlaşılacağı üzere alt indisler düğüm, üst indisler eleman numarasını gösterir. Böylece n düğüm sayısı olmak üzere $n*n$ ’lik bir S katsayılar matrisi oluştu. Burada katsayılar matrisinin oluşturulması açık bir şekilde görülüyor.

Burada üzerinde durulması gereken bir başka hususta S matrisinin mümkün olduğu kadar dar bir bant matris olmasıdır. Bant matris çözen özel programlar kullanıldığında bilgisayardaki hafıza kullanımı açısından büyük avantaj sağlar. Çözüm bölgesindeki üçgen elemanlarda bir kenardaki düğüm numaraları arasındaki en büyük fark bant genişliğini verir.

Daha önce de belirtildiği gibi bir üçgen eleman içindeki potansiyel dağılımının lineer olduğu kabulünü yapmıştık. Çözüm bölgesindeki üçgen elemanların sayıları ne kadar fazla olursa üçgen eleman boyutları küçülecek ve çözüm hatamız o oranda az olacaktır.

3.2 Akı Yolu Çizimleri

Bir magnetik bölgenin sonlu elemanlar yada sonlu farklar ile çözümünde bulunan, düğümlerin vektör potansiyel değerlerinden yararlanarak bu magnetik yapının akı yolu şeması çizilebilir. Akı yolunun çizilmesi magnetik yapı hakkında önemli bilgiler verir. Bununla birlikte vektör potansiyel değerin bölgelere göre değişimi bu şema üzerinde daha kolay gözlenir. Bu değişim miktarı çözüm bölgesinin üçgen elemanlara bölerken hangi bölgenin daha çok üçgen elemanlara bölünmesi gerektiği fikrini verir. Hesaplanan sonuçların doğruluğunu artırmak için vektör potansiyel değişimin fazla olduğu bölgeler daha küçük üçgen elemanlara bölünür.

$$B = \text{Rot } A \quad (3.39)$$

Vektör potansiyel ile magnetik indüksiyon arasındaki denklem 3.39' de görülen ilişki vardır. Bu ifadeden anlaşılacağı gibi, çözüm bölgesinde ki eş potansiyel noktaları bulunup bunların haritası çizildiğinde bu harita aynı zamanda akı yolu şeması olur.

Bir üçgen elemanın köşe düğümlerinin vektör potansiyelleri bilindiği takdirde üçgen içindeki veya üçgen kenarları üzerindeki tüm noktalarda geçerli olan deneme fonksiyonundan faydalanarak istenilen koordinattaki potansiyel denklem 3.40' de ki gibi bulunabilir.

$$A(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (3.40)$$

Eş potansiyel eğrileri çizilirken üçgen üzerindeki bir noktanın vektör potansiyel değerini hesaplamak yerine üçgen elemanı üzerinde haritası çizilecek olan ve önceden belirlenen bir vektör potansiyel değerine eşit noktalar bulunur. Bunun için eğrisi çizilecek vektör potansiyel değeri önceden tespit edilir. Eğrisi çizilecek vektör potansiyel değerler iki şekilde çizilir;

1. En küçük vektör potansiyel değerinden başlayarak belli bir miktar kadar artırımlar alıp eş potansiyel değerlerini çizmek. Bu durumda toplam harita çizgi sayısı en büyük vektör potansiyel değeri ile en küçük vektör potansiyel değer arasındaki farkın artım miktarına oranı kadardır.

2. Toplam harita sayısını belirledikten sonra en büyük vektör potansiyel değeri ile en küçük değer arasındaki farkı toplam çizgi sayısına bölerek artım miktarı elde edilir. En küçük vektör potansiyel değerinden başlayarak, her seferinde artım miktarı kadar artırılarak eş vektör potansiyel eğrileri çizilir

Çizimlere en küçük vektör potansiyel değerinden başlanır. Her üçgen elemanın üç kenarı için, bu kenarların düğümlerinin değeri çizimi yapılan vektör potansiyel değerle karşılaştırılır. Çizimi yapılan vektör potansiyel değerinin bu iki düğümden birisinin değerine eşit yada bu iki düğümün vektör potansiyelleri arasında bir değer olup olmadığı araştırılır. Eğer çizimi yapılan vektör potansiyel bir üçgen kenarının iki düğümü arasında bir değer ise, mutlaka bu kenar üzerinde değeri, haritası çizilen vektör potansiyel değerine ve vektör potansiyel değerine eşit nokta vardır. Bu noktanın koordinatları kenar düğümlerin koordinat ve vektör potansiyel değerinden hesaplanır.

Şekil 3.3' de ki gibi haritası çizilen A_1 vektör potansiyel değeri, A_1 ile A_2 arasında bir değer ise A_1 ile A_2 arasındaki bir noktanın vektör potansiyeli mutlaka A_2 ' ye eşittir. Bir üçgen eleman içindeki ve kenarlardaki vektör potansiyel değer değişimleri lineer olduğu için A_1 - A_2 kenarı için;

$$\frac{x_2 - x_L}{x_2 - x_1} = \frac{A_2 - A_L}{A_2 - A_1} \quad (3.41)$$

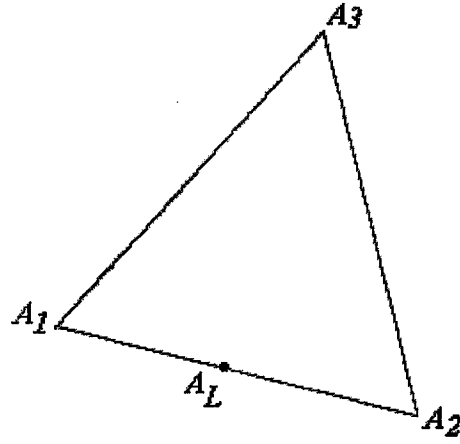
diye yazılabilir. Bu ifadede x_L dışındaki tüm değerler bilindiğine göre ;

$$x_L = \frac{(A_1 - A_2) \cdot (x_1 - x_2) - (A_1 - A_2) \cdot x_1}{A_2 - A_1} \quad (3.42)$$

olarak bulunur.

$$y_L = \frac{(A_1 - A_2) \cdot (y_1 - y_2) - (A_1 - A_2) \cdot y_1}{A_2 - A_1} \quad (3.43)$$

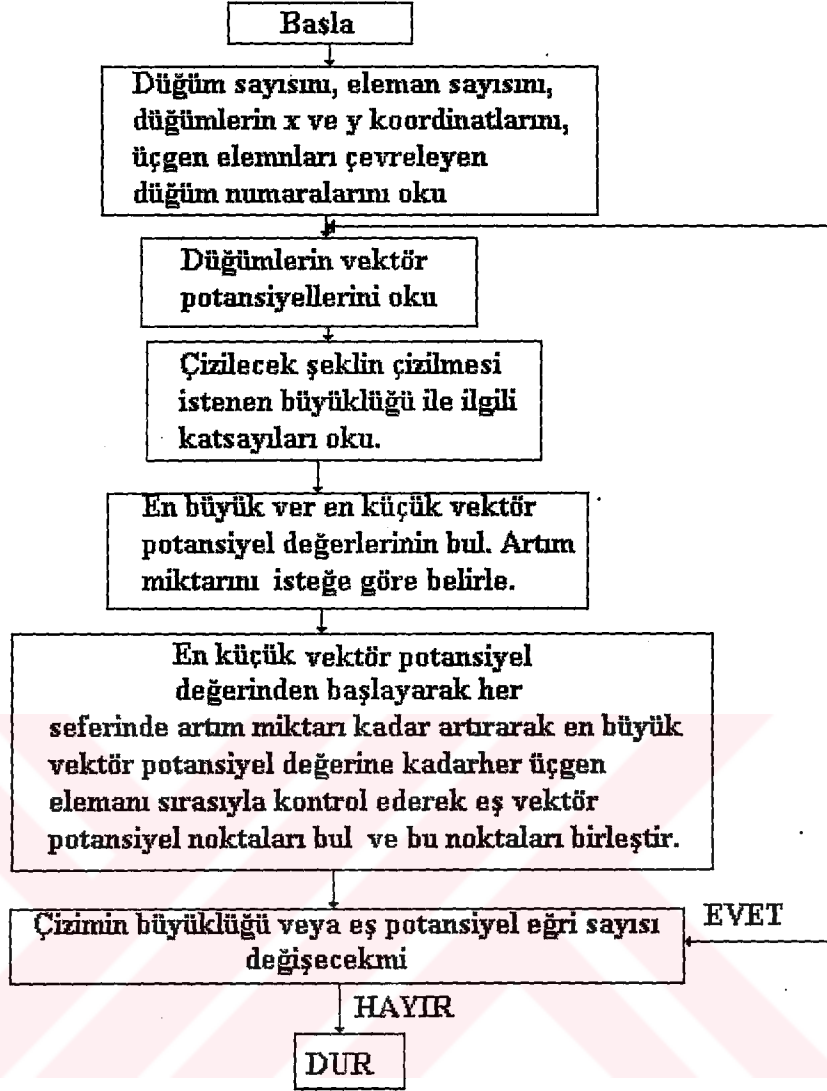
bulunur. (X_L, Y_L) koordinatının vektör potansiyel değeri, haritasının çizimi yapılan vektör potansiyel değerine eşittir.



Şekil 3.3 A_L noktasının vektör potansiyeli.

Eğer bir üçgenin bir kenarında haritası çizilen vektör potansiyel değerine eşit bir nota var ise mutlaka bu üçgenin diğer iki kenarından birinin üzerinde de değeri haritası çizilen vektör potansiyeli eşit bir nokta vardır. Bulunan bu ikinci nokta ile birinci noktayı birleştiren doğru eş vektör potansiyel doğrusudur.

Artım değerlerinin her biri için her seferinde bütün üçgenlerin düğüm vektör potansiyel değerleri kontrol edilerek çizilen eş potansiyel doğrularıyla tüm çözüm bölgesinin eş vektör potansiyel eğrileri elde edilir.



Şekil 3.4 Eş potansiyel eğrilerin çizim akış diyagramı

4. HAREKETLİ SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ

Kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde uyarlamalı çözüm ağı kullanımı , mevcut sayısal çözüm yöntemlerini geliştirmek için kullanılan bir teknik olmuştur. Fazla miktarda çözüm değişkeni özelliği gösteren problemlerde, düzensiz bir çözüm ağı seçimi sadece doğruluğu sağlamakla kalmaz aynı zamanda çalışılan bölgelerde yoğunlaşan çözüm ağı noktalarını kullanan yöntemlerin verimliliğini de geliştirir. Bu yaklaşımın avantajları şunlardır[15].

Çözüm ağındaki çalışılan bölgelerin her biri çözümde çok fazla değişken içeriyorsa, çözüm ağındaki küçük bir çözünürlük sayısal çözümde güvenilir ve doğru sonuçlar verebilmektedir. Bununla birlikte; bütün ızgara üzerinde bu gereksinimi karşılayabilmek özellikle çok boyutlu durumda zor bir işlemdir. Verimli bir sonuç elde edebilmek için düğümler üzerinde yoğunlaşılması istenir ve böylece ızgaranın bu kısımlarındaki hesapsal çabalar çok büyük dikkat gerektirir. Doğru sonuçlar elde edebilmek için uygun çözüm ağı çözünürlüğü sağlanmalıdır [16].

Problem için uyarlamalı çözüm ağı kullanımına karar verildiği zaman uygun bir ızgara nasıl seçilir? Sorusunun cevabının bilinmesi gerekir. Sabit ve hareketli ızgaralarla ilgili literatürde birçok teknik vardır. Zaman bağımlı kısmi diferansiyel eşitliklerin çözümü için bir hareketli çözüm ağı algoritması göz önüne alındığı zaman, ızgara hareketini destekleyen tekniklere literatürde sıkça rastlanır. Bu teknikler yardımıyla nümerik çözüm için uygun uyarlamalı ızgaralar üretilir. Bu tekniklerden birisi eşit dağılım ilkesidir. Yani çözüm geometrisinin veya hatanın bazı ölçülerinin her bir alt aralıkları üzerinde eşitlendiği çözüm ağı noktalarını yerleştirmeyi içerir. Diğer bir teknik ise; fonksiyonel minimizasyon; çözüm ağını varyasyonel bir prensipten üretir. Bu teknikler hareketli çözüm ağı yönteminde kullanılabilir. Özellikle çözüm ağının zaman boyunca hareket ettirilerek çözülen problemler için bu teknikler kullanılır . Bu noktada r-düzeltilme tekniğini statik ve dinamik yöntemler olmak üzere ikiye ayırılır [17]:

Statik yöntemler: Yaklaşık çözüm başlangıçta verilen bir çözüm ağı üzerinde belirlenir. Hesaplama boyunca yeni bir çözüm ağı (aynı düğüm sayısına sahip olsun olmasın) mevcut ızgara üretim teknikleri kullanılarak üretilir. Çözüm, daha sonra yeni çözüm ağı üzerine interpolate edilir (ara değeri bulunur) . Böylece yeniden dağılım veya ızgara noktalarının eklenmesi ve interpolasyon çözüm işleminde sabit bir zamanda gerçekleşir. Başarılı olmasına rağmen, bu yöntemler fazla miktarda hesapsal yük gerektirir. Çünkü çözüm ağındaki bu değişimler programın kodlarının tekrar yazılmasını gerektirir.

Dinamik yöntemler: Hareketli çözüm ağı yöntemleri olarak da bilinir; çözüm ağı eşitliğine

düğüm hızları eklenir. Düğümlerin çözümün zamana bağlı olarak hızla değiştiği bölgelerde yoğunlaştırılması sağlanır. Genellikle bu yöntemlerde ızgara içindeki düğümlerin sayısı aynı kalır. Bu tip hareketli çözüm ağı yöntemi için iki birleştirilmiş eşitliğin göz önüne alınması gerekir. Bu eşitlikler hareketli çözüm ağı eşitliği (çözüm ağının değişimini kontrol eder) ve problemin orijinal diferansiyel eşitliğidir . Çözüm ağı hiçbir interpolasyon adımına gerek kalmadan sürekli bir şekilde değiştirilir. Çözüm ağı eşitliği ve orijinal diferansiyel eşitlik genellikle eş zamanlı olarak çözülür [18]. Genelde zaman boyunca bir ızgarayı hareket ettirmenin arkasındaki ilkeler aslında sabit bir çözüm ağı üretimi için kullanılan tekniklerle aynıdır. Örnek olarak statik bir yöntem, eş-dağılım ilkesi yardımıyla ızgara noktalarını yeniden oluşturabilmektedir. Aslında birçok dinamik yöntemler varolan ızgara üretim tekniği içine zaman türevi katmak suretiyle elde edilir [19].

4.1. Bir Boyutlu Durumda Hareketli Sonlu Elemanlar Yöntemi

4.1.1 Giriş

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için birçok sayısal yöntem geliştirilmiştir ve bu yöntemlerin her birinin kendine göre avantajları ve dezavantajları vardır. Bu nümerik yöntemler problem tipi hakkındaki bilgiler kullanılarak seçilir . Özellikle , hareketli cepheler ve darbeler içeren kütlelerin korunumu kanunu gibi lineer olmayan problemlerin çözümünde bu nümerik yöntemler kullanılır. Bu tip problemlerde bazı bölgelerdeki çözüm yüksek çözünürlüğe sahip olabilmekte; bazı bölgelerde ise daha az çözünürlüğe sahip olmaktadır. İhtiyaç duyulan bu çözünürlük düğüm sayılarının artırılması veya uyarlamalı yöntemler kullanılarak elde edilebilir. Burada kullanılan adaptif (uyarlamalı) yöntem ızgaranın çözümle hareket ettiği yerde tanımlanmıştır. Böylece çözümün hızla değiştiği bölgeler birçok düğüme sahip olur. Eğer çok sayıda düzensiz duruma sahip düğümler adaptif yöntem yerine kullanılırsa ızgara zor ve çok fazla gereksiz düğüme sahip olur. Korunum eşitliğinin çözümü genellikle hareketli cepheler içerdiği için, adaptif yöntem kullanmak hem esneklik hem de hesaplama açısından daha uygundur [20].

4.1.2 Global Hareketli Sonlu Elemanlar

1981’de (Miller), hareketli cephe adımlarını içeren çözümlere sahip problemleri çözmek için hareketli sonlu elemanlar yöntemini tanıtmıştır . Bu arada , çözümle birlikte otomatik olarak ızgara hareketine izin verilmiştir ve böylece yüksek çözünürlüğe sahip ideal bölgeler elde edilmiştir [21] . Bu fikir , bir boyutlu durumda t zamanını ayırt edilebilen bir değişken gibi açıklanacaktır. Aşağıdaki eşitlik göz önüne alınırsa:

$$u_t - L(u) = 0 \quad (4.1)$$

$\Omega \in \mathfrak{R}$ bölgesinde $u = u(x, t) \in H^2$, yazılır.

H^2 : ikinci türevleri integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayı

$L = u_x$ ve u_{xx} durum türevlerini içeren bir diferansiyel operatör

HSE (Hareketli Sonlu Elemanlar) yöntemi parabolik problemlerdeki etkileri çözmek için orijinal olarak geliştirilmiştir. Bu sebepten dolayı HSE yönteminin tanımlanması bu terimleri de içermektedir.

$U(t)$ 4.1 eşitliğinin yaklaşık çözümü olsun ve lineer temel fonksiyonlarla $\alpha_i (i=1, \dots, N)$

H^2 uzayına ait sonlu boyutlu alt uzayda tanımlı olsun.

Not: Yaklaşık çözüm $U(t)$ farklı lineer uzayda da seçilebilmelidir ve temel fonksiyonlar α_i quadratik, kübik veya farklı fonksiyonlar seçilebilir. Diğer tip temel fonksiyonları kullanan HSE tanımlamaları da vardır.

