

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

116572

LORENTZ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL SCROLLAR

Handan BALGETİR

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL SCROLLAR

Handan BALGETİR

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez, 14 / 08 / 2002 Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği/ Oyçokluğu ile Başarılı/ ~~Başarısız~~ Olarak Değerlendirilmiştir.

Prof. Dr. Mahmut ERGÜT
Danışman

Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU
Üye

Doç. Dr. Rifat GÜNEŞ
Üye

Doç. Dr. Vedat ASİL
Üye

Yrd.Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ
Üye

ÖZET

Doktora Tezi

LORENTZ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL SCROLLAR

Handan BALGETİR

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2002, Sayfa:101

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci, üçüncü ve dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısımlarıdır.

İkinci bölümde; n -boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş null scroll'lar tanımlandı ve bunlara ait özellikler incelendi.

Üçüncü bölümde; genelleştirilmiş null scroll'ların Gauss eğriliği, Ricci eğriliği, Lipschitz-Killing eğriliği ve skalar normal eğriliği hesaplandı ve bunlara bağlı olarak bazı teorem ve sonuçlar verildi.

Dördüncü bölüm, üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, n -boyutlu Lorentz uzayında bir hiperyüzey olan $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'lar ve eğrilikleri verildi. İkinci alt bölümde, genelleştirilmiş null scroll'lar için j .ortalama eğrilik hesaplanarak bazı sonuçlar elde edildi. Ayrıca Euler Teoremi ifade ve ispat edildi. Son bölümde de n -boyutlu Lorentz uzayında 2-boyutlu null scroll için Massey Teoremi verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Lorentz Uzayı, Regle Yüzey, Genelleştirilmiş Null Scroll, Pseudo-Ortogonal Yörünge.



ABSTRACT
PhD Thesis

GENERALIZED NULL SCROLLS IN THE LORENTZIAN SPACE

Handan BALGETİR

Fırat University
Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics
2002, Page:101

This study has been arranged in four chapters.

In the first chapter; fundamental definitions and theorems are given.

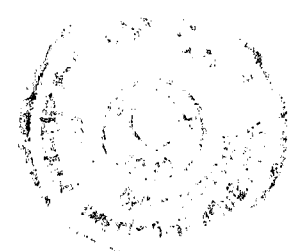
Second, third and fourth chapter are original parts of the thesis.

In the second chapter; the generalized null scrolls are defined in the n -dimensional Lorentzian space and their properties are studied.

In the third chapter; curvature of Gauss, Ricci, Lipschitz-Killing, and scalar normal of the generalized null scrolls are calculated and some theorems and results are given.

In the fourth chapter is separated into three sections. The curvatures of the $(n-1)$ -dimensional generalised null scrolls which are hypersurface in the n -dimensional Lorentzian space are studied in section one. In section two, the j -th mean curvature of the generalized null scrolls is calculated and some results are given. Also, the Euler Theorem is expressed and proved. In the last section, the Massey Theorem for 2-dimensional null scrolls in the n -dimensional Lorentzian space is given.

KEY WORDS: Lorentzian Space, Ruled Surface, Generalized Null Scroll, Pseudo-Orthogonal Trajectory.

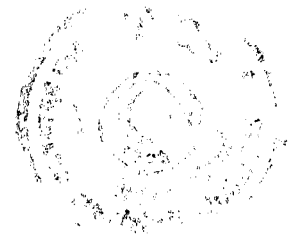


TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli Hocam; Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca değerli zamanlarını ayırıp tartışma imkanı vererek, çalışmalarımı yönlendiren Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet B KTAŐ'a teŐekk r  bir borç bilirim.

Handan BALGET R



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER LİSTESİ.....	v
GİRİŞ.....	1
BİRİNCİ BÖLÜM	
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
1.1. Simetrik Bilineer Formun Özellikleri.....	3
1.2. Lorentz İç Çarpım Uzayı.....	12
1.3. Lorentz Alt Manifoldu ve Eğrilikler.....	16
1.4. Lorentz Manifoldlarında Null Eğriler.....	27
İKİNCİ BÖLÜM	
2. Genelleştirilmiş Null Scroll'lar.....	35
2.1. IR_1^n n-Boyutlu Lorentz Uzayında	
Genelleştirilmiş Null Scroll'ların Özellikleri.....	35
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	
3.1. Genelleştirilmiş Null Scroll'ların Eğrilikleri.....	55
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM	
4.1. IR_1^n de (n-1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Null Scroll'lar.....	74
4.2. Genelleştirilmiş Null Scroll'lar İçin	
j. Ortalama Eğrilik ve Euler Teoremi.....	83
4.3. IR_1^n de 2-Boyutlu Null Scroll İçin Massey Teoremi.....	87
KAYNAKLAR.....	99



SİMGELER LİSTESİ

$\langle, \rangle$	: Lorentz iç çarpımı
$\mathbb{R}_1^n$	: n-boyutlu Lorentz uzayı
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
h	: İkinci temel form
A_ξ	: Şekil operatörü
G	: Gauss eğriligi
H	: Ortalama eğrilik vektör alanı
K_N	: Skalar normal eğrilik
k_n	: Normal eğrilik
$G(p, \xi)$	: Lipschitz-Killing eğriligi
R	: Eğrilik tensör alanı
K	: Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı
$K_U(P)$	: Null kesit eğriligi
Ric	: Ricci eğrilik tensör eğriligi
r	: Skalar eğrilik
H_j	: j. Ortalama eğrilik
α	: $\mathbb{R}_1^n$ de null eğri
M	: Genelleştirilmiş null scroll
$W_r(t)$	: Null scroll'un doğrultman uzayı
$\tilde{A}(t)$	: Null scroll'un asimptotik demeti

GİRİŞ

Günümüz diferensiyel geometrisinde regle yüzeyler oldukça çok ele alınmaktadır. 3-boyutlu Öklid uzayında en basit anlamda bir regle yüzey bir parametreye bağlı doğrular ailesinin geometrik yeri olarak tanımlanmaktadır. Regle yüzey kavramı, Fransızca “ surface reglée ” den gelmiş olup, adını buradan almaktadır. Literatürde çizgiler uzayı olarak da adlandırılır.

