



**KESİRLİ DİFERİTEGRAL YARDIMIYLA
CHEBYSHEV DENKLEMİNİN
AÇIK ÇÖZÜMLERİ**

Emine ÇAPAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Reşat YILMAZER**

OCAK-2018

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA CHEBYSHEV DENKLEMİNİN
AÇIK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMİNE ÇAPAN

151121111

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

Danışman: Doç. Dr. Reşat YILMAZER

OCAK-2018

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA CHEBYSHEV DENKLEMİNİN
AÇIK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine ÇAPAN

(151121111)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15.12.2017
Tezin Savunulduğu Tarih : 08.01.2018

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasan BULUT (F.Ü.)
Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ (Munzur Ü.)

OCAK-2018

ÖNSÖZ

Tez sürecinde benden destek ve ilgisini esirgemeyen yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Reşat YILMAZER'e teşekkürlerimi sunarım.

Emine ÇAPAN
ELAZIĞ-2018



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
Tanım 2.4. (Gamma Fonksiyonu)	3
Tanım 2.5. (Beta Fonksiyonu).....	4
Tanım 2.6. (Grünwald Letnikov Kesirli Türevi)	4
Tanım 2.7. (Riemann-Liouville Tanımı)	5
Tanım 2.8. (Caputo Kesirli Türevi).....	5
Tanım 2.9. (Polhammer Sembolü).....	5
Tanım 2.10. (Gauss Hipergeometrik Seri).....	6
2.1. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri	6
3. BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ	8
4. KESİRLİ DİFERİNTTEGRAL YARDIMIYLA CHEBYSHEV DENKLEMİNİN AÇIK ÇÖZÜMLERİ.....	18
4.1. Homojen Olmayan Denklemin Açık Çözümleri	18
4.2. Homojen Denklemin Açık Çözümleri.....	28
5. HOMOJEN DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN HİPERGEOMETRİK GÖSTERİMİ.....	34
6. SONUÇ	45
KAYNAKLAR.....	46

ÖZET

KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA CHEBYSHEV DENKLEMİNİN AÇIK ÇÖZÜMLERİ

Matematiksel analizin bir kolu olan kesirli analiz, türev ve integralin tam sayı olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş halidir. Fen ve mühendislikte oldukça geniş uygulama alanına sahiptir.

Amacımız kesirli analiz yardımı ile singüler katsayılı bazı denklemler için farklı çözümler elde etmek ve literatüre kazandırmaktır.

Bu tezde, verilen bazı homojen kesirli diferintegral denklemlerin özel çözümlerinin elde edilişinden ve bu çözümlerin denklemini sağladığından bahsedilmiştir. Daha sonra singüler katsayılı homojen ve homojen olmayan Chebyshev denkleminin farklı açık çözümleri kesirli analizin tanım, teorem, özellikleri ve Leibniz kuralı yardımı ile elde edilmiştir. Ayrıca, homojen Chebyshev denkleminin açık çözümlerinin başka bir gösterimi olan hipergeometrik gösterim gama fonksiyonunun özellikleri ve Leibniz kuralı yardımı ile bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev ve İntegraller (Diferintegraller), Gama Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu, Hipergeometrik Fonsiyon, Leibniz Kuralı.

SUMMARY

EXPLICIT SOLUTIONS OF CHEBYSHEV EQUATIONS BY FRACTIONAL DIFFERINTEGRAL

Fractional analysis which is a branch of mathematical analysis is an extension of the derivative and integral to non-integer (arbitrary) order. It has a wide application area in science and engineering.

Our aim is to obtain different solutions for some singular coefficient equations with the aid of fractional analysis and to gain it to literature.

In this thesis, it is mentioned that certain solutions of given homogeneous fractional differintegral equations are obtained and these solutions provide the equations. Then, different explicit solutions of the homogeneous and nonhomogeneous Chebyshev equation with singular coefficients were obtained with the aid of definition, theorems and properties of fractional analysis and Leibniz's rule. In addition, the hypergeometric representation, which is another representation of the explicit solutions of the homogeneous Chebyshev equation was found with the help of properties for gamma function and Leibniz's rule.

Key words: Fractional Derivative and Integrals (*Differintegrals*), Gama Function, Beta Function, Hipergeometric Functions, Leibniz's Rule.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur:

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: Reel veya kompleks sayılar cismi
$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
$B(p, q)$	: Beta fonksiyonu
${}_2F_1(a, b; c; z)$	: Hipergeometrik fonksiyonun gösterimi
$D^\alpha f = f_\alpha$	: Keyfi mertebeden türev ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$)
$D^{-\beta} f = I^{-\beta} f = f_{-\beta}$	: Keyfi mertebeden integral ($\beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$)
$(\alpha)_n$	: Polchammer Sembolü
α	: Alfa
β	: Beta
ε	: Epsilon
δ	: Delta
τ	: Tau
φ	: Phi
ν	: Nü
σ	: Sigma
π	: Pi
λ	: Lambda
γ	: Gama
Ω, ω	: Omega

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere, birçok bilim dalında karşılaşılan problemleri çözmek için önce problem matematiksel ifadelerle formüle edilir. Doğadaki bir büyüklüğün başka büyüklüklere göre değişim hızı türev olarak ifade edildiğinden, farklı değişim hızlarına karşılık farklı türevler bulunduran bağıntılarla karşılaşırız. Bir f fonksiyonunun, n pozitif bir tamsayı olmak üzere n . mertebeden türevinin; $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ olduğunu biliyoruz. Bazen problemler kesirli mertebeden türev veya integralleri içerebilir. 1695'te L'Hopital'ın Leibniz'e 'Eğer n pozitif bir tamsayı değil de bir kesir olursa $D^n f$ ifadesinden ne anlaşılır?' sorusunu sormasıyla başlayan kesirli hesaplama tekniği 300 yıldan daha fazla zamandır üzerine çalışılan bir konu olmuştur.

Keyfi α reel sayısı için kesirli türev notasyonu, Davis tarafından ${}_a D_t^\alpha f(t)$ şeklinde kullanılmıştır. Burada a ve t indisleri limit değerleridir. Bu uç noktalar kesirli türevlerin reel problemlere uygulamalarında belirsizlikten kurtulmada yardımcı olur.

Kesirli (keyfi mertebeden) integral kavramı için ayrı bir notasyon kullanmayacağız. $\beta > 0$ olmak üzere kesirli mertebeden integrali; ${}_a D_t^{-\beta} f(t)$ ile göstereceğiz.

Kesirli türev ve integral konusu matematiksel analizin bir kolu olup, türev ve integralin tam olmayan derecelere genişletilmiş şeklidir. Kesirli türev ve integralin uygulamalarına fizik, kimya ve mühendislik bilimlerinde sıkça karşılaşılmaktadır. Ekonomi, finans, deprem bilimleri gibi alanlara uygulamaları ise, şüphesiz çok ilginç olacaktır.

Bunlara ek olarak; iletim hatları teorisi, izafiyet teorisi, elektromanyetik teorisi, esneklik teorisi, ısı transferi, Schrödinger denklemi, dalga denklemi, malzeme birimi, sıvıların kimyasal analizi, insan kemiğinde yayılan ultrasonik dalgalar, ses dalgaları, mekanik problemler, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketi, elektrokimyasal kinetikler vb. birçok uygulamada da kesirli analizden yararlanılmıştır.

Bu konu Leibniz'in yanı sıra Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Holmgren, Lagrange, Grünwald ve Laurent gibi bir çok ünlü bilim insanının da dikkatini çekmiş ve çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bu alandaki ilk sistematik çalışmalar ise 19. yüzyılın başlangıcında ve ortalarında kaydedilmiştir.

Başlangıcından bu yana hızla artan bir biçimde gelişen kesirli hesap tekniği, günümüzde hem teoride hem de uygulamada önemli ölçüde kullanılmaktadır. Bu tekniğin

matematik uygulamalarının çoğu 20.y.y. bitmeden ortaya konmuştur. Weyl (1917), Hardy (1917), Littlewood (1925), Kober (1940) ve Kutner (1953), Lebesgue ve Lipschitz'in geliştirdikleri fonksiyonların diferintegrallerinin özelliklerini incelemişlerdir. Erdelyi (1939) ve Osler (1970), keyfi fonksiyonları içeren diferintegrallerin tanımlarını vermişlerdir. Riesz (1949), çok değişkenli fonksiyonlar için kesirli integral teorisi geliştirmiştir. Erdelyi (1964), integral denklemler için kesirli hesap tekniğine başvurmuştur ve Higgins (1967), diferansiyel denklemleri çözmek için kesirli integral operatörlerini kullanmıştır[1-13].



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran denklemlere diferensiyel denklem denir [14].

Tanım 2.2. $\sum_{i=1}^n a_i(x)y^{(n)} + a_0(x)y = f(x)$ biçiminde yazılabilen diferensiyel denklemlere lineer diferensiyel denklem denir.

Birinci mertebeden diferensiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ile onun türevine göre lineerse o diferensiyel denkleme birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem denir. Lineer diferensiyel denklemlerin genel yazılışı,

$$P(x)y' + Q(x)y + R(x) = 0,$$

şeklindedir. Burada P, Q, R sürekli fonksiyonlar olup, P 'nin belli bir aralığın bütün x değerleri için sıfır olmadığı düşünülerek denklem,

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q(x) = \frac{-R(x)}{P(x)},$$

olmak üzere

$$y' + p(x)y = q(x),$$

şeklinde yazılabilir [14].

Tanım 2.3. $\sum_{i=1}^n a_i(x)y^{(n)} + a_0(x)y = 0$ biçiminde tanımlanan diferensiyel denkleme homojen diferensiyel denklem, aksi halde homojen olmayan diferensiyel denklem denir [14].

Tanım 2.4. (Gamma Fonksiyonu)

$\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu integral yardımıyla

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

şeklinde tanımlanır, öyle ki $\text{Re}(z)$ kompleks düzleminin sağ yarı kısmına yakınsar.

İntegral yardımıyla $\Gamma(z+1)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt, \\ &= \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z),\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)\Gamma(z-1) = z(z-1)\dots 3.2.1 = z!$$

elde edilir. Bu nedenle bu fonksiyona *faktöriyel fonksiyon* ismi de verilir.

Bazı önemli değerler ise,

$\Gamma(-3/2) = (4/3)\sqrt{\pi}$	$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(-1) = \pm\infty$	$\Gamma(3/2) = (1/2)\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$	$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma(0) = \pm\infty$	$\Gamma(5/2) = (3/4)\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(3) = 2$

şeklindedir [5].

Tanım 2.5. (Beta Fonksiyonu)

Beta fonksiyonu

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0)$$

integrali yardımıyla tanımlanır. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p, q) \Leftrightarrow B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

bağıntısı vardır [5].

Tanım 2.6. (Grünwald Letnikov Kesirli Türevi)

$p > 0$ bir reel sayı, her sonlu $[a, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir ve $m \in \mathbb{Z}, m < p < m+1$ şartını sağlayan en küçük değer olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p katlı Grünwald - Letnikov kesirli integrali;

$${}^{GL}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau,$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun p . mertebeden Grünwald - Letnikov kesirli türevi ise;

$${}^{GL}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklindedir [5].

Tanım 2.7. (Riemann-Liouville Tanımı)

$p > 0$ reel sayı, her sonlu $[a, t]$ aralığında f fonksiyonu sürekli ve integrallenebilir ve $k \in \mathbb{Z}^+$, $k-1 \leq p < k$ şartını sağlayan en küçük değer olsun. f fonksiyonunun p katlı Riemann - Liouville kesirli integrali;

$${}^{RL}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau,$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun p . mertebeden Riemann - Liouville kesirli türevi ise;

$${}^{RL}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) dt,$$

biçiminde tanımlanır [5].

Tanım 2.8. (Caputo Kesirli Türevi)

m , $m-1 \leq p < m$ olacak şekilde pozitif tamsayı, p herhangi bir pozitif tamsayı ve f fonksiyonu ise m defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun p 'inci mertebeden Caputo kesirli türevi

$${}^C_a D_t^{(p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+1-m}} d\tau,$$

ile tanımlanır [5].

Tanım 2.9. (Polhammer Sembolü)

$z \in \mathbb{C}$ ve negatif olmayan $n \in \mathbb{N}_0$ tamsayısı için

$$(z)_0 = 1$$

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$$

biçiminde tanımlanan $(z)_n$ matemaiksel ifadesine *polhammer sembolü* denir.

İntegral yardımıyla Gamma fonksiyonunu

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad , \quad R(z) > 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ilişki $R(z) \leq 0$ yarı düzleminde

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \Leftrightarrow (z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)},$$

yardımla genişletilebilir [15].

Tanım 2.10. (Gauss Hipergeometrik Seri)

α, β reel yada kompleks sabitler, γ sıfırdan farklı negatif olmayan sabit olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots$$

olarak ifade edilen seriye *Gauss hipergeometrik seri* yada *hipergeometrik seri* denir.