$U(t)$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$U(t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) \alpha_j(x, s(t)) \quad (4.2)$$

$\alpha_j : (j=1, 2, \dots, N) : \text{Düğüm yoğunlukları}, s_1 < \dots < s_j < \dots < s_N, s(t) = (s_1, \dots, s_N)$

Sonuç değerler çözümün bulunabileceği şekilde sınır şartlarına uygun olmalıdır. Burada Dirichlet sınır şartı uygulanır. (4.2) eşitliğinin t ' ye göre türevi alınırsa (4.3) eşitliği elde edilir.

$$U_t = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j(t) \alpha_j(x, s(t)) + \dot{s}_j(t) \beta_j(x, a, s(t)) \quad (4.3)$$

U_t $2N$ tane bilinmeyene sahiptir. Bu bilinmeyenler $\dot{a}_j$ ve $\dot{s}_j$ ($j=1, \dots, N$) Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanan temel fonksiyonlardır[22].

$$a) \alpha_j = \frac{\partial U}{\partial a_j}, \quad b) \beta_j = \frac{\partial U}{\partial s_j} \quad (4.4)$$

4.4 eşitliği b kısmındaki β_j aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\beta_j = -m_j \alpha_j \quad (4.5)$$

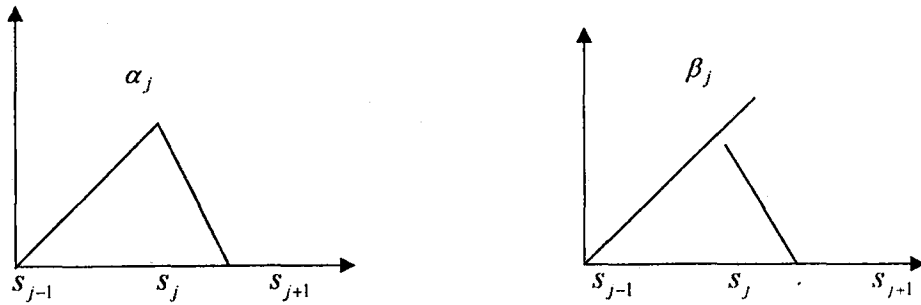
$$m_j = \begin{cases} m_{j-\frac{1}{2}} & s_{j-1} < x < s_j \\ m_{j+\frac{1}{2}} & s_j < x < s_{j+1} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$m_{j-\frac{1}{2}} = \frac{a_j - a_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \quad (4.7)$$

Burada göz önüne aldığımız temel fonksiyonlar parça parça lineer fonksiyonlardır ve α ve β genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır[23].

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{x - s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} & s_{j-1} \leq x \leq s_j \\ \frac{s_{j+1} - x}{s_{j+1} - s_j} & s_j \leq x \leq s_{j+1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\beta_j = \begin{cases} -m_{j-\frac{1}{2}} \alpha_j & s_{j-1} < x < s_j \\ -m_{j+\frac{1}{2}} \alpha_j & s_j < x < s_{j+1} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.9)$$



Şekil 4.1 α ve β temel fonksiyonlar [24]

Miller'in yönteminde a ve s için çözüm eşitlikleri $a = (a_1, \dots, a_N)^T$, $s = (s_1, \dots, s_N)^T$

$U_t - L(u)$ nun L_2 kalanının minimizasyonu yardımıyla elde edilir. Burada (Miller 1981)) düğümün çok yakın olmasını engellemek için penalty fonksiyonları eklemiştir . Yaygın olarak kullanılan ağırlaştırılmış L_2 aşağıdaki gibi tanımlanır[25]:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)W(x)dx \quad (4.10)$$

f, g Ω bölgesinde integrali alınabilir fonksiyonlar ve $W(x)$ pozitif ağırlık fonksiyonudur. L_2 aşağıdaki gibi kullanılsın.

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle \quad (4.11)$$

bu notasyon bu yazım boyunca kullanılacaktır. $\dot{\alpha}_j$ ve $\dot{s}_j$ 4.12 deki eşitliğin minimizasyonu yardımıyla elde edilir.

$$\|U_t - L(U)\|^2 \quad (4.12)$$

$\dot{\alpha}_j$ ve $\dot{s}_j$ göre türevini alırsak 4.13 eşitliğini elde ederiz.

$$\left. \begin{aligned} \langle \alpha_j, U_t - L(U) \rangle &= 0 \\ \langle \beta_j, U_t - L(U) \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, N \quad (4.13)$$

$\langle \dots, \rangle$ 4.10 eşitliğiyle tanımlanmıştır. 4.3 eşitliğinden 4.13 eşitliğine kadar elde edilen eşitlikler 4.14 teki adi diferansiyel denklem sistemine yol açar[26].

$$A(y)\dot{y} = g(y) \quad (4.14)$$

$$\dot{y} = (\dots; \dot{\alpha}_{j-1}, \dot{s}_{j-1}; \dot{\alpha}_j, \dot{s}_j; \dots)^T \quad (4.15)$$

$$A = \{A_{ij}\}, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle & \langle \alpha_i, \beta_j \rangle \\ \langle \beta_i, \alpha_j \rangle & \langle \beta_i, \beta_j \rangle \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$g = \{g_i\}, \quad g_i = \begin{pmatrix} \langle \alpha_i, L(U) \rangle \\ \langle \beta_i, L(U) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

α, β iki aralıkta bulunuyor. A simetrik, 2×2 lik pozitif yarı tanımlı bir matristir. A matrisinin yarı ayırık pozitif bir matris olduğunu 4.22 eşitliğinden ortaya çıkan $\|U_i\|^2$ minimizasyon teriminden görülür[27].

4.1.3 Bölgesel HSE

Bölgesel HSE yöntemi ilk olarak Baines(1985) tarafından açıklanmıştır ve (4.3) eşitliğindeki U_i nin bölgesel uygun eleman temel fonksiyonlarıyla yazılabileceğini göstermiştir. Bu düğümler yerine parça parça lineer sürekli olmayan temel fonksiyon durumundaki elemanlar üzerinde bir toplam gibi U_i (4.3) yazılır.

$$\sum_{k=1}^N (w_k^{(1)} \phi_k^{(1)} + w_k^{(2)} \phi_k^{(2)}) \quad (4.18)$$

$$U_i = \sum_{j=0}^N (\dot{\alpha}_j \alpha_j + \dot{s}_j \beta_j) \quad (4.19)$$

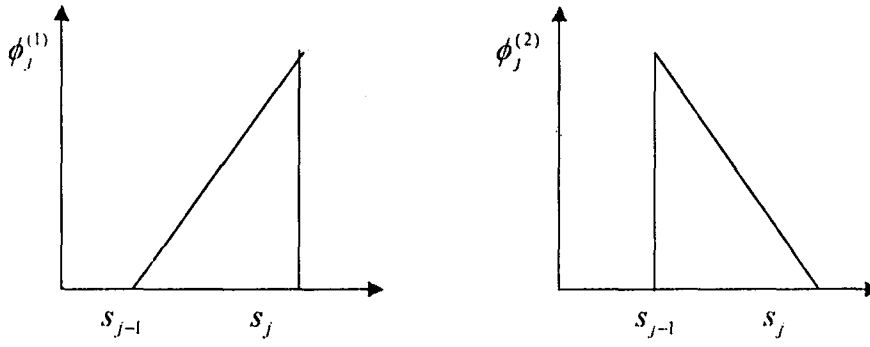
$\phi_k^{(i)}$:Temel fonksiyonlar, $w_k^{(i)}$: $\dot{\alpha}_j, \dot{s}_j$ ile ilişkili katsayılar, j düğüm numarası ve k bir elemandır.

Temel eleman fonksiyonları $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}$ şekil 4.2 de gösterilmiştir ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır[28]:

$$\phi_k^{(1)} = \begin{cases} \frac{x - s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} & s_{j-1} \leq x \leq s_j \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\phi_k^{(2)} = \begin{cases} \frac{s_j - x}{s_j - s_{j-1}} & s_{j-1} \leq x \leq s_j \end{cases} \quad (4.21)$$

S_ϕ : α_j, β_j temel fonksiyonları yardımıyla belirlenmiş $S_{\alpha\beta}$ uzayıyla aynı gibi bir boyutlu durumda gösterilebilen $\phi_k^{(i)}$ temel fonksiyonlarıyla belirlenmiş uzay



Şekil 4.2 Bölgesel Temel Fonksiyonlar

Miller tarafından önerilen HSE yönteminde, residual $\|U_I - L(U)\|^2$ minimize edilir. Bu $w_k^{(1)}, w_k^{(2)}$ üzerinde k. eleman için minimize edilir [29].

$$\langle \phi_k^{(1)}, U_I - L(U) \rangle = 0 \quad (4.22)$$

$$\langle \phi_k^{(2)}, U_I - L(U) \rangle = 0 \quad (4.23)$$

4.19 ile verilen U_I ile 4.22, 4.23 sistemi birleştirilir ve N sistem için her biri 2x2 yazılabilir.

$$C_k w_k = b_k \quad k=1, \dots, N \quad (4.24)$$

$$w_k = \begin{pmatrix} w_k^{(1)} \\ w_k^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$C_k = \begin{pmatrix} \langle \phi_k^{(1)}, \phi_k^{(1)} \rangle & \langle \phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)} \rangle \\ \langle \phi_k^{(2)}, \phi_k^{(1)} \rangle & \langle \phi_k^{(2)}, \phi_k^{(2)} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$b_k = \begin{pmatrix} \langle \phi_k^{(1)}, L(U) \rangle \\ \langle \phi_k^{(2)}, L(U) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Denklem (4.8), (4.9) ve (4.20), (4.21)'den aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla görülmektedir.

$$\alpha_j = \phi_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} + \phi_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} \quad (4.28)$$

$$\beta_j = -m_{j-\frac{1}{2}} \phi_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} - m_{j+\frac{1}{2}} \phi_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} \quad (4.29)$$

$\phi_{j-\frac{1}{2}}^{(1)}, \phi_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} : j-1, j$ eleman ve notasyonda k .elemandaki ϕ temel fonksiyonlar

Denlem (4.28) , (4.29) ve (4.19)'dan aşağıdaki ilişkiler çıkarılır:

$$\dot{a}_j - m_{j-\frac{1}{2}} \dot{s}_j = w_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} = w_k^{(2)} \quad (4.30)$$

$$\dot{a}_j - m_{j+\frac{1}{2}} \dot{s}_j = w_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} = w_{k+1}^{(1)} \quad (4.31)$$

Bütün j düğümleri için elde edilir. (4.30) ve (4.31) eşitlikleri 2x2 sistemi şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M_j \dot{y}_j = w_j \quad (4.32)$$

$$\dot{y}_j = \begin{pmatrix} \dot{a}_j \\ \dot{s}_j \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & -m_{j-\frac{1}{2}} \\ 1 & -m_{j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$w_j = \begin{pmatrix} w_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} \\ w_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Bir boyutlu durumda Miller'in yöntemi ve bölgesel yöntem aynı uzayda aynı rezidüyü (kalan) minimize eder, türetilen HSE eşitlikleri benzerlik gösterir. Bu yüzden aşağıdakilerin yazılmasıyla;

$$C = \begin{pmatrix} \dots & & 0 \\ & C_k & \\ 0 & & \dots \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \dots & & 0 \\ & M_k & \\ 0 & & \dots \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Miller'in global HSE matrisinin (4.14) aşağıdaki gibi ayrıştırılmasına neden olur [30].

$$A = M^T C M \quad (4.37)$$

C, M : 2×2 diagonal matrislerdir.

4.1.4 HSE 'in Varyasyonel Türetimi

Miller tarafından önerilen standart HSE yöntemi varyasyonel yaklaşım kullanılarak türetilmektedir. 1983'de sonlu elemanlar yöntemiyle ilişkili zaman bağımlı bir koordinat dönüşümü göz önüne alınmıştır. Bu yaklaşım için kısmi diferansiyel denklem tipinde aşağıdaki eşitlik göz önüne alınacaktır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L(U) = 0 \quad (4.38)$$

$x \in \Omega, t \in (0, T)$ T : En son zaman

x, t ve yeni bağımsız değişkenler ξ, τ arasındaki koordinat dönüşümü aşağıdaki gibi yazılır:

$$x = \hat{x}(\xi, \tau) \quad t = \tau \quad (4.39)$$

Jakobiyen (4.40) eşitliğindeki gibi tanımlanır [31].

$$J = \frac{\partial(x, t)}{\partial(\xi, \tau)} \quad (4.40)$$

$$|J| > 0 \quad \forall x, t \quad (4.41)$$

Dönüşüm (4.41) eşitliğini sağlamak için sınırlandırılır. Bu Miller 'in yönteminde penalty fonksiyon uygulamasına benzer bir etki gösterir. (4.39) a benzer şekilde, u x ve t ye bağlı olduğu sürece x, t ve ξ, τ arasında bir koordinat dönüşümüne sahiptir. u aşağıdaki gibi olur[32]:

$$u = \hat{u}(\xi, \tau), \quad t = \tau \quad (4.42)$$

zincir kuralı yardımıyla u_t aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_t = \hat{u}_\tau \tau_t + \hat{u}_\xi \xi_t \quad (4.43)$$

Ters dönüşüm 4.44 eşitliğindeki gibi gösterilir.

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \tau_x & \tau_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x_\tau \\ x_\xi & x_\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \tau} \right) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tau} \quad (4.46)$$

Bu (4.38) eşitliğini aşağıdaki yapıya çevirir.

$$\hat{u} - \hat{x} u_x - L(u) = 0 \quad (4.47)$$

$\hat{u} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau}$, R x ve u için deneme fonksiyonu olursa denklem (4.47) aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$R = \hat{u} - \hat{x} u_x - L(u) \quad (4.48)$$

Varyasyonel problem şimdi aşağıdaki gibi verilir:

$$I = \int_{\Omega} R^2 dx \quad (4.49)$$

Bütün uygun u çözümleri ve x dönüşümleri için minimize edilir. Eğer varyasyonlar

$v = \delta \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} \right)$, $z = \delta \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \tau} \right)$ şeklinde verilirse, (4.49) eşitliği bütün test fonksiyonları (v, z) aşağıdaki

eşitliklerin elde edilmesini sağlar [33].

$$\int_{\Omega} (\ddot{u} - \dot{x}u_x - Lu)v dx = 0 \quad (4.50)$$

$$\int_{\Omega} (\ddot{u} - \dot{x}u_x - Lu)z \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \quad (4.51)$$

Bütün bu uygun dönüşümler ters çevrilebilir, (x,u) başlangıç ve sınır şartlarını sağlar. x,u test fonksiyonları x_h, u_h gibi ayrık yaklaşımlar olarak yazılarak bu eşitliklerin uygun versiyonu elde edilir [34].

$$x_h(\xi, t) = \sum_{j=1}^N x_j(\tau) X_j(\xi) \quad (4.52)$$

$$u_h(\xi, t) = \sum_{i=1}^N u_i(\tau) \phi_i(\xi) \quad (4.53)$$

$v_h = \phi_i$ $z_h = X_i$ ($i=1, \dots, N$). Eğer ϕ_i ve X_i , α_i ve β_i gibi temel fonksiyon olarak alınırsa; Miller tarafından önerilen (4.13) eşitliği elde edilir[35]. Örnek olarak ($|J| > 0$) olacak şekilde kısıtlamalar yapılırsa I , aşağıdaki yapıya dönüşür.

$$I_c = I + P_e \quad (4.54)$$

P_e : Penalty(ceza) terimidir ve aşağıdaki gibi belirlenmiştir[36].

$$P_e = \int_a^b \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial \xi \partial \tau} - s \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi} \right) dx \quad (4.55)$$

ε : Penalty(ceza) fonksiyonunun şiddeti ve s bir parametredir. Koordinat dönüşümünün J Jakobiyeninin J_{min} değerinin minimum değeri açıkça belirtilmiştir ve $\varepsilon(x) = w \left(\frac{J - J_{min}}{J_{min}} \right)^2$ seçilir. w : rezidüal ve penalty fonksiyonlarının ilişki boyutunu düzenlemek için seçilen bir parametredir.

4.1.5 Eğimi Ağırlaştırılmış HSE

Miller yakın şoklarla düğümlerin kontrol probleminin üstesinden gelmek için EAHSE i tanıtmıştır [37] . Her nerede hızlı bir hareket varsa; u nun zaman türevi L_2 sınırları içinde olmayan delta fonksiyonu olarak bulunur. Bu belli tipteki problemler için, rezidü minimizasyonda kullanılan standart L_2 normu uygun değildir. Temel HSE yöntemi önceki gibi kalabilir; fakat yeni bir yapı adım cephe problemlerinin üstesinden gelmek için tanıtılmıştır. L_2 yapısı aşağıdaki gibi belirtilir [38].

$$\| \cdot \|_N^2 = \int (\cdot)_N^2 ds \quad (4.56)$$

$$= \int (\cdot)^2 W(m) dx \quad (4.57)$$

$W(m) = (1 + m^2)^{-\frac{1}{2}}$, $m = |u_x|$. Yeni yapının bir diğer kullanımı, x 'e göre rezidünün integralini almak yerine, rezidü bileşenlerinin eğri boyunca integralini almaktır. Bu demektir ki; elde edilen çözümler bu yöntem kullanılarak bulunabilmektedir. Böylece birbirine uygun düğüm problemleri de ortadan kalkar. Global ve bölgesel HSE yönteminde meydana gelen tekillik (bir elemanın sıfıra gitme eğilimi) ağırlık fonksiyonlarının kullanımına bağlı olarak çözümün aç u uzunluğu boyunca ortaya çıkan minimizasyonu içine integre edildiği için bu yöntemde meydana gelmez. 4.1.2 bölümünde verilen u için temel ve uygun fonksiyonlar kullanarak eşitlikler aşağıdaki hali alır [39].

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_j, U_j - L(U))_N &= 0 \\ (\beta_j, U_j - L(U))_N &= 0 \end{aligned} \right\} \quad j=1, \dots, N \quad (4.58)$$

4.56 ile ilişkili içerideki elemanlar bu adi diferansiyel denklem sistemine bir çözüm verir.

$$A(y) \dot{y} = g(y) \quad (4.59)$$

$$\dot{y} = (\dots; \dot{a}_{j-1}, \dot{s}_{j-1}; \dot{a}_j, \dot{s}_j; \dots)^T \quad (4.60)$$

$$A = \{A_{ij}\}, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} (\alpha_i, \alpha_j)_N & (\alpha_i, \beta_j)_N \\ (\beta_i, \alpha_j)_N & (\beta_i, \beta_j)_N \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

$$g = \{g_i\}, \quad g_i = \begin{pmatrix} (\alpha_i, L(U))_N \\ (\beta_i, L(U))_N \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

A : 2×2 blok tridiagonal ve pozitif yarı ayırık simetrik bir matristir .

