

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİ

Hıfı ALTINOK

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2007

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİ

Hıfı ALTINOK

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği/
oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye: Prof. Dr. Fahrettin GÖKTAŞ

Üye: Prof. Dr. Mikail ET

Üye: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Üye: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Anneme, Babama ve Kardeşlerime . . .

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Rifat ÇOLAK'a üzerindeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca, engin bilgi ve birikiminden yararlandığım, doktora eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Mikail ET'e ve zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana zamanını ayıran arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hıfsı ALTINOK

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
ŞEKİLLER LİSTESİ	II
SİMGELER LİSTESİ	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
GİRİŞ	1
1. GENEL KAVRAMLAR	3
1.1. Temel Tanımlar	3
1.2. İstatistiksel Yakınsaklık	6
1.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	8
1.4. λ –İstatistiksel Yakınsaklık	9
1.5. Fark Dizi Uzayları	10
1.6. Orlicz Fonksiyonu ve Orlicz Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Dizi Uzayları	13
2. FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ	15
2.1. Fuzzy Kümeler	15
2.2. Fuzzy Sayılar	17
2.3. Fuzzy Sayı Dizileri ve İstatistiksel Yakınsaklık	21
3. ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI FUZZY FARK DİZİ UZAYLARININ TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ	26
3.1. Genelleştirilmiş Bazı Fuzzy Fark Dizi Uzayları	26
3.2. λ –Fuzzy Fark Dizi Uzayları	32
3.3. Kuvvetli Hemen Hemen Lacunary Yakınsak Fuzzy Dizi Uzayları	41
KAYNAKLAR	52

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. İki kümenin birbirine uzaklıkları	6
Şekil 2.1. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına yakınsaması	21
Şekil 2.2. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaması	23
Şekil 2.3. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir fuzzy sayı dizisi	24
Şekil 2.4. Yakınsak olmayan, ancak istatistiksel yakınsak bir fuzzy sayı dizisi	25
Şekil 3.1. Δ^m -sınırlı ve Δ^m -yakınsak, ancak sınırsız ve ıraksak bir fuzzy sayı dizisi	27
Şekil 3.2. Δ^m -sınırlı, ancak Δ^m -yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi	28

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n –boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
θ	: Lacunary dizi
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü
M	: Orlicz fonksiyonu
$L(\mathbb{R}^n)$	: n –boyutlu fuzzy sayılar kümesi
A^α	: A fuzzy kümesinin α –kesimi
$\text{supp } A$	: A fuzzy kümesinin desteği (support)
h.h.k	: hemen hemen her k
BK	: Banach Koordinatsal
$\xrightarrow{s}$	: İstatistiksel yakınsaklık
$\stackrel{s}{=}$	: İstatistiksel eşitlik

ÖZET

Doktora Tezi

FUZZY SAYI DİZİLERİ

Hıfı ALTINOK

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2007, Sayfa: 55

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilmiş, istatistiksel yakınsaklık, fark dizileri ve konveks fonksiyonların özel bir sınıfında yer alan N -fonksiyonları ve Orlicz fonksiyonlarının bazı özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde, fuzzy küme, fuzzy sayısı ve çalışmamızın temelini teşkil eden fuzzy sayı dizisi kavramları verildikten sonra fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ve sınırlılığı örneklerle açıklanmıştır.

Üçüncü bölümün ilk kısmında bir M Orlicz fonksiyonu ve Δ^m -genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak $c(\Delta^m, F, M, p)$, $c_0(\Delta^m, F, M, p)$, $\ell_\infty(\Delta^m, F, M, p)$, $S(\Delta^m, F, M, p)$ ve $S_0(\Delta^m, F, M, p)$ dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. İkinci kısımda $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olmak üzere λ -fuzzy fark dizi sınıfları tanımlanmış bu uzaylara ait birkaç bağıntı verilmiştir. Son kısımda ise $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi kullanılarak fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli hemen hemen yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy küme, Fuzzy sayısı, Fuzzy sayı dizisi, Orlicz fonksiyonu, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary dizi.

ABSTRACT

Phd Thesis

SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

HİFŞİ ALTINOK

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2007, Page: 55

In the first chapter of this thesis that consists of three chapters, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters and examine difference sequences and N -functions in the special class of convex functions and some properties of Orlicz functions.

In the second chapter, we give the concepts of fuzzy set, fuzzy number and the sequences of fuzzy number which forms base of this study and show statistical convergence and boundedness of them by giving some examples.

In the first section of third chapter, we define the fuzzy sequence spaces $c(\Delta^m, F, M, p)$, $c_0(\Delta^m, F, M, p)$, $\ell_\infty(\Delta^m, F, M, p)$, $S(\Delta^m, F, M, p)$ and $S_0(\Delta^m, F, M, p)$ using an Orlicz function M and Δ^m -generalized difference operator and examine some topological properties of these spaces. In the second section we define λ -fuzzy difference sequence classes and give some relations that belong to these classes, where $\lambda = (\lambda_n)$ is a non-decreasing sequence of positive real numbers. In the last section, we examine strongly uniform convergence of sequences of fuzzy numbers by using a lacunary sequence $\theta = (k_r)$.

Key Words: Fuzzy set, Fuzzy number, Sequence of fuzzy numbers, Orlicz function, Statistical convergence, Lacunary sequence.

GİRİŞ

Kesin bir tanıımı yapılamamakla beraber bir küme bazı özelliklere sahip nesnelerin bir topluluğu olarak düşümlülebilir. Bir kümenin verilmesi için o kümenin elemanlarının belirlenmesine yarayan karakteristik özelliklerinin verilmesi gerekir. Yani bir nesnenin kümeye ait olup olmadığını ayırmaya yarayan kesin bir kural verilmelidir. Buna rağmen küme kavramı tanımında hala bazı yetersizlikler görölmektedir. Çoğu kez, günlük hayatta karşılaşılan bazı nesnelerin sınıfı için karakteristik kriter kesin olarak belirlenemeyebilir. Örneğin, bir hayvanlar kümesine atlar ve kuşları dahil edebiliriz, ama bir virtütün bazı özellikleri sebebiyle canlı mı cansız mı olduğunda bir belirsizlik söz konusudur. Veya, bir sınıf-taki öğrencilerden, uzun boylu olanların kümesinin oluşturulması istense, bu küme farklı kişiler tarafından farklı şekilde oluşturulabilir. Çünkü uzun boylu öğrencilerin kümesi oluşturulurken ne kadar boy uzunluğundan sonrakilerin bu kümeye dahil edileceği hususunda kesin bir kriter yoktur. Bir kişinin uzun boylular kümesine koyduğu bir öğrenciyi başka bir kişi orta boyludur diyerek kümeye dahil etmeyebilir. Dolayısıyla uzun boylu öğrencilerin kümesi bildiğimiz klasik kümeyi oluşturmaz. Bu nedenle bazı nesnelerin bazı kümelere ait olması veya olmaması kavramında ortaya çıkan belirsizlikler, nesnelerin kümelere ait olması kavramının derecelendirilmesi gereğini ortaya koymuştur. Bu ihtiyaçtan dolayı fuzzy küme kavramı doğmuştur.

Bugün 1965'te Lotfi A. Zadeh [1] tarafından yayınlanan makale modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Zadeh, bu makalede, kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu fuzzy küme teorisini ortaya koymuştur.

Bir fuzzy küme, çalışma yapılan alana ait her bir elemana matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atanarak tanımlanır. Bu değer, elemanın fuzzy küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder. Bundan dolayı elemanların kümeye ait olması farklılaşır. Üyelik dereceleri 0 ile 1 arasındaki reel sayılarla temsil edilir. Tam üye olma ve üye olmama durumu, fuzzy kümede sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bundan dolayı da, klasik küme kavramı fuzzy küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görömllebilir.

"Fuzzy küme" kavramı literatürde yerini aldıktan sonra 1972'de Chang ve Zadeh [2] tarafından "fuzzy sayı"nın tanıımı yapılmış ve klasik kümelerde çalışılan alanların hemen hepsinin fuzzy kümelerdeki teori ve uygulamalardaki karşılıklarına birçok bilim adamı tarafından çalışılmaya başlanmıştır.

Fuzzy sayı dizileriyle ilgili ilk çalışmalara 1986 yılında başlanmıştır. Matloka [3], "Sequences of fuzzy numbers" adlı makalesinde fuzzy sayı dizisinin tanımını yapmış, reel sayı dizilerindeki yakınsaklık ve sınırlılığın fuzzy sayı dizilerinde nasıl olduğunu açıklamış ve reel sayı dizilerinde geçerli olan pek çok özelliğın fuzzy sayı dizilerinde de geçerli olduğunu ifade etmiştir. Matloka'nın bu çalışmasından sonra fuzzy sayı dizileri, toplanabilme teorisi ile ilişkilendirilmiş ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır. 1989'da Nanda [4], sınırlı ve yakınsak fuzzy sayı dizi uzaylarını çalışmış ve bu uzayların tam metrik uzay olduğunu göstermiştir. 1990'da bir grup Japon bilim adamı, fuzzy sayı dizilerinin birinci ve ikinci mertebeden farklarını kullanarak deprem tahminleri üzerine çalışmalar yapmıştır. 1995'te Nuray ve Savaş [5], fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanımlamış, 1998'de ise Nuray [6] fuzzy sayı dizilerinde lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlayarak fuzzy sayı dizileri ile lacunary istatistiksel yakınsak ve lacunary istatistiksel fuzzy sayı dizileri arasındaki ilişkiyi vermiştir. Daha sonra Kwon [7], fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli Cesàro yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Son zamanlarda Mursaleen ve Başarır [8], Tripathy [9], Et, Çolak, Altın ve Altınok [10-14], ve Aytar [15] tarafından fuzzy sayı dizileri üzerine pek çok çalışma yapılmıştır.

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve K kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K skaler cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv) Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

v) $1.x = x$

vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [16].

Tanım 1.1.2. X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, x) = 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [16].

Tanım 1.1.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

$$\mathbf{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$$

$$\mathbf{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(N3) şartı $p > 0$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ şartı ile değiştirilirse bu taktirde X e bir p -normlu uzay denir [17].

Tanım 1.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [17].

Tanım 1.1.5. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [17].

Tanım 1.1.6. Kompleks terimli bütün $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin kümesini ω ile göstereceğiz. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında ω bir lineer uzaydır. ω nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [20].

Tanım 1.1.7. Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvektir denir [17].

Tanım 1.1.8. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme denir. Yani A kümesi kompakt ise her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün sonlu sayıda, örneğin n tane, açık kümeden oluşan bir $\{A_i \in \mathcal{A} : i = 1, \dots, n\}$ alt sınıfı vardır ve $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ yazılabilir [19].

Tanım 1.1.9. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_k(x) = x_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir BK-uzayı denir [18].

Tanım 1.1.10. (Minkowski Eşitsizliği) i) $p \geq 1$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^n a_k^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n b_k^p \right]^{1/p}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $0 < p \leq 1$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için $a_k, b_k \geq 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p + \sum_{k=1}^n b_k^p$$

eşitsizliği sağlanır [21].

Tanım 1.1.11. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $a_k, b_k \geq 0$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır [21].

Tanım 1.1.12. (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde $D = \max(1, 2^{H-1})$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \} \quad (1.1.1)$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Tanım 1.1.13. (Hausdorff Metriği) (X, d) bir tam metrik uzay olsun. X in boş olmayan bütün kompakt alt kümelerinin sınıfını $\mathfrak{h}(X)$ ile gösterelim. $A, B \in \mathfrak{h}(X)$ kümeleri için A kümesinin B kümesine uzaklığı $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$ olmak üzere

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$$

şeklinde tanımlanır. A ve B kümeleri için genellikle $d(A, B) \neq d(B, A)$ dır (Şekil 1.1).