Ayrıca

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanabilir ki buradaki $(\alpha)_n$ ifadesi Polchammer sembolüdür. Hipergeometrik serinin genelleştirilmiş hali

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!},$$

şeklinde yazılabilir. Hipergeometrik seri $|z| < 1$ için yakınsak, $|z| > 1$ için ıraksak, $|z| = 1$ için $\gamma > \alpha + \beta$ olduğunda mutlak yakınsak, $z = -1$ için $\gamma > \alpha + \beta - 1$ olduğunda yakınsaktır [15].

2.1. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri

2.1.1. Lineerlik

$f(z)$ ve $g(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_v ve g_v türevleri mevcutsa, bu durumda;

$$(h_1 f(z) + h_2 g(z))_v = h_1 f_v(z) + h_2 g_v(z), \quad (2.1)$$

Eşitliği sağlanır. Burada, $\nu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ ve h_1, h_2 sabitlerdir [5].

2.1.2. Homojenlik

Herhangi bir C sabiti için

$$\frac{d^\nu(Cf)}{d(x-a)^\nu} = C \frac{d^\nu f}{d(x-a)^\nu},$$

eşitliği sağlanır [1].

2.1.3. Birleşme Özelliği

$$D^\nu D^\mu = D^\mu D^\nu, \quad D^\nu D^\mu = D^{\nu+\mu}, \quad D^\nu f = g \rightarrow f = D^{-\nu} g,$$

eşitlikleri belirli durumlarda geçerlidir. ν ve μ pozitif tamsayılar olmak üzere $\nu - \mu < 0$ olduğu zaman,

$${}_a D_t^\nu [{}_a D_t^{-\mu} f(t)] = {}_a D_t^{\nu-\mu},$$

durumu geçerlidir. Fakat önce türevin sonra integralin alındığı durumlarda ise,

$${}_a D_t^{-\mu} [{}_a D_t^\nu f(t)] = {}_a D_t^{\nu-\mu} f(t) - \sum_{k=\mu-\nu}^{\mu-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(\nu+k-\mu)}(a),$$

eşitliği geçerlidir.

Ayrıca

$$(e^{\lambda z})_\nu = \lambda^\nu e^{\lambda z} \quad (\lambda \neq 0; \nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}), \quad (2.2)$$

$$(e^{-\lambda z})_\nu = e^{-i\pi\nu} \lambda^\nu e^{-\lambda z} \quad (\lambda \neq 0; \nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}), \quad (2.3)$$

$$(z^\lambda)_\nu = e^{-i\pi\nu} \frac{\Gamma(\nu-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} z^{\lambda-\nu}, \quad \left(\nu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}; \left| \frac{\Gamma(\nu-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} \right| < \infty \right), \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, λ değeri sabittir [1,3, 16].

2.1.4. İndis Kuralı

$f(z)$ ve $g(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $(f_\nu)_\mu$ ve $(f_\mu)_\nu$ türevleri mevcutsa, bu durumda;

$$(f_\nu(z))_\mu = f_{\nu+\mu}(z) = (f_\mu(z))_\nu \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\nu, \mu \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$ ve $\left| \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)} \right| < \infty$ dur [5].

2.1.5. Genelleştirilmiş Leibniz Kuralı

$f(z)$ ve $g(z)$ analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer f_ν ve g_ν türevleri mevcutsa, bu durumda;

$$(f(z) \cdot g(z))_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-m)\Gamma(m+1)} f_{\nu-m}(z) g_m(z), \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\nu \in \mathbb{R}, \left| \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-m)\Gamma(m+1)} \right| < \infty$ dur [5].

Lemma 2.1. $a \neq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- (i) $(e^{az})_\gamma = a^\gamma e^{az},$
- (ii) $(e^{-az})_\gamma = e^{-i\pi\gamma} a^\gamma e^{-az},$
- (iii) $(\cos az)_\gamma = a^\gamma \cos\left(az + \frac{\pi}{2}\gamma\right),$
- (iv) $(\sin az)_\gamma = a^\gamma \sin\left(az + \frac{\pi}{2}\gamma\right),$

eşitlikleri sağlanır [17].

3. BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ

Bu çalışmada $\varphi \in F = \{\varphi : 0 \neq |\varphi_\gamma| < \infty, \gamma \in \mathbb{R}\}$, $\varphi = \varphi(z)$ olmak üzere

$$\varphi_\gamma - \varphi a^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{a(z-b)} \right) = 0, \quad (a(z-b) \neq 0), \quad (3.1)$$

$$\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} a - \varphi_\gamma \left(\frac{a^2}{a(z-b) + \gamma} \right) = 0, \quad (a(z-b) + \gamma \neq 0), \quad (3.2)$$

şeklindeki homojen kesirli diferintegral denklemlerin

$$\varphi = (z-b)e^{az}, \quad (3.3)$$

ve

$$\varphi_{\gamma+1} - \varphi_\gamma \frac{\gamma+1}{z-b} = (\cos z)_\gamma \left[(z-b) + \frac{\gamma^2 + \gamma}{z-b} \right] \quad ((z-b) \neq 0) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \frac{\gamma+2}{z-b} + \varphi_\gamma \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} = \\ -(\sin z)_\gamma (z-b) - (\cos z)_\gamma \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} \quad ((z-b) \neq 0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklindeki homojen olmayan kesirli diferintegral denklemlerin

$$\varphi = (z-b) \sin z \quad (3.6)$$

şeklinde özel çözümü olduğunu göstereceğiz.

Fakat daha önce (3.3) özel çözümünden (3.1) ve (3.2) denklemlerini, (3.6) özel çözümünden (3.4) ve (3.5) denklemlerini elde etmeye çalışacağız [17].

Teorem 3.1.

$$\varphi = \varphi(z) = e^{az} (z-b), \quad (a(z-b) \neq 0) \quad (3.7)$$

olsun. Kesirli hesap yardımıyla (3.7) fonksiyonu ve γ sabiti için

$$(i) \quad \varphi_\gamma - \varphi a^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{a(z-b)} \right) = 0, \quad (a(z-b) \neq 0) \quad (3.8)$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma > 0 \text{ için kesirli diferensiyel denklem} \\ \gamma < 0 \text{ için kesirli integral denklem} \end{array} \right)$$

ve

$$(ii) \quad \varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1}a - \varphi_{\gamma} \left(\frac{a^2}{a(z-b) + \gamma} \right) = 0, \quad (a(z-b) + \gamma \neq 0) \quad (3.9)$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma > 0 \text{ için kesirli diferensiyel denklem} \\ \gamma < -2 \text{ için kesirli integral denklem} \\ -2 < \gamma < 0 \text{ için kesirli differintegral denklem} \end{array} \right)$$

şeklinde homojen kesirli differintegral denklemler elde edilir.

İspat – (i) (3.7)'nin her iki yanına N^{γ} operatörü uygularsak, (2.6) ve Lemma 2.1 den

$$N^{\gamma} \varphi = N^{\gamma} [e^{az} (z-b)]$$

$$\varphi_{\gamma} = [e^{az} (z-b)]_{\gamma}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{k! \Gamma(\gamma+1-k)} (e^{az})_{\gamma-k} (z-b)_k \\ &= (e^{az})_{\gamma} (z-b) + \gamma (e^{az})_{\gamma-1} \end{aligned}$$

$$\varphi_{\gamma} = a^{\gamma} e^{az} (z-b) + \gamma a^{\gamma-1} e^{az} \quad (3.10)$$

bulunur. (3.7) ve (3.10)'dan

$$\varphi_{\gamma} - \varphi \left(a^{\gamma} + \frac{\gamma a^{\gamma-1}}{z-b} \right) = 0,$$

olacak şekilde (3.8) denklemi elde edilir.

(ii) (3.10)'dan

$$\varphi_{\gamma} = a^{\gamma} e^{az} \left(z-b + \frac{\gamma}{a} \right), \quad (3.11)$$

olur. Buradan

$$\varphi_{\gamma+1} = a^{\gamma+1} e^{az} \left(z-b + \frac{\gamma+1}{a} \right), \quad (3.12)$$

ve

$$\varphi_{\gamma+2} = a^{\gamma+2} e^{az} \left(z-b + \frac{\gamma+2}{a} \right), \quad (3.13)$$

bulunur. (3.9)'un sol tarafına (3.11), (3.12) ve (3.13)'ü yazarsak

$$\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1}a - \varphi_{\gamma} \left(\frac{a^2}{a(z-b) + \gamma} \right) = a^{\gamma+2} e^{az} \left(z-b + \frac{\gamma+2}{a} \right),$$

$$\begin{aligned}
& -a^{\gamma+2}e^{az}\left(z-b+\frac{\gamma+1}{a}\right) - \frac{a^2}{a(z-b)+\gamma}a^{\gamma}e^{az}\left(z-b+\frac{\gamma}{a}\right) \\
& = a^{\gamma+2}e^{az}\frac{1}{a} - \frac{a^{\gamma+2}}{a(z-b)+\gamma}e^{az}\left[\frac{a(z-b)+\gamma}{a}\right] = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.7) fonksiyonu (3.9) denkleminin özel çözümüdür.

Teorem 3.2.

$$\varphi = \varphi(z) = \sin z(z-b), \quad (z-b) \neq 0 \quad (3.14)$$

olsun. N - kesirli hesap operatörü yardımı ile (3.14) fonksiyonu için

$$(i) \quad \varphi_{\gamma+1} - \varphi_{\gamma} \frac{\gamma+1}{z-b} = \left(z-b + \frac{\gamma^2+\gamma}{z-b} \right) (\cos z)_{\gamma} \quad (3.15)$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma > 0 \text{ için kesirli diferensiyel denklem} \\ \gamma < -1 \text{ için kesirli integral denklem} \\ -1 < \gamma < 0 \text{ için kesirli differintegral denklem} \end{array} \right)$$

ve

$$\begin{aligned}
(ii) \quad & \varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \frac{\gamma+2}{z-b} + \varphi_{\gamma} \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} \\
& = -(z-b)(\sin z)_{\gamma} - \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} (\cos z)_{\gamma}
\end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma > 0 \text{ için kesirli diferensiyel denklem} \\ \gamma < -2 \text{ için kesirli integral denklem} \\ -2 < \gamma < 0 \text{ için kesirli differintegral denklem} \end{array} \right)$$

şeklinde homojen olmayan kesirli differintegral denklemler elde ederiz.

İspat – (i) (3.14)'ün her iki yanına N^{γ} operatörü uygularsak (2.6) ve Lemma 2.1 den

$$\begin{aligned}
\varphi_{\gamma} & = [\sin z.(z-b)]_{\gamma} \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{k!\Gamma(\gamma+1-k)} (\sin z)_{\gamma-k} (z-b)_k \\
& = (\sin z)_{\gamma} (z-b) + \gamma (\sin z)_{\gamma-1} (z-b)_1 \\
\varphi_{\gamma} & = (\sin z)_{\gamma} (z-b) + \gamma (\sin z)_{\gamma-1}
\end{aligned} \quad (3.17)$$

elde ederiz. (3.17)'den

$$\varphi_{\gamma+1} = (\sin z)_{\gamma+1} (z-b) + (\gamma+1)(\sin z)_{\gamma}, \quad (3.18)$$

ve

$$\varphi_{\gamma+2} = (\sin z)_{\gamma+2} (z-b) + (\gamma+2)(\sin z)_{\gamma+1}, \quad (3.19)$$

olur. (3.15)'in sol yanına (3.17) ve (3.18)'i yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma+1} - \varphi_{\gamma} \frac{\gamma+1}{z-b} &= (\sin z)_{\gamma+1} (z-b) + (\gamma+1)(\sin z)_{\gamma} - (\sin z)_{\gamma} (\gamma+1) - (\sin z)_{\gamma-1} \frac{\gamma(\gamma+1)}{z-b} \\ &= (\cos z)_{\gamma} (z-b) + (\cos z)_{\gamma} \frac{\gamma^2 + \gamma}{z-b} \\ \varphi_{\gamma+1} - \varphi_{\gamma} \frac{\gamma+1}{z-b} &= \left(z-b + \frac{\gamma^2 + \gamma}{z-b} \right) (\cos z)_{\gamma}, \end{aligned}$$

biçiminde (3.15) denklemini elde ederiz.

(ii) (3.16)'nın sol tarafına (3.17), (3.18) ve (3.19)'u yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \frac{\gamma+2}{z-b} + \varphi_{\gamma} \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} &= (\sin z)_{\gamma+2} (z-b) + (\gamma+2)(\sin z)_{\gamma+1} \\ &\quad - \frac{\gamma+2}{z-b} \left[(\sin z)_{\gamma+1} (z-b) + (\gamma+1)(\sin z)_{\gamma} \right] \\ &\quad + \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)_2} \left[(\sin z)_{\gamma} (z-b) + \gamma(\sin z)_{\gamma-1} \right] \\ &= (\sin z)_{\gamma+2} (z-b) + (\sin z)_{\gamma-1} \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} \\ &= -(\sin z)_{\gamma} (z-b) - (\cos z)_{\gamma} \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2}, \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3. $\varphi \in F = \{ \varphi : 0 \neq \varphi_{\gamma} \mid < \infty \ \gamma \in \mathbb{R} \}, (\varphi = \varphi(z))$ olsun. O zaman

$$\varphi_{\gamma} - \varphi a^{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{a(z-b)} \right) = 0, \quad (a(z-b) \neq 0), \quad (3.20)$$

homojen kesirli differintegral denklemi

$$\varphi = e^{az} (z-b) , \quad (3.21)$$

şeklinde özel çözüme sahiptir

İspat. $\gamma \in \mathbb{R}$ olduğundan (3.20)'de $\gamma = 1$ alırsak

$$\varphi_1 - \varphi \left(a + \frac{1}{z-b} \right) = 0$$

şeklinde birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklem elde edilir.