4.1.6 Karakteristiklere Lagrangian Yaklaşımı

Tek türevli terimleri içeren $L(u)$ operatörü için: karakteristik yöntemle uygunluk gösterir [40]. Denklem 4.13'e alternatif fakat eşit bir yaklaşımda HSE sistemi (Mueller & Carey(1985)) de tekrar türetilmiştir [41].

$$u_t + H(x, u, u_x) = 0 \quad (4.63)$$

koordinat dönüşümü x, t ve yeni bağımsız değişkenler ξ, τ arasında belirlenir.

$$x = \hat{x}(\xi, \tau), \quad t = \tau, \quad u(x, t) = \hat{u}(\xi, \tau) \quad (4.64)$$

Yeni değişkenleri kullanarak (4.63) eşitliği Lagrangian yapısında aşağıdaki gibi tekrar yazılır[42].

$$\hat{u} - u_x \hat{x} + H(x, \hat{u}, u_x) = 0 \quad (4.65)$$

Uygun deneme fonksiyonlarına ait $\hat{u}$ ve $\hat{x}$ i $\hat{U}$ ve $\hat{X}$ ile sınırlandırırsak , denklem (4.65) aşağıdaki hali alır.

$$\hat{U} - U_x \hat{X} + H(X, \hat{U}, U_x) = R \quad (4.66)$$

R : residual (kalan) dır. Bu bölüm 4.1.2 de anlatılan global HSE yöntemiyle aynı notasyonla tekrar yazılabilir. $U=a$, $X=s$ ve $U_x=m$ ile 4.66 eşitliği $U\hat{a} - m\hat{s} - H(X, \hat{U}, U_x) = R$ olarak yazılabilir. Deneme fonksiyonunu parça parça lineer olarak alınır. R sıfıra eşit ve $H(U)$ parça parça lineer süreksiz fonksiyonlar için geçerli olması durumunda denklem 4.66 aşağıdaki hali alır:

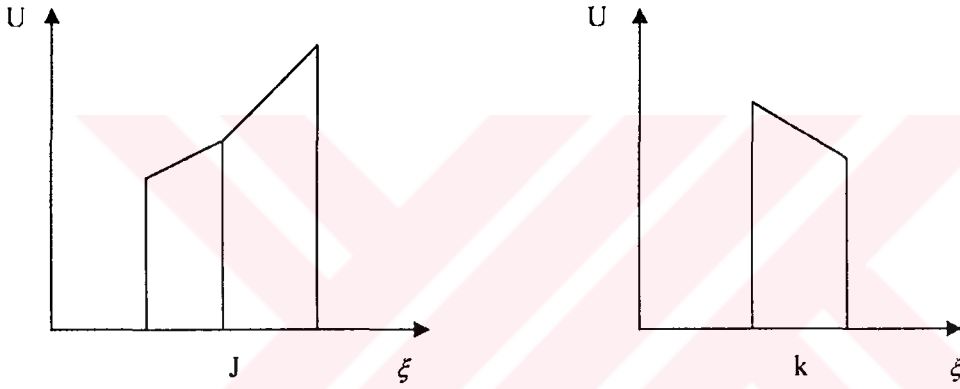
$$\dot{a} - m\dot{s} + H(s, a, m) = 0 \quad (4.67)$$

j düğümü içinden (4.67) eşitliğinin her bir terimindeki sıçrama göz önüne alınır. $[\cdot]_j$ notasyonunu kullanarak (şekil 4.3 de görüldüğü gibi) elde edilir.

$$0 - [m]_j \dot{s}_j + [H(s, a, m)]_j = 0 \quad (4.68)$$

$[m]_j \neq 0$ şartıyla 4.68 aşağıdaki eşitliğe dönüşür.

$$\dot{s}_j = \frac{[H(s, a, m)]_j}{[m]_j} \quad (4.69)$$



Şekil.4.3 Düğümler ve Elemanlar Arasından Sıçramalar

Denklem (4.67) tekrar göz önüne alınır ve bu $m \neq 0$ boyunca aşağıdaki eşitliğe ayrılır:

$$\frac{\dot{a}}{m} - \dot{s} + \frac{H}{m} = 0 \quad (4.70)$$

daha önce olduğu gibi j düğümü içinden sıçramaları göz önüne alınır.

$$[m^{-1}]_j \dot{a}_j - 0 + [m^{-1}H]_j = 0 \quad (4.71)$$

Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\dot{a}_j = - \frac{[m^{-1}H]_j}{[m^{-1}]_j} \quad (4.72)$$

$[m]_j \neq 0$ olduğu zaman $[m]_j^{-1} \neq 0$ dir. (4.69 ve 4.72) eşitlikleri bu durumda 4.32 eşitliğinin çözümüne uygundur. Tekrar sıçramalar göz önüne alındığında,

$$\dot{m}_k = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{[a]_k}{[s]_k} \right) = \frac{([\dot{a}]_k - m[\dot{s}]_k)}{[s]_k} \quad (4.73)$$

denklem (4.67) ' i kullanarak, (4.73) eşitliği aşağıdaki hali alır.

$$\dot{m}_k = - \frac{[H]_k}{[s]_k} \quad (4.74)$$

4.69 , 4.72 eşitliklerini $[s]_k \rightarrow 0$ ve düğüm sayılarını $\rightarrow \infty$ olarak sınırlandırılırsa; (4.75) eşitliği elde edilir.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial u_x}, \quad \dot{u} = -H + u_x \frac{\partial H}{\partial u_x} \quad (4.75)$$

(4.75) eşitliğinde $[s]_j \rightarrow 0$ kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\dot{m} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.76)$$

4.2 İki Boyutlu Durumda Hareketli Sonlu Elemanlar Yöntemi

4.2.1 Giriş

Bu bölümde iki ve daha yüksek boyutlarda hareketli sonlu elemanlar yöntemi incelenmiştir . Bu yöntemin seçilmesinin sebebi , bir boyutlu durumda açıklanan yöntemleri geliştirmektir. Bunun için çözümün elde edilmesini sağlayan adaptif yöntemler üzerinde durulmuştur . Standart hareketli sonlu elemanlar yöntemi yüksek boyutlu durumlara genelleştirilebilir ve bir boyutlu yapı ve yöntemlere uygulanabilir . Bununla birlikte yüksek boyutlu durumlarda global ve Bölgesel hareketli sonlu eleman yöntemleri açıklanırken oluşturulan matris yapılarında farklılık gösterir, Bundan başka bir boyutlu durumda düğüm yığılmasına sebebiyet veren basit problemler iki boyutlu yapıda üçgensel bir yapıya dönüşür ve

paralellik kompleks yapıda artar.

İlk olarak iki ve daha yüksek boyutlu durumda hareketli sonlu eleman yönteminin temel tiplerini ve bunun bir boyutla arasındaki farkları gösterilecektir . Bir boyutlu durumda HSE (hareketli sonlu elemanlar yöntemi) yaklaşımında birçok değişkenler mevcuttur. Bunlar Ayırma HSE , EAHSE (eğimi ağırlaştırılmış sonlu elemanlar) , Global HSE ve Bölgesel HSE yöntemleri ile beraber iki ve daha yüksek boyutlara genişletilmiştir [43].

4.2.2 Global HSE

Bir boyutlu Global HSE yöntemi doğrudan iki veya daha yüksek boyutlara genelleştirilebilmektedir ve yapılan uygulamada yapılar ve yöntemler benzerlik gösterir. u fonksiyonunun sürekli parça parça doğrusal yaklaşımı U , aşağıdaki gibi yaklaşık bir yapıda olsun ve kullanılan elemanlar iki boyutlu durumda üçgen , üç boyutlu durumda tetrahedral elemanlar olsun.

$$U = \sum_{j=1}^N a_j(t) \alpha_j(\mathbf{r}, s(t)) \quad (4.77)$$

($j=1,2,...,N$) düğüm genlikleri ve $\alpha_j(\mathbf{r}, s(t))$: temel fonksiyonlardır. Burada $\mathbf{r}=(x_1,...,x_n)$ bir noktanın pozisyon vektörü, N : düğüm sayısı ve $\mathbf{s}=(s_1,...,s_N)$ olan düğüm pozisyon vektörleri ve bu vektörlerin her bir elemanı $s_j=(X_{1j},...,Y_{nj})$ gibi koordinat yapısında gösterilir. İki boyutlu durumda $\mathbf{r}=(x,y)$ ve $\mathbf{s}$ 'nin her bir elemanı $s_j=(X_j, Y_j)$ dir. α_j j düğümünde 1 ve etrafındaki düğümlerde 0 değerini alan piramitsel parça parça doğrusal sonlu eleman temel fonksiyonlarıdır. 4.77 eşitliğinin t ye göre türevini alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$U_t = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j(t) \frac{\partial U}{\partial a_j} + \dot{s}_j(t) \nabla_{s_j} U \quad (4.78)$$

İki boyutlu durumda 4.79 deki eşitlik elde edilir:

$$U_t = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j \alpha_j - \dot{X}_j \frac{\partial U}{\partial X} - \dot{Y}_j \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (4.79)$$

Bu eşitlik aşağıdaki gibi kısaltılabilir.

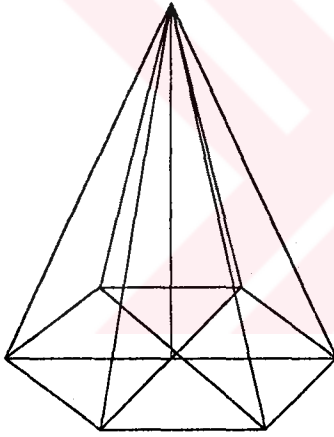
$$U_i = \sum_{j=1}^N (\dot{a}_j \alpha_j + \dot{X}_j \beta_j + \dot{Y}_j \gamma_j) \quad (4.80)$$

β_j ve γ_j aşağıdaki gibi her bir elemanda tanımlanan parça parça doğrusal temel fonksiyonlardır.

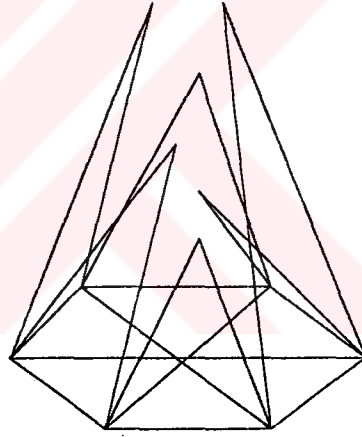
$$\beta_j = -\frac{\partial U}{\partial X} \alpha_j \quad \gamma_j = -\frac{\partial U}{\partial Y} \alpha_j \quad (4.81)$$

NOT: $\frac{\partial U}{\partial X}$ ve $\frac{\partial U}{\partial Y}$ X ve Y yönünde sırasıyla her bir elemanda U nun eğiminin bileşenleridir.

β_j ve γ_j temel fonksiyonları α_j fonksiyonunu destekler; fakat j düğümü boyunca bütün eleman köşelerinde süreksizdir.



α temel fonksiyonu



β veya γ temel fonksiyonu

Şekil.4.4 İki boyutlu durumda temel fonksiyonlar

Bir boyutlu yaklaşıma geri dönersek; rezidü minimizasyonu 4.82 eşitliğindeki gibi yapılır[44].

$$\|U_i - L(U)\|^2 \quad (4.82)$$

N tane düğümü kullanarak n boyutlu durumda $\dot{a}_j, \dot{s}_{jm}$ ($m=1, \dots, n$ $j=1, \dots, N$) göre yapılır ve $N(n+1)$ eşitlik elde edilir.

$$\langle U_i - L(U), \alpha_j \rangle = 0 \quad (4.83)$$

$$\langle U_i - L(U), \beta_{jm} \rangle = 0 \quad (4.84)$$

β_{jm} : n tane parça oarça doğrusal süreksiz temel fonksiyonlar ve $\beta_{jm} = -\frac{\partial U}{\partial x_m} \alpha_j$ ile gösterilir.

İki boyutlu durumda 4.82 eşitliğini α_j, X_j, Y_j göre minimizasyonunundan sonra, $3N$ tane aşağıdaki eşitlikler elde edilir[45].

$$\left. \begin{aligned} \langle U_i - L(U), \alpha_j \rangle &= 0 \\ \langle U_i - L(U), \beta_j \rangle &= 0 \\ \langle U_i - L(U), \gamma_j \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad j=1, \dots, N \quad (4.85)$$

Denklem (4.83) , (4.84) veya (4.85) eşitlik grupları denklem (4.86) daki gibi yeniden yazılabilir.

$$A(y)\dot{y} = g(y) \quad (4.86)$$

$y = (a_1, s_1; \dots; a_N, s_N)^T$ n-boyutlu durumda ve iki boyutlu durumda $y = (a_1, X_1, Y_1; \dots; a_N, X_N, Y_N)^T$ dir. Bütün durumlarda A kare simetrik ve elemanlarında temel fonksiyonların içeriklerini içeren bir matristir. A pozitif yarı ayrık bir matristir. Çünkü A matrisi 4.87 eşitliğindeki $\|U_i\|^2$ nin minimizasyonundan ortaya çıkar. n boyutlu durumda (i,j) elemanı $(n+1)^2$ eleman içerir ve aşağıdaki gibi verilir [46].

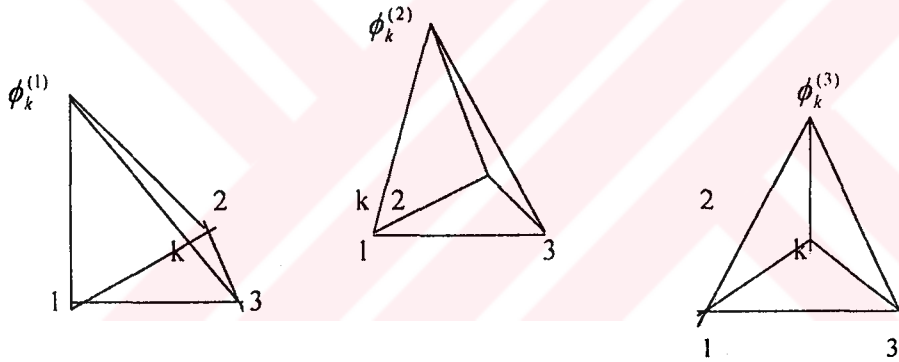
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle & \langle \beta_{i1}, \alpha_j \rangle & \dots & \langle \beta_{in}, \alpha_j \rangle \\ \langle \alpha_i, \beta_{j1} \rangle & \langle \beta_{i1}, \beta_{j1} \rangle & \dots & \langle \beta_{in}, \beta_{j1} \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \alpha_i, \beta_{jn} \rangle & \langle \beta_{in}, \beta_{jn} \rangle & \dots & \langle \beta_{in}, \beta_{jn} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Sağ taraf $g(y) = (g_1, \dots, g_N)^T$ ile verilir ve g_i aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$g_i = \begin{pmatrix} \langle L(U), \alpha_j \rangle \\ \langle L(U), \beta_{j1} \rangle \\ \dots\dots\dots \\ \langle L(U), \beta_{jn} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

4.2.3 Bölgesel Temel Elemanlar

Eleman parça yapısını açıklamadan önce eleman parça temel fonksiyonlarını belirlemek gerekir[32]. $\phi_k^{(\nu)}$ doğrusal eleman parça temel fonksiyonu olsun ve sadece ν köşesinde 1; diğer köşelerde 0 değerine sahip k . eleman olsun. İki boyutlu durumda $\nu=1,2,3$ Bölgesel düğüm numarasına sahip k . eleman; Şekil 4.5’de görüldüğü gibi bölgesel temel fonksiyonlara sahip olsun. Süreksizlik yaklaşımları u ve u_i bu temel fonksiyonlara göre yeniden yazılır ve böylece yöntemin süreksiz bir versiyonu ϕ e göre yazılır. Sonra U ’ nun sürekliliğini elde etmek için sınırlamalara başvurulur.



Şekil 4.5 İki boyutlu durumda bölgesel temel eleman fonksiyonları[47]

U_i yaklaşımı bölgesel temel fonksiyonlar bakımından aşağıdaki gibi tekrar yazılır.

$$U_i = \sum_{k=1}^E \sum_{\nu=1}^{n+1} w_k^{(\nu)}(t) \phi_k^{(\nu)}(r, s(t)) \quad (4.89)$$

E : eleman sayısı, n : boyut, r noktanın pozisyon vektörü ve s düğümlerin pozisyonları

U_i yeni yaklaşımını kullanarak (4.82) eşitliğini minimize edersek; $w_k^{(\nu)}$ ($\nu=1,2,3, k=1,2,\dots,E$) aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\langle \phi_k^{(1)}, U_i - L(U) \rangle = 0 \quad (4.90)$$

$$\langle \phi_k^{(2)}, U_i - L(U) \rangle = 0 \quad (4.91)$$

$$\langle \phi_k^{(3)}, U_i - L(U) \rangle = 0 \quad (4.92)$$

n -boyutlu durumda bu (4.93) eşitliğindeki gibi genelleştirilir.

$$\langle \phi_k^{(i)}, U_i - L(U) \rangle = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (4.93)$$

Bütün durumlarda (4.90) , (4.291) , (4.92) veya (4.93), eşitlikler 4.94 deki sistem gibi yazılabilir.

$$C'_k w_k = b_k \quad (4.94)$$

C'_k : $(n+1) \times (n+1)$ boyutunda kare matrisdir. Eğer temel fonksiyonlar w nın uygun bir şekilde seçilirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$w_k = (w_1^{(1)}, \dots, w_1^{(n+1)}; \dots; w_E^{(1)}, \dots, w_E^{(n+1)})^T, b = \{b_k\} \quad (4.95)$$

$$h_k = \begin{pmatrix} \langle \phi_k^{(1)}, L(U) \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle \phi_k^{(n+1)}, L(U) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

$L(U)$ ' ler aynı elemana sahip olmadığı sürece $\phi_k^{(i)}$ ler C' deki sıfır olan elemanlara bölgesel olarak destek verir ve böylece C matrisi blok köşegen bir matris olur. Bu $C = \{C_{ki}\}$ ve $C_k = \{C_{kij}\}$ gibi C matrisini verir.

$$C_{ki} = \begin{pmatrix} \langle \phi_k^{(1)}, \phi_i^{(1)} \rangle & \langle \phi_k^{(2)}, \phi_i^{(1)} \rangle & \dots & \dots & \langle \phi_k^{(n)}, \phi_i^{(1)} \rangle \\ \langle \phi_k^{(1)}, \phi_i^{(2)} \rangle & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_k^{(1)}, \phi_i^{(n+1)} \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle \phi_k^{(n+1)}, \phi_i^{(n-1)} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

İki boyutlu durumda C blok köşegen bir matristir ve elemanları 4.98 eşitliğindeki gibidir.

$$C_k = \frac{\Delta_k}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

Δ_k : k elemanın alanı

Görüldüğü gibi , sınırlamalar uygulanırsa denklem(4.89) ile denklem (4.78) aynıdır.

$$M_j \dot{y}_j = w_j \quad (4.99)$$

M_j : α_j 'nin yazılmasıyla elde edilen dikdörtgensel bir matristir ve $\phi_k^{(\nu)}$ ($\nu = 1, \dots, n+1$)'e göre $\beta_j = (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jn})$ dir. M matrisi düğüm numaraları kullanılarak köşegensel dikdörtgen M_j elemanlarından oluşur.