Burada $d(A, A) = 0$ olduğu açıktır. $A, B, C \in \mathfrak{h}(X)$ kümeleri için

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

bağıntısı sağlanır. Gerçekten, her $z \in C$ noktası için

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} [d(x, z) + d(z, y)] \\ &\leq \sup_{x \in A} d(x, z) + \inf_{y \in B} d(z, y), \quad \forall z \in C \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu bağıntı sağ taraftaki her iki terimde de C kümesinin her z noktasını yerleştirdiğimizde geçerli olduğuna göre birinci terimde $d(x, z)$ uzaklığını minimum, ikinci terimde ise $d(z, y)$ uzaklığını maksimum yapan z noktalarını kullanırsak

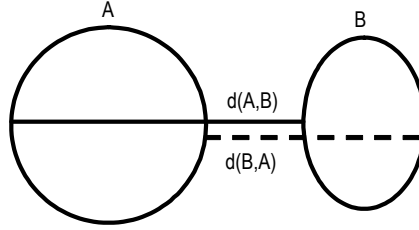
$$d(A, B) \leq \sup_{x \in A} \inf_{z \in C} d(x, z) + \sup_{z \in C} \inf_{y \in B} d(z, y) = d(A, C) + d(C, B)$$

buluruz.

Şimdi $\mathfrak{h}(X)$ üzerinde bir $h : \mathfrak{h}(X) \times \mathfrak{h}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonunu her $A, B \in \mathfrak{h}(X)$ için

$$h(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\} \quad (1.1.2)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon $\mathfrak{h}(X)$ üzerinde metrik şartlarını sağlar. Yani bu h küme fonksiyonu gerçekten bir metrik olup Hausdorff metriği adını alır [19].



Şekil 1.1. İki kümenin birbirine uzaklıkları

1.2. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast ve Schoenberg [23],[24] tarafından birbirlerinden bağımsız olarak verilmiştir. O zamandan beri istatistiksel yakınsaklık, farklı isimler altında Fourier analiz, ergodic teori ve sayılar teorisinde kullanılmıştır. Her iki araştırmacı tarafından sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesàro toplanabilir olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık, Fridy [25], Şalât [26], Connor [27], Mursaleen [28], Tripathy [29], Savaş [30], Fridy ve Orhan [31] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda, kuvvetli integral toplanabilmede ve lokal kompakt uzaylar üzerindeki sınırlı sürekli fonksiyonların ideallerinin yapısında istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmesi görülmektedir.

Tanım 1.2.1. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [32].

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 1.2.2. Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k” biçiminde gösterilir [25].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 1.2.3. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S\text{-}\lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{s} L$ biçiminde gösterilir [25].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S\text{-}\lim x_k = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S\text{-}\lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 1, & k \neq m^2, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S\text{-}\lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S\text{-}\lim x_k = L_1$, $S\text{-}\lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 1.2.4. Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [25].

Teorem 1.2.5. $S\text{-}\lim x_k = a$, $S\text{-}\lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

- i) $S\text{-}\lim cx_k = ca$ dir,
- ii) $S\text{-}\lim (x_k + y_k) = a + b$ dir [23].

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Teorem 1.2.6. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,
- ii) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [25].

1.3. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 1.3.1. $\theta = (k_r)$, pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizi denir. $\theta = (k_r)$ dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir. Lacunary dizilerinde

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır [33].

Tanım 1.3.2. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesi N_θ ile gösterilir [33], yani

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

dır.

N_θ uzayı $\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k| \right)$ normu ile bir BK-uzayıdır.

Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Fridy ve Orhan [31] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.3.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak ise bu S_θ -lim $x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L (S_\theta)$ biçiminde gösterilir. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_θ ile gösterilir, yani

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

dır.

Teorem 1.3.4. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda

- i) $x_k \rightarrow L (N_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L (S_\theta)$ dir.
- ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L (S_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L (N_\theta)$ dir.
- iii) $S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$ dir [31].

1.4. λ -İstatistiksel Yakınsaklık

$\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif sayıların

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$$

şartına sahip, ∞ a giden ve azalmayan bir dizisi olsun. Bu şartları sağlayan λ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilir.

$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere genelleştirilmiş de la Vallée-Pousin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına (V, λ) –toplanabilirdir denir [34].

Eğer $\lambda_n = n$ ise bu durumda (V, λ) –toplanabilme, $(C, 1)$ –toplanabilmeye indirgenir.

Kuvvetli $(C, 1)$ –toplanabilir ve kuvvetli (V, λ) –toplanabilir dizilerin kümeleri sırasıyla

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0 \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4.1. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

şartı sağlanıyorsa $x = (x_n)$ dizisi L ye λ –istatistiksel yakınsaktır veya L ye S_λ –yakınsaktır denir [28]. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ yazılır.

$\lambda_n = n$ özel halinde S_λ ile S uzayları birbirine denk olur.

Teorem 1.4.2. $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu takdirde

- i) $x_k \rightarrow L[V, \lambda] \Rightarrow x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ve $[V, \lambda] \subset S_\lambda$ kapsaması kesindir.
- ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ise $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ dir.
- iii) $S_\lambda \cap \ell_\infty = [V, \lambda] \cap \ell_\infty$ dir [28].

Teorem 1.4.3. $S \subseteq S_\lambda$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olmasıdır [28].

1.5. Fark Dizi Uzayları

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [35] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 1.5.1. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz, bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [36], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\},$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\},$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK-uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [37], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genişleterek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

Fark dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz.

Teorem 1.5.2. Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [37].

Teorem 1.5.3. Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [37].

Teorem 1.5.4. X bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu takdirde A konveks ise $A(\Delta^m)$ uzayı $X(\Delta^m)$ uzayında konvektir [38].

Teorem 1.5.5. Eğer X , $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^n |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır [37].

Tanım 1.5.6. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani h.h.k. için $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsaktır denir. Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sıfıra Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [37].

Sonuç 1.5.7. $S(\Delta^m)$ uzayı bir lineer uzayıdır [37].

Tanım 1.5.8. p pozitif bir reel sayı ve $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ_p^m -Cesàro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ_p^m -Cesàro yakınsak dizilerin kümesi

$$w_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0, p > 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir ve $x \in w_p(\Delta^m)$ olması durumunda $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ yazılır [37].

Teorem 1.5.9. $0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ dir.
- ii) $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ dir [37].

Sonuç 1.5.10. i) $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$

- ii) $S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m) = w_p(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$ [37].

Tanım 1.5.11. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir [37].

Teorem 1.5.12. Δ^m -istatistiksel yakınsak her dizi Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisidir [37].

Teorem 1.5.13. $y = (y_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$, h.h.k. için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise bu dizi Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizidir [37].

1.6. Orlicz Fonksiyonu ve Orlicz Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Dizi Uzayları

Orlicz fonksiyonuyla yakından ilişkisi olan N fonksiyonları, temeli 1906'da Jensel tarafından oluşturulan konveks fonksiyonlar teorisinin özel bir sınıfında yer almaktadır. N fonksiyonları ilk defa 1931'de Birnbaum ve Orlicz tarafından tanımlanmıştır. Daha sonraki zamanlarda N fonksiyonu pek çok matematikçi tarafından çalışılmış, gerek konveks fonksiyonların gerekse Orlicz uzayların yapılarında geniş bir şekilde kullanılmıştır. 1970'de Lindberg, Banach uzayları ve Orlicz uzaylarının ilişkisi üzerine çalışmış, daha sonra Lindenstrauss ve Tzafriri, Orlicz dizi uzaylarını ayrıntılı bir şekilde incelemiş ve Banach uzaylarında bulunan çok önemli ve ilginç yapısal problemleri çözmüşlerdir.

Bilindiği gibi ℓ_p uzayının inşasında x^p fonksiyonu önemli bir rol oynar. Orlicz, ℓ_p uzayını genelleştirme fikrini ortaya atarak x^p fonksiyonunun yerine genel bir M fonksiyonu alarak $\sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty$ şartını sağlayan dizilerin kümesinin Banach uzayı şartlarını sağlaması için M fonksiyonu üzerinde nasıl değişiklikler yapılması gerekeceğini incelemiştir. Orlicz'in burada kullandığı M fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denilmektedir.

Tanım 1.6.1. (a, b) üzerinde tanımlanmış reel değerli bir f fonksiyonu her $x, y \in (a, b)$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bir konveks fonksiyon adını alır.

Buna göre M Orlicz fonksiyonu konveks bir fonksiyon olup, özel olarak $t = \frac{1}{2}$ seçilirse her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$M\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[M(x) + M(y)]$$

eşitsizliğini sağlar [39].

- Tanım 1.6.2.** i) $M(0) = 0$,
 ii) Her $x > 0$ için $M(x) > 0$,
 iii) $x \rightarrow \infty$ için $M(x) \rightarrow \infty$,
 iv) M sürekli, azalmayan ve konveks,

şartlarını sağlayan $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna bir Orlicz fonksiyonu denir [40].

Bir Orlicz fonksiyonunun, $a > 0$ olmak üzere daima

$$M(x) = \int_a^x p(t) dt$$

şeklinde bir integral gösterimi vardır. Burada $p(t)$, M nin çekirdeğidir ve $t \geq 0$ için pozitif olup

$$p(0) = 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ iken } p(t) \rightarrow \infty$$

şartlarını sağlayan, azalmayan bir fonksiyondur [39].

Şimdi, $M(t)$ Orlicz fonksiyonunun $p(t)$ çekirdeğini göz önüne alalım ve

$$q(s) = \sup \{t : p(t) \leq s\}$$

olsun. Bu durumda q, p ile aynı özelliklere sahiptir. q kullanılarak

$$N(x) = \int_a^x q(s) ds$$

şeklinde tanımlanan N fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonudur. M ve N fonksiyonlarına tamamlayıcı Orlicz fonksiyonları adı verilir [40].

Lindenstrauss ve Tzafriri [41], bir M Orlicz fonksiyonunu kullanarak

$$\ell_M = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını inşa etmiş ve bu uzayın

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normuyla bir Banach uzayı olduğunu göstermiştir. Bu uzay Orlicz dizi uzayı adını alır.

$M(x) = x^p$, $1 \leq p < \infty$ için ℓ_M uzayı klasik ℓ_p dizi uzayına dönüşür.

1994'de Parashar ve Choudhary [42] pozitif terimli ve sınırlı bir $p = (p_k)$ reel sayı dizisini kullanarak

$$\ell_M(p) = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)^{p_k} < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dizi uzayını tanımlamış ve bazı özelliklerini vermişlerdir.

2. FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ

Bu bölümün ilk kısmında fuzzy kümenin tanımını ve bu kümenin bir sonraki kısımda tanımı yapılacak olan fuzzy sayının tanımında kullanılacak bazı özelliklerini vereceğiz. İkinci kısımda fuzzy sayılar arasındaki bazı cebirsel işlemlerden ve bu sayıların oluşturduğu $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinin üzerinde tanımlanan metriğin yapısından bahsedeceğiz. Üçüncü kısımda ise ilk defa Matloka [3] tarafından tanımlanan fuzzy sayı dizilerini ve bu dizilerin bazı temel özelliklerini verip Nuray ve Savaş [5] tarafından tanımlanan fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramı hakkında kısa bir bilgi sunacağız. Bu kısımda ayrıca, reel sayı dizilerinde tanımlanan istatistiksel yakınsaklık ve sınırlılık kavramlarının fuzzy sayı dizileri bakımından karşılıklarını ifade etmek için açıklayıcı örnekler ekleyeceğiz.

2.1. Fuzzy Kümeler

Fuzzy kümeyi tanımlamadan önce bir kümenin karakteristik fonksiyonunu tanımlamak gerekir. Karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.1. X herhangi bir küme ve A , X in bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Buna göre X in bir A alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Karakteristik fonksiyonu kullanarak X in herhangi bir elemanının A kümesinin elemanı olup olmadığını kesin olarak anlayabiliriz.

Tanım 2.1.2. χ , elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. χ kümesinde bir A fuzzy kümesi χ deki her bir noktayı $[0, 1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir [1].