Miroslav Juza’ ya ait “ Ligne de striction sur une generalisation a’plusieurs dimensions d’une surface reglée, Czechosl. Math.J.12(87), 243-250,1962. ” çalışma ile daha 1960 lı yıllarda ortaya atılan genelleştirilmiş regle yüzeyler teorisi üzerinde son yıllarda yapılan çalışmalar oldukça yoğundur. Daha sonra bu çalışmalar H. Frank , O. Giering ve C. Thas’ın çalışmaları ile devam etmiştir. Ülkemizde bu konular üzerinde yapılan çalışmaları ele alacak olursak; 1982 yılında A. Sabuncuoğlu, “Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler ” adlı Doçentlik tezinde genelleştirilmiş regle yüzeylerin özelliklerini inceledi. Daha sonra M. Ergüt, 1983’de yapmış olduğu “Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair ” adlı Doktora tezinde; C. Thas’ın E^n de 2-boyutlu regle yüzey için verdiği skalar normal eğriliği, $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey için hesaplayarak bazı sonuçlar elde etti. Bunlara bağlı olarak genelleştirilmiş regle hiperyüzeyler için önemli teorem ve sonuçlar verdi. S.Keleş ve N. Kuruoğlu, 1983 ‘de bu çalışmalar doğrultusunda n -boyutlu Öklid uzayında regle yüzeylerin özelliklerini ve Massey Teoremini ifade etti. A. Altın, 1994’de “Yüksek Mertebeden Regle Yüzeyler” adlı Doktora teziyle genelleştirilmiş regle yüzeylerin kapalı olması durumunda açılım uzunluğu ve açılım açısını inceledi.

Gerek 3-boyutta ve gerekse n -boyutta, regle yüzeyler için yapılan bu çalışmalar Euklides için de çok önemli olan Lorentz ve de Minkowski uzayında ele alındı. İlk

inceledi. Bu regle yüzeyler daha sonra n -boyutlu Lorentz uzayına genelleştirildi. Bu yöndeki çalışmalar M. Tosun, “On the $(k-m+1)$ -dimensional Time-like Center ruled Surface in the Minkowski Space IR_1^n ”, SAÜ, Fen-Bilimleri Enstitüsü Dergisi 1(1997) 69-74”, C. Ekici ve A.Görgülü “ On The Curvatures of $(k+1)$ -dimensional Semi-Ruled Surface in E_v^{n+1} ”, Math.&Comp. Applications, Vol.5. No.3pp.139-155.2000 ” ve benzer çalışmalar diğer Matematikçiler tarafından da çalışıldı. Literatürde bu alanda birçok makaleye rastlanmaktadır.

Dayanak eğrisi null olan time-like regle yüzeyler oldukça yenidir. 3-boyutlu Lorentz uzayındaki bu tip regle yüzeyleri ilk olarak L. K. Graves “ Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces, Trans. A.M.S. 252(1979),367-392 ” adlı çalışmasında tanımlamış ve B-Scroll olarak adlandırmıştır. Bu yüzeylerin Gauss Dönüşümü L. J. Alias, v.d. tarafından incelenmiştir. Yine bu tip regle yüzeyler olan null scollar’ın Gauss Dönüşümü ile ilgili çalışma S. M. Choi, v.d. aittir.

3-boyutlu Lorentz uzayında birer time-like yüzey olan B-scroll ve null scollar’a ait özelliklerin incelendiği çalışmalar tarafımızdan yapılmıştır. Burada ise regle yüzeylere ait bilinen ve çalışılan özelliklerin ışığı altında n -boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş regle yüzey olan ve adına genelleştirilmiş null scroll dediğimiz manifoldları ve bunlara ait özellikleri inceledik.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Simetrik Bilineer Formun Özellikleri

Tanım 1.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v \in V$ için

- i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- ii) $\langle au+bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
 $\langle u, av+bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$

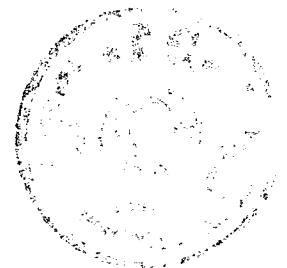
özelliklerine sahip ise, $\langle, \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilinear form** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.2. V bir n -boyutlu reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear form

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

olsun. $\forall v \in V$ için $\langle \xi, v \rangle = 0$ olacak şekilde bir $\xi \neq 0 \in V$ vektörü mevcut ise g ye V üzerinde **dejenere simetrik bilinear form** denir. Aksi taktirde g ye **nondejenere** denir. Buradan g nin **nondejenere** olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$$



olmasıdır. Bir V reel vektör uzayı üzerindeki simetrik bilinear form, V uzayının altuzayı üzerine dejenere veya nondejenere bir bilinear form indirger (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.1.3. $\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu simetrik bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir;

1) Definit Durum: Eğer,

i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **pozitif definit**,

ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **negatif definit** denir.