4.78 eşitliğinden;

$$U_t = \sum_{j=1}^N (\dot{\alpha}_j \alpha_j + \beta_j \dot{s}_j) \quad (4.100)$$

$$= \dot{y}^T \alpha \quad (4.101)$$

yazılır. $\alpha = (\alpha_1, \beta_1^T, \dots, \alpha_N, \beta_N^T)$. β_j temel fonksiyonların tanımlamasından 4.100 eşitliği 4.102 eşitliğine dönüşür.

$$U_t = \sum_{j=1}^N (\dot{\alpha}_j - \nabla U \dot{s}_j) \alpha_j \quad (4.102)$$

Benzer şekilde, (4.89) eşitliğinden (4.103) eşitliği elde edilir.

$$U_i = w^T \phi \quad (4.103)$$

$\phi = \{\phi_k^{(v)}(r, s(t))\}$. Her bir α_j $\phi_k^{(v)}$ ların toplamı olduğu için 4.104 eşitliği yazılabilir.

$$\alpha = M^T \phi \quad (4.104)$$

M: 1 ler, 0 lar ve ∇U lardan oluşan dikdörtgen bir matristir. M_j bloklarıyla oluşan (düğüm numarası kullanarak) blok köşegen bir matristir. $A = \langle \alpha, \alpha \rangle$ ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A = M^T C M \quad (4.105)$$

Bu iki ve daha yüksek boyutlarda kullanılır.

4.2.4 Eğimi Ağırlaştırılmış HSE

EAHSE yöntemi Miller tarafından açıklanmıştır ve yüksek boyutlu durumlara da uygulanabilmiştir [54]. Tekrar $u_i - L(u) = 0$ kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alırsak; u ya aynı yaklaşım yapılır ve U_i aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U_i = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j \alpha_j + \dot{X}_j \beta_j + \dot{Y}_j \gamma_j \quad (4.106)$$

veya (4.107) eşitliğindeki gibi elde edilir.

$$U_i = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j \frac{\partial U}{\partial a_j} + \dot{X}_j \frac{\partial U}{\partial X_i} + \dot{Y}_j \frac{\partial U}{\partial Y_i} \quad (4.107)$$

İki boyutlu durumda (4.108) veya (4.109) eşitliğindeki hali alır.

$$U_i = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j(t) \alpha_j + \sum_{m=1}^N \dot{s}_j(t) \beta_{jm} \quad (4.108)$$

$$U_t = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j(t) \frac{\partial U}{\partial a_j} + \dot{s}_j(t) \cdot \nabla s_j U$$

(4.109)

Miller'e göre temel hareketli sonlu eleman problemi L_2 normu hareketli cepheli problemler için uygun değildir. Yani bütün düğümler eğrinin en dik kısmına doğru hareket eder.

İki boyutlu durumda $\dot{u}(1+u_x^2+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}$ terimi yüzey alanının L_2 fonksiyonu ile sınırlandırılmıştır.

Bu yüzey alanı cephenin dikliğinden bağımsızdır ve böylece bir çok tatmin edici düğüm yerleşmesi üretir. Benzer bir düşünce tatmin edici bir ağırlık fonksiyonunu bulmak için yüksek boyutlu durumlara uygulanabilmektedir. Bunun için minimizasyon işlemi incelenecektir.

$$U_t - L(U) \quad (4.110)$$

eğimi ağırlaştırılmış normu kullanırsak;

$$\| \dot{U} - L(U) \|_N^2 = \int [\dot{U} - L(U)]^2 ds \quad (4.111)$$

$$= \int [\dot{U} - L(U)]^2 w dx dy \quad (4.112)$$

elde edilir . İki boyutlu durumda ağırlaştırılmış fonksiyon $w = (1+u_x^2+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}$ düğümlerin çözümün hızla değiştiği bölgede yoğunlaştırılmasını sağlar. Bu yöntem hareketli sonlu eleman eşitliklerine bir çözüm oluşturur.

$$(U_t - L(U), \alpha_i)_N = 0 \quad (4.113)$$

$$(U_t - L(U), \beta_{im})_N = 0 \quad (4.114)$$

$i=1, \dots, N$ ve $m=1, \dots, n$. İki boyutlu durumda aşağıdaki eşitlikleri elde edilir.

$$(U_t - L(U), \alpha_i)_N = 0 \quad (4.115)$$

$$(U_I - L(U), \beta_I)_N = 0 \quad (4.116)$$

$$(U_I - L(U), \gamma_I)_N = 0 \quad (4.117)$$

Elde edilen eşitlikler global hareketli sonlu eleman yöntemi kullanarak üretilen eşitliklerle benzer durumda çözülür.

4.2.5 Bölgesel Hareketli Sonlu Elemanlar Yöntemi

İki veya daha yüksek boyutlu durumlardaki bölgesel hareketli sonlu elemanlar yöntemi bir boyutlu durumdaki gibi aynı yöntemleri kullanır. U_I Bölgesel temel fonksiyon $\phi_k^{(r)}$ kullanarak sürekli bir şekilde yakınlştırılır. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$U_I = \sum_{k=1}^E \sum_{r=1}^{n+1} w_k^{(r)}(t) \phi_k^{(r)}(r, s(t)) \quad (4.118)$$

E : eleman sayısı, n : boyut, r : bir noktanın pozisyon vektörü ve s düğüm pozisyonunu göstermektedir. İki boyutlu durumda bu denklem 4.119'daki gibi basitleştirilir.

$$U_I = \sum_{k=1}^E (w_k^{(1)} \phi_k^{(1)} + w_k^{(2)} \phi_k^{(2)} + w_k^{(3)} \phi_k^{(3)}) \quad (4.119)$$

$\phi_k^{(r)}$: Bölgesel temel eleman fonksiyonları

Global hareketli sonlu eleman matrisinin ayrıklaştırılmasını elde etmede bölgesel temel fonksiyonların nasıl kullanıldığına geçelim. Tekrar minimizasyon işlemini yazarsak;

$$\|U_I - L(U)\|^2 \quad (4.120)$$

$w_k^{(r)}$ üzerinde (4.121) eşitliğini vermek için kullanılır.

$$\langle \phi_k^{(i)}, U_I - L(U) \rangle = 0 \quad i=1, \dots, n+1 \quad (4.121)$$

$$\langle \phi_k^{(i)}, U_I - L(U) \rangle = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (4.122)$$

Her bir eleman için iki boyutlu durumda (4.123) eşitliği yazılır.

$$C_k w_k = b_k \quad (4.123)$$

İki boyutlu durumda 3 x 3 bir sistem elde edilir ve C_k aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C_k = \frac{\Delta_k}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.124)$$

Δ_k : k elemanının alanı ve b_k aşağıdaki gibi yazılır:

$$b_k = \begin{pmatrix} \langle \phi_k^{(1)}, L(U) \rangle \\ \langle \phi_k^{(2)}, L(U) \rangle \\ \langle \phi_k^{(3)}, L(U) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

n boyutlu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$M \dot{y}_j = w_j \quad (4.126)$$

Her bir j düğümü için yukarıdaki eşitlik elde edilir. İki ve daha yüksek boyutlu durumlarda M matrisi dikdörtgen bir matristir. Bunun yerine aşağıdaki sistem çözülür.

$$M_j^T D_j M_j \dot{y} = M_j^T D_j w_j \quad (4.127)$$

D_j C_j nin köşegenidir. İki ve daha yüksek boyutlardaki bölgesel ve global yöntemler eşit değildir; çünkü C yerine D matrisi kullanılır. 4.2.4 bölümündeki EAHSE yöntemi Bölgesel yöntemdeki $(.,...,)_N$ kullanarak bulunabilen benzer bölgesel bir yöntemdir.

Bir boyutlu durumda bölgesel ve global yöntemler hemen hemen aynıdır , fakat iki ve daha yüksek boyutlarda bu doğru olmaz. Bölgesel yöntemler de iki boyutlu durumda kullanılabilir , fakat genellikle iki aşamalı olarak kullanılır. Minimizasyon işlemi kullanılan ağırlaştırılmış fonksiyon tipine bağımlı bölgesel ve global yöntemlere bir kaynak olan iki aşamalı yöntem çeşitleri çoktur. Bir boyutlu durumda bu yöntemler global ve bölgesel

hareketli sonlu eleman yönteminin eşitliği yüzünden bir yönteme kaynak teşkil eder.

4.2.6 Lagrangian Yöntemleri

Bu yöntem karakteristik yöntemle hemen hemen benzerdir. Aşağıdaki eşitlik göz önüne alınırsa;

$$u_t + a(u)u_x + b(u)u_y = 0 \quad (4.128)$$

Bu eşitliğe göre Lagrangian yöntemi aşağıdaki gibi olur:

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{x} = a(u), \quad \dot{y} = b(u) \quad (4.129)$$

Bu karakteristik yöntemle aynıdır. Yani $\dot{u} - \dot{x}u_x - \dot{y}u_y$ denklem(4.129) içine yerleştirilir ve denklem (4.129) eşitliğini elde etmek için u_x, u_y nin katsayıları karşılaştırılır. İki yöntem arasındaki fark eşitliklerin ayrıklaştırılmasında ortaya çıkar. Bu aşağıdaki eşitlik düşünülerek daha kolay görülebilir [48].

$$u_t + H(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (4.130)$$

Lagrangian yöntemiyle verilen

$$\dot{u} = 0 \quad (4.131)$$

$\dot{x}$ ve $\dot{y}$ nin herhangi bir değerleri 4.132 eşitliğini sağlayabilmektedir.

$$\dot{x}u_x + \dot{y}u_y = H \quad (4.132)$$

Karakteristik yöntem çözümü de aşağıdaki gibidir:

$$\dot{u} = -H + u_x \frac{\partial H}{\partial u_x} + u_y \frac{\partial H}{\partial u_y} \quad (4.133)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial u_x} \quad (4.134)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial u_y} \quad (4.135)$$

Eğer bu eşitlikler sonlu elemanlar ya da sonlu farklar yöntemiyle ayrıklaştırılırsa farklı eşitlik takımlarının elde edildiği görülür. Özellikle $\dot{u} \neq 0$ ise çok küçük bir değer alabilir. Yukarıda açıkladığımız hareketli sonlu elemanlar yöntemi biraz farklılık gösterir; fakat yaklaşımların hepsi Lagrangian yöntemleri ya da karakteristik yöntemlerdir. Bu yüzden $\dot{u}$ daima küçük olur. Lagrangian yöntemi nümerik olarak uygulandığı zaman uygundur. Lagrangian yöntemi uygulandığı zaman düğümler arasındaki doğrusal elemanlar doğrusal kalmazlar.

4.2.7 Koordinat Dönüşümü

x ve ξ sırasıyla fiziksel ve hesapsal koordinatları gösterebilir. Bu ortamlar arasındaki bire bir dönüşümlü denklemleri aşağıdaki gibi yazılır :

$$x = x(\xi, t), \quad \xi \in [0, 1]$$

$$x(0, t) = 0, \quad x(1, t) = 1$$

t zamanı göstermektedir. Böylece aşağıdaki notasyonlar kullanılır.

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_t \text{ sabit} \quad (4.136)$$

$$f_t \equiv \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x \text{ sabit} \quad (4.137)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_t \text{ sabit} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_t \text{ sabit} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_t \text{ sabit} \quad (4.138)$$

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_\xi \text{ sabit} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_t \text{ sabit} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_\xi \text{ sabit} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x \text{ sabit} \quad (4.139)$$

keyfi bir f fonksiyonu için $f = f(x, t) = f(x(\xi, t), t)$ bu eşitlikler yazılabilir. Hesapsal bir ortamdaki düzenli bir çözüm ağı için;

$$\xi_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.140)$$

olarak yazılır. n pozitif belli bir tamsayıdır ve $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ yardımıyla x de uygun çözüm

ağını gösterir. Bu hesapsal ortamdaki keyfi f fonksiyonunun değerleri aşağıdaki gibi ifade edilir[49].

$$f_i = f(\xi_i, t) \quad (4.141)$$

Seçilen bir monitor fonksiyon için $M(x, t)$ (> 0) kısmi diferansiyel denklemin bir boyuttaki çözümünde hesapsal hatanın ölçüsünü sağlar. Bu kabul altında eşit dağılım fikri aşağıdaki gibi yazılır .

$$\int_{x(\xi_i)}^{x(\xi_{i+1})} M d\tilde{x} = \frac{1}{N} \int_0^1 M d\tilde{x} \quad (4.142)$$

$$\int_0^{x(\xi_i)} M d\tilde{x} = \xi_i \int_0^1 M d\tilde{x} \quad (4.143)$$

(4.142) eşitliğini ξ ' a göre bir defa türevi alınırsa White'ın kullandığı eşitlik, iki defa türevi alınırsa Baines'in kullandığı aşağıdaki eşitlik elde edilir [50].

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(M \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (4.144)$$

Bu yaklaşımları takip ederek, denklem (4.144) , Dirichlett sınır şartları ($x(0)=a$, $x(1)=b$) yardımıyla belirlenen monitor fonksiyonu için bir eşit dağılım ızgaralaması üretir. Bununla birlikte; (4.144) eşitliği, M sadece x 'e değil aynı zamanda u çözümüne de bağlı olduğundan non-lineerdir. Bunun üstesinden gelmek için,

$$(M(x^p)x_\xi^{p+1})_\xi = 0 \quad (p = 0, 1, \dots) \quad (4.145)$$

denklem 4.145'deki gibi iteratif bir yaklaşım önerilmiştir[51].

Yarı kapalı formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$M(x_{i+\frac{1}{2}}^p)(x_{i+1}^{p+1} - x_i^{p+1}) - M(x_{i-\frac{1}{2}}^p)(x_i^{p+1} - x_{i-1}^{p+1}) = 0 \quad (4.146)$$

(4.146) eşitliği Jacobi iterasyon metodu gibi yöntemlerle kolaylıkla çözülür.

Bir fonksiyonun doğru bir şekilde belirtilmesi için bir eşit dağılım ızgarası üretildiği zaman monitor fonksiyonun değerleri tümüyle bilinir ve iterasyon genellikle hızlı ve başarılı olur. Bununla birlikte; diferansiyel eşitliğin doğru bir nümerik sonucunu elde etmek için uyarlanan çözüm ağında bu tip iteratif yaklaşım kullanıldığında, ızgara ve çözümün sırayla güncelleştirildiği bir yaklaşımı kullanmak daha yaygındır. Böylece çözüm, çözüm ağının değişen durumları arasında interpolate edilerek elde edilir.

4.2.8 Monitor Fonksiyonun Seçimi

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümündeki en önemli konu ızgaranın veya çözüm ağının uyarlamalı üretimidir. İki veya daha yüksek boyutlu durumda, bu çözüm ağı üretimi ve uyarlaması genellikle varyasyonel yaklaşım kullanılarak yapılır. Bu varyasyonel yaklaşımda uygun koordinat dönüşümü yapılarak fiziksel ortamdan hesapsal ortama geçiş yapılır. Farklı çözüm ağları fonksiyonun nasıl formüle edildiğine ve minimizasyon probleminin nasıl çözüldüğüne bağlıdır. Çözüm ağı üretim işleminin karmaşıklığı ve fiziksel ve hesapsal ortamın şekilleri koordinat dönüşümünden kuvvetli oranda etkilenir ve fonksiyonelin kendi davranışını tamamen tahmin etmek çok zordur. Bu tahmini yapabilmek ve çözüm esnasında çözüm ağındaki değişimi kontrol edebilmek; uygun monitor fonksiyonu seçimiyle sağlanır. Formülasyonlarda M ile gösterilir[52].

En basit olan $M=1$ durumunda, eşit bir şekilde yayılmış ızgara üretir. Bu monitor fonksiyon [41] de sınırlar hareket ettirilerek hareketli çözüm ağı yönteminde kullanılmıştır. Eşit dağılım tekniğini kullanmanın en önemli özelliği sonuçta elde edilen ızgaların, çözümün hızlı değiştiği bölgelerde yüksek yoğunluğa, az değiştiği bölgelerde az yoğunluğa sahip olmasıdır. Bu, ızgaların uygun sayısal yöntem kullanıldığı zaman diferansiyel denklemin en iyi çözümünü sağladığını gösterir. Bu sebepten dolayı monitor fonksiyonun u çözümünün türev terimlerini içermesi yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Bu durumda; en basit fikir x 'e göre u' 'nün ilk türevini kullanmaktır[53].

$$M = |u_x|$$

Bir monitonik fonksiyonlar üzerinde gradient monitorun etkisi , çözüm değerlerinin aynı boyutta olması demektir.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} M dx = u_{i+1} - u_i \quad (4.147)$$

Monitor fonksiyonun popüler seçimi bir çok çözüm ağı ve hareketli çözüm ağı yöntemlerinde kullanılan çözümün yay uzunluğudur.

$$M = \sqrt{1 + u_x^2} \dots\dots\dots \text{açı-uzunluk monitor fonksiyonu} \quad (4.148)$$

Bu açı uzunluklu monitor gradient monitörden daha düzgün bir çözüm ağı verir. Özellikle u ' da çok büyük değişimler ortaya çıktığında etkilidir. Pratikte yay uzunluklu monitor terimindeki türev terimi (u_x) çoğu kez bazı parametreler(α) yardımıyla ölçeklendirilir. (Denk 4.149)

$$M = \sqrt{1 + \alpha u_x^2} \quad (4.149)$$

Tek boyutlu durumda düzensiz hesapsal çözüm ağları üretildiği zaman eşit dağılım ilkesi yaygın olarak kullanılmasına rağmen, genişletmek iki boyuta genişletmek güçtür ve başka bir yonteme ihtiyaç vardır. İki boyutlu durumda grid üretim yaklaşımını kullanmıştır. Bu makalede daha yüksek boyutlu ızgara üretiminin birçok temel yöntemleri anlatılmıştır. İki boyutlu ızgara üretim yaklaşımı hesapsal ortam Ω_c den fiziksel ortam Ω_p ye koordinat dönüşümü üzerine temellidir. Herbir bölgenin materyal özelliklerini yansıtabilmesi için verilen bir problem için çözüm ağı farklı ortalama çözüm ağı aralıklarıyla bölmelenmiş olması gerekir. Bu çözüm ağındaki aralıklar düzgün bir şekilde değiştirilmelidir. Lineer interpolasyon sınır ve iç yüzey boyunca çözüm ağı noktalarını yerleştirmek için kullanılabilir, fakat bu yöntem keygi şekillerin dahili bölgelerindeki noktalar için uygun değildir.