χ deki bir A fuzzy kümesinden bahsedilirken $X_A : \chi \rightarrow [0, 1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon $x \in A$ için $X_A(x) \in (0, 1]$, $x \notin A$ için $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanmış karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu diyeceğiz.

Üyelik fonksiyonunun tanımından yararlanarak bir A fuzzy kümesini

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in (0, 1]\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada $X_A(x)$ in değeri A fuzzy kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre $X_A(x)$ in 1 e en yakın değeri, A fuzzy kümesindeki x in en yüksek üyelik derecesidir. Eğer A kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $X_A(x) = 1$ veya $X_A(x) = 0$ olması x in A ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur.

Tanım 2.1.3. Bir A fuzzy kümesinin normal olması için gerek ve yeter şart $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \chi$ olmasıdır [1].

Konvekslik kavramı, klasik kümelerdeki pek çok özellik korunacak şekilde fuzzy kümelere genişletilebilir. Bu kavram, fuzzy sayının tanımını yapabilmek için gerekli olan önemli özelliklerden birisidir. Konveksliğin tanımını vermeden önce α -kesim tanımını verelim.

Tanım 2.1.4. A bir fuzzy küme olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ verilsin. A fuzzy kümesinin α -kesimi A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Bu tanımın benzeri olan ve fuzzy kümelerde sık kullanılan "Destek" kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.5. A bir fuzzy küme olsun. A nın desteği, üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktaların kümesidir ve

$$\text{supp}(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.1.6. χ , n boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı olsun. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0, 1]$ için A^α kümesinin konveks olmasıdır [1].

Konveksliğin diğer bir tanımı ise şöyle verilebilir.

Tanım 2.1.7. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x_1, x_2 \in \chi$ için

$$X_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu tanımdan $X_A(x)$ in x e bağlı bir konveks fonksiyon olduğu anlaşılmalıdır [1].

2.2. Fuzzy Sayılar

Fuzzy sayı kavramını tanımlamadan önce reel sayılarda aralık kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. a ve b iki reel sayı olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine kapalı bir aralık denir.

A bir aralık olmak üzere bu aralığın uç noktalarını $\underline{A}$ ve $\overline{A}$ ile göstereceğiz. Yani $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ şeklinde bir gösterim kullanacağız. Ayrıca bir $[a, a]$ aralığını a reel sayısına karşılık getireceğiz.

A ve B yukarıdaki şekilde tanımlanmış iki aralık olmak üzere reel sayılar için tanımlanmış olan “ $\leq$ ” ve “ $<$ ” sıralama bağıntılarını aralıklar için aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \overline{A} \leq \overline{B}.$$

$$A < B \Leftrightarrow \underline{A} < \underline{B} \text{ ve } \overline{A} < \overline{B}.$$

A ve B aralıkları birer sayı gibi düşünülebileceği için bu aralıkların oluşturduğu kümede toplama işlemi $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ ve $B = [\underline{B}, \overline{B}]$ olmak üzere

$$[\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre iki aralığın toplamı yine bir aralıktır.

A ve B aralıkları arasındaki çıkarma işlemi de

$$[\underline{A}, \overline{A}] - [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}]$$

şeklinde tanımlanır.

Reel sayılar doğrusu üzerindeki bütün kapalı ve sınırlı $[\underline{A}, \overline{A}]$ aralıklarının kümesini D ile gösterelim. Herhangi iki $A, B \in D$ için

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|)$$

şeklinde tanımlanmış bir d fonksiyonunun D üzerinde bir metrik tanımladığı ve (D, d) nin de bir tam metrik uzay olduğu kolayca gösterilebilir [43]. Ayrıca “ $\leq$ ” bağıntısı D üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.2.2. Bir reel fuzzy sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur.

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur,
- ii) X fuzzy konvektir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

- iii) X üst-yarı-süreklidir,
- iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır [2].

Bütün reel fuzzy sayılar kümesini $L(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $L(\mathbb{R})$ kümesinde α -kesim kümeleri için bazı aritmetik işlemler şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılarının toplamı ve farkı sırasıyla

$$(X + Y)(x) = \sup_{x=y+z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

ve

$$(X - Y)(x) = \sup_{x=y-z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

şeklindedir [44].

X ve Y gibi iki fuzzy sayının α -kesim kümelerine göre toplamı ve farkı ise şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ ve bunların α -kesim kümeleri $\alpha \in [0, 1]$ için $[X]^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ve $[Y]^\alpha = [\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} [X + Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha], \\ [X - Y]^\alpha &= [\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha], \end{aligned}$$

dir.

Bir X fuzzy sayısının bir $k \in \mathbb{R}^+$ reel sayısı ile çarpımı da

$$k \cdot A^\alpha = [k, k] \cdot [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha] = [k\underline{X}^\alpha, k\overline{X}^\alpha]$$

şeklindedir.

Her bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebilir. Ayrıca fuzzy sayının tanımına göre her bir karakteristik fonksiyon bir fuzzy sayı olur. Yani $r \in \mathbb{R}$ için $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısı

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & x = r \text{ ise} \\ 0, & x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her r reel sayısı için $\bar{r} = [r, r]$ şeklinde bir gösterim vardır. Bu düşünceden hareketle $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesine gömülebilir [45].

Fuzzy sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı, reel aralıklar arasındaki sıralama bağıntısına benzerlik gösterir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ için " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha \text{ ve } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha$$

şeklinde tanımlanır [46].

Tanım 2.2.3. $A \subset L(\mathbb{R})$ kümesi verilsin. Her $X \in A$ fuzzy sayısı için $X \leq U$ olacak şekilde bir U fuzzy sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır ve U fuzzy sayısına da A kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer A kümesinin her μ üst sınırı için $U \leq \mu$ ise U fuzzy sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Bir küme için alttan sınırlılık ve infimum kavramları da benzer şekilde tanımlanır [4].

$L(\mathbb{R})$ üzerinde Hausdorff metriği olarak bilinen metrik,

$$d(X^\alpha, Y^\alpha) = \max(|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d(X^\alpha, Y^\alpha) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$, bir tam metrik uzaydır [47]. Bu metrik, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

$C(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini gösterebilir. Bu takdirde $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma her $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ için

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

ve her $A \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x, x \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir lineer yapı üretir.

A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_{\infty}(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

Hausdorff metriğiyle tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ sembolü ile $\mathbb{R}^n$ deki alışılmış Öklid normu gösterilmektedir. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_{\infty})$ uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir.

Bir fuzzy sayının tanımı aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

Tanım 2.2.4. n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir fuzzy sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur:

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mevcuttur,
- ii) X fuzzy konvektir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

iii) X üst-yarı-süreklidir,

iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün fuzzy sayıların kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$0 \leq \alpha \leq 1$ için X^{α} kesim kümesini göz önüne alalım. Tanımdan, $X^{\alpha} \in C(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. $L(\mathbb{R}^n)$ deki toplama ve skaler ile çarpma $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[X + Y]^{\alpha} = X^{\alpha} + Y^{\alpha} \text{ ve } [kX]^{\alpha} = kX^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, herbir $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(X, Y) = \left(\int_0^1 \delta_{\infty}(X^{\alpha}, Y^{\alpha})^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_{\infty} = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_{\infty}(X^{\alpha}, Y^{\alpha})$$

metriklerini tanımlayalım. $q \leq s$ için $d_q \leq d_s$ olmak üzere

$$d_{\infty}(X, Y) = \lim_{q \rightarrow \infty} d_q(X, Y)$$

olduğu açıktır. $(C(\mathbb{R}^n), d_q)$ metrik uzayı tamdır [48].

Bundan sonraki kısımlarda d_q yerine d notasyonu kullanılacaktır.

Açıkça $n = 1$ için $L(\mathbb{R}^n)$ kümesinden $L(\mathbb{R})$ ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir.

2.3. Fuzzy Sayı Dizileri ve İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.3.1. Fuzzy sayıların bir $X = (X_k)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R}^n)$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir k pozitif tamsayısına bir $X(k)$ fuzzy sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde $X(k)$ yerine X_k yazacağız [3].

Tanım 2.3.2. $X_0 \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buna göre X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bütün X fuzzy sayılarının kümesidir. Bir X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğu $K(X_0, \varepsilon)$ ile gösterilir [3].

Tanım 2.3.3. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 dır denir. Bu durumda $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ yazılır. Eğer $\lim X_k$ mevcut değilse (X_k) dizisi ıraksaktır denir [3].

Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $c(F)$ ile göstereceğiz.

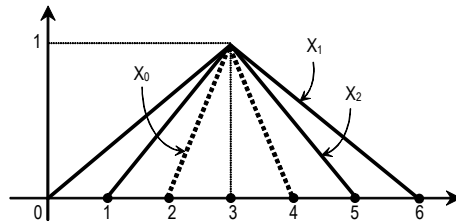
Örnek 2.3.4.

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in [\frac{2k-2}{k}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in [3, \frac{4k+2}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x + 4, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fuzzy sayıdır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına yakınsaması

Teorem 2.3.5. Yakınsak bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin limiti tektir [3].

Teorem 2.3.6. $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ fuzzy sayı dizilerinin limitleri sırasıyla X_0 ve Y_0 olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$,
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$,
- iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$,
- iv) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Eğer bütün k lar için $0 \notin \text{supp} Y_k$ ve $0 \notin \text{supp} Y_0$) [3].

Tanım 2.3.7. Her $\varepsilon > 0$ için $k, m > N$ olduğunda $d(X_k, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcutsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir [3].

Reel sayı dizilerinde olduğu gibi yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda fuzzy Cauchy dizisidir.

Tanım 2.3.8. Her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U fuzzy sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir [3]. Bütün sınırlı fuzzy sayı dizilerinin kümesini $\ell_\infty(F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.3.9. Yakınsak her fuzzy sayı dizisi sınırlıdır [3].

Tanım 2.3.10. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini ve doğal sayıların artan bir $\{k_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (X_{k_n}) dizisine (X_k) dizisinin bir alt dizisi denir [3].

Teorem 2.3.11. Yakınsak bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizinin limiti $X = (X_k)$ dizisinin limiti ile aynıdır [3].

Reel sayı dizilerinin istatistiksel ve kuvvetli Cesàro yakınsaklığı kavramları birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmış ve ilk ortaya çıktığı zamanlardan günümüze kadar birbirlerinden bağımsız bir şekilde ayrı ayrı olarak geliştirilmelerine devam edilmiştir. Bununla birlikte bu iki tanım genel yapı itibarıyla birbirlerine benzemekte olup sınırlı diziler için denktirler.

Reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık kavramı pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramı Nuray ve Savaş [5] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Kwon [7], fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli Cesàro yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Tanım 2.3.12. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcut ise, yani h.h.k için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak ise $X_k \rightarrow X_0 (S(F))$ yazılır.

$S(F)$ ile istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz. Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınırsa $S(F)$ yerine $S_0(F)$ yazacağız [5].