Buradan

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \int \left(a + \frac{1}{z-b} \right) dz$$

$$\ln \varphi = az + \ln(z-b)$$

$$\varphi = e^{az} (z-b) ,$$

özel çözümü elde edilir.

Teorem 3.4. $\varphi \in F = \{ \varphi : 0 \neq |\varphi_\gamma| < \infty , \gamma \in \mathbb{R} \}$, $(\varphi = \varphi(z))$ olsun. Bu durumda

$$\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} a - \varphi_\gamma \frac{a^2}{a(z-b) + \gamma} = 0, \quad (a(z-b) + \gamma \neq 0), \quad (3.22)$$

homojen kesirli differintegral denklemi (3.21) şeklinde özel çözüme sahiptir.

İspat. $\gamma \in \mathbb{R}$ olduğunda $\gamma = 0$ için (3.22) denklemi

$$\varphi_2 (z-b) - \varphi_1 a (z-b) - \varphi a = 0 , \quad (3.23)$$

şeklinde yazılır. (3.23) denkleminin her iki tarafına N^ν operatörü uygularsak

$$(\varphi_2 (z-b))_\nu - (\varphi_1 a (z-b))_\nu - (\varphi a)_\nu = 0 , \quad (3.24)$$

olur. Buradan (2.6) yardımıyla

$$\begin{aligned} (\varphi_2 (z-b))_\nu &= \sum_{k=0}^1 \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu+1-k)} (\varphi_2)_{\nu-k} (z-b)_k \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (\varphi_2)_\nu (z-b)_0 + \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)} (\varphi_2)_{\nu-1} (z-b)_1 \\ &= \varphi_{2+\nu} (z-b) + \nu \varphi_{1+\nu} , \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 a(z-b))_v &= a \left\{ \sum_{k=0}^1 \frac{\Gamma(v+1)}{k! \Gamma(v+1-k)} (\varphi_1)_{v-k} (z-b)_k \right\} \\
&= a \varphi_{1+v}(z-b) + av \varphi_v
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ve

$$(\varphi a)_v = a \varphi_v \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.25), (3.26), (3.27) eşitlikleri (3.24)'de yazılırsa

$$\varphi_{2+v}(z-b) + \varphi_{1+v}(v - a(z-b)) - \varphi_v(av + a) = 0 \tag{3.28}$$

$v'y i \quad av + a = 0$ olacak şekilde seçersek

$v = -1$ bulunur. (3.28) yeniden düzenlenirse,

$$\varphi_1(z-b) + \varphi(ab - az - 1) = 0$$

biçiminde birinci mertebeden değişkenleri ayrılabilen diferensiyel denklem elde edilir ve çözümü

$$\varphi = e^{az}(z-b)$$

olur. Dolayısıyla (3.21) fonksiyonu (3.22) denkleminin bir özel çözümüdür.

Teorem 3.5. $\varphi \in F = \{ \varphi : 0 \neq |\varphi_\gamma| < \infty, \gamma \in \mathbb{R} \}$, $(\varphi = \varphi(z))$ olsun. O zaman

$$\varphi_{\gamma+1} - \varphi_\gamma \frac{\gamma+1}{z-b} = \left(z-b + \frac{\gamma^2 + \gamma}{z-b} \right) (\cos z)_\gamma, \quad (z-b \neq 0) \tag{3.29}$$

homojen olmayan diferintegral denklemi

$$\varphi = (\sin z)(z-b) \tag{3.30}$$

şeklinde bir özel çözüme sahiptir.

İspat. $\gamma \in \mathbb{R}$ olduğundan $\gamma = 0$ için (3.29) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\varphi_1 - \varphi \frac{1}{z-b} = (z-b) \cos z$$

olur. Denklem birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem olup integral sabiti dikkate alınmadan çözümü

$$\varphi = e^{\int \frac{1}{z-b} dz} \left[\int (z-b) \cos z \cdot e^{-\int \frac{1}{z-b} dz} dz \right]$$

$$\begin{aligned}\varphi &= (z-b) \left[\int \cos z \, dz \right] \\ \varphi &= (z-b) \sin z\end{aligned},$$

şeklindedir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.6. $\varphi \in F = \{ \varphi : 0 \neq |\varphi_\gamma| < \infty, \gamma \in \mathbb{R} \}$, $(\varphi = \varphi(z))$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\varphi_{\gamma+2} - \varphi_{\gamma+1} \frac{\gamma+2}{z-b} + \varphi_\gamma \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} \\ = -(z-b)(\sin z)_\gamma - \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{(z-b)^2} (\cos z)_\gamma, \quad ((z-b) \neq 0)\end{aligned} \quad (3.31)$$

homojen olmayan differintegral denklemi (3.30) şeklinde bir özel çözüme sahiptir.

İspat. $\gamma \in \mathbb{R}$ olduğundan $\gamma = 0$ için (3.31) düzenlenirse

$$\varphi_2 - \varphi_1 \frac{2}{z-b} + \varphi \frac{2}{(z-b)^2} = -(z-b) \cdot \sin z$$

ve

$$\varphi_2 (z-b)^2 - \varphi_1 2(z-b) + \varphi 2 = -(\sin z)(z-b)^3 \quad (3.32)$$

bulunur. (3.32)'nin her iki yanına N^ν operatörü uygularsak

$$\left(\varphi_2 (z-b)^2 \right)_\nu - \left(\varphi_1 2(z-b) \right)_\nu + (\varphi 2)_\nu = \left(-(\sin z) \cdot (z-b)^3 \right)_\nu \quad (3.33)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\left(\varphi_2 (z-b)^2 \right)_\nu &= \sum_{k=0}^2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu+1-k)} (\varphi_2)_{\nu-k} \left((z-b)^2 \right)_k \\ &= \varphi_{2+\nu} (z-b)^2 + \varphi_{1+\nu} 2\nu (z-b) + \varphi_\nu \nu(\nu-1), \\ \left(\varphi_1 2(z-b) \right)_\nu &= 2(\varphi_1 (z-b))_\nu \\ &= 2(\varphi_{1+\nu} (z-b) + \varphi_\nu \nu),\end{aligned}$$

ve

$$(\varphi \cdot 2)_\nu = \varphi_\nu 2,$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.33)'de yerlerine yazılırsa

$$\varphi_{2+\nu} (z-b)^2 + \varphi_{1+\nu} (z-b)(2\nu-2) + \varphi_\nu (\nu(\nu-1) - 2\nu + 2) = \left(-(\sin z)(z-b)^3 \right)_\nu \quad (3.34)$$

bulunur. ν 'yi

$$\nu^2 - 3\nu + 2 = 0$$

olacak şekilde seçelim. Buradan $\nu_1 = 1, \nu_2 = 2$ olur.

(I) $\nu_1 = 1$ için (3.34)'den

$$\begin{aligned}\varphi_3(z-b)^2 &= -\left((\sin z)(z-b)^3\right)_1 = -\left(\cos z(z-b)^3 + 3\sin z(z-b)^2\right) \\ \varphi_3 &= -(\cos z)(z-b) - 3(\sin z),\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\varphi = -\left((\cos z)(z-b)\right)_{-3} - 3(\sin z)_{-3}, \quad (3.35)$$

olur. İntegral ile (integral sabitleri dikkate alınmadan)

$$(\sin z)_{-3} = \cos z \quad (3.36)$$

$$\left((\cos z)(z-b)\right)_{-3} = -(z-b)\sin z - 3\cos z, \quad (3.37)$$

elde edilir. (3.36) ve (3.37) değerleri (3.35)'de yerine yazılırsa

$$\varphi = (z-b)\sin z,$$

özel çözümü elde edilir.

(II) $\nu = 2$ için (3.34)'den

$$\varphi_4(z-b)^2 + \varphi_3 2(z-b) = -\left((\sin z)(z-b)^3\right)_2, \quad (3.38)$$

bulunur.

$$\varphi_3 = \phi = \phi(z) \quad (3.39)$$

almakla (3.38) denkleminde

$$\phi_1(z-b)^2 + \phi 2(z-b) = -\left((\sin z)(z-b)^3\right)_2,$$

şeklinde birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir.

$$\left[\phi(z-b)^2\right]_1 = -\left[(\sin z)(z-b)^3\right]_2,$$

olup integral yardımıyla

$$\begin{aligned}\phi(z-b)^2 &= -\left[(\sin z)(z-b)^3\right]_1 \\ &= -\left[\cos z(z-b)^3 + 3\sin z(z-b)^2\right]\end{aligned}$$

$$\phi = -[\cos z(z-b) + 3\sin z]$$

elde edilir. (3.39)'dan

$$\begin{aligned}\varphi = \phi_{-3} &= -[\cos z(z-b)]_{-3} - 3(\sin z)_{-3} \\ &= \sin z(z-b)\end{aligned}$$

özel çözümü bulunur.



4. KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA CHEBYSHEV DENKLEMİNİN AÇIK ÇÖZÜMLERİ

4.1. Homojen Olmayan Denklemin Açık Çözümleri

Teorem 4.1 $\varphi \in \{\varphi : 0 \neq |\varphi_\alpha| < \infty, \alpha \in R\}$ ve $f \in \{\varphi : 0 \neq |f_\alpha| < \infty, \alpha \in R\}$ olsun.

$\varphi_0 = \varphi = \varphi(z)$, $f = f(z)$, $\varphi_n = \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}$, $(n = 0, 1, 2)$ ve ν sabit olmak üzere

$$L[\varphi; z; \nu] = \varphi_2(z^2 - 1) + \varphi_1 z - \varphi \nu^2 = f \quad (z \neq \pm 1), \quad (4.1)$$

Chebyshev denkleminin

1. Grup

$$\varphi_{[1]} = \left(\left(f_\nu (z^2 - 1)^{\nu-1/2} \right)_{-1} (z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \right)_{-(1+\nu)}, \quad (4.2)$$

$$\varphi_{[2]} = \left((z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \left(f_\nu (z^2 - 1)^{\nu-1/2} \right)_{-1} \right)_{-(1+\nu)}, \quad (4.3)$$

$$\varphi_{[3]} = \left(\left(f_{-\nu} (z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \right)_{-1} (z^2 - 1)^{\nu-1/2} \right)_{\nu-1}, \quad (4.4)$$

$$\varphi_{[4]} = \left((z^2 - 1)^{\nu-1/2} \left(f_{-\nu} (z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \right)_{-1} \right)_{\nu-1}, \quad (4.5)$$

2. Grup

$$\varphi_{[5]} = (z^2 - 1)^{1/2} \left[\left(\left(f (z^2 - 1)^{-1/2} \right)_{\nu-1} (z^2 - 1)^{\nu-1/2} \right)_{-1} (z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \right]_{-\nu}, \quad (4.6)$$

$$\varphi_{[6]} = (z^2 - 1)^{1/2} \left[(z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \left(\left(f (z^2 - 1)^{-1/2} \right)_{\nu-1} (z^2 - 1)^{\nu-1/2} \right)_{-1} \right]_{-\nu}, \quad (4.7)$$

$$\varphi_{[7]} = (z^2 - 1)^{1/2} \left[\left(\left(f (z^2 - 1)^{-1/2} \right)_{-\nu-1} (z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \right)_{-1} (z^2 - 1)^{\nu-1/2} \right]_{\nu}, \quad (4.8)$$

$$\varphi_{[8]} = (z^2 - 1)^{1/2} \left[(z^2 - 1)^{\nu-1/2} \left(\left(f (z^2 - 1)^{-1/2} \right)_{-\nu-1} (z^2 - 1)^{-(\nu+1/2)} \right)_{-1} \right]_{\nu}, \quad (4.9)$$

3. Grup

(4.10)

$$\varphi_{[9]} = (z-1)^{1/2} \left[\left(\left(f(z-1)^{-1/2} \right)_{v-1/2} (z-1)^v (z+1)^{v-1} \right)_{-1} (z-1)^{-(v+1)} (z+1)^{-v} \right]_{-(v+1/2)}$$

$$\varphi_{[10]} = (z-1)^{1/2} \left[(z-1)^{-(v+1)} (z+1)^{-v} \left(\left(f(z-1)^{-1/2} \right)_{v-1/2} (z-1)^v (z+1)^{v-1} \right)_{-1} \right]_{-(v+1/2)} \quad (4.11)$$