Tatmin edici bir yöntem potansiyel problemi gibi (Laplace eşitliği) bölmelenmiş bir çözüm ağı için formüle edilebilmektedir. Hesapsal eşkenarlı üçgen elemanlarla gösterilir. Böylece Laplace eşitliğini sağlayan $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ nin ters koordinat dönüşümü yardımıyla aşağıdaki eşitlikleri elde edilir[54].

$$\nabla^2 \xi = 0 \quad \xi = \text{sbt} \quad (4.150)$$

$$\nabla^2 \eta = 0 \quad \eta = \text{sbt} \quad (4.151)$$

Bu iki denklemin (4.150 ve 4.151) çözümü ξ ve η sabit olduğunda eş potansiyellerinin kesişimi ile sonuçlanır. Daha sonra gerekli çözüm ağı dönüşümlerin ters çevrilmesiyle elde edilir. Bu iki denklemi (4.18 ve 4.19) Jacobiye $J = \chi_\eta y_\xi - \chi_\xi y_\eta$ kullanarak $x(\xi, \eta)$ ve $y(\xi, \eta)$ terimleri içine konulur. Böylece bu iki denklem aşağıdaki ifadelere dönüşür.

$$\xi_x = -\frac{1}{J} y_\eta \quad \eta_x = \frac{1}{J} y_\xi \quad (4.152)$$

$$\xi_y = \frac{x_\eta}{J} \quad \eta_y = -\frac{1}{J} y_\xi \quad (4.153)$$

Ters Laplace dönüşümü yardımıyla denklem (4.154) ve (4.155) aşağıdaki denkleme dönüştürülür.

$$\alpha \chi_{\xi\xi} - 2\beta \chi_{\xi\eta} + \gamma \chi_{\eta\eta} = 0 \quad (4.154)$$

$$\alpha \gamma_{\xi\xi} - 2\beta \gamma_{\xi\eta} + \gamma \gamma_{\eta\eta} = 0 \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (x_n^2 + y_n^2) \\ \beta &= (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \\ \gamma &= (x_\xi^2 + y_\xi^2) \end{aligned} \quad (4.156)$$

Bu eşitlikler temel kısımları Winslow'da anlatılan sonlu farklar metodu yardımıyla ayrıklaştırılabilir ve Over-Relaxion algoritması yardımıyla çözülür . Laplace eşitliğinin ortalama özelliğinden dolayı oluşturulan çözüm ağı bazı durumlarda düzgündür ve kolaylıkla dörtgen çözüm ağları için uygulanabilir. Dikkat edilirse yöntem, ızgarada temsil edilen nümerik çözüm veya fonksiyonla ilişkili değildir. Bu İlk ızgara üretim algoritmasının amacı (4.154 ve 4.155) eşitliklerini kullanan sınır şartlarıyla belirlenmiş şekle sahip özel bölgeye adapte edilmiş ızgaraları üretmektedir. Winslow'un metodu eğrisel yüzeyleri modellemek için de kullanılmıştır . Bu fikri geliştirilmiş ve ızgaraların birbirine dikliği ve düzgünleştirme gibi çözüm ağının değişik özelliklerini kontrol etmeye izin veren bir yöntem geliştirilmiştir.Laplace eşitliğini çözmek; aşağıdaki eşitlikteki çözüm ağı düzgünleştirme ile ilgili fonksiyonu minimize etmekle eş değerdir. Ω_c hesapsal ortam üzerindedir.

$$I_s = \int_{\Omega_c} [(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2] dV \quad (4.157)$$

Benzer şekilde, çözüm ağının orthogonallığıyla ilişkili fonksiyoneli minimize etmekle birleşik Euler eşitliklerini çözmek suretiyle ortogonal bir ızgara üretilir . (Denk 4.158)

$$I_0 = \int_{\Omega_c} (\nabla \xi \cdot \nabla \eta)^2 dV \quad (4.158)$$

Pratikte Bruckbill ve Saltzman , bu gibi fonksiyonların lineer kombinasyonlarını kullanmayı önermiştir. Makalelerinde, varyasyonel yaklaşım kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümü için kullanılmış ve sonuçları göstermiştir ki; seçilen fonksiyon minimize edildiği sürece nümerik hatalar artmıştır . Bu yüzden tek boyutlu eşit dağılımda monitor fonksiyonunun etkisini yansıtan yüksek boyutlardaki fonksiyonun seçim fikrinin gelişimi incelenmelidir . Denklem (4.159) ızgara adaptasyon fonksiyonunun genel bir formunu sunar.

$$I[\xi, \eta] = \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} [\nabla \xi^T G_1^{-1} \nabla \xi + \nabla \eta^T G_2^{-1} \nabla \eta] dx dy \quad (4.159)$$

G_1 ve G_2 , monitor fonksiyonu olarak verilen simetrik pozitif belirli matrislerdir. İstenen çözüm ağı dönüşümü, Euler-Lagrange eşitlikleriyle birleştirilmiş çözümden elde edilir.

$$\nabla \cdot (G_1^{-1} \nabla \xi) = 0 \quad (4.160)$$

$$\nabla \cdot (G_2^{-1} \nabla \eta) = 0 \quad (4.161)$$

Dirichlett sınır şartlarıyla birlikte yukarıdaki iki eşitlik (4.160 ve 4.161) fiziksel ortamdan hesapsal ortama dönüşüm sağlar. Yukarıdaki G_1 ve G_2 monitor fonksiyonu bir uygulamada aşağıdaki gibi kullanılarak doğru sonuçlar elde edilmiştir.

$$G_1 = G_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} (I + \nabla u \nabla u^T) \quad (4.162)$$

İstenen çözüm ağı dönüşümünü elde edebilmek için bu fonksiyonel çatı özellikle yüksek boyutlu hareketli metodun temeli gibi kullanıldığı zaman popülerdir ve yaygın olarak kullanılır [46]. Bunu tamamlamak için, tek boyutta fonksiyonu minimize etmekle verilen M monitor fonksiyonu için eşit dağılım denklemleri elde edilir.

$$I[\xi] = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{M} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.163)$$

Denklem (4.163) deki bu genel ifade yüksek boyutlu hareketli çözüm ağı yöntemlerinin bir

kısmını oluşturmaktadır. Izgara üretimi için eşit dağılımın iki boyutlu alternatif bir uygulaması gösterilmiştir [47].

$$\nabla \zeta (M(n) \nabla \zeta n) = 0 \quad (4.164)$$

Yukarıdaki denklemde n , ∇u ve $\zeta=(\xi,\eta)$, n in yönü boyunca bir koordinattır. Bu ∇u 'nun yönünde lokal bir eşit dağılım içine dönüştürülür. n yerine x veya y yazarsak daha öncede belirttiğimiz Euler-Lagrange tipinde bir eşitlik elde edilir[55].

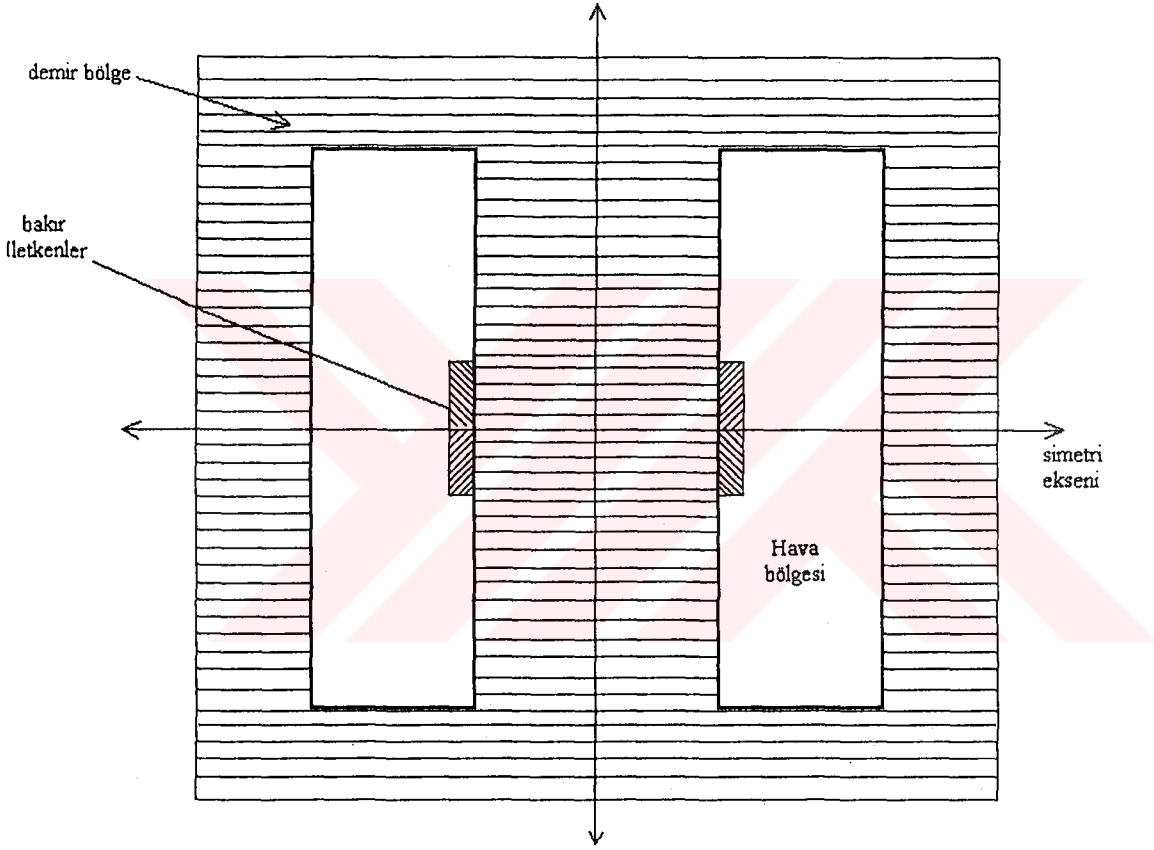
$$\nabla \zeta (M \nabla_{\xi} x) = 0 \quad (4.165)$$

$$\nabla \zeta (M \nabla_{\eta} y) = 0 \quad (4.166)$$

5. UYGULAMA

5.1 Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Bir Transformatörün Manyetik Büyüklüklerinin Hesaplanması

Bu çalışmada Şekil 5.1’de görülen bir transformatörün manyetik büyüklükleri sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu transformatördeki simetri durumundan dolayı dörtte bir kısmın incelenmesi yeterli görülmüş, elde edilen sonuçlar dörtle çarpılarak trafonun tamamının analiz sonuçları elde edilmiştir.



Şekil 5.1 Sonlu elemanlar yöntemi ile incelenen transformatör

5.1.1 Çözüm Bölgesinin Belirlenmesi

Bu problemin çözülmesi için ilk önce transformatörün dışında vektör potansiyel değerinin sıfır olduğu bölgenin belirlenmesi gerekir. Bu çalışmada bölmelemenin yapıldığı şekilde görülen sınırdaki potansiyel değerinin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Ancak buradaki potansiyel değerinin teoride sıfır olmadığı da bir gerçektir. Bu sınır transformatörden ne kadar uzakta alınırsa sıfır potansiyel değerine o kadar yaklaşılır. Bu durumda çözüm sonuçları daha doğru olacak yalnız yapacağımız işlemler

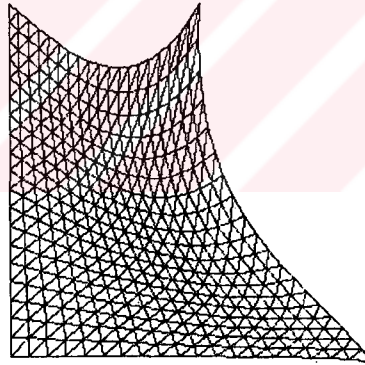
uzayacak ve çözüm işlemleri zorlaşacaktır. Bu sınırları otomatik olarak genişleten programlar da vardır. Ancak bu çalışmamızda bu teknikten faydalanılmamış ve alınan bu sınırın hesaplamalara yapacağı etki ihmal edilebilir bulunmuştur.

5.1.2 Çözüm Ağının Oluşturulması

Bilgisayarlı grafikte karşılaşılan en eski problemlerden biri verilen dört sınır eğrisine göre, bu sınır eğrileri ile tanımlanacak yüzeyi modellemektir. Transformatörde dört sınır eğrisine göre tanımlandığı için çözüm ağı üretimi Coons yüzeyi yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Sınır eğrileri $x(u,0)$, $x(u,1)$, $x(0,v)$ ve $x(1,v)$ olmak üzere; bilinear Coons yaması aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$x(u,v) = (1-u).x(0,v) + u.x(1,v) + (1-v).x(u,0) + v.x(u,1) - \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) \\ x(1,0) & x(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Burada $x(0,0)$, $x(0,1)$, $x(1,0)$ ve $x(1,1)$ her bir köşe koordinatıdır. Sınır eğrileri ayrık noktalardır. Bu eğrileri üretmek için herhangi bir eğri modelleme tekniği (Bezier, B_Spline vb.) kullanılabilir.



Şekil 5.2 Coons yüzeyi

Bezier ve B_Spline eğrileri verilen kontrol noktasına göre birer yaklaşım eğrileridir. Bu eğri modelleme teknikleri geliştirilmek suretiyle, Coons yüzeyi oluşturulma aşamasında sınır eğrilerinin hepsinin tutulması ve saklanması problemi ortadan giderilerek sadece kontrol noktalarının tutulması ve işlemlerin buna göre yapılması hızlı bir şekilde çalışmayı sağlanmıştır. Denklem (5.2) Bezier eğrisinin genel halini göstermektedir.

$$P(u) = \sum_{i=0}^n B_i \cdot J_{n,i}(u) \quad (5.2)$$

$J_{n,i}(u)$; Kaynaştırma fonksiyonu denk (5.3)' deki gibidir.

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i} \quad (5.3)$$

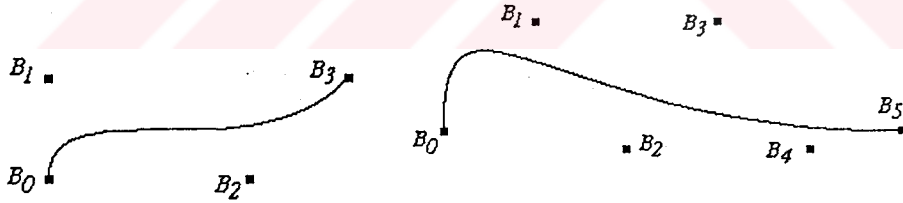
Burada n kontrol nokta sayısı ve $B_{i,j}$ ise kontrol noktalarıdır. Sınır eğrilerini elde etmek için kullanılan diğer bir eğri modelleme tekniği de B_Spline eğrileridir. Denk (5.4) B_Spline eğrisi genel halini göstermektedir. n kontrol nokta sayısı, $B_{i,j}$ ise kontrol noktaları ve k ise üretilecek olan eğrinin derecesidir.

$$P(u) = \sum_{i=0}^n B_i \cdot N_{i,k}(u)$$

$$N_{i,k}(u) = \begin{cases} 1 & x_i \leq u \leq x_{i+1} \text{ için} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i) \cdot N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u) \cdot N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (5.5)$$

Şekil 5.3' de Bezier ve B_Spline eğrisi örnekleri görülmektedir.

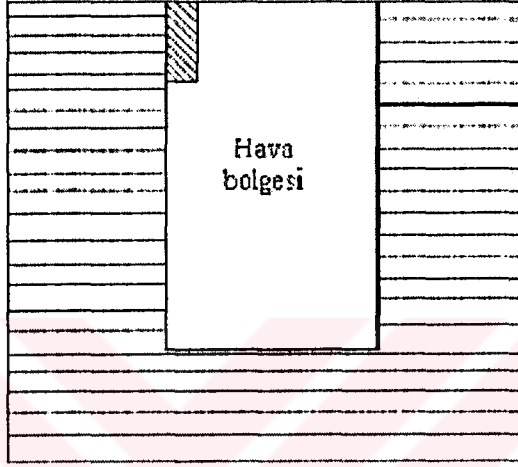


Şekil 5. 3 a) Bezier eğrisi b) B_Spline eğrisi

5.1.3 Çözümün Elde Edilmesi

Transformatörün sonlu elemanlar ile çözümünün yapılabilmesi için transformatöre ait tüm üçgen elemanların numaraları, köşe düğüm numaraları, her bir üçgen elemanı oluşturan düğümlerin koordinatları ve elemanın bulunduğu bölge bir dosyaya, elemanların bulunduğu bölgeye göre J akım yoğunluğu ile çarpılan S değerleri başka bir dosyaya uygun formatta yazılmıştır. Bu dosyalar oluşturulduktan sonra her bir üçgen eleman için bulunduğu bölgeye göre uygun S değerleri hesaplanır. Daha sonra bu S değerleri daha önce açıklandığı gibi [ST] matrisinde yerine yazılarak bu

matris elde edilir. Akım yoğunluğuna sahip düğümler için [RHS] matrisinde bu değerler atanır. Sıfır potansiyel değerine sahip düğümlerin bu değerleri [ST] ve [RHS] matrislerinde yerlerine yazılarak [ST][A]=[RHS] matrisi elde edilir. Gauss eliminasyon yöntemi yardımıyla bu matris çözülerek vektör potansiyel değerleri elde edilir. Çözümü yapılan transformatör için akım yoğunluğu $J=4000000 \text{ A/cm}^2$ olarak alınmış ve çözüm sonucunda $E=4.42432 \text{ J}$ ve endüktans $L= 9.0223.10^{-2} \text{ H}$ olarak hesaplanmıştır. Bu vektör potansiyel değerlerinden faydalanılarak uygun eş potansiyel eğrileri elde edilmiştir.



Şekil 5.4 Transformatörün ¼ lük kısmı

5.2 Hareketli Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Transformatörün Manyetik Büyüklüklerinin Hesaplanması

Hareketli sonlu elemanlar yöntemiyle transformatörün manyetik büyüklüklerinin hesaplanması işlemi yapılırken dikkat edilmesi gereken nokta uygun monitör fonksiyonun seçimidir. Bu uygun monitör fonksiyon yardımıyla çözüm ağının kontrolü sağlanır ve çözümün hızla değiştiği bölgede çözüm ağının yoğunlaştırılması , yani daha fazla üçgen eleman kullanımı sağlanmıştır. Çözüm ağı üzerindeki eleman ve düğüm sayısı sabit tutulmakta fakat çözümün hızla değiştiği bölgeye doğru bir yoğunlaşma sağlanarak daha hızlı çözüm elde edilmektedir .Yapılan hesaplamalarda yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlara yakın değerler elde edilmiştir. Buradaki tek fark; klasik sonlu eleman analizinde kullanılan ana matrise göre matrisin boyutunun daha küçük bir başka deyişle daha az sayıda elemandan oluşmasıdır. Çünkü sadece çözümün hızlı değiştiği bölgeler üzerinde işlemler yapıldığı için daha az sayıda veriye ihtiyaç duyulmuştur. Hareketli sonlu elemanlar yöntemi , yaygın olarak kullanılan sonlu eleman yöntemi sonuçları ve her iki program sonucu elde edilen değerlerin karşılaştırıldığı grafik bundan sonraki bölümde verilmiştir.