2) Semi-definit Durum: Eğer,

i) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **pozitif semi-definit**,

ii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **negatif semi-definit** denir.

3) Nondejenere Durum:

Eğer, $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **nondejenere simetrik bilinear form** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.4. V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik bilinear form olsun. $W \subset V$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$



negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W altvektör uzayının boyutuna $<, >$ **simetrik bilineer formunun indeksi** denir ve v ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.5. V bir n -boyutlu reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form $<, >$ olsun. V uzayının

$$\text{Rad } V = \{\xi \in V \mid \langle \xi, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzaya $<, >$ simetrik bilineer formuna göre V nin **radikal** veya **null** **uzayı** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.1.6. Reel sayılar cismi üzerinde, r -tane vektör uzayı, $V_1, V_2, \dots, V_r$ olsun.

$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$, için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, \dots, v_r) = af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_r)$$

şeklinde tanımlı ise f ye **r -lineer fonksiyon** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.7. $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün r -lineer fonksiyonların cümlesini,

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$$

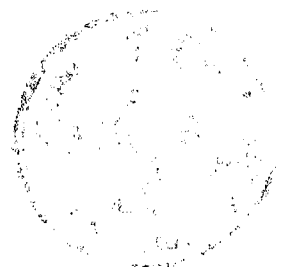
ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalar ile çarpma işlemleri, sırasıyla,

$$\forall (u_1, u_2, \dots, u_r) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \text{ için}$$

$$(f_1 + f_2)(u_1, u_2, \dots, u_r) = f_1(u_1, u_2, \dots, u_r) + f_2(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(\lambda f)(u_1, u_2, \dots, u_r) = \lambda f(u_1, u_2, \dots, u_r)$$



şeklinde tanımlanırsa, bu iki işleme göre $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir ve

$$L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının herbir elemanına **r.dereceden bir tensör** denir. Eğer

$$V_1 = V_2 = \dots = V_r = V$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ uzayına bir **kovaryant tensör uzayı** ve bu uzayın herbir elemanına da **r.dereceden bir kovaryant tensör** denir ve $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.8. Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine V^* (V nin dual uzayı) alınırsa $(V^*)^*$ uzayı V ye izomorf olduğundan V^* üzerinde s -lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya **kontravaryant uzay** denir ve $T_s(V^*)$ veya $\otimes^s(V)$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanlarına **s. dereceden kontravaryant tensörler** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.1.9. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve V^* , V nin duali olsun.

$$L(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f \mid f: V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$$

cümlesi yukarıda verilen toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzaya **r.dereceden kovaryant ve s.dereceden kontravaryant tensör uzayı** denir. Bu uzayın elemanlarına da **(r, s)-tipinde tensör** denir ve

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r V^* \otimes \otimes^s(V)$$



veya $T_s^r(V)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.1.1. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun. Bu takdirde V üzerinde

- i) $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, i \neq j$
- ii) $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 1, 1 \leq i \leq p$
- iii) $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = -1, p+1 \leq j \leq r$
- iv) $\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle = 0, r+1 \leq k \leq n$

olacak şekilde $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bazı mevcuttur (Nomizu, 1966).

Tanım 1.1.10. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde nondejenere simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun. Bu durumda $\langle, \rangle$ ye bir **skalar çarpma** veya **semi-Öklidyen metrik**; V vektör uzayına da **semi-Öklidyen uzay** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.1.11. V bir semi-Öklidyen uzay olsun. $v \in V$ olmak üzere

- i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise v ye space-like vektör,
- ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye time-like vektör,
- iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (veya light-like) vektör,

denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 1.1.1. $V \neq \{0\}$ semi-Öklidyen uzayının bir ortonormal bazı mevcuttur.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. V nondejenere olduğundan

$$\langle u_1, u_1 \rangle \neq 0$$

olacak şekilde bir $u_1 \in V$ vektörü mevcuttur. Dolayısıyla

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

bir birim vektördür. Şimdi kabul edelim ki, $k \leq n$ olmak üzere

$$E_k = \{e_1, \dots, e_k\}$$

ortonormal cümlesi mevcut olsun. E_k nin V nin bir ortonormal bazına genişletilebileceğini göstereceğiz. Bunun için ilk önce

$$v_{k+1} \in V - \text{Sp}\{E_k\}$$

vektörünü gözönüne alalım. Gram-Schmidt metoduna göre $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$u_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

yazabiliriz. $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ için

$$\langle u_{k+1}, e_i \rangle = 0$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$e_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$$

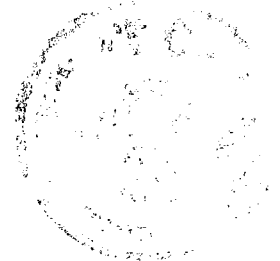
E_k ya birim ortogonal vektördür. $\|u_{k+1}\| \neq 0$ dır. $k < n-1$ için $\|u_{k+1}\| = 0$ dır. Aksi takdirde V dejenere olurdu. Şimdi $\langle w_{k+1}, w_{k+1} \rangle \neq 0$ olacak şekilde $w_{k+1} \in V - \text{Sp}\{e_1, \dots, e_k, u_{k+1}\}$ vektörünü gözönüne alalım ve

$$z_{k+1} = w_{k+1} - \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \langle w_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