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı $c(F) \subset S(F)$ kapsamayı açıklar. Bu kapsamının kesin olduğunu da aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 2.3.13. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} 2x - (2k - 1), & x \in [k - \frac{1}{2}, k] \text{ ise} \\ -2x + (2k + 1), & x \in [k, k + \frac{1}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{matrix}$$

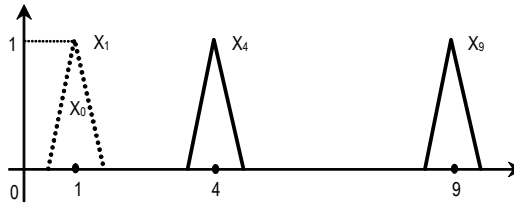
olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{4, 9, 16, \dots\}$$

olduğundan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$ dir. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi X_0 a istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olmadığı için (X_k) dizisi X_0 a yakınsak değildir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. (X_k) fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaması

$S(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ uzayları birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

Örnek 2.3.14.

$$U_1(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

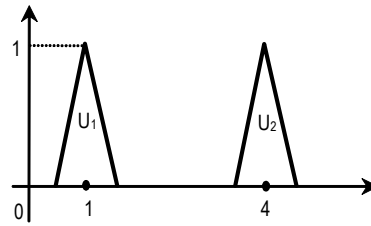
ve

$$U_2(x) = \begin{cases} 2x - 7, & x \in [\frac{7}{2}, 4] \text{ ise} \\ -2x + 9, & x \in [4, \frac{9}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k \text{ tek ise} \\ U_2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (X_k) fuzzy sayı dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir fuzzy sayı dizisi

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan $S(F) \cap \ell_\infty(F) \neq \emptyset$ dir. Hatta $c(F) \subset S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

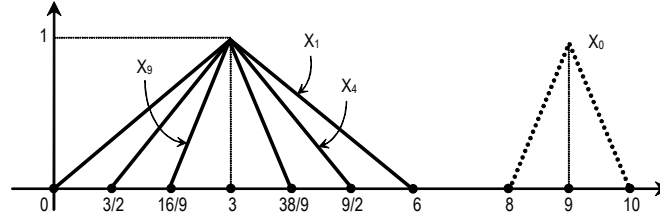
Örnek 2.3.15. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in [\frac{2k-2}{k}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in [3, \frac{4k+2}{k}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ k \neq n^2 \text{ ise} \end{matrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 8, & x \in [8, 9] \text{ ise} \\ -x + 10, & x \in [9, 10] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $X = (X_k)$ dizisi hem sınırlıdır, hem de X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak bu dizi yakınsak değildir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Yakınsak olmayan, ancak istatistiksel yakınsak bir fuzzy sayı dizisi

Tanım 2.3.16. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(X_k, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli Cesàro yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $w(F)$ ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$w(F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(X_k, X_0) = 0, \text{ en az bir } X_0 \text{ için} \right\}$$

dir. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Cesàro yakınsak ise $X_k \rightarrow X_0$ ($w(F)$) yazacağız [7].

Nuray [6], $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini kullanarak istatistiksel yakınsaklık kavramını aşağıdaki şekilde fuzzy sayı dizilerine genişletti.

Tanım 2.3.17. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa, $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\theta - \lim X_k = X_0$ yazılır. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta(F)$ ile, sıfıra Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ise $S_\theta^0(F)$ ile gösterilir.

3. ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI FUZZY FARK DİZİ UZAYLARININ TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

Üç kısımdan oluşan bu bölümde bir Orlicz fonksiyonunu ve Δ^m genelleştirilmiş fark operatörünü kullanarak birkaç fuzzy dizi sınıfı tanımlayacağız.

İlk kısımda bir M Orlicz fonksiyonu ve Δ^m operatörü yardımıyla bazı fuzzy fark dizi sınıflarını genelleştireceğiz. İkinci kısımda $\lambda = (\lambda_n)$ özel olarak tanımlanmış, pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olmak üzere λ -fuzzy fark dizi sınıflarını tanımlayacağız. Üçüncü kısımda ise bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini kullanarak $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli hemen hemen yakınsaklığını verip bazı fuzzy dizi sınıflarını tanımlayacağız.

Bu bölümde tanımlanacak olan dizi sınıfları arasında bazı bağıntılar verecek ve bu sınıfların bazı topolojik özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca, $M(x) = x$ özel hali için bazı uzayların tamlığı gösterilecektir.

3.1. Genelleştirilmiş Bazı Fuzzy Fark Dizi Uzayları

Bu kısımda $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi, M bir Orlicz fonksiyonu ve Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü olmak üzere $c(\Delta^m, F, M, p)$, $c_0(\Delta^m, F, M, p)$, $\ell_\infty(\Delta^m, F, M, p)$, $S(\Delta^m, F, M, p)$ ve $S_0(\Delta^m, F, M, p)$ dizi sınıflarını tanımlayıp bu sınıflardan faydalanarak $\mathbf{m}(\Delta^m, F, M, p)$ ve $\mathbf{m}_0(\Delta^m, F, M, p)$ dizi sınıflarını oluşturacağız. Ayrıca, bu sınıflar arasında bazı bağıntılar verecek ve $p = (p_k)$ dizisinin sınırlı olması durumunda $\ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ fuzzy dizi uzayının tam olduğunu göstereceğiz.

Tanım 3.1.1. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\{\Delta^m X_k : k \in \mathbb{N}\}$ fuzzy sayılar kümesi sınırlı ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine Δ^m -sınırlıdır denir. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $K \leq \Delta^m X_k \leq M$ olacak şekilde K ve M fuzzy sayıları mevcuttur. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $k > N$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayısına Δ^m -yakınsaktır denir. Burada $\Delta^m X = (\Delta^m X_k) = (\Delta^{m-1} X_k - \Delta^{m-1} X_{k+1})$, $\Delta X = (X_k - X_{k+1})$ ve $\Delta^0 X = (X_k)$, $m \in \mathbb{N}$ dir. $\ell_\infty(\Delta^m, F)$, $c(\Delta^m, F)$ ve $c_0(\Delta^m, F)$ ile sırasıyla bütün Δ^m -sınırlı, Δ^m -yakınsak ve sıfıra Δ^m -yakınsak fuzzy sayı dizilerinin sınıflarını göstereceğiz [11].

$\ell_\infty(\Delta^m, F)$, $c(\Delta^m, F)$ ve $c_0(\Delta^m, F)$ fuzzy dizi sınıfları sınırsız ve yakınsak olmayan fuzzy dizileri de ihtiva eder.

Örnek 3.1.2.

$$X_k(x) = \begin{cases} x - 2k + 1, & x \in [2k - 1, 2k] \text{ ise} \\ -x + 2k + 1, & x \in [2k, 2k + 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. (X_k) dizisi Δ^m -sınırlı ve Δ^m -yakınsak bir dizidir. Ancak bu dizi ne sınırlı ne de yakınsaktır.

Gerçekten, (X_k) fuzzy sayı dizisinin α -kesim kümesi $\alpha \in (0, 1]$ için

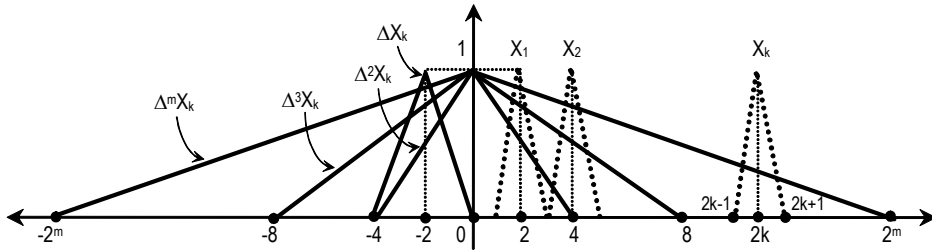
$$[X_k]^\alpha = [2k - 1 + \alpha, 2k + 1 - \alpha]$$

olup buradan $m = 1, 2, \dots$ için

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} [-4 + 2\alpha, -2\alpha], & m = 1 \text{ ise} \\ [-2^m(1 - \alpha), 2^m(1 - \alpha)], & m \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu takdirde $[X_0]^\alpha = [-2^m(1 - \alpha), 2^m(1 - \alpha)]$ olmak üzere $m \geq 2$ için $(\Delta^m X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır. Ayrıca bu dizi sınırlı bir dizidir.

Buna göre Δ^m -sınırlı diziler sınıfı ve Δ^m -yakınsak dizilerin sınıfları, sınırlı ve yakınsak fuzzy dizi sınıflarından daha geneldir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Δ^m -sınırlı ve Δ^m -yakınsak, ancak sınırsız ve ıraksak bir fuzzy sayı dizisi

Ayrıca $c_0(\Delta^m, F) \subset c(\Delta^m, F) \subset \ell_\infty(\Delta^m, F)$ olup bu kapsama kesindir.

Örnek 3.1.3.

$$X_k(x) = \begin{cases} \begin{cases} x - 1, & x \in [1, 2] \text{ ise} \\ -x + 3, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k \text{ tek ise} \\ \begin{cases} x - 3, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ -x + 5, & x \in [4, 5] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

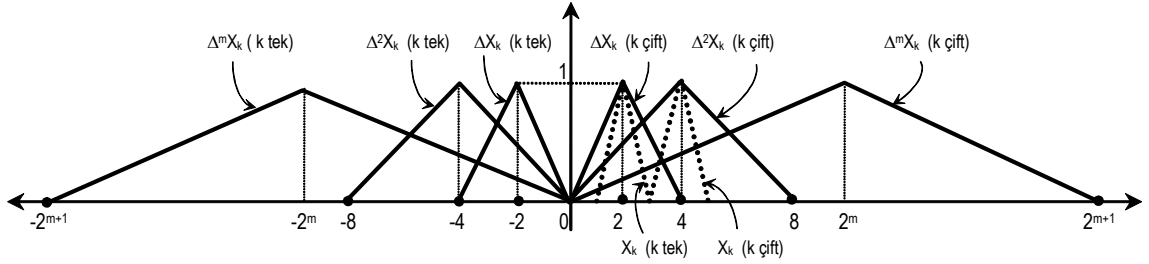
fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi Δ^m -sınırlı olduğu halde Δ^m -yakınsak değildir. Gerçekten, (X_k) fuzzy sayı dizisi için α -kesim kümesi $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [1 + \alpha, 3 - \alpha], & k \text{ tek ise} \\ [3 + \alpha, 5 - \alpha], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

olup buradan $m = 1, 2, \dots$ için

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} [-2^m(2 - \alpha), -2^m\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [2^m\alpha, 2^m(2 - \alpha)], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu takdirde $(\Delta^m X_k)$ dizisi sınırlıdır, ancak yakınsak değildir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Δ^m -sınırlı, ancak Δ^m -yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi

Tamım 3.1.4. $X = (X_k)$ fuzzy sayıların bir dizisi, $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi, M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki fuzzy dizi sınıflarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} c(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ c_0(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ \ell_\infty(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ S(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \stackrel{s}{=} 0 \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ S_0(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} \stackrel{s}{=} 0 \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}. \end{aligned}$$

Yukarıda tanımlanan dizi sınıflarından yararlanarak,

$$\mathbf{m}(\Delta^m, F, M, p) = S(\Delta^m, F, M, p) \cap \ell_\infty(\Delta^m, F, M, p)$$

$$\mathbf{m}_0(\Delta^m, F, M, p) = S_0(\Delta^m, F, M, p) \cap \ell_\infty(\Delta^m, F, M, p)$$

arakesitlerinden oluşan dizi sınıflarını da oluşturabiliriz.

Teorem 3.1.5. Z ile $c, c_0, \ell_\infty, S, S_0, \mathbf{m}, \mathbf{m}_0$ sınıflarından birini gösterelim. (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $Z(\Delta^m, F, M, p)$ dizi sınıfları toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

İspat. Sadece $Z = S$ için ispat yapacağız. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k, X_0$ ve Y_0 in α -kesim kümeleri sırasıyla $\Delta^m X_k^\alpha, \Delta^m Y_k^\alpha, X_0^\alpha$ ve Y_0^α olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\delta_\infty(\lambda X_k^\alpha, \lambda X_0^\alpha) &= |\lambda| \delta_\infty(X_k^\alpha, X_0^\alpha) \\ \delta_\infty(X_k^\alpha + Y_k^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) &\leq \delta_\infty(X_k^\alpha, X_0^\alpha) + \delta_\infty(Y_k^\alpha, Y_0^\alpha) \\ \delta_\infty(\Delta^m X_k^\alpha + \Delta^m Y_k^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) &\leq \delta_\infty(\Delta^m X_k^\alpha, X_0^\alpha) + \delta_\infty(\Delta^m Y_k^\alpha, Y_0^\alpha)\end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$d(\lambda X_k, \lambda X_0) = |\lambda| d(X_k, X_0) \quad (3.1.1)$$

$$d(X_k + Y_k, X_0 + Y_0) \leq d(X_k, X_0) + d(Y_k, Y_0) \quad (3.1.2)$$

$$d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0) \leq d(\Delta^m X_k, X_0) + d(\Delta^m Y_k, Y_0) \quad (3.1.3)$$

dir.