5.3 Geliştirilen Programın Yapısı ve Sonuçlar

Uygulama olarak şekil 5.1'de verilen transformatörün hem yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar ve hem de hareketli sonlu elemanlar analizini yapabilmek için C++ tabanlı bir yazılım gerçekleştirilmiştir. Programın sonuçları aşağıdaki gibidir.

5.3.1 Yaygın Olarak Kullanılan Sonlu Elemanlar Analizi Programı:

Programın yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar analizi yapan kısmının parçası aşağıdaki gibidir.

```
----- TRAFO ANALIZ PROGRAMI -----
-----
Düğüm Numarası ve koordinatları =====>1 -----
Eleman Numarası ve Düğüm Numarası =====>2 -----
A Vektör Potansiyel Değerleri için =====> 3 -----
B Manyetik Akı Yoğunluğu leri için =====> 4 -----
----- MESH ÇİZİMİ =====> 5 -----
----- EĞRİLER =====> 6 -----
----- ÇIKIS -----> 7 -----
```

Şekil 5.5 Yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar program yapısı

Programın çalışma sırasına göre verdiği sonuçlar aşağıdaki gibidir. Programı çalıştırıldığında zaman Şekil 5.5'deki menü çıkar ve istenilen değerleri ya da şekilleri görmek için 1 ile 6 arasındaki rakamlara basılır.

1 numaralı butona basıldığı zaman trafonun sonlu eleman analizinde kullanılan düğümlerin numaraları ve koordinatlarını hesaplanır.

2 numaralı butona basıldığı zaman elemanların numaraları ve bu her bir elemanın hangi numaralı düğümden oluştuğu görülür.

3 numaralı butona basıldığı zaman ana matris [S] oluşturulup çözüldükten sonra hesaplanan A vektör potansiyel değerleri görülür.

4 numaralı butona basıldığı zaman bu hesaplanan A vektör potansiyelini kullanarak B manyetik akı yoğunluğu değerleri elde edilir.

5 numaralı butona basıldığı zaman yaygın kullanılan sonlu eleman analizi için gerekli olan çözüm ağı görülür.(Şekil 5.7)

6 numaralı butona basıldığı zaman A vektör potansiyel değerinden yararlanarak transformatörün eş potansiyel eğrileri görülür.(Şekil 5.8 , 5.9 , 5.10 , 5.11)

5.3.2 Hareketli Sonlu Elemanlar Analizi Programı:

```
----- A_Mov Vektör Potansiyel Değerleri için =====> 7 -----  
----- B_Mov Manyetik Akı Yoğunluğu İeri için =====> 8 -----  
----- Mov edilmiş MESH ÇİZİMİ =====> 9 -----  
----- Mov edilmiş EGRILER =====> 10 -----  
----- ÇIKIS =====> 11 -----
```

Şekil 5.6 Hareketli sonlu eleman kullanılarak elde edilen program yapısı

Programın bu aşamasından sonra tezin asıl amacı olan hareketli sonlu elemanlar yöntemi ile transformatörün analiz sonuçlarını göstermektir.

7 numaralı butona basıldığı zaman trafonun hareketi sonlu eleman analizi kullanılarak A vektör potansiyel değrleri hesaplanır.

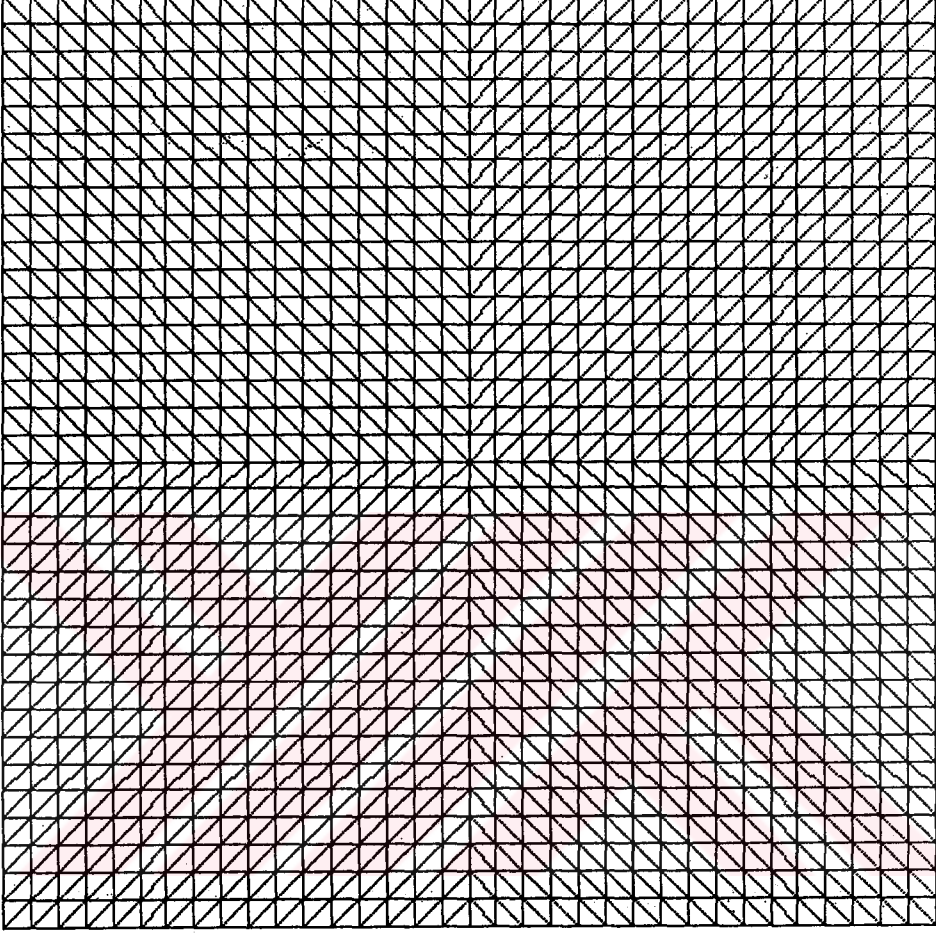
8 numaralı butona basıldığı zaman elde edilen vektör potansiyel değerleri yardımıyla B manyetik akı yoğunluğu değerleri hesaplanır.

9 numaralı butona basıldığı zaman hareketli sonlu eleman analizi için gerekli olan çözüm ağı görülür.(Şekil 5.12)

10 numaralı butona basıldığı zaman bu hesaplanan A vektör potansiyel değerleri yardımıyla çizdirilen eş potansiyel eğrileri görülür. (Şekil 5.13)

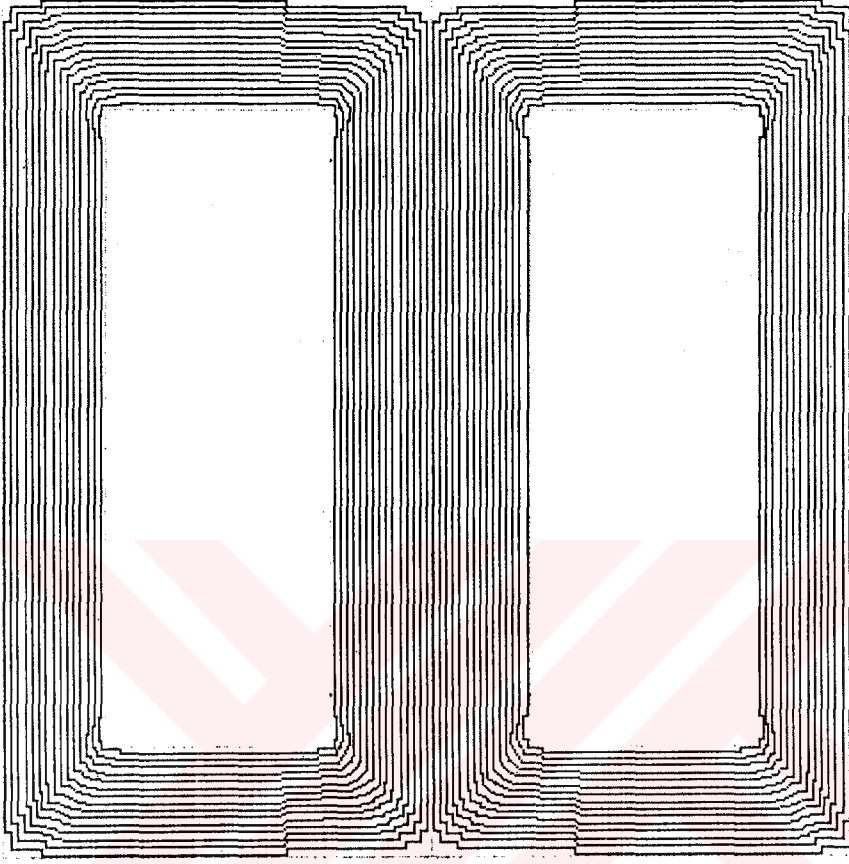
Hareketli sonlu elemanlar yöntemiyle transformatörün analizini yaparken ilk olarak çözümün hızla değiştiği bölgeler tespit edilmiştir. Bilindiği gibi bir transformatörde demir bölgede manyetik alan hızla değişmektedir. Bunun için transformatörün hızla değiştiği bölge daha fazla üçgen elemana bölünerek işlemlerin daha doğru sonuç elde etmesi sağlanmıştır. Uygun bir monitor fonksiyon yardımıyla transformatörün sadece demir bölgesinin daha fazla elemana bölünmesi sağlanmış ve bu durumda elde edilen sonuçlar programın diğer aşamalarında verilmiştir. Burada kullanılan monitor fonksiyon deneme yanılma yöntemiyle tespit edilmiştir. Transformatör dört sınır eğrisine göre tanımlandığından seçilen monitor fonksiyonda buna uygun olarak seçilmelidir . Programda seçilen

monitor fonksiyon $M = \sqrt{1 + (x * y)^{\frac{2}{3}} t}$ 'dir.

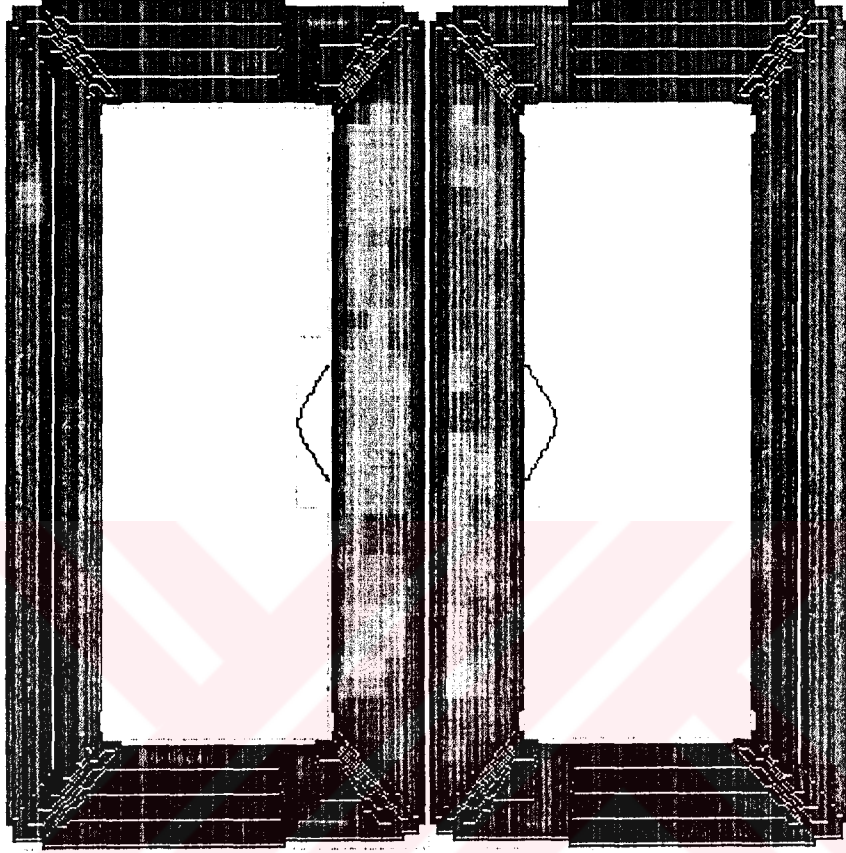


Şekil 5.7 Transformatörün çözüm ağı üretimi

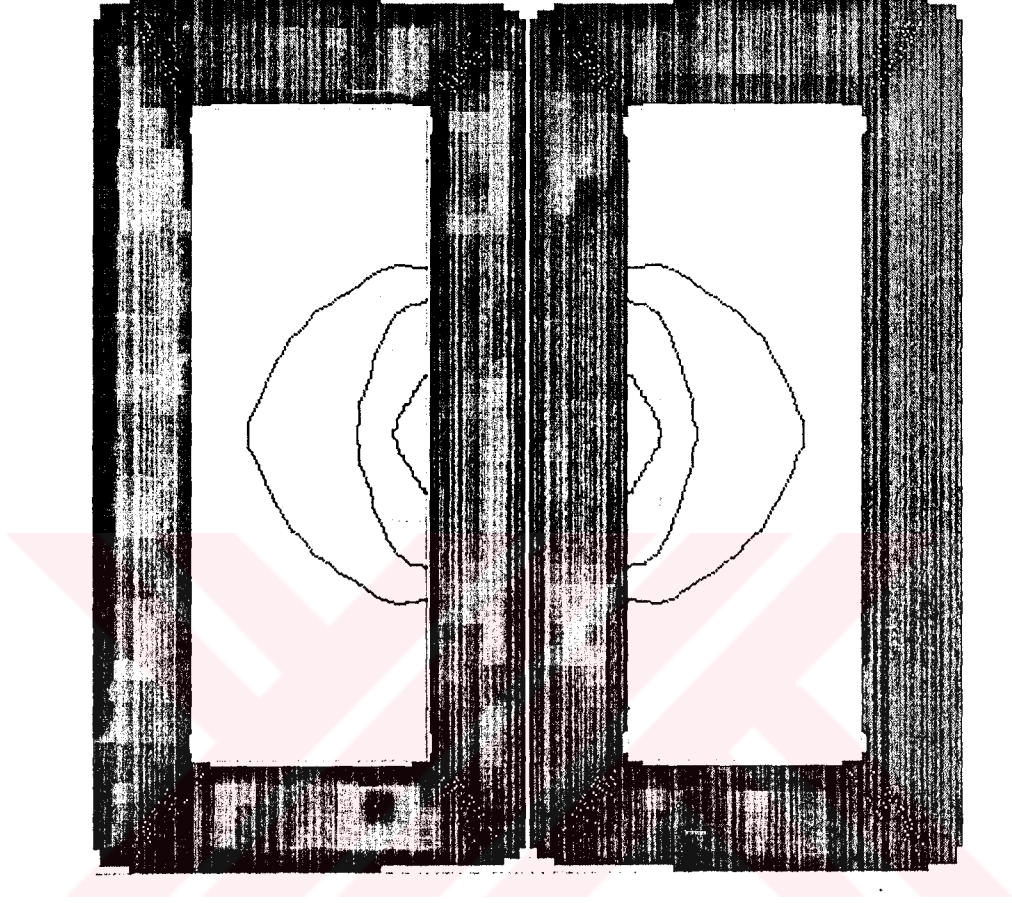
Çözüm ağı üretildikten sonra transformatörün eş potansiyel eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir.