olsun. $i \in \{1, \dots, k\}$ için

$$\langle z_{k+1}, e_i \rangle = 0$$

ve



$$\langle z_{k+1}, u_{k+1} \rangle = \langle w_{k+1}, u_{k+1} \rangle \neq 0$$

dır. Şimdi

$$y_{k+1} = \frac{1}{\langle z_{k+1}, u_{k+1} \rangle} \left\{ z_{k+1} - \frac{\|z_{k+1}\|^2}{2 \langle z_{k+1}, u_{k+1} \rangle} u_{k+1} \right\}$$

null vektörünü gözönüne alalım. Bu takdirde,

$$\langle y_{k+1}, u_{k+1} \rangle = 1 \text{ ve } \langle y_{k+1}, e_i \rangle = 0$$

dır. Ayrıca

$$e_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{k+1} + y_{k+1})$$

$$e_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{k+1} - y_{k+1})$$

ortonormal birim vektörlerdir. Böylece

$$E_{k+1} = \{ e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2} \}$$

E_k nin bir ortonormal genişletilmiş cümlesidir. Bu şekilde devam edilirse V nin

$$E = \{ e_1, \dots, e_n \}$$

ortonormal bazı elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 1.1.12. V bir n -boyutlu semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer $\langle, \rangle|_W$ dejenere ise W ya bir **null (light-like veya dejenere) altuzay** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.1.13. V bir n -boyutlu semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir altuzayı olsun.

$$W^\perp = \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W \}$$

altuzayına W nin **dik uzayı** denir. Burada önemli bir nokta genel olarak



$$W \cap W^\perp \neq \{0\}$$

olmasıdır.

V bir n-boyutlu uygun semi-Öklidyen uzay olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ birim time-like ve $\{e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_{q+p}\}$ birim space-like vektörler olmak üzere V nin bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazını gözönüne alalım. V nin en az bir null vektör içeren bir bazını inşa etmek için aşağıdaki haller incelenebilir:

I. HAL ($q < p$) . Bu durumda $i \in \{1, \dots, q\}$ için

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle f_i^*, f_j^* \rangle = 0 \quad (1.1.1)$$

ve

$$\langle f_i, f_j^* \rangle = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, \dots, q\} \quad (1.1.2)$$

olacak şekilde

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+i} + e_i), \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+i} - e_i) \quad (1.1.3)$$

vektörleri inşa edilebilir. Böylece $\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{2q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ V nin $2q$ -tane null vektör ve $(p-q)$ -tane space-like vektör ihtiva eden bir bazıdır.

II. HAL ($p < q$). Bu durumda $a \in \{1, \dots, p\}$ için

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+a} + e_a), \quad f_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+a} - e_a) \quad (1.1.4)$$

vektörleri inşa edilebilir. Bu vektörler için de, (1.1.1) ve (1.1.2) eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda $\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{2p+1}, \dots, e_{p+q}\}$ V nin $2p$ -tane null vektör ve $(q-p)$ -tane time-like vektör ihtiva eden bir bazıdır.

III. HAL ($p = q$). Bu durumda $n = 2p = 2q$ olduğundan, $\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*\}$ null bazı (1.1.3) veya (1.1.4) eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 1.1.14. V bir semi-Öklidyen uzay olsun. $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ ve $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}$ için

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle f_i^*, f_j^* \rangle = 0$$

$$\langle f_i, f_j^* \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle u_\alpha, f_i \rangle = \langle u_\alpha, f_i^* \rangle = 0$$

$$\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}$$

olacak şekildeki $\{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$ bazına V nin **quasi-ortonormal bazı** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.1.15. V n -boyutlu semi-Öklidyen uzay olsun. V nin m -boyutlu bir null altuzayı W olsun. Bu takdirde V nin $m = r+s$, $1 \leq s \leq t$ için,

$$W = \text{Sp}\{f_1, \dots, f_r, u_1, \dots, u_s\}$$

olacak şekilde ve $n \leq r$ için

$$W = \text{Sp}\{f_1, \dots, f_m\}$$

olacak şekildeki

$$B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\}$$

quasi-ortonormal bazına W boyunca V nin bir quasi-ortonormal bazı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Önerme 1.1.2. V bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir null altuzayı olsun. Bu takdirde W boyunca V nin bir quasi-ortonormal bazı mevcuttur (Duggal ve Bejancu, 1996).



1.2. Lorentz İç Çarpım Uzayı

Tanım1.2.1. M bir C^∞ -manifold olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik , bilinear, nondejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım1.2.2. M bir C^∞ -manifold ve $\langle, \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere $(M, \langle, \rangle)$ çiftine bir **semi-Riemann manifold** denir (Ferrandez ve Lucas, 1992).

Tanım1.2.3. $\dim M = n$ olmak üzere $(M, \langle, \rangle)$ çifti bir semi-Riemann manifold olsun. Eğer $\nu = 0$ ise $(M, \langle, \rangle)$ çiftine bir Riemann manifoldu denir. Ayrıca $n \geq 2$ ve $\nu=1$ ise $(M, \langle, \rangle)$ çiftine bir **Lorentz manifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Bundan sonra Lorentz manifoldunu M ile göstereceğiz.

Tanım1.2.4. n-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ ve $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$ için ,

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i = 1 \quad \text{ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \quad \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i y_i$$



şeklinde tanımlı

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonsiyonuna **Lorentz iç çarpımı** denir. Bu fonksiyonla birleşen $\mathbb{R}^n$ vektör uzayına da **n-boyutlu standart Lorentz uzayı** veya kısaca **Lorentz uzayı** denir ve

$$L^n(1, n-1) = (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$$

veya kısaca $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir (Bektaş, 1998).