$X \in S(\Delta^m, F, M, p)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $\lambda = 0$ iken ispat aşıkardır. $\lambda \neq 0$ olsun ve $\rho = |\lambda| \rho_1$ seçelim. Δ^m operatörünün lineerliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left[M \left(\frac{d(\Delta^m(\lambda X_k), \lambda X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \left[M \left(\frac{|\lambda| d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k}\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ taraftaki son ifade $k \rightarrow \infty$ için istatistiksel olarak sıfıra yakınsar ve böylece $\lambda X \in S(\Delta^m, F, M, p)$ elde edilir. Şimdi de $X, Y \in S(\Delta^m, F, M, p)$ olsun. $\rho = 2\rho_1$ seçelim. $0 \leq p_k \leq \sup_k p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere M nin konveksliği ve (1.1.1) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} + \frac{d(\Delta^m Y_k, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} + \frac{d(\Delta^m Y_k, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ &\leq D \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + \left[M \left(\frac{d(\Delta^m Y_k, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k}\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ taraftaki son iki ifade $k \rightarrow \infty$ için istatistiksel olarak sıfıra yakınsar ve böylece $X + Y \in S(\Delta^m, F, M, p)$ elde edilir.

Teorem 3.1.6. $\ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ ve $\mathbf{m}(\Delta^m, F, p)$ uzayları $K = \max(1, \sup_{k \geq 0} p_k)$ olmak üzere

$$\delta_\Delta(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k) + \sup_{k \geq 0} [d(\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k)]^{\frac{p_k}{K}}$$

metriğiyle birer tam metrik uzaydır.

İspat. İspatı $\ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ için yapacağız. δ_Δ nin $\ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ üzerinde bir metrik olduğu gösterilebilir. $\ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ uzayının tam olduğunu göstermek için $X^s = (X_k^s)_k = (X_1^s, X_2^s, \dots)$ olmak üzere (X^s) , $\ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\delta_\Delta(X^s, X^t) \rightarrow 0$$

olur. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0 \text{ ve } d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t) \rightarrow 0 \quad (3.1.3)$$

elde edilir.

$$d(X_{k+m}^s, X_{k+m}^t) \leq d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t) + \binom{m}{0} d(X_k^s, X_k^t) + \dots + \binom{m}{m-1} d(X_{k+m-1}^s, X_{k+m-1}^t)$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için $d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0$ dır. Böylece $(X_k^s)_s = (X_k^1, X_k^2, \dots)$ dizisi $L(\mathbb{R}^n)$ de bir Cauchy dizisidir. $L(\mathbb{R}^n)$ tam olduğundan $(X_k^s)_s$ dizisi her bir $k \in \mathbb{N}$ için yakınsaktır. $\lim_s X_k^s = X_k$ alalım. Şimdi (X^s) dizisinin yakınsak ve limitinin $X = (X_k) = (X_1, X_2, \dots)$ olduğunu göstereceğiz. (X^s) , $\ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ de bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $s, t \geq n_0$ için

$$\delta_\Delta(X^s, X^t) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. Buradan $s \geq n_0$ için

$$\lim_t \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k) < \varepsilon$$

ve

$$\lim_t [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)]^{\frac{p_k}{K}} = [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k)]^{\frac{p_k}{K}} < \varepsilon$$

olup böylece her $s \geq n_0$ için

$$\delta_\Delta(X^s, X) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k) + \sup_k [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k)]^{\frac{p_k}{K}} < 2\varepsilon,$$

yani $s \rightarrow \infty$ için $X^s \rightarrow X$ elde ederiz. Diğer taraftan

$$d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \leq d(\Delta^m X_k^{n_0}, \Delta^m X_k) + d(\Delta^m X_k^{n_0}, \bar{0})$$

olduğundan (1.1.1) kullanılırsa

$$[d(\Delta^m X_k, \bar{0})]^{p_k} \leq D \left([d(\Delta^m X_k^{n_0}, \Delta^m X_k)]^{p_k} + [d(\Delta^m X_k^{n_0}, \bar{0})]^{p_k} \right)$$

dır. O halde $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F, p)$ dir.

$\mathbf{m}(\Delta^m, F, p)$ için ispat benzerdir.

Teorem 3.1.7. M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$Z(\Delta^m, F, M_1, p) \cap Z(\Delta^m, F, M_2, p) \subset Z(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p)$$

dir.

İspat. İspatı $Z = \ell_\infty$ için yapacağız. Diğerlerinin ispatı benzer şekilde yapılır.

$X \in \ell_\infty(\Delta^m, F, M_1, p) \cap \ell_\infty(\Delta^m, F, M_2, p)$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\leq D \left[M_1 \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &\quad + D \left[M_2 \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

olup her iki tarafın $k \geq 0$ üzerinden supremumu alınırsa $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p)$ elde edilir.

Teorem 3.1.8. $m \geq 1$ olsun. $Z(\Delta^{m-1}, F, M) \subseteq Z(\Delta^m, F, M)$ dir. Genel olarak $0 \leq i \leq m$ için $Z(\Delta^i, F, M) \subseteq Z(\Delta^m, F, M)$ dir.

İspat. İspatı sadece $Z = \ell_\infty$ için yapacağız. $\rho = 2\rho_1$ seçelim.

$$\left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right] \leq \frac{1}{2} \left\{ \left[M \left(\frac{d(\Delta^{m-1} X_k, \bar{0})}{\rho_1} \right) \right] + \left[M \left(\frac{d(\Delta^{m-1} X_{k+1}, \bar{0})}{\rho_1} \right) \right] \right\}$$

eşitsizliğinden $(X_k) \in \ell_\infty(\Delta^{m-1}, F, M)$ olmasının $(X_k) \in \ell_\infty(\Delta^m, F, M)$ olmasını gerektirdiğini elde ederiz.

Burada tümevarım prensibi uygulanırsa $i = 0, 1, \dots, m-1$ için

$$\ell_\infty(\Delta^i, F, M) \subseteq \ell_\infty(\Delta^m, F, M)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.9. Her bir k için $0 < p_k \leq g_k < \infty$ olsun. Bu durumda

$$c(\Delta^m, F, M, p) \subseteq c(\Delta^m, F, M, g)$$

ve

$$c_0(\Delta^m, F, M, p) \subseteq c_0(\Delta^m, F, M, g)$$

olur.

İspat. $(X_k) \in c_0(\Delta^m, F, M, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ mevcuttur.

Bu ise yeterince büyük k lar için

$$M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \leq 1$$

olmasını gerektirir. Böylece her bir k için $p_k \leq g_k$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{g_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Yani $(X_k) \in c_0(\Delta^m, F, M, g)$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$c(\Delta^m, F, M, p) \subset c(\Delta^m, F, M, g)$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoremden sırasıyla her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ve $g_k = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1.10. (a) $0 < \inf p_k \leq p_k \leq 1$ olsun. Bu takdirde

- i) $c(\Delta^m, F, M, p) \subseteq c(\Delta^m, F, M)$
- ii) $c_0(\Delta^m, F, M, p) \subseteq c_0(\Delta^m, F, M)$

kapsamaları geçerlidir.

(b) $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ olsun. Bu takdirde

- i) $c(\Delta^m, F, M) \subseteq c(\Delta^m, F, M, p)$
- ii) $c_0(\Delta^m, F, M) \subseteq c_0(\Delta^m, F, M, p)$

kapsamaları geçerlidir.

3.2. λ -Fuzzy Fark Dizi Uzayları

Bu kısımda $\lambda = (\lambda_n)$, pozitif sayıların azalmayan, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) şartlarını sağlayan bir dizisi, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü ve M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere $w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$, $w_0(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ ve $w_\infty(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ dizi sınıflarını tanımlayıp bu sınıflara ilişkin bazı özellikleri inceleyeceğiz ve $1 \leq p < \infty$ için $w(\Delta^m, F, \lambda)$ dizi uzayının tanımlığını göstereceğiz. Ayrıca $S_\lambda(\Delta^m, F)$ dizi sınıfını tanımlayıp bu sınıf ile $w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ dizi sınıfı arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1. M bir Orlicz fonksiyonu, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi, $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) şeklinde bir dizisi ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere aşağıdaki dizi sınıflarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} w(\Delta^m, F, M, p, \lambda) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \\ w_0(\Delta^m, F, M, p, \lambda) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \\ w_\infty(\Delta^m, F, M, p, \lambda) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Eğer $X \in w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ ise $X = (X_k)$ dizisi M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Δ_λ^m -Cesàro yakınsaktır diyeceğiz.

Tanımlanan bu dizi sınıfları oldukça geneldir. Gerçekten m sayısı, λ ve p dizileri ile M fonksiyonunun farklı seçilişlerinden farklı dizi sınıfları elde edilir. Aşağıda bununla ilgili birkaç örnek verelim:

1) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ seçilirse

$$\begin{aligned} w(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \\ w_0(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \\ w_\infty(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

2) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ seçilirse

$$\begin{aligned} w(\Delta^m, F, M, \lambda) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^p = 0, \\ 0 < p < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \\ w_0(\Delta^m, F, M, \lambda) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^p = 0, \\ 0 < p < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

$$w_{\infty}(\Delta^m, F, M, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^p < \infty, \\ 0 < p < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\},$$

3) $M(x) = x$ seçilirse

$$\begin{aligned} w(\Delta^m, F, \lambda, p) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} = 0, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \\ w_0(\Delta^m, F, \lambda, p) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, \bar{0})]^{p_k} = 0, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\}, \\ w_{\infty}(\Delta^m, F, \lambda, p) &= \left\{ \begin{array}{l} X = (X_k) : \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, \bar{0})]^{p_k} < \infty, \\ \text{en az bir } \rho > 0 \text{ için} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. (p_k) dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde, $w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$, $w_0(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ ve $w_{\infty}(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ sınıfları toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalıdır.

İspat. İspatı sadece $w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ için yapacağız. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir. $\alpha \in [0, 1]$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\Delta^m X_k$, $\Delta^m Y_k$, X_0 ve Y_0 ın α -kesim kümeleri sırasıyla $\Delta^m X_k^{\alpha}$, $\Delta^m Y_k^{\alpha}$, X_0^{α} ve Y_0^{α} olsun. Bu takdirde

$$\delta_{\infty}(\Delta^m(cX_k^{\alpha}), cX_0^{\alpha}) = |c| \delta_{\infty}(\Delta^m X_k^{\alpha}, X_0^{\alpha})$$

olduğundan

$$d(\Delta^m(cX_k), cX_0) = |c| d(\Delta^m X_k, X_0) \quad (3.2.1)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta_{\infty}(\Delta^m X_k^{\alpha} + \Delta^m Y_k^{\alpha}, X_0^{\alpha} + Y_0^{\alpha}) &\leq \delta_{\infty}(\Delta^m X_k^{\alpha} + \Delta^m Y_k^{\alpha}, \Delta^m Y_k^{\alpha} + X_0^{\alpha}) \\ &\quad + \delta_{\infty}(\Delta^m Y_k^{\alpha} + X_0^{\alpha}, X_0^{\alpha} + Y_0^{\alpha}) \\ &= \delta_{\infty}(\Delta^m X_k^{\alpha}, X_0^{\alpha}) + \delta_{\infty}(\Delta^m Y_k^{\alpha}, Y_0^{\alpha}) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0) \leq d(\Delta^m X_k, X_0) + d(\Delta^m Y_k, Y_0) \quad (3.2.2)$$

elde edilir.

$X, Y \in w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ olsun ve $\rho = 2\rho_1$ alalım. M azalmayan ve konveks olduğundan (1.1.1) ve (3.2.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ \leq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} + \frac{d(\Delta^m Y_k, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ \leq \frac{D}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ + \frac{D}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m Y_k, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

ve böylece $X + Y \in w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ elde edilir.