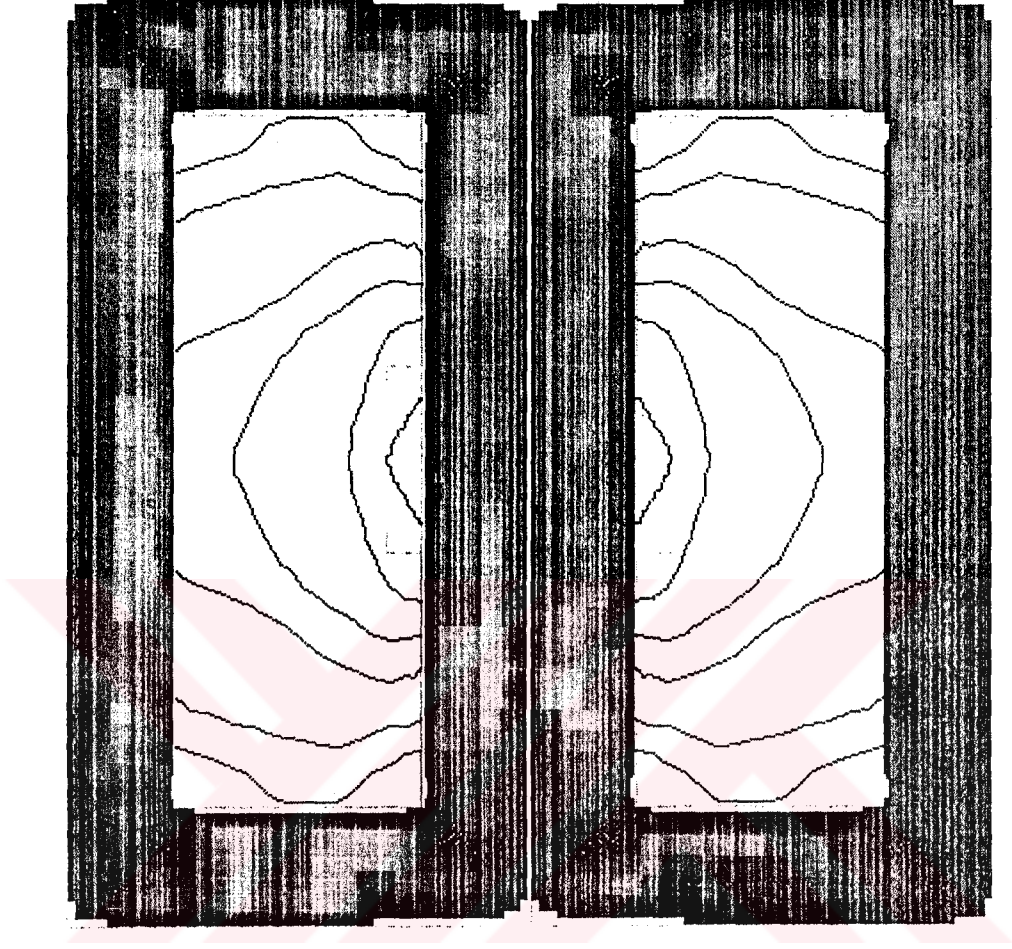
Şekil 5.8 Transformatörün eşpotansiyel eğrileri (15 eğri)



Şekil 5.9 Transformatörün eş potansiyel eğrileri (45 eğri)

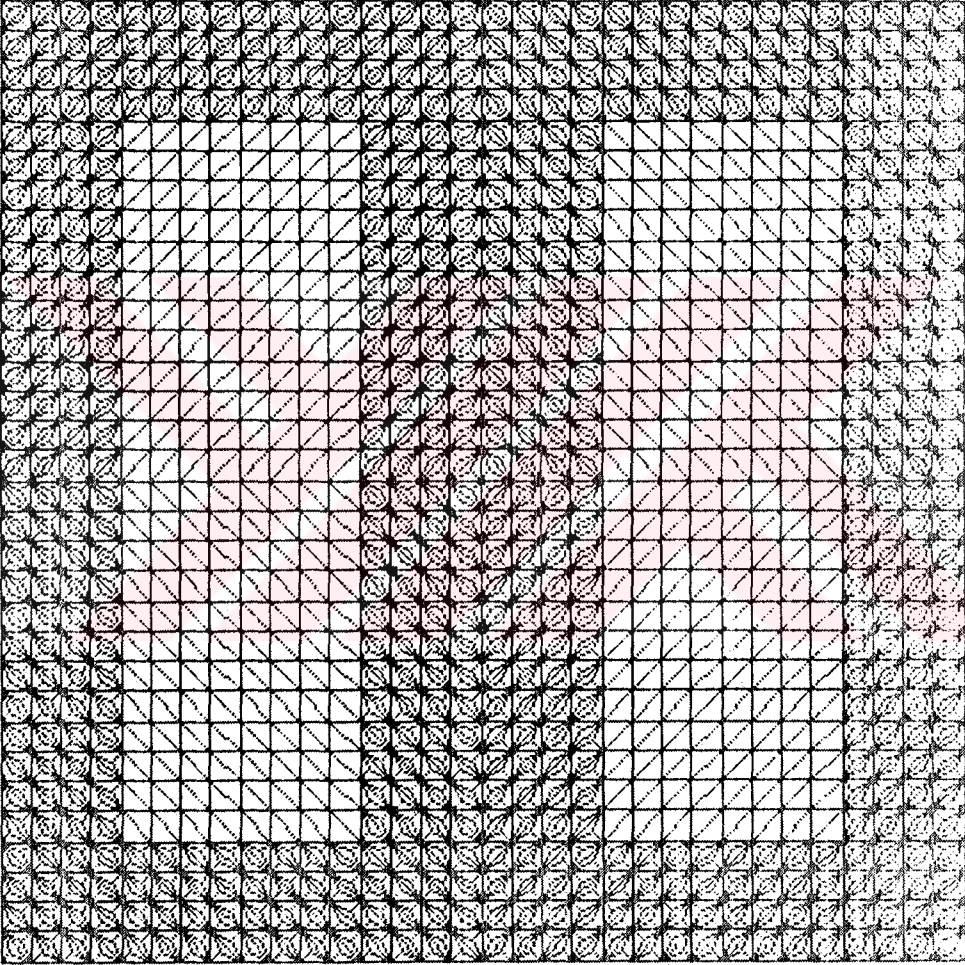


Şekil 5.10 Transformatörün eş potansiyel eğrileri (100 eğri)

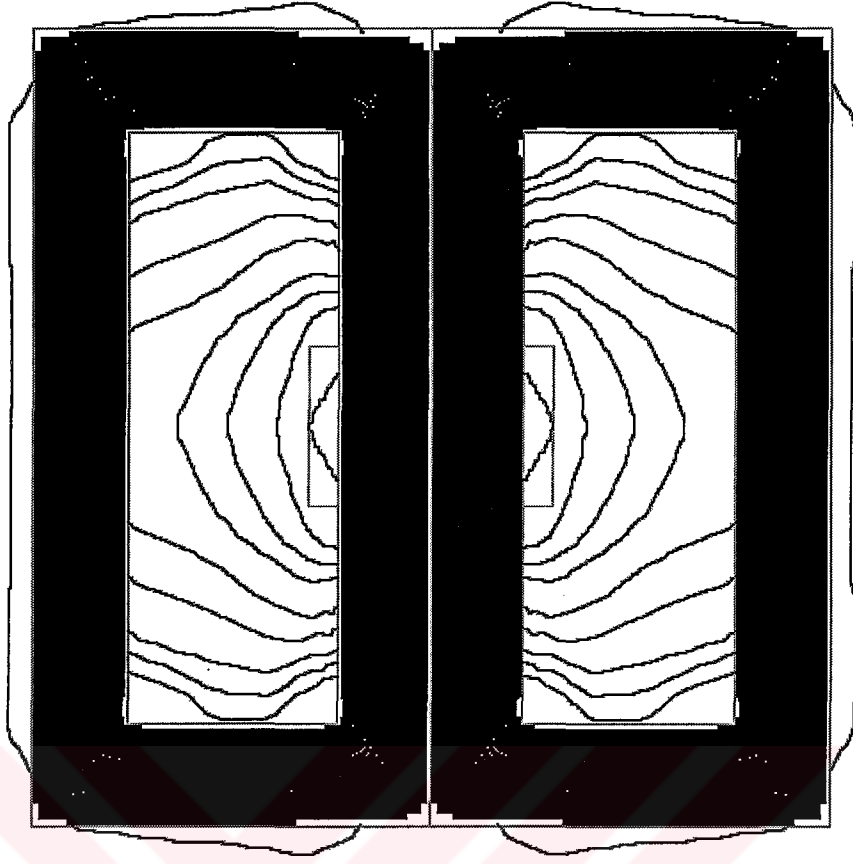


Şekil 5.11 Transformatörün eş potansiyel eğrileri (250 eğri)

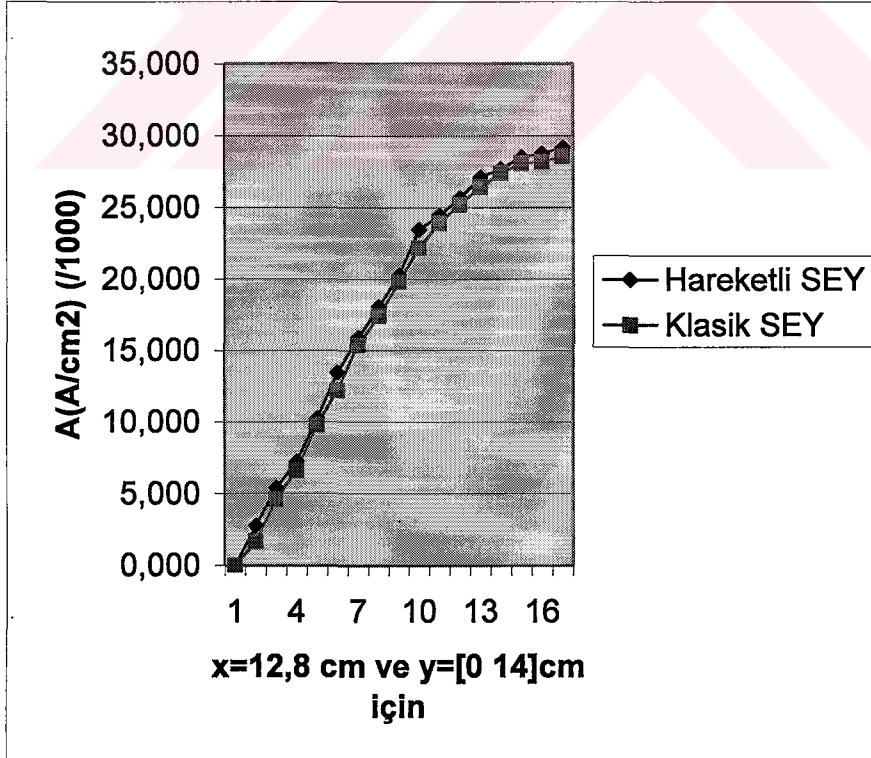
Trafonun hareketli sonlu eleman analizi yapılması için gerekli olan çözüm ağı şekil 5.12’de gösterilmiştir. Burda kullanılan düğüm sayısı 469, eleman sayısı 1122 dir. Elde edilen A vektör potansiyel değerleri yardımıyla çizilen eş potansiyel eğrileri şekil 5.13’de gösterilmiştir. Hareketli sonlu eleman ve klasik sonlu eleman analizleri sonucu elde edilen A değerlerinin karşılaştırması Şekil 5.14’de verilmiştir.



Şekil 5.12 Hareketli sonlu eleman kullanarak trasnformatörün çözüm ağı üretilmiş hali



Şekil 5.13 Trasformatörün eş potansiyel eğrileri (250 eğri)



Şekil 5.14 Transformatorün $x=12.8$ ve $y=[0 \ 14]$ cm' lik kısmı için A magnetik vektör potansiyel değerleri

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ağırlıklı olarak hareketli sonlu elemanlar yöntemi ve hareketli çözüm ağı üretim yöntemleri üzerinde durulmuştur. Hareketli çözüm ağı üretim teknikleri için önemli olan monitor fonksiyonunun seçimi ve kullanımı hakkında bilgi verilmiştir. Bu tez çalışması boyunca yapılan çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Birinci bölümde kısmi diferansiyel denklem çeşitleri, varyasyonel yaklaşımın amacı, sonlu elemanlar ve sonlu farklar yönteminin karşılaştırılması ve hareketli sonlu eleman çözüm aşamaları anlatılmıştır. İkinci bölümde kısmi diferansiyel denklem çözüm yöntemleri fazla detaylandırılmadan ana hatlarıyla anlatılmıştır. Üçüncü bölümde klasik sonlu eleman yöntemi ve çözüm denkleminin nasıl elde edildiği anlatılmıştır. Dördüncü bölümde bir ve iki boyutlu durumda hareketli sonlu elemanlar yönteminin teorisi anlatılmıştır. Koordinat dönüşümünün ve monitor fonksiyonun nasıl seçildiği anlatılmıştır. Geliştirilen program yardımıyla bir transformatörün klasik ve hareketli sonlu eleman analizi yapılmıştır. Her iki analiz sonucunda elde edilen A vektör potansiyel değerleri karşılaştırılmış ve eş potansiyel eğrileri çizdirilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Mehmet Aydın, Beno Kuryel, Gönül Gündüz, Galip Oturaç, 2001, " *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*", İzmir.
2. Günay Gökan, 1978, " *Varyasyonlar Hesabı*".
3. G.Beckett, J.A. Mackenzie, A. Ramage, M.Sloan, 2001, "Computational solution of Two-Dimensional Unsteady PDEs Using Moving mesh Methods", *Journal of Computational Physics* 182, pp: 478-495.
4. Weiming Cao, Weizhang Huang, Robert D. Russell, 1998, "An r-Adaptive Finite Element Method Based Upon Moving Mesh PDEs", *Journal of Computational Physics*, 149, pp: 221-244.
5. Ruo Li, Tao Tang, Pingwen Zhang, 2002 " A Moving Mesh Finite Element Algorithm For Singular Problems In Two And Three Space Dimensions", *Journal of Computational Physics*, 177, pp: 365-393.
6. G.Beckett, J.A. Mackenzie, A. Ramage, M.Sloan, 2001, "Computational solution of Two-Dimensional Unsteady PDEs Using Moving mesh Methods", *Journal of Computational Physics* 182, pp: 478-495
7. Weiming Cao, Weizhang Huang, Robert D. Russell, 1998, "An r-Adaptive Finite Element Method Based Upon Moving Mesh PDEs", *Journal of Computational Physics*, 149, pp: 221-244.
8. Weiming Cao, Weizhang Huang, Robert D. Russell, 1994, "A Study Of Monitor Functions For Two-Dimensional Adaptive Mesh Generation", *SIAM J. SCI.Computer*, Vol:20 No: 6, pp: 1978-1994.
9. Weizhang Huang, Yuhe Ren, Robert D. Russell, 1993 " Moving Mesh Methods Based On moving Mesh Partial Differential Equatons ", *Journal of Computational Physics*, 113, pp: 279-290.
10. Prof.Dr. Ahmet A. KARADENİZ, 1995, "Yüksek Matematik Cilt:3".
11. Thomas R. Hughes , 2000, "The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Method", Dover Publications, New York
12. R. Rannacher, 2001, "Adaptive Galerkin Finite Element Methods for Partial Differential Equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128, 205-233.
13. J.N. Reddy, 1993, *An Introduction to Finite Element Method*, Second Edition, McGraw-Hill International Editions , New York.
14. Susan Brenner 2002, " *The Mathematical Theory of Finite Element Method*", Springer Verlag Press Berlin.
15. Thomas R. Hughes , 2000, "The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Method", Dover Publications, New York

16. Hawken D.F ,Gottlieb J.J., Hansen J.S, 1991, " Review of Some Adaptive Node-Movement Techniques in Finite Element and Finite-Difference Solutions of Partial Differential Equations", J.Comput.Phy 95:254-302.
17. Mittchell A . R , Griffiths D. F, 1980 , "The Finite Difference Method in Partial Differential Equations " , Wiley-Interscience.
18. Sweby P.K, 1984, High Resolution Schemes Using Flux Limiter For Hiperbolic Conservation Laws", SIAM J.Numer.Anal. 21 : 995-1011.
19. Smoller J, 1983 , "Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations", Springer-Verlag,Berlin.
20. Osher S, 1984," Riemann Solvers, The Entropy Condition and Difference Approximations", SIAM J.Numer. Anal . 21 : 217-235.
21. Morton K.W, 1985, "Generalized Galerkin Method For Hyperbolic Problems", Comp Math In Appl Engng, 52 : 847-871.
22. Miller K, Miller R.N, 1981, "Moving Finite Elements:Part 1", SIAM J.Numer Anal 18: 1019-1052.
23. Jimack P ,1988a, " High Order Moving Finite Elements I ", Report number: AM-88-03, School of Mahtematics, University of Bristol, U.K
24. Baines M.J, Wathen A.J,1988, "Moving Finite Element Methods for Evolutionary Problems(I) Theory", J.Comput. PHYS. 79:245-269
25. Jimack, 1988 b , "High Order Moving Finite Elements II ", Report number: AM-88-11, School of Mahtematics,University of Bristol,U.K
26. Miller K, Miller R.N, 1981,"Moving Finite Elements, Part : I " , SIAM J.Numer.Anal. 18: 1019-1052
27. Baines M.J, Wathen A.J,1988,"Moving Finite Element Methods for Evolutionary Problems(I) Theory", J.Comput. PHYS. 79:245-269
28. Johnson I.W, 1986,"Moving Finite Elements For Diffusion Problems", PhD Thesis University of Reading,U.K.
29. Baines M.J, 1985," Local Moving Finite Elements", Numerical Analysis Report 9/85, University of Reading,U.K.
30. Wathen A.J, Baines ,1984,"On the Structure of the Moving Finite element Equations", IMA J.Num. Anal. 5: 161-182.
31. Sweby P.K ,1984, "High Resolution Schemes using flux Limiter for Hiperbolic Conservation Laws", SIAM J Numer Anal 21:995-1011.
32. Sweby P.K, 1987," Some Observations on the Moving finite Element Method and its Implications", Numerical Analysis Report 13/87, University of Reading U.K

33. Golub G.H, Van Loan C.F,1983, "Matrix Computations", North Oxford Academics. 1st ed.
34. Miller K, Miller R.N, 1981,"Moving Finite Elements,Part 1", SIAM J Numer Anal 18: 1019-1052
35. Baines J.M, 1986, "Moving Finite Elements: Regularisation Techniques.
36. Sweby P.K, 1987,"Some Observations on the Moving finite Element Method and its Implications", Numerical Analysis Report 13/87, University of Reading, U.K
37. Golub G.H, Van Loan C.F, 1983, "Matrix Computations",North Oxford Academics. 1st ed.
38. Miller K, Miller R.N, 1981, "Moving Finite Elements Part 1",SIAM J.Numer.Anal.18: 1019-1052
39. Johnson I.W, Wathen A., Baines M.J, 1988,"Moving Finite Elements for Evolutionary Problems(II) Applications", J.Comput. PHYS.79 : 270-297.
40. Jimack P,1988 a, "High order moving finite elements II", Report number AM-88-03 School of Mathematics,University of Bristol,U.K
41. Jimack P,1988 b, "High order moving finite elements II", Report number: AM-88-11,School of Mathematics,University of Bristol,U.K
42. Johnson I.W, Wathen A., Baines M.J, 1988, "Moving Finite Elements for Evolutionary Problems(II) Applications. J.Comput. PHYS. 79 : 270-297.
43. Johnson I.W,1986, "Moving Finite Elements For Diffusion Problems",PhD Thesis University of Reading,U.K.
44. Baines M.J,1991, "An analysis of the moving finite element procedure",SIAM J Numer Anal
45. Djomeri J, Doss S , Gelinas R, Miller K, 1985," Applications of the moving finite element for systems", J Comput Phys.:1-41.
46. Johnson I.W, Wathen A., Baines M.J, 1988, "Moving Finite Elements for Evolutionary Problems(II) Applications. J.Comput. PHYS. 79 pp 270-297.
47. Baines,M.J,Wathen,A.J (1988) Moving Finite Element Methods for Evolutionary Problems(I) Theory, J.Comput. PHYS. 79,pp 245-269
48. Wathen,A.J. (1984) Moving Finite Elements and oil reservoir Modelling. Ph.D. Thesis, University of Reading., U.K.
49. Wathen, A.J (1987) Realistic eigenvalue Bounds for the Galerkin Mass Matrix. I.M.A. J. Numer.Anal. 7 pp 449-457.
50. Richtmyer, R.,Morton, K.W. (1967) Difference Methods for Initial Value Problems . Wiley-Interscience.
51. Wathen,A.J. (1984) Moving Finite Elements and oil reservoir Modelling. Ph.D. Thesis, University of Reading., U.K.