Tanım 1.2.5. M bir Lorentz manifoldu olsun. M manifoldunun bir noktasındaki null vektörlerin cümlesine **null konisi** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.2.6. n-boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{R}_1^n$ in bütün time-like vektörlerinin cümlesi δ olsun. $\vec{u} \in \delta$ için

$$C(\vec{u}) = \{ \vec{v} \in \delta \mid \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle < 0 \}$$

olmak üzere $C(\vec{u})$ ya $\vec{u}$ yu ihtiva eden $\mathbb{R}_1^n$ in time konisi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.2.7. $\mathbb{R}_1^n$ n-boyutlu bir Lorentz uzayı olsun. $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$ ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Ergin, 1989).

Sonuç 1.2.1. Her ikisi de time-like olan iki vektör birbirine dik olamaz. Benzer düşünce her ikisi de space-like olan iki vektör için de geçerlidir (Ergin, 1989).



Tanım 1.2.8. $\mathbb{R}_1^n$ n-boyutlu Lorentz uzayında bir vektör $\bar{w}$ olsun. $\bar{w}$ nın normu

$$\|\bar{w}\| = \sqrt{|\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle|}$$

şeklinde tanımlanır (Ergüt, vd., 1988).

Tanım 1.2.9. $X, Y \in \chi(\mathbb{R}_1^n)$ vektör alanları verilmiş olsun. $\forall p \in \mathbb{R}_1^n$ için

$X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid p \in T_p(\mathbb{R}_1^n)$ dir. $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektör alanı için

$$y_i : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları C^∞ -sınıfından iseler, Y vektör alanına C^∞ -sınıfındandır denir.

Bu durumda, Y nin X e göre kovaryant türevi

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X[y_i] = \langle \bar{\nabla}_{y_i}, X \rangle = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n]) \\ &= (\langle \bar{\nabla}_{y_1}, X \rangle, \langle \bar{\nabla}_{y_2}, X \rangle, \dots, \langle \bar{\nabla}_{y_n}, X \rangle) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ∇ ya Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki Lorentz anlamında **kovaryant türevi** denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Teorem 1.2.1. $\mathbb{R}_1^n$ n-boyutlu Lorentz uzayında X, Y, Z ve W C^∞ -sınıfından vektör alanları olsun. Bu takdirde,

$$\text{i) } \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\text{ii) } \nabla_{(X+W)} Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$$

$$\text{iii) } \nabla_{f(p)X} Y = f(p) \nabla_X Y, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}), \quad p \in \mathbb{R}_1^n$$

$$\text{iv) } \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$$

dir (Bektaş, 1995).



Teorem 1.2.2. $\mathbb{R}_1^n$ n-boyutlu Lorentz uzayı ve $\mathbb{R}_1^n$ üzerinde tanımlı vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbb{R}_1^n)$ ve ∇ da Lorentz anlamında kovaryant türev olsun. O zaman $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{R}_1^n)$ vektör alanları C^∞ -sınıfından olmak üzere

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii) $\nabla_{X_p} \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle|_p + \langle Y, \nabla_X Z \rangle|_p$

dir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Tanım 1.2.10. Teorem 1.2.1 ve Teorem 1.2.2 yi sağlayan kovaryant türeve **Levi-Civita konneksiyonu** denir (O'Neill, 1983).

Sonuç 1.2.1. ∇ bir Levi-Civita konneksiyonu ve $\chi(\mathbb{R}_1^n)$ de Lorentz uzayında vektör alanları cümlesi olmak üzere $\forall X, V, W \in \chi(\mathbb{R}_1^n)$ için

$$2 \langle \nabla_V W, X \rangle = V \langle W, X \rangle + W \langle X, V \rangle - X \langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle$$

dir. Bu eşitliğe **KOSZUL FORMÜLÜ** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.2.11. M bir Lorentz manifoldu olsun. Bu manifoldun bir U komşuluğu üzerinde bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklinde verilsin. Bu koordinat sistemi için

$$\nabla_{\partial_i} (\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

eşitliği ile tanımlı Γ_{ij}^k , $k, i, j = 1, 2, \dots, n$ reel değerli fonksiyonlarına **Christoffel sembolleri** denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

1.3. Lorentz Alt Manifoldu ve Eğrilikler

Tanım 1.3.1. $J : \bar{M} \rightarrow M$ inclusion dönüşümü olmak üzere J^* pullback dönüşümü ile elde edilen $J^*(g)$, $\bar{M}$ üzerinde metrik tensör ise $\bar{M}$ ye M nin **Lorentz alt manifoldu** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.2. n -boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{R}_1^n$ in W alt uzayını gözönüne alalım. W üzerinde tanımlanan iç çarpım

$$\langle, \rangle|_W : WXW \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

i) $\langle, \rangle|_W$ dönüşümü indeksi 0 (sıfır) olan pozitif definit bir iç çarpım ise W ya **space-like alt uzay**,

ii) $\langle, \rangle|_W$ dönüşümü indeksi 1 olan nondejenere bir iç çarpım ise W ya **time-like alt uzay**,

iii) $\langle, \rangle|_W$ dönüşümü dejenere bir iç çarpım ise W ya **light-like veya null alt uzay**,

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.3. M Lorentz manifoldunun alt manifoldu $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ alt manifoldu üzerinde tanımlanan metrik tensör Riemann metriği ise $\bar{M}$ alt manifolduna **space-like alt manifold** denir (Beem ve Ehrlich, 1981).