$X \in w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$, $c \in \mathbb{R}$ ve $\rho = |c| \rho_1$ olsun. (3.2.1) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m (cX_k), cX_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{|c| d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $cX \in w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ olur. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3. $w(\Delta^m, F, \lambda)$ dizi uzayı, $1 \leq p < \infty$ için

$$\delta'_\Delta(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k) + \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k)]^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

metriğiyle bir tam metrik uzaydır.

İspat. Herbir $s \in \mathbb{N}$ için $X^s = (X_k^s)_k = (X_1^s, X_2^s, \dots) \in w(\Delta^m, F, p, \lambda)$ olmak üzere (X^s) bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde, $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\delta'_\Delta(X^s, X^t) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) + \sup_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)]^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

olur. Böylece $s, t \rightarrow \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0 \text{ ve } \sup_n \left(\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)]^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

olur. Buradan $k \leq m$ ve $s, t \rightarrow \infty$ iken $d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için $d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t) \rightarrow 0$ elde edilir. d nin tanımı ve

$$d(X_{k+m}^s, X_{k+m}^t) \leq d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t) + \binom{m}{0} d(X_k^s, X_k^t) + \dots + \binom{m}{m-1} d(X_{k+m-1}^s, X_{k+m-1}^t)$$

eşitsizliği her $k \in \mathbb{N}$ için sağlanacağından $s, t \rightarrow \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu, $(X_k^s)_k = (X_k^1, X_k^2, \dots)$ dizisinin $L(\mathbb{R}^n)$ de bir Cauchy dizisi olmasını gerektirir. $L(\mathbb{R}^n)$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Herbir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_s X_k^s = X_k$ olsun. (X^s) bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her $s, t \geq n_0$ için

$$\delta'_\Delta(X^s, X^t) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mevcuttur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ ve her $s, t \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) < \varepsilon \text{ ve } \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)]^p < \varepsilon^p$$

elde edilir. Son iki ifadede $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $s \geq n_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_t \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k) < \varepsilon$$

ve

$$\lim_t \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)]^p = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k)]^p < \varepsilon^p$$

olur. Bu ise $X = (X_k)$ olmak üzere $s \rightarrow \infty$ için

$$\delta'_\Delta(X^s, X) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k) + \sup_n \left(\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k)]^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

olmasını gerektirir. O halde $s \rightarrow \infty$ için $X^s \rightarrow X$ dir.

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \leq 2^p \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^{n_0}, X_0)]^p + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k^{n_0}, \Delta^m X_k)]^p \right\}$$

olduğundan $X \in w(\Delta^m, F, \lambda)$ dir.

$w(\Delta^m, F, \lambda)$ dizi uzayının $0 < p < 1$ için

$$\delta'_{1\Delta}(X, Y) = \sum_{k=1}^m [d(X_k, Y_k)]^p + \sup_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k)]^p$$

metriğiyle bir tam metrik uzay olduğu yukarıdaki yolla kolayca gösterilebilir.

Tanım 3.2.4. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve en az bir $\rho > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına M Orlicz fonksiyonuna göre $\Delta_{\lambda(p)}^m$ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bir M Orlicz fonksiyonuna göre $\Delta_{\lambda(p)}^m$ -yakınsak bütün fuzzy sayı dizilerinin sınıfını $S(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ ile göstereceğiz.

$S(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ dizi sınıfı oldukça genel bir dizi sınıfıdır. m, M, p ve λ özel seçilirse aşağıdaki dizi sınıfları elde edilir:

1) $M(x) = x$ ise

$$S(\Delta^m, F, p, \lambda) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}.$$

2) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ ve $M(x) = x$ ise

$$S(\Delta^m, F, \lambda) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}.$$

3) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ise

$$S(\Delta^m, F, M, \lambda) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right] \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}.$$

4) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ ise

$$S(\Delta^m, F, M, p) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}.$$

5) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$, $p_k = 1$ ve $M(x) = x$ ise

$$S(\Delta^m, F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : [d(\Delta^m X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}.$$

Eğer $X \in S(\Delta^m, F, \lambda)$ ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ_λ^m -istatistiksel yakınsaktır denir.

Eğer bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ^m -yakınsak ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsaktır. Ancak tersi doğru değildir. Bunun için $X = (X_k)$ dizisi Örnek 2.3.13 deki gibi seçilsin. Bu dizinin α -kesim kümesi $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [k - \frac{1}{2}(1 - \alpha), k + \frac{1}{2}(1 - \alpha)], & k = n^2 \text{ ise } (n = 1, 2, \dots) \\ [\frac{1}{2}(1 + \alpha), \frac{1}{2}(3 - \alpha)], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde dir. $(\Delta^m X_k)$ fuzzy fark dizisinin $m = 1$ için α -kesim kümesi

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [k - 2 + \alpha, k - \alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [-k - 1 + \alpha, -k + 1 - \alpha], & k = n^2 - 1, (n > 1) \text{ ise,} \\ [-1 + \alpha, 1 - \alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak bulunur. Buna göre $[X]^\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$ olmak üzere (ΔX_k) fuzzy fark dizisi X e istatistiksel yakınsak olduğu halde yakınsak değildir.

Bilindiği gibi reel sayı dizilerinde $x_k \xrightarrow{s} L$ iken $\Delta x_k \xrightarrow{s} 0$ dır. Fakat, yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi fuzzy sayı dizilerinde bu özellik sağlanmaz. Gerçekten, $[L]^\alpha = [\frac{1}{2}(1 + \alpha), \frac{1}{2}(3 - \alpha)]$ olmak üzere $X_k \xrightarrow{s} L$ olduğu halde $[X]^\alpha = [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$ olmak üzere $\Delta X_k \xrightarrow{s} X$ dir.

Teorem 3.2.5. $S(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ dizi sınıfı toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

İspat. Teorem 3.2.2 de verilen metod kullanılarak yapılabilir.

Teorem 3.2.6. M bir Orlicz fonksiyonu, $p = (p_k)$ dizisi sınırlı, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $0 < \inf p_k = h < H = \sup p_k < \infty$ olsun. Bu takdirde

i) $X = (X_k)$ dizisi M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Δ_λ^m -Cesàro yakınsak ise Δ_λ^m -istatistiksel yakınsaktır.

ii) $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi Δ^m -sınırlı ve Δ_λ^m -istatistiksel yakınsak ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi herhangi bir M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Δ_λ^m -Cesàro yakınsaktır.

İspat. i) $\varepsilon > 0$ verilsin ve $X = (X_k)$ dizisi bir M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 sayısına kuvvetli Δ_λ^m -Cesàro yakınsak ve $0 < \inf p_k = h < H = \sup p_k < \infty$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&+ \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [M(\varepsilon_1)]^{p_k}, \quad \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon_1 \\
&\geq \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \min \left\{ [M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right\} \\
&= \lambda_n^{-1} |\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \cdot \min \left\{ [M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right\}
\end{aligned}$$

olur. Buna göre X dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ_λ^m -istatistiksel yakınsaktır.

ii) $X = (X_k)$ dizisi Δ^m -sınırlı ve X_0 sayısına Δ_λ^m -istatistiksel yakınsak olsun. (X_k) dizisi Δ^m -sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) \leq T$ olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\quad + \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \max \left\{ \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^h, \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^H \right\} \\
&\quad + \lambda_n^{-1} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} \left[M \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \max \left\{ [M(K)]^h, [M(K)]^H \right\} \cdot \lambda_n^{-1} |\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \max \left\{ [M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right\}, \quad \frac{T}{\rho} = K, \quad \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon_1
\end{aligned}$$

yazılabilir. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak olduğundan yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki son iki terimden ilki $n \rightarrow \infty$ için; ikincisi de M sıfırda sağdan sürekli olduğundan ve $M(0) = 0$ olduğundan sıfıra gider. Bu da $n \rightarrow \infty$ için sol tarafın sıfıra gitmesini gerektirir ki bu, $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin X_0 fuzzy sayısına M Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli Δ_λ^m -Cesàro yakınsak olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.7. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{n} \right) > 0$ olsun. Eğer $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 sayısına $\Delta_{(p)}^m$ -istatistiksel yakınsak ise bu sayıya aynı zamanda $\Delta_{\lambda(p)}^m$ -istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\left\{ k \leq n : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \supset \left\{ k \in I_n : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| \\
\geq \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafında $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa sol taraf sıfıra gideceğinden ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{n} \right) > 0$ olduğundan sağ taraf da sıfıra gider. Bu $X = (X_k)$ dizisinin

X_0 fuzzy sayısına, M Orlicz fonksiyonuna göre $\Delta_{\lambda(p)}^m$ -istatistiksel yakınsak olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2.8. $p = (p_k)$ ve $t = (t_k)$ pozitif sayıların herhangi iki dizisi, her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq t_k$ ve $\left(\frac{t_k}{p_k}\right)$ dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde $w(\Delta^m, F, M, t, \lambda) \subset w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ dir.

İspat. $X \in w(\Delta^m, F, M, t, \lambda)$ olsun. $w_k = \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{t_k}$ ve $\mu_k = \frac{p_k}{t_k}$ diyelim. $0 < p_k \leq t_k$ olduğundan $0 < \mu_k \leq 1$ dir. $\left(\frac{t_k}{p_k}\right)$ dizisi sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \mu < \mu_k \leq 1$ olacak şekilde bir μ sayısı bulabiliriz. (u_k) ve (v_k) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} u_k &= \begin{cases} w_k, & w_k \geq 1 \text{ ise} \\ 0, & w_k < 1 \text{ ise} \end{cases} \\ v_k &= \begin{cases} 0, & w_k \geq 1 \text{ ise} \\ w_k, & w_k < 1 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

Buna göre $w_k = u_k + v_k$, $w_k^{\mu_k} = u_k^{\mu_k} + v_k^{\mu_k}$ dir. Buradan $u_k^{\mu_k} \leq u_k \leq w_k$ ve $v_k^{\mu_k} \leq v_k^{\mu}$ yazabiliriz. Böylece

$$\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} w_k^{\mu_k} = \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} (u_k^{\mu_k} + v_k^{\mu_k}) \leq \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} w_k + \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} v_k^{\mu}$$

dir. $\mu < 1$ ve $\frac{1}{\mu} > 1$ olduğundan Hölder eşitsizliği kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} v_k^{\mu} = \sum_{k \in I_n} (\lambda_n^{-1} v_k)^{\mu} (\lambda_n^{-1})^{1-\mu} \leq \left(\sum_{k \in I_n} [(\lambda_n^{-1} v_k)^{\mu}]^{\frac{1}{\mu}} \right)^{\mu} \left(\sum_{k \in I_n} [(\lambda_n^{-1})^{1-\mu}]^{\frac{1}{1-\mu}} \right)^{1-\mu}$$

elde edilir. Böylece

$$\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} w_k^{\mu_k} \leq \lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} w_k + \left(\lambda_n^{-1} \sum_{k \in I_n} v_k \right)^{\mu}$$

olur. Bu ise $X \in w(\Delta^m, F, M, p, \lambda)$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.2.9. M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde

- i) $w(\Delta^m, F, M_1, p, \lambda) \cap w(\Delta^m, F, M_2, p, \lambda) \subset w(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p, \lambda)$
 - ii) $w_0(\Delta^m, F, M_1, p, \lambda) \cap w_0(\Delta^m, F, M_2, p, \lambda) \subset w_0(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p, \lambda)$
 - iii) $w_{\infty}(\Delta^m, F, M_1, p, \lambda) \cap w_{\infty}(\Delta^m, F, M_2, p, \lambda) \subset w_{\infty}(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p, \lambda)$
- bağıntıları sağlanır.