52. Golub, G.H, Van Loan,C.F (1983) Matrix Computations. North Oxford Academics. 1st ed.
53. Johnson, I.W,Wathen, A., Baines, M.J (1988) Moving Finite Elements for Evolutionary Problems(II) Applications. J.Comput. PHYS. 79 pp 270-297.
54. Sweby, P.K (1987) Some Observations on the Moving finite Element Method and its Implications. Numerical Analysis Report. 13/87. University of Reading U.K
55. Carlson, N.,Miller, K. (1986) Gradient Weighted Moving finite Elements in Two Dimensions. PAM-347. Center for Pure and Applied Mathematics, University of California,Berkley,USA.



ÖZGEÇMİŞ

Mehmet ÇINAR

E.posta : mehmetcinar@hotmail.com

1978 Elazığ' da doğdu.

1989 – 1996 Elazığ Anadolu Lisesi'ni bitirdi.

1996 – 2000 İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Fakültesi Elektrik Mühendisliği bölümünden mezun oldu.

2002 – Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.

EK-1 Trafo Analiz Programı

```
//////////Hareketli Sonlu Eleman Kullanarak Trafonun Analizini Yapan Program//////////
////////////////////////////////////////////////////////////
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include<iostream.h>
#include<stdlib.h>
#include<stdarg.h>
#define J1 0.0
#define m 17
/** m değeri 16 ve katları olacaktır)
#define J2 4000000.0
float X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,w,u,S11,S12,S13,S21,S22,S23,S31,S32,S33;
float delta,a11,b11,c11,a22,b22,c22,a33,b33,c33;
float ana[3700][3700];
float pp_1,pp_2;
float R[3700];
float d[100][100][2];
///toplam eleman sayısı= 2* (m-1)*(m-1) ///
///toplam düğüm sayısı (m)*(m)****
/** m değeri bolmeleme sayısından 1 fazla olacak şekilde verilir***/
int r1,p1,z,g,t,h1,k1,e1,f1,y,h,k,e,f,a,b;
int m1,n1;

struct ucgen{
    int ucgen_no,dugum_no[3],s_deger_indis[9][2];
    float s_degerleri[3][3];
    struct ucgen *next;
};

typedef struct ucgen UCGEN;
typedef UCGEN *LUCGEN;
int i,j;
float a1=1.0,b1=1.0,a2=1.0,b2=1.16,
a3=1.128,b3=1.0,a4=1.128,b4=1.16;
/* ustteki degerler nesnenin sınır degerleridir */
float trafo_x1=1.032,trafo_x2=1.096,
```

```

trafo_y1=1.05,trafo_y2=1.16;
float bak_x1=1.032,bak_x2=1.04,
bak_y1=1.13, bak_y2=1.6;
/* ustteki degerler bakır kısma ait degerlerdir */
////**** nu degeri= 1/(3000*4*pi*10üzeri-7) ////****
float nu=1/(3000*4*3.1415*0.0000001); //265.25;
////**** nu_1=1/(4*pi*10üzeri-7)degeriolan yaklaşık 795775 aldım.////****
float nu_1=1/(4*3.1415*0.0000001); //795775;
#include"trafo.h"
void main()
{
dugumleri_hesapla_sler_ilebirlikte();
FILE *numaram,*S;
numaram=fopen("numara.dat","r");
S=fopen("Sler.dat","r");
if(numaram==NULL || S==NULL){ printf("\n dosyalardan biri hatalıdır");getch();exit(1);}
UCGEN el1, el2;
el1=new UCGEN;
el2=new UCGEN;
el2->next=NULL;
el1->next=NULL;
el1=el2;
int z1,z2,z3,z4,ff,kk;
float zz[9];
int ttt_1=0,ttt_2=0,ttt_11,ttt_22;
int rrlt;
i=0;j=0;
float temp1,temp2,temp3,temp4,temp5,temp6,temp10,temp11,temp12;
int temp7,temp8,temp9;
while(!feof(numaram)){
    fscanf(numaram,"\n %d %d %d %f %f %f %f %f %f %d %d %d %f %f %f",
        &z2,&z3,&z4,&temp1,&temp2,&temp3,&temp4,&temp5,&temp6,
        &temp7,&temp8,&temp9,&temp10,&temp11,&temp12);
    //0.00000125*
    delta=0.5*(a11+a22+a33);
    R[z2]+=temp10*delta*1/3;
    R[z3]+=temp11*delta*1/3;

```

```

R[z4]+=temp12*delta*1/3;
for(i=0;i<9;i++){fscanf(S,"%f",&zz[i]);      }
    fscanf(S,"\n");
    el1->ucgen_no=z1;
    el1->dugum_no[0]=z2;
    el1->dugum_no[1]=z3;
    el1->dugum_no[2]=z4;
    for(ff=0,i=0;i<3;i++){
        for(j=0;j<3;j++){
            ff++;
            el1->s_degerleri[i][j]=1.0*zz[ff];
            ff++;
        }
        el1->s_deger_indis[0][0]=z2*1;
        el1->s_deger_indis[0][1]=z2*1;
        el1->s_deger_indis[1][0]=z2*1;
        el1->s_deger_indis[1][1]=z3*1;
        el1->s_deger_indis[2][0]=z2*1;
        el1->s_deger_indis[2][1]=z4*1;
        el1->s_deger_indis[3][0]=z3*1;
        el1->s_deger_indis[3][1]=z2*1;
        el1->s_deger_indis[4][0]=z3*1;
        el1->s_deger_indis[4][1]=z3*1;
        el1->s_deger_indis[5][0]=z3*1;
        el1->s_deger_indis[5][1]=z4*1;
        el1->s_deger_indis[6][0]=z4*1;
        el1->s_deger_indis[6][1]=z2*1;
        el1->s_deger_indis[7][0]=z4*1;
        el1->s_deger_indis[7][1]=z3*1;
        el1->s_deger_indis[8][0]=z4*1;
        el1->s_deger_indis[8][1]=z4*1;
    el1->next=new UCGEN;
    el1->next->next=NULL;
    el1=el1->next;
}
fcloseall();
el1=el2;

```

```

float ttt_3;
printf("\n %d %d %d %d %d %f",el1->ucgen_no,
        el1->dugum_no[0],
        el1->dugum_no[1],
        el1->dugum_no[2],
        el1->s_degerleri[0][0]);
for(i=0;i<(m-1)*(m-1);i++){
    for(j=0;j<(m-1)*(m-1);j++){
        ana[i][j]=0.0; //****// **Matris sıfırlandı****
        printf("\n %f",ana[i][j]);
    }
}
for(;el1->next!=NULL;el1=el1->next){
    for(kk=0,i=0;i<3;i++){
        for(j=0;j<3;j++){
            ttt_1=0;ttt_2=0;
            ttt_11=0;ttt_22=0;
            ttt_11=ttt_1=el1->s_deger_indis[kk][0];
            ttt_22=ttt_2=el1->s_deger_indis[kk][1];
            pp_2=pp_1=el1->s_degerleri[i][j];
            ana[ttt_11][ttt_22]+=pp_2;
            kk++;
        }
    }
}
}

```

```

FILE *anal;
anal=fopen("anamat17.dat","w");
for(i=0;i<m*m;i++){
    for(j=0;j<m*m;j++){
        //getch();
        fprintf(anal,"%f",ana[i][j]);}}
fclose(anal);
FILE *sagl;
sagl=fopen("sagl7.dat","w");
for(i=0;i<m*m;i++){
    //for(j=0;j<m*m;j++){
        fprintf(sagl,"%f",R[i]);}
//fclose(anal);

```

```

int xa1;
float xa2;
FILE *a;
a=fopen("A_deg.txt","r");
for(i=1;i<m*m;i++){
    fscanf(a,"\n %d %f",&xa1,&xa2);
    printf("\n %d %f",xa1,xa2);
}
getch();
int xa3;
float xa4;
FILE *a1;
a1=fopen("B_man.txt","r");
for(i=1;i<2*(m-1)*(m-1);i++){
    fscanf(a1,"\n %d %f",&xa3,&xa4);
    printf("%d %f\n",xa3,xa4);
}
exit(1);
float width, height;
width=m*m;
height=(m*m)+1;
float *equations = (float *)malloc(sizeof(float) * (m*m)*((m)*(m)+1));
float *solution = (float *)malloc(sizeof(float) * m*m);
float *ptr = equations;
int dim = (m * m);
int eer,rrt;
for(eer=0;eer<m*m;eer++){
for(rrt=0;rrt<m*m;rrt++,ptr++){
    *ptr=ana[eer][rrt];
    }
    *ptr=R[eer];
    ptr++;
}

ptr = equations;
cout << " " << endl;
printf("Matris:\n");
gauss(equations, solution, m*m);

```

```

    //printf("Cozum degerleri:\n");
    ptr = solution;
    FILE *sonuc;
    sonuc=fopen("Sonuc.dat","w");
    for(i=0;i<m*m;i++,ptr++) {
        printf("SONUCLAR %d = %8.6f\n", i, (*ptr));
        fprintf(sonuc,"SONUCLAR %d = %8.6f\n",i, *ptr);}
    free(equations);
    free(solution);
    fcloseall();
    getch();
}

```

Programın çalışması için gerekli olan h dosyası da aşağıdaki gibidir:

```

////////////////////////////////trafo.h dosyası////////////////////////////////
////////////////////////////////

```

```

void gauss(float eqs[], float sol[], int N) {
    float temp;
    int i, j, k, max, r;
    r = N+1;
    for(i=0;i<N;i++) {
        max = i;
        for(j=i+1;j<N;j++)
            if( fabs(eqs[j*r+i]) > fabs(eqs[max*r+i]) ) max = j;
        for(k=i;k<N;k++) {
            temp=eqs[i*r+k];
            eqs[i*r+k] = eqs[max*r+k];
            eqs[max*r+k] = temp;
        }
        for(j=i+1;j<N;j++) {
            for(k=N;k>=i;k--) {
                eqs[j*r+k] = eqs[j*r+k] - eqs[i*r+k] * eqs[j*r+i] / eqs[i*r+i];
            }
        }
    }
    for(j=N-1;j>=0;j--) {
        temp=0;

```

```

for(k=j+1; k<N; k++)
    temp += eqs[j*r+k] * sol[k];
sol[j] = (eqs[j*r+N] - temp) / eqs[j*r+j];
}
}
*/ /* ***** Bu fonksiyon noktanın içeridemi dışarıdamı oluğuna karar verir.***** */
int dugum_degerlendir(float x1,float x2,float y1,float y2,
    float bak_x1,float bak_x2,float bak_y1,float bak_y2,
    float x,float y){
if(x1<= x && x<=x2 && y1<=y && y<=y2 &&
    bak_x1<=x && x<=bak_x2 && bak_y1<=y && y<=bak_y2){
    return 20;}
    else if
        (x1<=x && x<=x2 && y1<=y && y<= y2 ){
            return 10;}
    else
        {
return 0;}
}

void dugumleri_hesapla_sler_ilebirlikte(void){
for(i=0,u=0.0;u<1.0+(1.0/(m-1));u+=1.0/(m-1)){
    X1=((1.0-u)*a1+(u*a3));
    Y1=((1.0-u)*b1+(u*b3));
    X2=((1.0-u)*a2+(u*a4));
    Y2=((1.0-u)*b2+(u*b4));
    for(j=0,w=0.0;w<1.0+(1.0/(m-1));w+=1.0/(m-1)){
        X3=((1.0-w)*X1+(w*X2));
        Y3=((1.0-w)*Y1+(w*Y2));
        d[i][j][0]=X3;
        d[i][j][1]=Y3;
        j++;
    }
    i++;
}

FILE *numara,*S,*komsu,*numaram;
    numara=fopen("Numara.dat","w");
    S=fopen("Sler.dat","w");

```

```

int durum_1,durum_2,durum_3;
//////////***** 0,2,4 numarasi ile baslayan üçgenler için *****///
int ucgen_no=0;
for(i=0;i<((m-1)*(m-1))+1;i=i+m){
    for(j=0;j<(m-1);j++){
        /**** a11=ai, b11=bi ve c11=ci yerine kullanıldı *****/
        a11=((d[j+1][i/m][0]*d[j+1][(i/m)+1][1])-(d[j+1][(i/m)+1][0]*d[j+1][i/m][1]));
        b11=d[j+1][i/m][1]-d[j+1][(i/m)+1][1];
        c11=d[j+1][(i/m)+1][0]-d[j+1][i/m][0];
        a22=aj, b22=bj ve c22=cj yerine kullanıldı
        a22=((d[j+1][(i/m)+1][0]*d[j][i/m][1])-(d[j][i/m][0]*d[j+1][(i/m)+1][1]));
        b22=d[j+1][(i/m)+1][1]-d[j][i/m][1];
        c22=d[j][i/m][0]-d[j+1][(i/m)+1][0];
        a33=am, b33=bm ve c33=cm yerine kullanıldı *****/
        a33=((d[j][i/m][0]*d[j+1][i/m][1])-(d[j+1][i/m][0]*d[j][i/m][1]));
        b33=d[j][i/m][1]-d[j+1][i/m][1];
        c33=d[j+1][i/m][0]-d[j][i/m][0];
        delta=0.5*(a11+a22+a33);
        durum_1=dugum_degerlendir(trafo_x1,trafo_x2,trafo_y1,trafo_y2,
            bak_x1,bak_x2,bak_y1,bak_y2,d[j][i/m][0],d[j][i/m][1]);
        durum_2=dugum_degerlendir(trafo_x1,trafo_x2,trafo_y1,trafo_y2,
            bak_x1,bak_x2,bak_y1,bak_y2,d[j+1][i/m][0],d[j+1][i/m][1]);
        durum_3=dugum_degerlendir(trafo_x1,trafo_x2,trafo_y1,trafo_y2,
            bak_x1,bak_x2,bak_y1,bak_y2,d[j+1][(i/m)+1][0],d[j+1][(i/m)+1][1]);
        if(durum_1==10 && durum_2==10 && durum_3==10) {
            S11=nu_1*((b11*b11)+(c11*c11))/(4*delta);
            S12=nu_1*((b11*b22)+(c11*c22))/(4*delta);
            S13=nu_1*((b11*b33)+(c11*c33))/(4*delta);
            S21=S12;/* tekrar nu_1 degeri ile carpılmayacak */
            S22=nu_1*((b22*b22)+(c22*c22))/(4*delta);
            S23=nu_1*((b22*b33)+(c22*c33))/(4*delta);
            S31=S13;/* tekrar nu_1 degeri ile carpılmayacak */
            S32=S23;/* tekrar nu_1 degeri ile carpılmayacak */
            S33=nu_1*((b33*b33)+(c33*c33))/(4*delta);
            fprintf(numara,"%n %d %d %d %d %f %f %f %f %f %f %d %d %d %f %f %f",
                ucgen_no,i+j,i+j+1,i+j+1+m,
                d[j][i/m][0],d[j][i/m][1],

```

```

        d[j+1][i/m][0],d[j+1][i/m][1],
        d[j+1][(i/m)+1][0],d[j+1][(i/m)+1][1],durum_1,durum_2,durum_3,J1,J1,J1);

ucgen_no+=2
fprintf(S,"n%f%f%f%f%f%f%f%f%f",
        S11,S12,S13,S21,S22,S23,S31,S32,S33);}

}

/////////***** 1,3,5 numarasi ile baslayan üçgenler için *****/
int ucgenno=1;
for(i=0;i<((m-1)*(m-1))+1;i+=m){
    for(j=0;j<(m-1);j++){
        /**** a11=ai, b11=bi ve c11=ci yerine kullanıldı *****/
        a11=((d[j+1][(i/m)+1][0]*d[j][(i/m)+1][1])-(d[j][(i/m)+1][0]*d[j+1][(i/m)+1][1]));
        b11=d[j+1][(i/m)+1][1]-d[j][(i/m)+1][1];
        c11=d[j][(i/m)+1][0]-d[j+1][(i/m)+1][0];
        /**** a22=aj, b22=bj ve c22=cj yerine kullanıldı *****/
        a22=((d[j][(i/m)+1][0]*d[j][i/m][1])-(d[j][i/m][0]*d[j][(i/m)+1][1]));
        b22=d[j][(i/m)+1][1]-d[j][i/m][1];
        c22=d[j][i/m][0]-d[j][(i/m)+1][0];
        /**** a33=am, b33=bm ve c33=cm yerine kullanıldı *****/
        a33=(d[j][i/m][0]*d[j+1][(i/m)+1][1])-(d[j+1][(i/m)+1][0]*d[j][i/m][1]);
        b33=d[j][i/m][1]-d[j+1][(i/m)+1][1];
        c33=d[j+1][(i/m)+1][0]-d[j][i/m][0];
        delta=0.5*(a11+a22+a33);
        durum_1=dugum_degerlendir(trafo_x1,trafo_x2,trafo_y1,trafo_y2,
        bak_x1,bak_x2,bak_y1,bak_y2,d[j][i/m][0],d[j][i/m][1]);

        durum_2=dugum_degerlendir(trafo_x1,trafo_x2,trafo_y1,trafo_y2,
        bak_x1,bak_x2,bak_y1,bak_y2,d[j+1][(i/m)+1][0],d[j+1][(i/m)+1][1]);

        durum_3=dugum_degerlendir(trafo_x1,trafo_x2,trafo_y1,trafo_y2,
        bak_x1,bak_x2,bak_y1,bak_y2,d[j][(i/m)+1][0],d[j][(i/m)+1][1]);
        if(durum_1==10 && durum_2==10 && durum_3==10) {
            S11=nu_1*((b11*b11)+(c11*c11))/(4*delta);
            S12=nu_1*((b11*b22)+(c11*c22))/(4*delta);
            S13=nu_1*((b11*b33)+(c11*c33))/(4*delta);
            S21=S12;/* tekrar nu_1 degeri ile carpılmayacak */

```

```

S22=nu_1*((b22*b22)+(c22*c22))/(4*delta);
S23=nu_1*((b22*b33)+(c22*c33))/(4*delta);
S31=S13; /* tekrar nu_1 degeri ile carpılmayacak */
S32=S23; /* tekrar nu_1 degeri ile carpılmayacak */
S33=nu_1*((b33*b33)+(c33*c33))/(4*delta);
    fprintf(numara,"\\n %d %d %d %d %f %f %f %f %f %f %d %d %d %f %f %f",
    ucgenno,i+j,i+j+1+m,i+j+m,
    d[j][(i/m)[0],d[j][(i/m)[1],
    d[j+1][(i/m)+1][0],d[j+1][(i/m)+1][1],
    d[j][(i/m)+1][0],d[j][(i/m)+1][1],durum_1,durum_2,durum_3,J1,J1,J1);
    ucgenno+=2;
fprintf(S,"\\n%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f",
    S11,S12,S13,S21,S22,S23,S31,S32,S33);
}

    }

fclose(numara);
fclose(S);
fcloseall();
}

```