Tanım 1.3.4. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz alt manifold $\bar{M}$ olsun. Eğer boy $\bar{M} = (n-1)$ ise $\bar{M}$ ye $\mathbb{R}_1^n$ in **Lorentz hiperyüzeyi** denir.

Burada $\bar{M}$ timelike alt manifold ise $\bar{M}$ ye **time-like hiperyüzey**; $\bar{M}$ space-like alt manifold ise $\bar{M}$ ye **space-like hiperyüzey** denir.

Ayrıca $\bar{M}$ time-like bir hiperyüzey ve η bu hiperyüzeyin birim normalisi ise

$$\langle \eta, \eta \rangle = 1$$

dir, yani η space-like birim normal vektör alanıdır.

Benzer şekilde $\bar{M}$ space-like bir hiperyüzey ve η bu hiperyüzeyin birim normali ise

$$\langle \eta, \eta \rangle = -1$$

dir, yani η time-like birim normal vektör alanıdır (Ferrandez ve Lucas, 1992).

Tanım 1.3.5. IR_1^n bir n-boyutlu Lorentz manifoldu ve IR_1^n in m-boyutlu bir Lorentz alt manifoldu M olsun. IR_1^n ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları, sırasıyla, $\bar{\nabla}$ ve ∇ olmak üzere **genelleştirilmiş Gauss denklemi** $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (1.3.1)$$

şeklinde tanımlanır, burada h , M nin IR_1^n deki **ikinci temel formudur** (O'Neill, 1983).

$X \in \chi(M)$ herhangi bir vektör alanı ve $\xi \in \chi(M)^\perp$ birim normal vektör alanı olmak üzere **Weingarten formülü**,

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \quad (1.3.2)$$

şeklinde verilir. Buradaki A_ξ , ξ ye göre M nin **şekil operatörüdür**. $\nabla^\perp$ ise M nin **normal demeti üzerinde metrik konneksiyondur**.

(1.3.1) ve (1.3.2) eşitliklerinden;

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle = \langle h(X, Y), \xi \rangle \quad (1.3.3)$$

ve

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle \quad (1.3.4)$$

olur. Bu son iki eşitlikten

$$\langle h(X, Y), \xi \rangle = \langle A_{\xi} X, Y \rangle \quad (1.3.5)$$

dir.

$\chi^{\perp}(M)$ nin ortonormal baz vektör alanı $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m}\}$ olsun. $h^j(X, Y)$, $j = 1, \dots, n-m$, fonksiyonları C^{∞} -sınıfından diferensiyellenebilir olmak üzere,

$$h(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} h^j(X, Y) \xi_j \quad (1.3.6)$$

şeklinde yazılabilir. (1.3.3) ve (1.3.5) eşitlikleri (1.3.6) da gözönüne alınırsa,

$$h(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi_j \rangle \xi_j \quad (1.3.7)$$

veya

$$h(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} \langle A_{\xi_j} X, Y \rangle \xi_j \quad (1.3.8)$$

elde edilir (Chen ve Ishikawa, 1998).

Tanım 1.3.6. M bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer $X_p, Y_p \in T_p(M)$ olmak üzere

$$h(X_p, Y_p) = 0$$

ise X_p ve Y_p vektörlerine **konjuge vektörler** veya **eşlenik vektörler** denir. Eğer

$$h(X_p, X_p) = 0$$

ise X_p ye p noktasında **asimptotik vektör** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.3.7. M , m -boyutlu bir Lorentz manifoldu $X, Y \in \chi(M)$ ve h da M nin ikinci temel formu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$h(X, Y) = 0$$

ise M ye $\mathbb{R}_1^n$ de **total geodeziktir** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.8. M , $\mathbb{R}_1^n$ de m -boyutlu bir Lorentz alt manifold olsun. $\xi \in \chi^\perp(M)$ birim normal vektör alanı olmak üzere

$$G(p, \xi) = \det A_\xi, \quad p \in M$$

değerine M nin p noktasında, ξ doğrultusundaki **Lipschitz-Killing eğriliği** denir.

$G(p)$ Gauss eğriliği olmak üzere, $\mathbb{R}_1^n$ deki bütün yüzeyler için

$$G(p) = \sum_{j=1}^{n-m} G(p, \xi_j)$$

dir.

Tanım 1.3.9. $G(p) = 0$ ise $p \in M$ için M yüzeyi **açılabilirdir** denir. Buradan her nokta ve normal doğrultuda Lipschitz-Killing eğriliği sıfır ise yüzey açılabilirdir.

Tanım 1.3.10. $\mathbb{R}_1^n$ de m -boyutlu bir Lorentz alt manifoldu M olsun.

$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m}\}$, $\chi^\perp(M)$ nin ortonormal bazı ve $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de M nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$H = \frac{1}{m} \dot{I}zh = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i h(e_i, e_i) \quad (1.3.9)$$

veya

$$H = \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\dot{I}zA_{\xi_j}}{m} \xi_j \quad (1.3.10)$$

şeklinde tanımlı H vektör alanına M nin $\mathbb{R}_1^n$ de **ortalama eğrilik vektör alanı** ve $\|H\|$ fonksiyonuna **ortalama eğrilik fonksiyonu**, $p \in M$ noktasındaki $\|H(p)\|$ değerine de M nin p noktasındaki **ortalama eğriliği** denir (Chen ve Ishikawa, 1998).