İspat. i) $(X_k) \in w(\Delta^m, F, M_1, p, \lambda) \cap w(\Delta^m, F, M_2, p, \lambda)$ olsun. Buna göre (1.1.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n} \left\{ D \sum_{k \in I_n} \left[M_1 \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right. \\ &\quad \left. + D \sum_{k \in I_n} \left[M_2 \left(\frac{d(\Delta^m X_k, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\} \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $(X_k) \in w(\Delta^m, F, M_1, p, \lambda) \cap w(\Delta^m, F, M_2, p, \lambda)$ iken $(X_k) \in w(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p, \lambda)$ bulunur.

3.3. Kuvvetli Hemen Hemen Lacunary Yakınsak Fuzzy Dizi Uzayları

Bu kısımda Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü, bir M Orlicz fonksiyonu, kesin pozitif reel sayıların bir $p = (p_k)$ dizisi ve bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini kullanarak fuzzy sayı dizilerinin önce kuvvetli hemen hemen yakınsaklığını tanımlayacağız. Daha sonra bu kavramı kullanarak bazı dizi sınıfları verip bu sınıflara ait bazı topolojik özellikler elde edeceğiz ve sınırlı bir $p = (p_k)$ dizisi için $\hat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ uzayının tanımlığını göstereceğiz. Son olarak $\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dizi sınıfı ile $\hat{S}(\Delta^m, F, \theta)$ sınıfı arasındaki ilişkiyi araştıracağız.

Tanım 3.3.1. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi ve M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Aşağıdaki fuzzy dizi sınıflarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ &\quad \left. i \text{ ye göre düzgün, } \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ \hat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ &\quad \left. i \text{ ye göre düzgün, } \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \sup_{r, i} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \right. \\ &\quad \left. \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}. \end{aligned}$$

$X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ ise $X = (X_k)$ dizisi M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 sayısına kuvvetli hemen hemen $\Delta_{(p)}^m$ -lacunary yakınsaktır denir. M fonksiyonu, m sayısı, $p = (p_k)$ ve $\theta = (k_r)$ dizilerinin özel seçilmeleri halinde aşağıdaki dizi sınıfları elde edilir.

1) $\theta = (2^r)$ seçilirse

$$\begin{aligned}\hat{w}(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ &\quad \left. i \text{ ye göre düzgün, } \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ \hat{w}_0(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ &\quad \left. i \text{ ye göre düzgün, } \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p) &= \left\{ X = (X_k) : \sup_{n,i} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \right. \\ &\quad \left. \exists \rho > 0 \text{ için} \right\},\end{aligned}$$

2) $M(x) = x$ seçilirse

$$\begin{aligned}\hat{w}(\Delta^m, F, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^{p_k} = 0, i \text{ ye göre düzgün} \right\}, \\ \hat{w}_0(\Delta^m, F, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})]^{p_k} = 0, i \text{ ye göre düzgün} \right\}, \\ \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \sup_{r,i} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})]^{p_k} < \infty \right\},\end{aligned}$$

3) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ seçilirse

$$\begin{aligned}\hat{w}(\Delta^m, F, M, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^p = 0, \right. \\ &\quad \left. i \text{ ye göre düzgün, } \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ \hat{w}_0(\Delta^m, F, M, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^p = 0, \right. \\ &\quad \left. i \text{ ye göre düzgün, } \exists \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \sup_{r,i} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^p < \infty, \right. \\ &\quad \left. \exists \rho > 0 \text{ için} \right\},\end{aligned}$$

4) $M(x) = x$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ ise

$$\begin{aligned}\hat{w}(\Delta^m, F, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p = 0, i \text{ ye göre düzgün} \right\}, \\ \hat{w}_0(\Delta^m, F, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})]^p = 0, i \text{ ye göre düzgün} \right\}, \\ \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \sup_{r,i} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})]^p < \infty \right\}\end{aligned}$$

dizi sınıfları elde edilir.

Teorem 3.3.2. (p_k) dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde $\hat{w}(\Delta^m, M, p, F, \theta)$, $\hat{w}_0(\Delta^m, M, p, F, \theta)$ ve $\hat{w}_\infty(\Delta^m, M, p, F, \theta)$ dizi sınıfları toplama ve skaler ile çarpım işlemlerine göre kapalıdır.

İspat. İspatı sadece $\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ için yapacağız. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir.

$X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$, $c \in \mathbb{R}$ olsun ve $\rho = |c| \rho_1$ seçelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(c\Delta^m X_{k+i}, cX_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|c| d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty), \quad i \text{ ye göre düzgün} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $cX \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dir. $X, Y \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ olsun ve $\rho = 2\rho_1$ alalım. M azalmayan ve konveks olduğundan (1.1.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m (X_{k+i} + Y_{k+i}), X_0 + Y_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} + \frac{d(\Delta^m Y_{k+i}, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ \leq \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m Y_{k+i}, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

ve böylece $X + Y \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.3. $\hat{w}(\Delta^m, F, p, \theta)$, $\hat{w}_0(\Delta^m, F, p, \theta)$ ve $\hat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ uzayları $K = \max(1, \sup_k p_k)$ olmak üzere

$$\delta''_{\Delta}(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k) + \sup_{r, i} \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \Delta^m Y_{k+i})]^{p_k} \right)^{\frac{1}{K}}$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır.

İspat. δ''_{Δ} nin bu sınıflar üzerinde bir metrik olduğu gerekli işlemler yapılarak doğrudan doğruya gösterilebilir. $X^s = (X_k^s)_k = (X_1^s, X_2^s, \dots)$ olmak üzere (X^s) dizisi $\hat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\delta''_{\Delta}(X^s, X^t) \rightarrow 0$$

dır. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ ve her r, i için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0 \text{ ve } h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i}^t)]^{p_k} \rightarrow 0$$

yazılabilir. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ ve her sabit j için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0 \text{ ve } d(\Delta^m X_j^s, \Delta^m X_j^t) \rightarrow 0$$

olur.

$$d(X_{j+m}^s, X_{j+m}^t) \leq d(\Delta^m X_j^s, \Delta^m X_j^t) + \binom{m}{0} d(X_j^s, X_j^t) + \dots + \binom{m}{m-1} d(X_{j+m-1}^s, X_{j+m-1}^t)$$

eşitsizliğinden $s, t \rightarrow \infty$ ve her sabit j için

$$d(X_j^s, X_j^t) \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece $(X_j^s)_s = (X_j^1, X_j^2, \dots)$, $L(\mathbb{R}^n)$ de bir Cauchy dizisidir. $L(\mathbb{R}^n)$ tam olduğundan $(X_j^s)_s$ her bir j için yakınsaktır.

$$\lim_s X_j^s = X_j$$

diyelim. (X^s) , $\hat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ da bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq n_0$ olduğunda $\delta''_\Delta(X^s, X^t) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde $s, t \geq n_0$ ve her $r, i \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) < \varepsilon \text{ ve } h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i}^t)]^{p_k} < \varepsilon^K$$

dır. $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $s \geq n_0$ ve $r, i \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k) < \varepsilon \text{ ve } h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i})]^{p_k} < \varepsilon^K \quad (3.3.1)$$

bulunur. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve $s \geq n_0$ için

$$\delta''_\Delta(X^s, X) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k) + \sup_{r, i} \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i})]^{p_k} \right)^{\frac{1}{K}} < 2\varepsilon$$

bulunur. Bu $X = (X_j)$ olmak üzere $X^s \rightarrow X$ ($s \rightarrow \infty$) demektir. Diğer taraftan $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})]^{p_k} &\leq h_r^{-1} \left\{ \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \bar{0}) + d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \Delta^m X_{k+i})]^{p_k} \right\} \\ &\leq h_r^{-1} D \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \bar{0})]^{p_k} \\ &\quad + h_r^{-1} D \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \Delta^m X_{k+i})]^{p_k} \end{aligned}$$

yazabiliriz. $X^s \in \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ olduğundan (3.3.1) göz önüne alınırsa $X \in \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ elde edilir.

Teorem 3.3.4. M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde

- i) $\hat{w}_0(\Delta^m, F, M_1, p, \theta) \cap \hat{w}_0(\Delta^m, F, M_2, p, \theta) \subset \hat{w}_0(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p, \theta)$,
 - ii) $\hat{w}(\Delta^m, F, M_1, p, \theta) \cap \hat{w}(\Delta^m, F, M_2, p, \theta) \subset \hat{w}(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p, \theta)$,
 - iii) $\hat{w}_\infty(\Delta^m, F, M_1, p, \theta) \cap \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, M_2, p, \theta) \subset \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, M_1 + M_2, p, \theta)$
- dir.

İspat. Teorem 3.1.7 nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.3.5. $0 < p_k \leq g_k$ ve $\left(\frac{g_k}{p_k}\right)$ sınırlı olsun. Bu takdirde $\hat{w}(\Delta^m, F, M, g, \theta) \subseteq \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dir.

İspat. $X = (X_k) \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, g, \theta)$ olsun. $t_k = \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$ ve $\mu_k = \frac{p_k}{g_k}$ yazalım. $\left(\frac{g_k}{p_k}\right)$ dizisi sınırlı olduğundan her bir k için $0 < \mu < \mu_k \leq 1$ olacak şekilde bir μ sayısı vardır. (u_k) ve (v_k) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$u_k = \begin{cases} t_k, & t_k \geq 1 \\ 0, & t_k < 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad v_k = \begin{cases} 0, & t_k \geq 1 \\ t_k, & t_k < 1 \end{cases}.$$

Bu takdirde her $k \in \mathbb{N}$ için $t_k = u_k + v_k$ ve $t_k^{\mu_k} = u_k^{\mu_k} + v_k^{\mu_k}$ dir. Buradan da $u_k^{\mu_k} \leq u_k \leq t_k$ ve $v_k^{\mu_k} \leq v_k^{\mu}$ elde edilir. Böylece

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k^{\mu_k} = h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} (u_k + v_k)^{\mu_k} \leq h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k + h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k^{\mu}$$

dır. Hölder eşitsizliğinden her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k^{\mu_k} &= \sum_{k \in I_r} (h_r^{-1} v_k)^{\mu} (h_r^{-1})^{1-\mu} \\ &\leq \left(\sum_{k \in I_r} ((h_r^{-1} v_k)^{\mu})^{\frac{1}{\mu}} \right)^{\mu} \left(\sum_{k \in I_r} ((h_r^{-1})^{1-\mu})^{\frac{1}{1-\mu}} \right)^{1-\mu} \\ &= \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k \right)^{\mu} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k^{\mu_k} \leq h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k + \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k \right)^{\mu}$$

olur. Bu ise $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, g, \theta)$ demektir.

Teorem 3.3.6. $\liminf_{r \rightarrow \infty} q_r > 1$ olmak üzere $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Bu takdirde herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $\hat{w}(\Delta^m, F, M, p) \subset \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dir.

İspat. $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ olsun ve $\liminf_{r \rightarrow \infty} q_r > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde her $r \geq 1$ için $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Bu durumda $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ için

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} - \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \\ &\quad - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ ve $\frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$ olup bu değerler kullanılarak

$$A_r \leq \frac{1+\delta}{\delta} k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} - \frac{1}{\delta} k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

elde edilir. Sağ taraftaki

$$k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \quad \text{ve} \quad k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

terimlerinin her ikisi de $r \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsadıklarından $r \rightarrow \infty$ için son eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider. Bu $r \rightarrow \infty$ için A_r nin sıfıra yakınsak olmasını gerektirir, yani $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dir.

Teorem 3.3.7. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi, $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ ve $\limsup_{r \rightarrow \infty} q_r < \infty$ olsun. Bu takdirde herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) \subset \hat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ dir.

İspat. $\limsup_{r \rightarrow \infty} q_r < \infty$ olduğundan her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < B$ olacak şekilde $B > 0$ sayısı mevcuttur. $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $j \geq R$ için

$$A_j = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_j} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$$

olacak şekilde $R \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Her $j = 1, 2, \dots$ için $A_j \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ bulabiliriz. n sayısı $r > R$ olmak üzere $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı olsun. Aışılmış işlemlerle

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \sum_{k \in I_1} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \sum_{k \in I_2} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right. \\
&\quad \left. + \dots + \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\} \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}} A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} A_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} A_R + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} A_r \\
&\leq \left(\sup_{1 \leq j < R} A_j \right) \frac{k_R}{k_{r-1}} + \left(\sup_{j \geq R} A_j \right) \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \\
&< K \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon B
\end{aligned}$$

olduğu hemen görülür. $n \rightarrow \infty$ için $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$ ve dolayısıyla $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ elde edilir.