(4.12)

$$\varphi_{[11]} = (z-1)^{1/2} \left[\left(\left(f(z-1)^{-1/2} \right)_{-(v+1/2)} (z-1)^{-v} (z+1)^{-(v+1)} \right)_{-1} (z-1)^{v-1} (z+1)^v \right]_{v-1/2}$$

$$\varphi_{[12]} = (z-1)^{1/2} \left[(z-1)^{v-1} (z+1)^v \left(\left(f(z-1)^{-1/2} \right)_{-(v+1/2)} (z-1)^{-v} (z+1)^{-(v+1)} \right)_{-1} \right]_{v-1/2} \quad (4.13)$$

4. Grup

$$\varphi_{[13]} = (z+1)^{1/2} \left[\left(\left(f(z+1)^{-1/2} \right)_{v-1/2} (z-1)^{v-1} (z+1)^v \right)_{-1} (z-1)^{-v} (z+1)^{-(v+1)} \right]_{-(v+1/2)} \quad (4.14)$$

$$\varphi_{[14]} = (z+1)^{1/2} \left[(z-1)^{-v} (z+1)^{-(v+1)} \left(\left(f(z+1)^{-1/2} \right)_{v-1/2} \left((z-1)^{v-1} (z+1)^v \right)_{-1} \right) \right]_{-(v+1/2)} \quad (4.15)$$

$$\varphi_{[15]} = (z+1)^{1/2} \left[\left(\left(f(z+1)^{-1/2} \right)_{-(v+1/2)} \cdot (z-1)^{-(v+1)} (z+1)^{-v} \right)_{-1} (z-1)^v (z+1)^{v-1} \right]_{v-1/2} \quad (4.16)$$

$$\varphi_{[16]} = (z+1)^{1/2} \left[(z-1)^v (z+1)^{v-1} \left(\left(f(z+1)^{-1/2} \right)_{-(v+1/2)} (z-1)^{-(v+1)} (z+1)^{-v} \right)_{-1} \right]_{v-1/2} \quad (4.17)$$

şeklinde özel çözümleri vardır.

İspat: 1.Grup N^α operatörü

$$N^\alpha (\varphi_m z^n) = (\varphi_m z^n)_\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-k)\Gamma(k+1)} (\varphi_m)_{\alpha-k} (z^n)_k, \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (4.1) in her iki tarafına bu operatörü uygularsak

$$N^\alpha [\varphi_2 (z^2 - 1)] + N^\alpha (\varphi_1 z) - N^\alpha (\varphi v^2) = N^\alpha (f) \quad (4.19)$$

olur. (4.18) yardımıyla

$$\begin{aligned} N^\alpha [\varphi_2 (z^2 - 1)] &= \sum_{k=0}^2 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-k)\Gamma(k+1)} (\varphi_2)_{\alpha-k} (z^2 - 1)_k, \\ &= \varphi_{2+\alpha} (z^2 - 1) + \varphi_{1+\alpha} 2z\alpha + \varphi_\alpha \alpha^2 - \varphi_\alpha \alpha \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$N^\alpha(\varphi_1 z) = \sum_{k=0}^1 \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-k)\Gamma(k+1)} (\varphi_1)_{\alpha-k} (z)_k$$

$$= \varphi_{1+\alpha} z + \varphi_\alpha \alpha \quad (4.21)$$

$$N^\alpha(\varphi v^2) = \varphi_\alpha v^2 \quad (4.22)$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikleri (4.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\varphi_{2+\alpha}(z^2-1) + \varphi_{1+\alpha} z(2\alpha+1) + \varphi_\alpha(\alpha^2-v^2) = f_\alpha \quad (f_\alpha \neq 0) \quad (4.23)$$

elde ederiz. Diğer taraftan α 'yı

$$\alpha^2 - v^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm v$$

olacak şekilde seçelim.

i. $\alpha = v$ için (4.23) eşitliği

$$\varphi_{2+v}(z^2-1) + \varphi_{1+v} z(2v+1) = f_v, \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır. Kabul edelim ki

$$\varphi_{1+v} = \psi = \psi(z), \quad \varphi = \psi_{-(1+v)} \quad (4.25)$$

olsun. Bu durumda (4.24) eşitliğimizi

$$\psi_1(z^2-1) + \psi z(2v+1) = f_v, \quad (4.26)$$

$$\psi_1 + \psi \frac{z}{z^2-1}(2v+1) = f_v(z^2-1)^{-1},$$

şeklinde yazarız. Denklem birinci mertebeden lineer bir diferensiyel denklemdir. Çözümü

$$\psi = \left[\int f_v(z^2-1)^{-1} e^{\int \frac{z}{z^2-1}(2v+1)dz} dz \right] e^{-\int \frac{z}{z^2-1}(2v+1)dz},$$

$$\psi = \left(f_v(z^2-1)^{\frac{2v-1}{2}} \right)_{-1} (z^2-1)^{-\left(\frac{2v+1}{2}\right)}, \quad (4.27)$$

şeklindedir. Diğer taraftan (4.25) kabulü ve (4.27) ile (4.2) çözümünü elde ederiz.

$$(4.2) \text{ de parantez içindeki çarpım yer değiştirirse } -(1+v) \notin \mathbb{Z}_0^+ \text{ için farklı } (4.3)$$

çözümü elde edilir. Yani $\varphi_{[1]} \neq \varphi_{[2]}$ dir.

ii. $\alpha = -v$ olsun. (4.23) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\varphi_{2-v}(z^2-1) + \varphi_{1-v} z(-2v+1) = f_{-v}, \quad (4.28)$$

eşitliği elde edilir. Kabul edelim ki

$$\varphi_{1-v} = \omega = \omega(z), \quad \varphi = \omega_{-(1-v)} \quad , \quad (4.29)$$

olsun. Bu durumda (4.28) eşitliğimizi

$$\begin{aligned} \omega_1(z^2 - 1) + \omega z(-2v + 1) &= f_{-v} \quad , \\ \omega_1 + \omega \frac{z}{z^2 - 1}(-2v + 1) &= f_{-v}(z^2 - 1)^{-1} \quad , \end{aligned} \quad (4.30)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemdir.

Denklemin Çözümü

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\int f_{-v}(z^2 - 1)^{-1} e^{\int \frac{z}{z^2 - 1}(-2v + 1) dz} dz \right] e^{-\int \frac{z}{z^2 - 1}(-2v + 1) dz} \quad , \\ \omega &= \left(f_{-v}(z^2 - 1)^{\frac{-2v + 1}{2}} \right)_{-1} (z^2 - 1)^{\left(\frac{-2v + 1}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

şeklindedir. Böylece (4.29) kabulü ve (4.31) ile (4.4) çözümünü elde ederiz.

(4.4) çözümünde parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $(v - 1) \notin \mathbb{Z}_0^+$ olmak üzere (4.4)' den farklı (4.5) çözümü elde edilir.

2.Grup

$$\varphi = (z^2 - 1)^\lambda \phi, \quad \phi = \phi(z), \quad (z \neq \pm 1) \quad (4.32)$$

olsun.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\lambda z(z^2 - 1)^{\lambda - 1} \phi + (z^2 - 1)^\lambda \phi_1 \\ \varphi_2 &= 4\lambda(\lambda - 1)z^2(z^2 - 1)^{\lambda - 2} \phi + 4\lambda z(z^2 - 1)^{\lambda - 1} \phi_1 + 2\lambda(z^2 - 1)^{\lambda - 1} \phi + (z^2 - 1)^\lambda \phi_2, \end{aligned}$$

olur. φ ve φ_1, φ_2 türevlerini (4.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 4\lambda(\lambda - 1)z^2(z^2 - 1)^{\lambda - 1} \phi + 4\lambda z(z^2 - 1)^\lambda \phi_1 + 2\lambda(z^2 - 1)^\lambda \phi + (z^2 - 1)^{\lambda + 1} \phi_2 \\ + 2\lambda z^2(z^2 - 1)^{\lambda - 1} \phi + z(z^2 - 1)^\lambda \phi_1 - v^2(z^2 - 1)^\lambda \phi = f \\ \phi_2(z^2 - 1) + \phi_1 z(4\lambda + 1) + \phi \left[(4\lambda^2 - v^2) + \frac{2\lambda(2\lambda - 1)}{z^2 - 1} \right] = f(z^2 - 1)^{-\lambda}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $2\lambda(2\lambda - 1) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1/2$$

olur.

1.) $\lambda = 0$ durumunda Grup-1 çözümü ile aynı sonucu elde ederiz.

2.) $\lambda = 1/2$ olsun. (4.33) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_2(z^2-1) + \phi_1 3z + \phi(1-v^2) = f(z^2-1)^{-1/2} \quad (4.34)$$

elde ederiz. (4.34) denkleminin her iki yanına N^α operatörünü uygularsak

$$N^\alpha [\phi_2(z^2-1)] + N^\alpha(\phi_1 3z) + N^\alpha[\phi(1-v^2)] = N^\alpha [f(z^2-1)^{-1/2}] \quad (4.35)$$

olur.

$$N^\alpha [\phi_2(z^2-1)] = \phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha} 2z\alpha + \phi_\alpha \alpha(\alpha-1), \quad (4.36)$$

$$N^\alpha(\phi_1 3z) = 3z\phi_{1+\alpha} + 3\alpha\phi_\alpha, \quad (4.37)$$

olup bu değerler (4.35) de yerine yazılırsa

$$\phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha} z(2\alpha+3) + \phi_\alpha [(\alpha+1)^2 - v^2] = [f(z^2-1)^{-1/2}]_\alpha, \quad (4.38)$$

elde edilir.

α 'yı $(\alpha+1)^2 - v^2 = 0$ olacak şekilde seçelim. Böylece $\alpha = \pm v - 1$ olur.

i. $\alpha = v - 1$ olsun. (4.38) denkleminde yerinde yerine yazarsak

$$\phi_{1+v}(z^2-1) + \phi_v z(2v+1) = [f(z^2-1)^{-1/2}]_{v-1}, \quad (4.39)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\phi_v = V = V(z), \quad \phi = V_{-v}, \quad (4.40)$$

olsun. Bu durumda (4.39) denkleminde

$$V_1 + V \frac{z}{(z^2-1)}(2v+1) = [f(z^2-1)^{-1/2}]_{v-1} (z^2-1)^{-1}, \quad (4.41)$$

şeklinde lineer diferensiyel denklem elde edilir. (4.41) denkleminin çözümü

$$V = \left[\int [f(z^2-1)^{-1/2}]_{v-1} (z^2-1)^{-1} e^{\int \frac{z}{z^2-1}(2v+1)dz} dz \right] e^{-\int \frac{z}{z^2-1}(2v+1)dz}, \quad (4.42)$$

$$V = \left\{ [f(z^2-1)^{-1/2}]_{v-1} (z^2-1)^{v-1/2} \right\}_{-1} (z^2-1)^{-(v+1/2)},$$

biçimindedir. (4.40)' dan

$$\phi = \left[\left\{ [f(z^2-1)^{-1/2}]_{v-1} (z^2-1)^{v-1/2} \right\}_{-1} (z^2-1)^{-(v+1/2)} \right]_{-v}, \quad (4.43)$$

elde edilir. (4.32) ve (4.43) yardımıyla (4.6) çözümünü elde ederiz ve bu çözüm (4.1) denklemini sağlar. (4.43) denkleminde en dıştaki köşeli parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $-v \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.6)' dan farklı (4.7) çözümü elde edilir.

ii. $\alpha = -v - 1$ olsun. Bu durumda (4.38) denkleminde

$$\phi_{1-v}(z^2 - 1) + \phi_{-v}z(-2v+1) = \left[f(z^2 - 1)^{-1/2} \right]_{-v-1} \quad (4.44)$$

elde ederiz.

$$\phi_{-v} = W = W(z), \quad \phi = W_v \quad (4.45)$$

olduğunu kabul edelim. Böylece (4.44) denklemi

$$W_1 + W \frac{z}{(z^2 - 1)}(-2v+1) = \left[f(z^2 - 1)^{-1/2} \right]_{-v-1} (z^2 - 1)^{-1} \quad (4.46)$$

şeklinde birinci mertebeden lineer diferensiyel denkleme dönüşür. (4.46) denkleminin çözümü

$$W = \left[\int \left[f(z^2 - 1)^{-1/2} \right]_{-v-1} (z^2 - 1)^{-1} e^{\int \frac{z}{z^2-1}(-2v+1)dz} dz \right] e^{-\int \frac{z}{z^2-1}(-2v+1)dz}$$

$$W = \left\{ \left[f(z^2 - 1)^{-1/2} \right]_{-v-1} (z^2 - 1)^{-v-1/2} \right\}_{-1} (z^2 - 1)^{v-1/2} \quad (4.47)$$

şeklindedir. (4.45) yardımıyla

$$\phi = \left[\left\{ \left[f(z^2 - 1)^{-1/2} \right]_{-v-1} (z^2 - 1)^{-v-1/2} \right\}_{-1} (z^2 - 1)^{v-1/2} \right]_v \quad (4.48)$$

elde edilir. (4.32) ve (4.48) ile (4.8) çözümünü elde ederiz. (4.48) denkleminde en dıştaki köşeli parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $v \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.8)' den farklı (4.9) çözümü elde edilir.