Tanım 1.3.11. $\mathbb{R}_1^n$ de m -boyutlu bir Lorentz alt manifold M olsun. $\chi^\perp(M)$ nin ortonormal baz vektör alanı $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m}\}$ olmak üzere

$$K_N = \sum_{i,j=1}^{n-m} M(A_{\xi_i} A_{\xi_j} - A_{\xi_j} A_{\xi_i}) \quad (1.3.11)$$

şeklinde tanımlanan K_N fonksiyonuna M nin **skalar normal eğriliği** denir. Burada $A=[a_{ij}]$ matrisi için

$$M(A) = \sum_{i,j} (a_{ij})^2$$

dir.

Tanım 1.3.12. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M olsun. M nin normal vektör alanı ξ , M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere

$$S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow S(X) = -\nabla_X \xi$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M nin **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşümü** denir (Ekmekçi, 1991).

Tanım 1.3.13. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M olsun. $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere

$$G : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow G(p) = \det S,$$

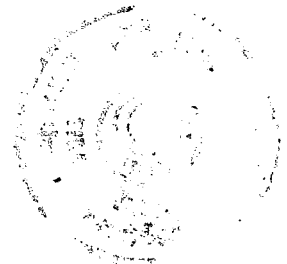
şeklinde tanımlanan G fonksiyonuna M nin **Gauss eğrilik fonksiyonu** ve $G(p)$ değerine de $p \in M$ noktasında M nin **Gauss eğriliği** denir.

Tanım 1.3.14. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M olsun. $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere

$$S(X) = \lambda X, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad X \in T_p(M)$$

olacak şekilde bir $X \neq 0$ vektörü varsa λ sayısına S nin **karakteristik değeri** ve X vektörüne de S nin karakteristik değerine karşılık gelen **karakteristik vektörü** denir. S nin karakteristik değerine M nin p noktasındaki **asli eğrilikleri** ve bu değerlere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin p noktasındaki **asli vektörleri** veya **asli eğrilik doğrultuları** denir (Alias, vd., 1995).

Tanım 1.3.15. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M olsun. $p \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere



$$P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_{n-1}) = \lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

şeklinde tanımlanan polinoma S nin **karakteristik polinomu** ve

$$P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_{n-1}) = 0$$

denkleminde S nin **karakteristik denklemi** denir (O'Neill, 1983).

Teorem 1.3.1. n. mertebeden bir A karesel matrisinin rankı r ise A nın en az (n-r)-tane karakteristik değeri sıfırdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 1.3.16. $\mathbb{R}_1^n$ de bir Lorentz hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun.

$\forall p \in M$ için $X_p \in T_p(M)$ tanjant vektörü $\|X_p\| = 1$ olmak üzere

$$k_n(X_p) = \langle S_p(X_p), X_p \rangle$$

şeklinde tanımlı

$$k_n : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna M nin X_p yönündeki **normal eğriliği** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.17. M bir Lorentz manifoldu ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$

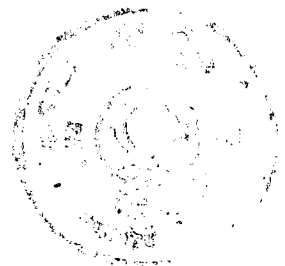
olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z$$

öyleki;

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.3.12)$$



şeklinde tanımlanan R fonksiyonu $\chi(M)$ üzerinde 3.dereceden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu kovaryant tensör alanına M nin **eğrilik tensör alanı** ve bunun bir $p \in M$ noktasındaki değeri olan $R(X_p, Y_p)Z_p$ tensörüne de M nin p noktasındaki **eğrilik tensörü** ya da kısaca **M nin p deki eğriliği** denir (Aiyama, 1991).

$$R_{jkl}^i : M \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere (1.3.12) de $X = e_k, Y = e_l, Z = e_j$ yazılırsa,

$$R(e_k, e_l)e_j = \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{jkl}^i e_i \quad (1.3.13)$$

gösterimi kullanılır.

Tanım 1.3.18. M bir Lorentz manifoldu ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y, Z, W) &\rightarrow K(X, Y, Z, W) = \langle R(Z, W)Y, X \rangle \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

şeklinde tanımlanan 4.dereceden kovaryant tensöre M üzerinde **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** denir. Bir p noktasındaki Riemann-Christoffel eğrilik tensörünün değeri, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$K(p) = \langle R(Z, W)Y, X \rangle$$

şeklinde yazılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 1.3.2. Bir M Lorentz manifoldunun Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki bağıntıları sağlar:



Tanım 1.3.21. M bir Semi-Riemann manifoldu ve $U \in T_p(M)$ bir null vektör olsun. $T_p(M)$ de bir düzlem, yani 2-boyutlu bir alt manifold P olsun. Eğer P , herhangi bir $W \in P$ için

$$\langle U, W \rangle = 0$$

olacak şekilde bir U vektör alanını ihtiva ediyorsa ve

$$\langle W_0, W_0 \rangle \neq 0$$

olacak şekilde bir $W_0 \in T_p(P)$ mevcut ise P düzlemine U doğrultusunda bir **null düzlem** denir. U ya göre P nin null kesit eğriliği; W , P de keyfi bir nonnull vektör alanı olmak üzere

$$K_U(P) = \frac{\langle R(W, U)U, W \rangle}{\langle W, W \rangle} \quad (1.3.15)$$

şeklinde tanımlanır (Duggal ve Bejancu, 1996).