Teorem 3.3.6 ve Teorem 3.3.7 yi birleştirirsek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.3.8. $\theta = (k_r)$ dizisi $1 < \liminf_{r \rightarrow \infty} q_r \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} q_r < \infty$ olacak şekilde bir lacunary dizi olsun. Bu takdirde herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için $\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \hat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ dir.

Teorem 3.3.9. $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = s > 0$ ve $X = (X_k)$ dizisi bir M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 sayısına kuvvetli hemen hemen $\Delta_{(p)}^m$ -lacunary yakınsak ise limit tektir.

İspat. $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = s > 0$ ve $X_0 \neq X'_0$ olmak üzere, i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X'_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olsun. $\rho = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ seçelim. M nin konveksliği ve (1.1.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\
&\quad + \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X'_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Öte yandan $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = s$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^s$$

ve böylece son iki eşitlikten $\left[M \left(\frac{d(X_0, X'_0)}{\rho} \right) \right]^s = 0$ elde edilir. $s > 0$ ve M bir Orlicz fonksiyonu olduğundan bu $d(X_0, X'_0) = 0$ ve dolayısıyla $X_0 = X'_0$ olmasını gerektirir.

Tanım 3.3.10. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi ve M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 sayısına hemen hemen $\Delta_{M(p)}^m$ -lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Hemen hemen $\Delta_{M(p)}^m$ -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfını $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ ile göstereceğiz. Eğer $M(x) = x$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ alınırsa $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p) = \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ olur. $\theta = (2^r)$ özel seçimi için $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p) = \hat{S}(\Delta^m, F, M, p)$ elde edilir.

Teorem 3.3.11. $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ dizi sınıfı toplama ve skaler ile çarpma işlemine göre kapalıdır.

İspat. $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$, $c \in \mathbb{R}$ ve $\rho = |c| \rho_1$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m(cX_{k+i}), cX_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| \\ = h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{|c| d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| \\ = h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olduğundan $cX \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ dir.

$X, Y \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ olsun ve $\rho = 2\rho_1$ alalım. M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i} + \Delta^m Y_{k+i}, X_0 + Y_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| \\ \leq h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) + M \left(\frac{d(\Delta^m Y_{k+i}, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| \\ \leq Dh_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ + Dh_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m Y_{k+i}, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olur. Böylece $X + Y \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ dir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.12. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun.

i) $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına kuvvetli hemen hemen Δ^m -lacunary yakınsak ise bu dizi X_0 sayısına hemen hemen Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsaktır.

ii) Δ^m -sınırlı ve hemen hemen Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi kuvvetli hemen hemen Δ^m -lacunary yakınsaktır.

İspat. i) $\varepsilon > 0$ verilsin ve $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, \theta)$ olsun.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olduğundan $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ dir.

ii) $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ ve (X_k) dizisi Δ^m -sınırlı olsun. Bu durumda her $k, i \in \mathbb{N}$ için $d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. N_ε sayısını her $r > N_\varepsilon$ ve her i için

$$h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$E_{ri} = \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu takdirde her $r > N_\varepsilon$ ve her i için

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p &= h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \notin E_{ri}}} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p + h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \in E_{ri}}} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2h_r} h_r + h_r^{-1} \left(\frac{h_r \varepsilon}{2K^p} \right) K^p = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde X dizisi kuvvetli hemen hemen Δ^m -lacunary yakınsaktır.

Teorem 3.3.13. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $\liminf_{r \rightarrow \infty} q_r > 1$ ise $\hat{S}(\Delta^m, F) \subset \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ dir.

İspat. $\liminf_{r \rightarrow \infty} q_r > 1$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük r ler için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan yeterince büyük r ler için $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ olur.

$X \in \hat{S}(\Delta^m, F)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde yeterince büyük r ler ve her i için

$$\begin{aligned} k_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| &= \frac{h_r}{k_r} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ dır.

Teorem 3.3.14. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. $\limsup_{r \rightarrow \infty} q_r < \infty$ ise $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F) \subset \hat{S}(\Delta^m, F)$ dir.

İspat. $\limsup_{r \rightarrow \infty} q_r < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı vardır. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$N_{ri} = |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

kümesini göz önüne alalım. $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ olduğundan i ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır. Buradan her $\varepsilon > 0$, $r > r_0$ ve her $i \geq 1$ için $\frac{N_{ri}}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. i ye göre düzgünlük her $i \in \mathbb{N}$ için $N_{ri} = N_r$ olmasını gerektirir. Şimdi

$$K = \max \{N_{ri} : 1 \leq r \leq r_0, i \in \mathbb{N}\} = \max \{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$$

diyelim ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_{1i} + N_{2i} + N_{3i} + \dots + N_{r_0i} + N_{(r_0+1)i} + \dots + N_{ri}\} \\ &\leq \frac{K}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \frac{N_{(r_0+1)i}}{h_{r_0+1}} \right\} h_{r_0+1} + \dots + \frac{N_{ri}}{h_r} h_r \\ &\leq \frac{K}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup_{r > r_0} \frac{N_{ri}}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\ &\leq \frac{K}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\ &\leq \frac{K}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon q_r \\ &\leq \frac{K}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon B \end{aligned}$$

yazılabilir. $r \rightarrow \infty$ için $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan $X \in \hat{S}(\Delta^m, F)$ elde edilir.

Teorem 3.3.15. M bir Orlicz fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olsun. Bu takdirde $\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) \subset \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ dir.

İspat. $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum_1$ ile $d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $k \in I_r$ üzerinden toplamı ve $\sum_2$ ile de $d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde

$k \in I_r$ üzerinden toplamı gösterelim.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_1 \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\quad + \frac{1}{h_r} \sum_2 \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_1 \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_1 \min \left([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right), \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\rho} \\
&= \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \cdot \min \left([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ olduğundan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olur. $\min \left([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right) > 0$ olması nedeniyle de yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ olduğunu ifade eder.

Teorem 3.3.16. M bir Orlicz fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi, X, Δ^m -sınırlı bir fuzzy sayı dizisi ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olsun. Bu takdirde $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F) \subset \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dir.

İspat. $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ olsun. $X = (X_k)$ dizisi Δ^m -sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) \leq T$ olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı vardır. $\sum_1$ ve $\sum_2$, Teorem 3.3.15'in ispatında verildiği gibi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= h_r^{-1} \sum_1 \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\quad + h_r^{-1} \sum_2 \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq h_r^{-1} \sum_1 \max \left\{ \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^h, \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^H \right\} + h_r^{-1} \sum_2 \left[M \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) \right]^{p_k}, \\
&\leq \max \left\{ [M(K)]^h, [M(K)]^H \right\} h_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \max \left\{ [M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right\}, \quad \frac{T}{\rho} = K, \quad \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon_1
\end{aligned}$$

yazılabilir. $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ ve M Orlicz fonksiyonunun sıfırda sürekli olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki eşitsizlikten $X \in \hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy sets, Inform and Control, 8, 338-353.
2. Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A., 1972, On fuzzy mapping and Control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.
3. Matloka, M., 1986, Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28, 28-37.
4. Nanda, S., 1989, On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 33, 123-126.
5. Nuray, F. and Savaş, E., 1995, Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3), 269-273.
6. Nuray, F., 1998, Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 99, 353-355.
7. Kwon, J.S., 2000, On statistical and p -Cesàro convergence of fuzzy numbers, Korean J. Comput. Appl. Math., 7 (1), 195-203.
8. Mursaleen, M. and Başarır, M., 2003, On some new sequence spaces of fuzzy numbers, Indian J. Pure Appl. Math., 34 (9), 1351-1357.
9. Tripathy, B.C. and Nanda, S., 2000, Absolute value of fuzzy real numbers and fuzzy sequence spaces, J. Fuzzy Math., 8 (4), 883-892.
10. Altınok, H., Altın, Y. and Et, M., 2004, Lacunary almost statistical convergence of fuzzy numbers, Thai J. Math., 2 (2), 265-274.
11. Altın, Y., 2005, Fuzzy Sayı Dizilerinin m . Farkları ve İstatistiksel Yakınsaklık, Doktora Tezi, Fırat Üniv., Elazığ.
12. Et, M., Altınok, H. and Çolak, R., 2006, On λ -statistical convergence of difference sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci., 176, 2268-2278.
13. Altın, Y., Et, M. and Çolak, R., 2006, Lacunary statistical and lacunary strongly convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers, Computers & Math. Appl., 52, 1011-1020.
14. Altın, Y., Et, M. and Başarır, M. On some generalized difference sequences of fuzzy numbers, Kuwait Journal of Science & Engineering, (Baskıda).

15. Aytar, S., 2005, Bulanık sayı dizilerinin istatistiksel limit ve yığılma noktaları, Doktora Tezi, SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.
16. Maddox, I.J., 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
17. Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
18. Boos, J. and Cass, P., 2000, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, New York.”
19. Şuhubi, E., 2001, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yay., No: 38, İstanbul.
20. Goes, G. and Goes, S., 1970, Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, Math. Z., 118, 93-102.
21. Jain, P.K., Ahuja, O.P. and Ahmad, K., 1995, Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York.
22. Maddox, I.J., 1967, Spaces of strongly summable sequences, Quart J. Math. Oxford, (2), 18, 345-355.
23. Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
24. Schoenberg, I.J., 1959, The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
25. Fridy, J.A., 1985, On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.
26. Šalát, T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.
27. Connor, J.S., 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.
28. Mursaleen, M., 2000, λ -Statistical convergence, Math. Slovaca., 50 (1), 111-115.
29. Tripathy, B.C., 1997, Matrix transformation between some classes of sequences, J. Math. Anal. Appl., 206, 448-450.

30. Savaş, E., 2000, Strongly almost convergence and almost λ -statistical convergence, Hokkaido Math. J., 29, 531-536.
31. Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993, Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160 (1), 43-51.
32. Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
33. Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978, Some Cesàro- type summability spaces, Proc. Lond. Math. Soc., 37 (3), 508-520.
34. Leindler, L., 1965, Über die verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, (German) Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16, 375-387.
35. Kızmaz, H., 1981, On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., 24, 169-176.
36. Et, M. and Çolak, R., 1995, On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math., 21, 377- 386.
37. Et, M. and Nuray, F., 2001, Δ^m - Statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (6) 961-969.
38. Et, M., 2000, On some topological properties of generealized difference sequence spaces, Internat. J. Math. & Math. Sci., 24 (11), 785-791.
39. Krasnoselskii, M. A. and Rutickii, Y. B., 1961, Convex Functions and Orlicz Spaces, Groningen, Netherlands.
40. Kamthan, P.K. and Gupta, M., 1981, Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
41. Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., 1971, On Orlicz sequence spaces, Israel J. Math., 10, 379-390.
42. Parashar, S. D. and Choudhary, B., 1994, Sequence spaces defined by Orlicz functions, Indian J. Pure Appl. Math., 25 (4), 419-428.
43. Moore, R.E., 1979, Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM Philadelphia.

- 44. Dubois, D. and Prade, H., 1980, Fuzzy Sets Syst., Academic Press, New York.
- 45. Kaufmann, A. and Gupta, M.M., 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold.
- 46. Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
- 47. Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1983, Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91, 552-558.
- 48. Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1986, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl., 114, 409-422.

ÖZGEÇMİŞ

1978 Aksaray doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Ankara’da tamamladıktan sonra 1995 yılında kazandığım Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’nden 1999’da mezun oldum. 2000’de F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisansa başladım ve 2002’de bitirerek aynı yıl doktora başladım. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.

Hıfsı ALTINOK