3. Grup

$$\varphi = (z-1)^\lambda \phi, \quad \phi = \phi(z), \quad (z \neq 1) \quad (4.49)$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_1 = \lambda(z-1)^{\lambda-1} \phi + (z-1)^\lambda \phi_1$$

$$\varphi_2 = \lambda(\lambda-1)(z-1)^{\lambda-2} \phi + 2\lambda(z-1)^{\lambda-1} \phi_1 + (z-1)^\lambda \phi_2$$

olur. φ ve φ_1, φ_2 türevlerini (4.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& \lambda(\lambda-1)(z-1)^{\lambda-1}(z+1)\phi + 2\lambda(z-1)^{\lambda}(z+1)\phi_1 + (z-1)^{\lambda+1}(z+1)\phi_2 \\
& + \lambda z(z-1)^{\lambda-1}\phi + z(z-1)^{\lambda}\phi_1 - v^2(z-1)^{\lambda}\phi = f \\
& \phi_2(z^2-1) + \phi_1[z(2\lambda+1)+2\lambda] + \phi\left[(\lambda^2-v^2) + \frac{\lambda(2\lambda-1)}{z-1}\right] = f(z-1)^{-\lambda}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

elde ederiz. λ yı $\lambda(2\lambda-1)=0$ olacak şekilde seçelim.

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1/2$$

olur.

1.) $\lambda = 0$ durumunda Grup-1 çözümü ile aynı sonucu elde ederiz.

2.) $\lambda = 1/2$ olsun. (4.50)' de yerine yazılırsa

$$\phi_2(z^2-1) + \phi_1(2z+1) + \phi\left(\frac{1}{4} - v^2\right) = f(z-1)^{-1/2}, \tag{4.51}$$

elde edilir. (4.51) denkleminin her iki yanına N^α operatörünü uygularsak

$$N^\alpha[\phi_2(z^2-1)] + N^\alpha[\phi_1(2z+1)] + N^\alpha\left[\phi\left(\frac{1}{4} - v^2\right)\right] = N^\alpha[f(z-1)^{-1/2}], \tag{4.52}$$

olur.

$$N^\alpha[\phi_2(z^2-1)] = \phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha}2z\alpha + \phi_\alpha\alpha(\alpha-1), \tag{4.53}$$

$$N^\alpha[\phi_1(2z+1)] = \phi_{1+\alpha}(2z+1) + 2\alpha\phi_\alpha, \tag{4.54}$$

şeklinde olup bu değerler (4.52) de yerine yazılırsa

$$\phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha}[z(2\alpha+2)+1] + \phi_\alpha[(\alpha+1/2)^2 - v^2] = [f(z-1)^{-1/2}]_\alpha, \tag{4.55}$$

elde edilir.

Burada α 'yı $(\alpha+1/2)^2 - v^2 = 0$ olacak şekilde seçersek $\alpha = \pm v - 1/2$ olur.

i. $\alpha = v - 1/2$ olsun. (4.55) denkleminde yerinde yerine yazarsak

$$\phi_{v+3/2}(z^2-1) + \phi_{v+1/2}[z(2v+1)+1] = [f(z-1)^{-1/2}]_{v-1/2}, \tag{4.56}$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\phi_{v+1/2} = u = u(z), \quad \phi = u_{-(v+1/2)}, \tag{4.57}$$

olsun. Bu durumda (4.56) denkleminde

$$u_1 + u \frac{z(2v+1)+1}{(z^2-1)} = \left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} (z^2-1)^{-1}, \quad (4.58)$$

şeklinde bir lineer diferensiyel denklem elde edilir. (4.58) denkleminin çözümü

$$u = \left[\int \left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} (z^2-1)^{-1} e^{\int \frac{z(2v+1)+1}{z^2-1} dz} dz \right] e^{-\int \frac{z(2v+1)+1}{z^2-1} dz},$$

$$u = \left\{ \left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} \frac{z-1}{(z^2-1)^{1-v}} \right\}_{-1} \frac{(z^2-1)^{-v}}{z-1}, \quad (4.59)$$

biçimindedir. (4.57)' den

$$\phi = \left(\left\{ \left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} \frac{z-1}{(z^2-1)^{1-v}} \right\}_{-1} \frac{(z^2-1)^{-v}}{z-1} \right)_{-(v+1/2)}, \quad (4.60)$$

elde edilir. (4.49) yardımıyla (4.10) çözümünü elde ederiz. (4.60) denkleminde en dıştaki parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $-(v+1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.10)' dan farklı (4.11) çözümü elde edilir.

ii. $\alpha = -v-1/2$ olsun. (4.55) denkleminde yerinde yerine yazarsak

$$\phi_{-v+3/2} (z^2-1) + \phi_{-v+1/2} [z(-2v+1)+1] = \left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2}, \quad (4.61)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\phi_{-v+1/2} = \mathcal{G} = \mathcal{G}(z), \quad \phi = \mathcal{G}_{v-1/2}, \quad (4.62)$$

olsun. Bu kabul ile (4.61) denkleminde

$$\mathcal{G}_1 + \mathcal{G} \frac{z(-2v+1)+1}{(z^2-1)} = \left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2} (z^2-1)^{-1}, \quad (4.63)$$

biçiminde lineer diferensiyel denklem elde edilir ve çözümü ile de

$$\mathcal{G} = \left[\int \left(f(z-1)^{-1/2} \right)_{-v-1/2} (z^2-1)^{-1} e^{\int \frac{z(1-2v)+1}{z^2-1} dz} dz \right] e^{-\int \frac{z(1-2v)+1}{z^2-1} dz},$$

$$\mathcal{G} = \left\{ \left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2} \frac{z-1}{(z^2-1)^{1+v}} \right\}_{-1} \frac{(z^2-1)^v}{z-1}, \quad (4.64)$$

elde edilir. (4.62) ve (4.64)'den

$$\phi = \left(\left[\left[f(z-1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2} \frac{z-1}{(z^2-1)^{1+v}} \right]_{-1} \frac{(z^2-1)^v}{z-1} \right)_{v-1/2}, \quad (4.65)$$

elde edilir. (4.49) yardımıyla (4.12) çözümünü elde ederiz. (4.65) denkleminde en dıştaki parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $(v-1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.12)' den farklı (4.13) çözümü elde edilir.

4. Grup

$$\varphi = (z+1)^\lambda \phi, \phi = \phi(z), \quad (z \neq -1), \quad (4.66)$$

olsun.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda(z+1)^{\lambda-1} \phi + (z+1)^\lambda \phi_1 \\ \varphi_2 &= \lambda(\lambda-1)(z+1)^{\lambda-2} \phi + 2\lambda(z+1)^{\lambda-1} \phi_1 + (z+1)^\lambda \phi_2, \end{aligned}$$

olur. φ ve φ_1, φ_2 türevlerini (4.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &\lambda(\lambda-1)(z+1)^{\lambda-2} (z-1)\phi + 2\lambda(z+1)^\lambda (z-1)\phi_1 + (z+1)^{\lambda+1} (z-1)\phi_2 \\ &\quad + \lambda z(z+1)^{\lambda-1} \phi + z(z+1)^\lambda \phi_1 - v^2(z+1)^\lambda \phi = f, \\ &\phi_2(z^2-1) + \phi_1[z(2\lambda+1)-2\lambda] + \phi \left[(\lambda^2 - v^2) - \frac{\lambda(2\lambda-1)}{z+1} \right] = f(z+1)^{-\lambda}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $\lambda(2\lambda-1)=0$ olsun. Bu durumda

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1/2$$

olur.

1.) $\lambda = 0$ durumunda Grup-1 çözümü ile aynı sonucu elde ederiz.

2.) $\lambda = 1/2$ olsun. (4.67) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_2(z^2-1) + \phi_1(2z-1) + \phi \left(\frac{1}{4} - v^2 \right) = f(z+1)^{-1/2}, \quad (4.68)$$

elde ederiz. (4.68) denkleminin her iki yanına N^α operatörünü uygularsak

$$N^\alpha [\phi_2(z^2-1)] + N^\alpha [\phi_1(2z-1)] + N^\alpha \left[\phi \left(\frac{1}{4} - v^2 \right) \right] = N^\alpha [f(z+1)^{-1/2}], \quad (4.69)$$

olur.

$$N^\alpha [\phi_2(z^2-1)] = \phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha}2z\alpha + \phi_\alpha\alpha(\alpha-1), \quad (4.70)$$

$$N^\alpha [\phi_1(2z+1)] = \phi_{1+\alpha}(2z-1) + 2\alpha\phi_\alpha, \quad (4.71)$$

eşitlikleri (4.69)' da yerine yazılırsa

$$\phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha}[z(2\alpha+2)-1] + \phi_\alpha[(\alpha+1/2)^2 - v^2] = \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_\alpha, \quad (4.72)$$

elde edilir.

α 'yı $(\alpha+1/2)^2 - v^2 = 0$ olacak şekilde seçersek $\alpha = \pm v - 1/2$ olur.

i. $\alpha = v - 1/2$ olsun. (4.72) denkleminde yerinde yerine yazarsak

$$\phi_{v+3/2}(z^2-1) + \phi_{v+1/2}[z(2v+1)-1] = \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{v-1/2}, \quad (4.73)$$

bulunur. Kabul edelim ki

$$\phi_{v+1/2} = w = w(z), \quad \phi = w_{-(v+1/2)}, \quad (4.74)$$

olsun. Bu kabul ve (4.73) ile

$$w_1 + w \frac{z(2v+1)-1}{(z^2-1)} = \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} (z^2-1)^{-1}, \quad (4.75)$$

şeklinde lineer diferensiyel denklem elde edilir. (4.75) denklemini çözersek

$$w = \left[\int \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} (z^2-1)^{-1} e^{\int \frac{z(2v+1)-1}{z^2-1} dz} dz \right] e^{-\int \frac{z(2v+1)-1}{z^2-1} dz},$$

$$w = \left\{ \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} \frac{z+1}{(z^2-1)^{1-v}} \right\}_{-1} \frac{(z^2-1)^{-v}}{z+1}, \quad (4.76)$$

elde ederiz. (4.74) kabulü ve (4.76)' dan

$$\phi = \left(\left\{ \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{v-1/2} \frac{z+1}{(z^2-1)^{1-v}} \right\}_{-1} \frac{(z^2-1)^{-v}}{z+1} \right)_{-(v+1/2)}, \quad (4.77)$$

bulunur. (4.66) yardımıyla (4.14) çözümünü elde ederiz. (4.77) denkleminde en dıştaki parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $-(v+1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.14)' den farklı (4.15) çözümü elde edilir.

ii. $\alpha = -v - 1/2$ olsun. (4.72) denkleminde yerinde yerine yazarsak

$$\phi_{-v+3/2}(z^2-1) + \phi_{-v+1/2}[z(-2v-1)-1] = \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2}, \quad (4.78)$$

elde ederiz.

$$\phi_{-v+1/2} = \kappa = \kappa(z), \quad \phi = \kappa_{v-1/2}, \quad (4.79)$$

kabulü ve (4.78) yardımı ile

$$\kappa_1 + \kappa \frac{z(-2v-1)-1}{(z^2-1)} = \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2} (z^2-1)^{-1}, \quad (4.80)$$

biçiminde lineer diferensiyel denklem elde edilir. (4.80) denkleminin çözümü

$$w = \left[\int \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2} (z^2-1)^{-1} e^{\int \frac{z(-2v-1)-1}{z^2-1} dz} dz \right] e^{-\int \frac{z(-2v-1)-1}{z^2-1} dz},$$

$$w = \left\{ \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2} \frac{z+1}{(z^2-1)^{1+v}} \right\}_{-1} \frac{(z^2-1)^v}{z+1}, \quad (4.81)$$

şeklindedir. (4.79) ve (4.81)' den

$$\phi = \left(\left\{ \left[f(z+1)^{-1/2} \right]_{-v-1/2} \frac{z+1}{(z^2-1)^{1+v}} \right\}_{-1} \frac{(z^2-1)^v}{z+1} \right)_{v-1/2}, \quad (4.82)$$

elde edilir. (4.66) yardımıyla (4.16) çözümünü elde ederiz. (4.82) denkleminde en dıştaki parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $(v-1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.16)' dan farklı (4.17) çözümü elde edilir.

4.2. Homojen Denklemin Açık Çözümleri

Teorem 4.2. $\varphi \in \{\varphi : 0 \neq |\varphi_\alpha| < \infty, \alpha \in R\}$ olsun.

$$L[\varphi; z; v] = \varphi_2(z^2-1) + \varphi_1 z - \varphi v^2 = 0 \quad (z \neq \pm 1), \quad (4.83)$$

homojen Chebyshev diferensiyel denklemi

1. Grup

$$\varphi_{[1]} = h \left((z^2-1)^{-(v+1/2)} \right)_{-(1+v)}, \quad (4.84)$$

$$\varphi_{[2]} = h \left((z^2-1)^{v-1/2} \right)_{v-1}, \quad (4.85)$$

2. Grup

$$\varphi_{[3]} = h(z^2 - 1)^{1/2} \left[(z^2 - 1)^{-(v+1/2)} \right]_{-v}, \quad (4.86)$$

$$\varphi_{[4]} = h(z^2 - 1)^{1/2} \left[(z^2 - 1)^{v-1/2} \right]_v, \quad (4.87)$$

3. Grup

$$\varphi_{[5]} = h(z - 1)^{1/2} \left[(z - 1)^{-(v+1)} (z + 1)^{-v} \right]_{-(v+1/2)}, \quad (4.88)$$

$$\varphi_{[6]} = h(z - 1)^{1/2} \left[(z + 1)^{-v} (z - 1)^{-(v+1)} \right]_{-(v+1/2)}, \quad (4.89)$$

$$\varphi_{[7]} = h(z - 1)^{1/2} \left[(z - 1)^{v-1} (z + 1)^v \right]_{v-1/2}, \quad (4.90)$$

$$\varphi_{[8]} = h(z - 1)^{1/2} \left[(z + 1)^v (z - 1)^{v-1} \right]_{v-1/2}, \quad (4.91)$$

4. Grup

$$\varphi_{[9]} = h(z + 1)^{1/2} \left[(z - 1)^{-v} (z + 1)^{-(v+1)} \right]_{-(v+1/2)}, \quad (4.92)$$

$$\varphi_{[10]} = h(z + 1)^{1/2} \left[(z + 1)^{-(v+1)} (z - 1)^{-v} \right]_{-(v+1/2)}, \quad (4.93)$$

$$\varphi_{[11]} = h(z + 1)^{1/2} \left[(z - 1)^v (z + 1)^{v-1} \right]_{v-1/2}, \quad (4.94)$$

$$\varphi_{[12]} = h(z + 1)^{1/2} \left[(z + 1)^{v-1} (z - 1)^v \right]_{v-1/2}, \quad (4.95)$$

formunda özel çözümlere sahiptir. Burada v verilmiş sabit, $\varphi_0 = \varphi = \varphi(z)$, ve $n = 0, 1, 2$ olmak üzere $\varphi_n = \partial^n \varphi / \partial z^n$ dir.

İspat: 1. Grup N^α operatörü

$$N^\alpha (\varphi_m z^n) = (\varphi_m z^n)_\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - k) \Gamma(k + 1)} (\varphi_m)_{\alpha - k} (z^n)_k, \quad (4.96)$$

olmak üzere (4.83) denkleminde bu operatörü uygularsak

$$\left[\varphi_2 (z^2 - 1) \right]_\alpha + (\varphi_1 z)_\alpha - (\varphi v^2)_\alpha = 0, \quad (4.97)$$

elde ederiz. Buradan

$$\left[\varphi_2 (z^2 - 1) \right]_\alpha = \varphi_{2+\alpha} (z^2 - 1) + \varphi_{1+\alpha} 2\alpha z + \varphi_\alpha \alpha (\alpha - 1), \quad (4.98)$$

$$(\varphi_1 z)_\alpha = \varphi_{1+\alpha} z + \varphi_\alpha \alpha, \quad (4.99)$$

$$(\varphi v^2)_\alpha = v^2 \varphi_\alpha, \quad (4.100)$$

bulunur. (4.98)-(4.100) eşitliklerini (4.97)'te yerine yazarsak

$$\varphi_{2+\alpha} (z^2 - 1) + \varphi_{1+\alpha} [z(2\alpha + 1)] + \varphi_\alpha (\alpha^2 - v^2) = 0 \quad (4.101)$$

elde edilir. α yı

$$\alpha^2 - v^2 = 0, \quad \alpha = v, \quad \alpha = -v$$

olacak biçimde seçelim.

i. $\alpha = v$ için (4.101) denklemini düzenlersek

$$\varphi_{2+v} (z^2 - 1) + \varphi_{1+v} z(2v + 1) = 0, \quad (4.102)$$

bulunur.

$$\varphi_{1+v} = \psi = \psi(z), \quad \varphi = \psi_{-(1+v)}, \quad (4.103)$$

olsun. Böylece (4.102) den

$$\psi_1 + \psi \frac{z}{z^2 - 1} (2v + 1) = 0, \quad (4.104)$$

şeklinde birinci mertebeden diferensiyel denklem elde edilir. Denklemin çözümü ile

$$\psi = h(z^2 - 1)^{-(v+1/2)}, \quad (4.105)$$

olur. (4.103) kabulümüz ve (4.105) den (4.84) çözümü bulunur.

ii. $\alpha = -v$ için ispat (i) de v yerine $-v$ yazarsak benzer işlemlerle

$$\psi = h(z^2 - 1)^{v-1/2}, \quad (4.106)$$

bulunur. Tersine işlemle (4.85) çözümü elde edilir.

2. Grup

$$\varphi = (z^2 - 1)^\lambda \phi, \quad \phi = \phi(z), \quad (z \neq \pm 1), \quad (4.107)$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_1 = 2\lambda z (z^2 - 1)^{\lambda-1} \phi + (z^2 - 1)^\lambda \phi_1,$$

$$\varphi_2 = 4\lambda(\lambda - 1)z^2 (z^2 - 1)^{\lambda-2} \phi + 4\lambda z (z^2 - 1)^{\lambda-1} \phi_1 + 2\lambda (z^2 - 1)^{\lambda-1} \phi + (z^2 - 1)^\lambda \phi_2,$$

olur. φ ve φ_1, φ_2 türevleri (4.83) denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi_2(z^2-1) + \phi_1 z(4\lambda+1) + \phi \left[(4\lambda^2 - v^2) + \frac{2\lambda(2\lambda-1)}{z^2-1} \right] = 0, \quad (4.108)$$

elde edilir. Kabul edelim ki $2\lambda(2\lambda-1)=0$ olsun. Bu durumda

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1/2$$

olur.

1.) $\lambda = 0$ durumunda Grup-1 çözümü ile aynı sonucu elde ederiz.

2.) $\lambda = 1/2$ olsun. (4.108) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_2(z^2-1) + \phi_1 3z + \phi(1-v^2) = 0, \quad (4.109)$$

elde ederiz. (4.109) denkleminin her iki yanına N^α operatörünü uygularsak

$$\phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha} z(2\alpha+3) + \phi_\alpha \left[(\alpha+1)^2 - v^2 \right] = 0, \quad (4.110)$$

elde edilir.

α 'yı $(\alpha+1)^2 - v^2 = 0$ olacak şekilde seçelim. Böylece $\alpha = \pm v - 1$ olur.

i. $\alpha = v - 1$ olsun. (4.110) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_{1+v}(z^2-1) + \phi_v z(2v+1) = 0, \quad (4.111)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\phi_v = V = V(z), \quad \phi = V_{-v}, \quad (4.112)$$

olsun. Bu durumda (4.111) denkleminde

$$V_1 + V \frac{z}{(z^2-1)} (2v+1) = 0, \quad (4.113)$$

şeklinde diferensiyel denklem elde edilir. (4.113) denkleminin çözümü

$$V = h(z^2-1)^{-(v+1/2)}, \quad (4.114)$$

biçimindedir. (4.112)' den

$$\phi = h \left[(z^2-1)^{-(v+1/2)} \right]_{-v}, \quad (4.115)$$

elde edilir. (4.107) ve (4.115) yardımıyla (4.86) çözümünü elde ederiz ve bu çözüm (4.83) denklemini sağlar.

ii. $\alpha = -v - 1$ olsun. İspat (i) de v yerine $-v$ yazarsak benzer işlemlerle,

$$\phi = h \left[(z^2-1)^{v-1/2} \right]_v, \quad (4.116)$$

elde edilir. Tersine işlemle (4.87) çözümü elde edilir.

3. Grup

$$\varphi = (z-1)^\lambda \phi, \phi = \phi(z), \quad (z \neq 1), \quad (4.117)$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_1 = \lambda(z-1)^{\lambda-1} \phi + (z-1)^\lambda \phi_1$$

$$\varphi_2 = \lambda(\lambda-1)(z-1)^{\lambda-2} \phi + 2\lambda(z-1)^{\lambda-1} \phi_1 + (z-1)^\lambda \phi_2$$

olur. φ ve φ_1, φ_2 türevlerini (4.83) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_2(z^2-1) + \phi_1[z(2\lambda+1)+2\lambda] + \phi\left[(\lambda^2-v^2) + \frac{\lambda(2\lambda-1)}{z-1}\right] = 0, \quad (4.118)$$

elde ederiz. λ y1 $\lambda(2\lambda-1)=0$ olacak şekilde seçelim.

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1/2$$

olur.

1.) $\lambda = 0$ durumunda Grup-1 çözümü ile aynı sonucu elde ederiz.

2.) $\lambda = 1/2$ olsun. (4.118)' de yerine yazılırsa

$$\phi_2(z^2-1) + \phi_1(2z+1) + \phi\left(\frac{1}{4} - v^2\right) = 0, \quad (4.119)$$

elde edilir. (4.119) denkleminde N^α operatörünü uygularsak

$$\phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha}[z(2\alpha+2)+1] + \phi_\alpha[(\alpha+1/2)^2 - v^2] = 0, \quad (4.120)$$

elde edilir.

Burada α 'y1 $(\alpha+1/2)^2 - v^2 = 0$ olacak şekilde seçersek $\alpha = \pm v - 1/2$ olur.

i. $\alpha = v - 1/2$ olsun. (4.120) denkleminde yerinde yerine yazarsak

$$\phi_{v+3/2}(z^2-1) + \phi_{v+1/2}[z(2v+1)+1] = 0 \quad (4.121)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\phi_{v+1/2} = u = u(z), \quad \phi = u_{-(v+1/2)} \quad (4.122)$$

olsun. Bu durumda (4.121) denkleminde

$$u_1 + u \frac{z(2v+1)+1}{(z^2-1)} = 0, \quad (4.123)$$

şeklinde diferensiyel denklem elde edilir. Bu denkleminin çözümü

$$u = h \frac{(z^2 - 1)^{-v}}{z - 1}, \quad (4.124)$$

biçimindedir. (4.122)' dan

$$\phi = h \left[(z - 1)^{-(v+1)} (z + 1)^{-v} \right]_{-(v+1/2)}, \quad (4.125)$$

elde edilir. (4.117) yardımıyla (4.88) çözümünü elde ederiz. (4.125)' de parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $-(v+1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.88)' den farklı (4.89) çözümü elde edilir.

ii. $\alpha = -v - 1/2$ olsun. İspat (i) de v yerine $-v$ yazarsak benzer işlemlerle,

$$\phi = h \left[(z - 1)^{v-1} (z + 1)^v \right]_{v-1/2}, \quad (4.126)$$

elde edilir. Tersine işlemle (4.90) çözümü elde edilir. (4.126) denkleminde parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $(v-1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.90)' dan farklı (4.91) çözümü elde edilir.

4. Grup

$$\varphi = (z + 1)^\lambda \phi, \phi = \phi(z), \quad (z \neq -1), \quad (4.127)$$

olsun.

$$\varphi_1 = \lambda (z + 1)^{\lambda-1} \phi + (z + 1)^\lambda \phi_1,$$

$$\varphi_2 = \lambda (\lambda - 1) (z + 1)^{\lambda-2} \phi + 2\lambda (z + 1)^{\lambda-1} \phi_1 + (z + 1)^\lambda \phi_2,$$

olur. φ ve φ_1, φ_2 türevlerini (4.83) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_2 (z^2 - 1) + \phi_1 [z(2\lambda + 1) - 2\lambda] + \phi \left[(\lambda^2 - v^2) - \frac{\lambda(2\lambda - 1)}{z + 1} \right] = 0, \quad (4.128)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $\lambda(2\lambda - 1) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\lambda = 0 \text{ veya } \lambda = 1/2$$

olur.

1.) $\lambda = 0$ durumunda Grup-1 çözümü ile aynı sonucu elde ederiz.

2.) $\lambda = 1/2$ olsun. (4.128) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_2 (z^2 - 1) + \phi_1 (2z - 1) + \phi \left(\frac{1}{4} - v^2 \right) = 0, \quad (4.129)$$

elde ederiz. (4.129) denkleminde N^α operatörünü uygularsak

$$\phi_{2+\alpha}(z^2-1) + \phi_{1+\alpha}[z(2\alpha+2)-1] + \phi_\alpha[(\alpha+1/2)^2 - v^2] = 0, \quad (4.130)$$

elde edilir.

α 'yı $(\alpha+1/2)^2 - v^2 = 0$ olacak şekilde seçersek $\alpha = \pm v - 1/2$ olur.

i. $\alpha = v - 1/2$ olsun. (4.130) denkleminde yerinde yerine yazarsak

$$\phi_{v+3/2}(z^2-1) + \phi_{v+1/2}[z(2v+1)-1] = 0 \quad (4.131)$$

bulunur. Kabul edelim ki

$$\phi_{v+1/2} = w = w(z), \quad \phi = w_{-(v+1/2)} \quad (4.132)$$

olsun. Bu kabul ve (4.131) ile

$$w_1 + w \frac{z(2v+1)-1}{(z^2-1)} = 0, \quad (4.133)$$

şeklinde diferensiyel denklem elde edilir. (4.133) denklemini çözersek

$$w = \frac{(z^2-1)^{-v}}{z+1}, \quad (4.134)$$

elde ederiz. (4.132) kabulü ve (4.134)' den

$$\phi = \left[(z-1)^{-v} (z+1)^{-(v+1)} \right]_{-(v+1/2)}, \quad (4.135)$$

bulunur. (4.127) yardımıyla (4.92) çözümünü elde ederiz. (4.135)' de parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $-(v+1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.92)' den farklı (4.93) çözümü elde edilir.

ii. $\alpha = -v - 1/2$ olsun. İspat (i) de v yerine $-v$ yazarsak benzer işlemlerle,

$$\phi = \left[(z-1)^v (z+1)^{v-1} \right]_{v-1/2}, \quad (4.136)$$

elde edilir. Tersine işlemle (4.94) çözümü elde edilir. (4.136) denkleminde parantez içindeki çarpanlar yer değiştirirse $(v-1/2) \notin \mathbb{Z}_0^+$ için (4.94)' den farklı (4.95) çözümü elde edilir.

5. HOMOJEN DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN HİPERGEOMETRİK GÖSTERİMİ

Teorem 5.1.

$$\left(\left((z-b)^\beta - c \right)^\alpha \right)_\gamma = e^{-i\pi\gamma} (z-b)^{\alpha\beta-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\alpha]_k \Gamma(\beta k - \alpha\beta + \gamma)}{k! \Gamma(\beta k - \alpha\beta)} \left(\frac{c}{(z-b)^\beta} \right)^k, \quad (5.1)$$

$$\left(\left((z-b)^\beta - c \right)^\alpha \right)_n = (-1)^n (z-b)^{\alpha\beta-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\alpha]_k [\beta k - \alpha\beta]_n}{k!} \left(\frac{c}{(z-b)^\beta} \right)^k \quad (n \in \mathbb{Z}_0^+),$$

(5.2)

eşitlikleri sağlanır. Burada

$$\left| \frac{\Gamma(\beta k - \alpha\beta + \gamma)}{\Gamma(\beta k - \alpha\beta)} \right| < \infty, \quad \left| \frac{c}{(z-b)^\beta} \right| < 1,$$

ve

$$[\lambda]_k = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1) = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}, \quad [\lambda]_0 = 1,$$

Pochhammer sembolüdür [18].

Lemma 5.1.

$$\text{i. } \left((z-c)^b \right)_\alpha = e^{-i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\alpha-b)}{\Gamma(-b)} (z-c)^{b-\alpha} \left(\left| \frac{\Gamma(\alpha-b)}{\Gamma(-b)} \right| < \infty \right), \quad (5.3)$$

$$\text{ii. } [u(z).v(z)]_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha+1-k)} u_{\alpha-k} v_k, \quad (5.4)$$

eşitlikleri sağlanır [18].

Teorem 5.2. Homojen Chebyshev denkleminin çözümlerinin hipergeometrik gösterimleri,

1. Grup

$$\varphi_{[1]} = -e^{i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu} \nu \Gamma(\nu+1/2)} z^{-\nu} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{1}{z^2}\right), \quad \left((\nu+1) \notin \mathbb{Z}_0^-, \left| \frac{1}{z^2} \right| < 1 \right), \quad (5.5)$$

$$\varphi_{[2]} = e^{-i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2\nu} \nu \Gamma(1/2-\nu)} z^\nu {}_2F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1-\nu; \frac{1}{z^2}\right), \quad \left((1-\nu) \notin \mathbb{Z}_0^-, \left| \frac{1}{z^2} \right| < 1 \right), \quad (5.6)$$

2. Grup

$$\varphi_{[3]} = e^{i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3\nu} \Gamma(\nu+1/2)} (z^2-1)^{1/2} z^{-(\nu+1)} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{1}{z^2}\right),$$

$$\left((\nu+1) \notin z_0^-, \left| \frac{1}{z^2} \right| < 1 \right) \quad (5.7)$$

$$\varphi_{[4]} = e^{-i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-3\nu} \Gamma(1/2-\nu)} (z^2-1)^{1/2} z^{\nu-1} {}_2F_1\left(1-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1-\nu; \frac{1}{z^2}\right),$$

$$\left((1-\nu) \notin z_0^-, \left| \frac{1}{z^2} \right| < 1 \right) \quad (5.8)$$

3. Grup

$$\varphi_{[5]} = ie^{i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\nu)} (z+1)^{-\nu} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu, \nu; \frac{1}{2}; \frac{z-1}{z+1}\right), \quad \left(\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1 \right) \quad (5.9)$$

$$\varphi_{[6]} = -ie^{i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} (z-1)^{-\nu} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu, 1+\nu; \frac{3}{2}; \frac{z+1}{z-1}\right), \quad \left(\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1 \right) \quad (5.10)$$

$$\varphi_{[7]} = ie^{-i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-\nu)} (z+1)^{\nu} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\nu, -\nu; \frac{1}{2}; \frac{z-1}{z+1}\right), \quad \left(\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1 \right) \quad (5.11)$$

$$\varphi_{[8]} = -ie^{-i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} (z-1)^{\nu} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\nu, 1-\nu; \frac{3}{2}; \frac{z+1}{z-1}\right), \quad \left(\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1 \right) \quad (5.12)$$

4. Grup

$$\varphi_{[9]} = -ie^{i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} (z+1)^{-\nu} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu, 1+\nu; \frac{3}{2}; \frac{z-1}{z+1}\right), \quad \left(\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1 \right) \quad (5.13)$$

$$\varphi_{[10]} = ie^{i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\nu)} (z-1)^{-\nu} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu, \nu; \frac{1}{2}; \frac{z+1}{z-1}\right), \quad \left(\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1 \right) \quad (5.14)$$

$$\varphi_{[11]} = -ie^{-i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} (z+1)^{\nu} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\nu, 1-\nu; \frac{3}{2}; \frac{z-1}{z+1}\right), \quad \left(\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1 \right) \quad (5.15)$$

$$\varphi_{[12]} = ie^{-i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-\nu)} (z-1)^{\nu} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-\nu, -\nu; \frac{1}{2}; \frac{z+1}{z-1}\right), \quad \left(\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1 \right) \quad (5.16)$$

şeklinde ifade edilirler. Burada ${}_2F_1(\dots)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonudur.

İspat: 1. Grup Teorem 5.1 den

$$\left((z^2 - 1)^{-(v+1/2)} \right)_{-(1+v)} = -e^{i\pi v} z^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[v+1/2]_k \Gamma(2k+v)}{k! \Gamma(2k+2v+1)} \left(\frac{1}{z^2} \right)^k, \quad ,$$

(5.17) olur.

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

olduğundan,

$$\Gamma\left(2\left(k + \frac{v}{2}\right)\right) = \frac{2^{2k+v-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{v}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{v+1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(2\left(k + v + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2^{2k+2v}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + v + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + v + 1),$$

$$\Gamma(v) = \frac{2^{v-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right), \quad \Gamma(2v+1) = \frac{2^{2v}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \Gamma(v+1),$$

ve

$$[\lambda]_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)},$$

olduğundan,

$$\left[\frac{v}{2}\right]_k = \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{v}{2} + k\right) = \left[\frac{v}{2}\right]_k \Gamma\left(\frac{v}{2}\right),$$

$$\left[\frac{v+1}{2}\right]_k = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{v+1}{2} + k\right) = \left[\frac{v+1}{2}\right]_k \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right),$$

$$\left[v + \frac{1}{2}\right]_k = \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \Gamma\left(v + \frac{1}{2} + k\right) = \left[v + \frac{1}{2}\right]_k \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right),$$

$$[v+1]_k = \frac{\Gamma(v+1+k)}{\Gamma(v+1)} \Rightarrow \Gamma(v+1+k) = [v+1]_k \Gamma(v+1),$$

yazılabilir. Bu eşitlikler (5.17) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi_{[1]} &= \left((z^2 - 1)^{-(v+1/2)} \right)_{-(1+v)} = -e^{i\pi v} z^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[v+1/2]_k \frac{2^{2k+v-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{v}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{v+1}{2}\right)}{k! \frac{2^{2k+2v}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + v + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k + v + 1)} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k, \\
&= -e^{i\pi v} 2^{-(v+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \Gamma(v + 1)} z^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[v + \frac{1}{2}\right]_k \left[\frac{v}{2}\right]_k \left[\frac{v+1}{2}\right]_k}{k! \left[v + \frac{1}{2}\right]_k [v+1]_k} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k, \\
&= -e^{i\pi v} 2^{-(v+1)} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{v-1}} \Gamma(v)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2v}} \Gamma(2v+1)} z^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{v}{2}\right]_k \left[\frac{v+1}{2}\right]_k}{k! [v+1]_k} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k, \\
&= -e^{i\pi v} \frac{\Gamma(v)}{2v \frac{2^{2v-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v) \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} z^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{v}{2}\right]_k \left[\frac{v+1}{2}\right]_k}{k! [v+1]_k} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k, \\
&= -e^{i\pi v} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2v} v \Gamma(v+1/2)} z^{-v} {}_2F_1\left(\frac{v}{2}, \frac{v+1}{2}; v+1; \frac{1}{z^2}\right),
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\varphi_{[1]}$ in ispatında v yerine $-v$ yazarsak $\varphi_{[2]}$ nin

$$\varphi_{[2]} = \left((z^2 - 1)^{v-1/2} \right)_{v-1} = e^{-i\pi v} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-2v} v \Gamma(1/2 - v)} z^v {}_2F_1\left(-\frac{v}{2}, \frac{1-v}{2}; 1-v; \frac{1}{z^2}\right),$$

formunda ki çözümünü bulunur.

2. Grup Teorem 5.1 den

$$(z^2 - 1)^{1/2} \left[(z^2 - 1)^{-(v+1/2)} \right]_{-v} = e^{i\pi v} (z^2 - 1)^{1/2} z^{-(v+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[v+1/2]_k \Gamma(2k+v+1)}{k! \Gamma(2k+2v+1)} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k, \quad (5.18)$$

bulunur.

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

olduğundan,

$$\Gamma\left(2\left(k + \frac{v}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2^{2k+v}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{v+1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{v}{2} + 1\right),$$

$$\Gamma\left(2\left(k+v+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{2^{2k+2v}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(k+v+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+v+1),$$

$$\Gamma(v)=\frac{2^{v-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right), \quad \Gamma(2v+1)=\frac{2^{2v}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)\Gamma(v+1),$$

ve

$$[\lambda]_k=\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)},$$

olduğundan,

$$\Gamma\left(\frac{v}{2}+1+k\right)=\left[\frac{v}{2}+1\right]_k \Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{v+1}{2}+k\right)=\left[\frac{v+1}{2}\right]_k \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(v+\frac{1}{2}+k\right)=\left[v+\frac{1}{2}\right]_k \Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(v+1+k)=[v+1]_k \Gamma(v+1)$$

yazılabilir. Bu eşitlikler (5.18) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_{[3]} &= (z^2-1)^{1/2} \left[(z^2-1)^{-(v+1/2)} \right]_{-v} \\ &= e^{i\pi v} (z^2-1)^{1/2} z^{-(v+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[v+1/2]_k 2^{-v} \left[\frac{v+1}{2}\right]_k \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \left[\frac{v}{2}+1\right]_k \Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)}{k! \left[v+\frac{1}{2}\right]_k \Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right) [v+1]_k \Gamma(v+1)} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k \\ &= e^{i\pi v} 2^{-v} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right) \Gamma(v+1)} (z^2-1)^{1/2} z^{-(v+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{v+1}{2}\right]_k \left[\frac{v}{2}+1\right]_k}{k! [v+1]_k} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k \\ &= e^{i\pi v} 2^{-v} \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(2v+1)} (z^2-1)^{1/2} z^{-(v+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{v+1}{2}\right]_k \left[\frac{v}{2}+1\right]_k}{k! [v+1]_k} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k \\ &= e^{i\pi v} 2^{-v} \frac{\Gamma(v+1)}{\frac{2^{2v}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v+1/2) \Gamma(v+1)} (z^2-1)^{1/2} z^{-(v+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{v+1}{2}\right]_k \left[\frac{v}{2}+1\right]_k}{k! [v+1]_k} \left(\frac{1}{z^2}\right)^k \end{aligned}$$

$$= e^{i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3\nu} \Gamma(\nu+1/2)} (z^2-1)^{1/2} z^{-(\nu+1)} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu+1}{2}; \nu+1; \frac{1}{z^2}\right)$$

hipergeometrik formda ki çözüm elde edilir.

Benzer şekilde $\varphi_{[3]}$ ün ispatında ν yerine $-\nu$ yazarsak $\varphi_{[4]}$ ün hipergeometrik formunda ki çözümünü buluruz.

3. Grup (5.4) den

$$\begin{aligned} \varphi_{[5]} &= (z-1)^{1/2} \left[(z-1)^{-(\nu+1)} (z+1)^{-\nu} \right]_{-(\nu+1/2)} \\ &= (z-1)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-k\right)} \left((z-1)^{-(\nu+1)} \right)_{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-k} \left((z+1)^{-\nu} \right)_k \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.3) den

$$\begin{aligned} \left((z-1)^{-(\nu+1)} \right)_{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-k} &= e^{-i\pi\left(-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-k\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}{\Gamma(\nu+1)} (z-1)^{-\frac{1}{2}+k} \\ \left((z+1)^{-\nu} \right)_k &= e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(\nu)} (z+1)^{-\nu-k} \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca

$$\Gamma(\delta-k) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(\delta)}{[1-\delta]_k}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{[1/2+\nu]_k}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(1/2)}{[1/2]_k},$$

olduğundan bu eşitlikleri (5.19) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \varphi_{[5]} &= (z-1)^{1/2} \left[(z-1)^{-(\nu+1)} (z+1)^{-\nu} \right]_{-(\nu+1/2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-k\right)} e^{i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^k (z+1)^{-\nu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ie^{i\pi\nu} (z+1)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{k!(-1)^{-k} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{[1/2+\nu]_k}} \frac{(-1)^{-k} \Gamma(1/2)}{[1/2]_k} \frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k, \\
&= ie^{i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)} (z+1)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1/2+\nu]_k [v]_k}{k! [1/2]_k} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k, \\
&= ie^{i\pi\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1)} (z+1)^{-\nu} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu, \nu; \frac{1}{2}; \frac{z-1}{z+1}\right),
\end{aligned}$$

hipergeometrik formda ki çözüm elde edilir.

Benzer şekilde $\varphi_{[5]}$ in ispatında ν yerine $-\nu$ yazılırsa $\varphi_{[7]}$ nin hipergeometrik formunda ki çözümünü bulunur.

(5.4) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\varphi_{[6]} &= (z-1)^{1/2} \left[(z+1)^{-\nu} (z-1)^{-(\nu+1)} \right]_{-(\nu+1/2)}, \\
&= (z-1)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{k! \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-k\right)} \left((z+1)^{-\nu}\right)_{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-k} \left((z-1)^{-(\nu+1)}\right)_k,
\end{aligned}$$

(5.20)

elde edilir. (5.3) den

$$\begin{aligned}
\left((z+1)^{-\nu}\right)_{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-k} &= e^{i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{\Gamma(\nu)} (z+1)^{\frac{1}{2}+k}, \\
\left((z-1)^{-(\nu+1)}\right)_k &= e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z-1)^{-\nu-1-k},
\end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca $\Gamma(\delta-k) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(\delta)}{[1-\delta]_k}$ olup

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{[1/2+\nu]_k}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(-1/2)}{[3/2]_k},$$

olduğundan bu eşitlikleri (5.20) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\varphi_{[6]} &= (z-1)^{1/2} \left[(z+1)^{-\nu} (z-1)^{-(\nu+1)} \right]_{-(\nu+1/2)} \\
&= (z-1)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{k! \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{[1/2+\nu]_k}} e^{i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)} \frac{\Gamma(-1/2)}{[3/2]_k} (z+1)^{\frac{1}{2}+k} e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z-1)^{-\nu-1-k}, \\
&= -ie^{i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} (z+1)^{\frac{1}{2}+k} (z-1)^{1/2} (z-1)^{-\nu-1-k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1/2+\nu]_k [\nu+1]_k}{k! [3/2]_k}, \\
&= -ie^{i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} (z-1)^{-\nu} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu, 1+\nu; \frac{3}{2}; \frac{z+1}{z-1}\right),
\end{aligned}$$

hipergeometrik formda ki çözüm elde edilir.

Benzer şekilde $\varphi_{[6]}$ nın ispatında ν yerine $-\nu$ yazılırsa $\varphi_{[8]}$ in hipergeometrik formunda ki çözümünü bulunur.

4. Grup (5.4) den

$$\begin{aligned}
\varphi_{[9]} &= (z+1)^{1/2} \left[(z-1)^{-\nu} (z+1)^{-(\nu+1)} \right]_{-(\nu+1/2)} \\
&= (z+1)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{k! \Gamma(1/2-\nu-k)} \left((z-1)^{-\nu} \right)_{-(\nu+1/2)-k} \left((z+1)^{-(\nu+1)} \right)_k,
\end{aligned}$$

(5.21)

elde edilir. (5.3) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left((z-1)^{-\nu} \right)_{-(\nu+\frac{1}{2})-k} &= e^{i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)} \frac{\Gamma(-1/2-k)}{\Gamma(\nu)} (z-1)^{1/2+k}, \\
\left((z+1)^{-(\nu+1)} \right)_k &= e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z+1)^{-\nu-1-k},
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{Ayrıca } \Gamma(\delta-k) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(\delta)}{[1-\delta]_k} \text{ olup}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{[1/2+\nu]_k}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(-1/2)}{[3/2]_k},$$

olduğundan bu eşitlikleri (5.21) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\varphi_{[9]} &= (z+1)^{1/2} \left[(z-1)^{-\nu} (z+1)^{-(\nu+1)} \right]_{-(\nu+1/2)} \\
&= (z+1)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{k! \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{[1/2+\nu]_k}} e^{i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)} \frac{\Gamma(-1/2)}{[3/2]_k} (z-1)^{1/2+k} e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} (z+1)^{-\nu-1-k}, \\
&= -ie^{i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} (z+1)^{-\nu} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1/2+\nu]_k [v+1]_k}{k! [3/2]_k} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^k, \\
&= -ie^{i\pi\nu} \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} (z+1)^{-\nu} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu, 1+\nu; \frac{3}{2}; \frac{z-1}{z+1}\right),
\end{aligned}$$

hipergeometrik formda ki çözüm elde edilir.

Benzer şekilde $\varphi_{[9]}$ un ispatında ν yerine $-\nu$ yazılırsa $\varphi_{[11]}$ in hipergeometrik formunda ki çözümünü bulunur.

(5.3) den

$$\begin{aligned}
\varphi_{[10]} &= (z+1)^{1/2} \left[(z+1)^{-(\nu+1)} (z-1)^{-\nu} \right]_{-(\nu+1/2)} \\
&= (z+1)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{k! \Gamma(1/2-\nu-k)} \left((z+1)^{-(\nu+1)} \right)_{-(\nu+1/2)-k} \left((z-1)^{-\nu} \right)_k,
\end{aligned}$$

(5.22)

elde edilir. (5.4) ile

$$\begin{aligned}
\left((z+1)^{-(\nu+1)} \right)_{-(\nu+1/2)-k} &= e^{i\pi\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)} \frac{\Gamma(1/2-k)}{\Gamma(\nu+1)} (z+1)^{-1/2+k}, \\
\left((z-1)^{-\nu} \right)_k &= e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k+\nu)}{\Gamma(\nu)} (z-1)^{-\nu-k},
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{Ayrıca } \Gamma(\delta-k) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(\delta)}{[1-\delta]_k} \text{ olup}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{[1/2+\nu]_k}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right) = (-1)^{-k} \frac{\Gamma(1/2)}{[1/2]_k},$$

olduğundan bu eşitlikleri (5.22) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\varphi_{[10]} &= (z+1)^{1/2} \left[(z+1)^{-(v+1)} (z-1)^{-v} \right]_{-(v+1/2)} \\
&= (z+1)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2-v)}{k! \frac{\Gamma(1/2-v)}{[1/2+v]_k}} e^{i\pi(v+\frac{1}{2}+k)} \frac{\Gamma(1/2)}{[1/2]_k} (z+1)^{-1/2+k} e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(v)} (z-1)^{-v-k}, \\
&= ie^{i\pi v} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v+1)} (z-1)^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1/2+v]_k [v]_k}{k! [1/2]_k} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^k, \\
&= ie^{i\pi v} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v+1)} (z-1)^{-v} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} + v, v; \frac{1}{2}; \frac{z+1}{z-1} \right),
\end{aligned}$$

hipergeometrik formda ki çözüm elde edilir.

Benzer şekilde $\varphi_{[10]}$ un ispatında v yerine $-v$ yazılırsa $\varphi_{[12]}$ nin hipergeometrik formunda ki çözümünü bulunur.

Örnek 5.1 $v=2$ için

$$\varphi_{[2]} = \left((z^2 - 1)^{v-1/2} \right)_{v-1}$$

çözümünün (4.83) numaralı denklemi sağladığını gösterelim.

$v=2$ için,

$$\varphi = \left((z^2 - 1)^{3/2} \right)_1 = 3z(z^2 - 1)^{1/2},$$

$$\varphi_1(z) = 3(z^2 - 1)^{1/2} + 3z^2(z^2 - 1)^{-1/2},$$

$$\varphi_2(z) = 3z(z^2 - 1)^{-1/2} + 6z(z^2 - 1)^{-1/2} - 3z^3(z^2 - 1)^{-3/2},$$

olur. Bulunan bu eşitlikler (4.83) de yerine yazılırsa

$$3z(z^2 - 1)^{1/2} + 6z(z^2 - 1)^{1/2} - 3z^3(z^2 - 1)^{-1/2} + 3z(z^2 - 1)^{1/2} + 3z^3(z^2 - 1)^{-1/2} - 12z(z^2 - 1)^{1/2} = 0$$

olacak şekilde denklemi sağlar.

6. SONUÇ

Bu tezde bazı kesirli diferansiyel denklemlerin özel çözümleri ve verilen fonksiyonları sağlayan diferintegral denklemler elde edilmiştir. Ayrıca Genelleştirilmiş Leibniz kuralı yardımıyla homojen ve homojen olmayan Chebyshev denkleminin açık çözümleri elde edilmiştir. Son bölümde ise homojen Chebyshev denkleminin açık çözümlerinin başka bir gösterimi olan hipergeometrik gösterim bulunmuştur.



KAYNAKLAR

- [1] **Bayın, S., 2006,** Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley Interscience New Jersey.
- [2] **Carpinteri, A., Mainardi, F. (Editors), 1997,** Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Wien and New York.
- [3] **Miller, K.S., Ross, B., 1993,** An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation, Wiley Interscience, New York.
- [4] **Oldham, K.B., Spainer, J., 1974,** The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- [5] **Podlubny, I., 1999,** Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, New York, London, Tokyo and Toronto.
- [6] **Shy-Der, Lin, Shih-Tong, Tu, Srivista, H.M., 2002,** Certain of Classes of Ordinary and Partial Differential Equations Solvable By Means Of Fractional Calculus, Applied Mathematics and Computation, 131 223-233.
- [7] **Tu, S.-T., Chyan, D.-K., Srivastava, H.M., 2001,** Some Families of Ordinary and Partial Fractional Differintegral Equations, Integral Transform. Spec. Funct., No.3, 291-302.
- [8] **Yilmazer, R., Baş, E., 2012,** Journal of The Chungcheong Mathematical Society, Vol.25, No.2.
- [9] **Wang, Z.X., Guo, D.R., 1989,** Special Functions, World Scientific.
- [10] **Bai, Z., Lü H., 2005,** Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation, J. Math. Anal. Appl., 311, 495-505.

- [11] **Nishimoto, K., 1984, 1987, 1989, 1991, 1996,** Fractional Calculus, vol. I,II,III,IV,V Descartes Press, Koriyama.
- [12] **Nishimoto, K., 1991,** An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21 st Century), Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Descartes Press, Koriyama.
- [13] **Nishimoto, K., 1997,** Kummer's Twenty-Four Functions and Fractional Calculus, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, No.2, 30, 1271-1282.
- [14] **Yaşar, İ.B., 2005,** Diferensiyel Denklemler ve Uygulamalar, Ankara.
- [15] **Slater, L.J., 1966,** Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge.
- [16] **Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., 2006,** Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies, Vol. **204**, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York.
- [17] **Nishimoto, K., 2010,** Production of Some Fractional Differintegral Equations in N-Fractional Calculus, Kyoto University, 1717, 55-68.
- [18] **Nishimoto, K., 2011,** Solutions to the Homogeneous Chebyshev's Equation by Means of N-Fractional Calculus Operator, Kyoto University, 1772, 39-63.

ÖZGEÇMİŞ

Emine ÇAPAN, 1985 yılında Ankara’da doğdu. Lise öğrenimini Ankara Gazi Çiftliği Lisesi’nde tamamladı. 2004 yılında Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’nde başlamış olduğu lisans öğrenimini 2008 yılında tamamladı. Başkent Üniversitesi’nde Tezsiz yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Ankara ve Elazığ illerinde farklı özel okullarda matematik öğretmeni olarak çalışan Emine ÇAPAN son olarak Ankara Gazi Üniversitesi Vakfı Özel Okullarında Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