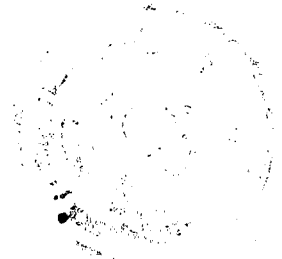
Tanım 1.3.22. n -boyutlu bir Lorentz manifoldu M ve R de M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $T_p(M)$ nin Lorentz ortonormal bazı olmak üzere,

$$\begin{aligned} Ric : T_p(M) \times T_p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (U, V) &\rightarrow Ric(U, V) \end{aligned}$$

öyleki;

$$Ric(U, V) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle R(e_i, U)V, e_i \rangle \quad (1.3.16)$$

şeklinde tanımlı Ric eğrilik tensör alanına **Ricci eğrilik tensör alanı** ve $Ric(U, V)$ nin $p \in M$ noktasındaki değerine de M nin p deki **Ricci eğriliği** denir. Ayrıca Ricci eğriliği aşağıdaki özellikleri sağlar



i) $\text{Ric}(U, V) = \text{Ric}(V, U)$

ii) $\text{Ric}(U+V, U+V) = \text{Ric}(U, U) + \text{Ric}(V, V) + 2\text{Ric}(U, V)$

dir (Bektaş ve Ergüt, 1995).

Tanım 1.3.23. M bir n -boyutlu Lorentz manifoldu ve $p \in M$ için $T_p(M)$ tanjant uzayının ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. M nin Ricci eğrilik tensör alanı Ric olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \text{Ric}(e_i, e_i) \quad (1.3.17)$$

şeklinde tanımlı r değerine M nin **skalar eğriliği** denir. (1.3.17) de (1.3.16) eşitliği gözönüne alınırsa,

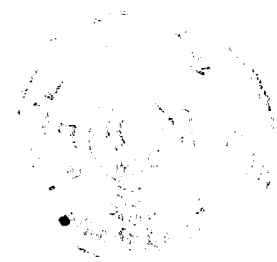
$$r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j < R(e_j, e_i) e_i, e_j)$$

şeklinde tanımlanır (Beem ve Ehrlich, 1981).

Tanım 1.3.24. $\mathbb{R}_1^n$ de bir k -boyutlu alt manifold M olsun. M nin p noktasında k -tane asli eğriliği $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ olsun. $p \in M$ noktasında M nin **j -yinci ortalama eğriliği** H_j ,

$$\binom{k}{j} H_j = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_j} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_j}, \quad 1 \leq j \leq k$$

şeklinde tanımlanır, burada



$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

dir (Aledo ve Alias, 2000).

1.4. Lorentz Manifoldlarında Null Eğriler

Tanım 1.4.1. M ve E , sırasıyla, m ve $(m+n)$ -boyutlu iki reel C^∞ -manifold olsun.

$$\pi : E \rightarrow M$$

örtün ve C^∞ -dönüşümü için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

i) $\forall p \in M$ için $E_p = \pi^{-1}(p)$ n -boyutlu bir reel vektör uzayı olup bu vektör uzayına p noktasında lif (fibre) denir.

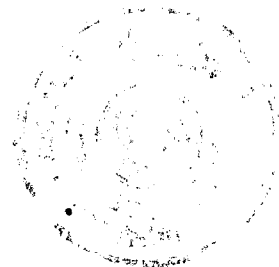
ii) M nin

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow x_i \\ & & U_i \subset M \end{array}$$

diyagramı değişimli ve lif üzerine indirgenmiş

$$\phi_{i,p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

dönüşümü bir izomorfizm olacak şekilde bir $\{U_i\}$ açık örtüsü ve $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ diffeomorfizmi mevcut olsun. Bu taktirde $A = \{U_i, \phi_i\}$ sistemine ϕ_i ve π aşıkâr dönüşümleri için bir **aşıkâr örtü** denir. Eğer A_1 ve A_2 aşıkâr örtüleri için $A_1 \cup A_2$ ii) şartını sağlıyorsa A_1 ve A_2 **denktirler** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).



Tanım 1.4.2. Aşıkart örtülerin bir denklik sınıfı E üzerinde bir **vektör demeti** (vector bundle) yapısı belirler. Bu durumda (E, M, π) üçlüsüne bir vektör demeti denir.

Bir vektör demetinde E ye demetin **total uzayı**, M ye demetin **baz (taban) uzayı** ve π ye de **projeksiyon (fibrasyon) dönüşümü** denir.

Ayrıca, E nin lifleri n -boyutlu olduğundan E ye M üzerinde rankı n olan bir vektör demeti denir, yani

$$\text{rank}(E, M, \pi) = \text{boy } E_p$$

dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.4.3. $\pi \circ X = I_U$ olacak şekildeki $X : U \rightarrow E$ C^∞ -fonksiyonuna $U \subset M$ üzerinde tanımlı E nin bir C^∞ -kesiti denir ve $\Gamma(E|_U)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.4. M üzerinde bir vektör demeti E ve E nin bir alt cümlesi F olsun. Eğer herbir $p \in M$ için E nin bir $(U, \phi, \mathbb{R}^n)$ vektör demeti mevcut ve $\phi(\pi^{-1}(U) \cap F) = UX \mathbb{R}^k$ olacak şekilde bir $1 \leq k < n$ doğal sayısı mevcut ise F ye E nin bir **alt vektör demeti** denir.

Tanım 1.4.5. M bir n -boyutlu C^∞ -manifold olsun. $\forall p \in M$ için $T_p M$ tanjant uzaylarının ayrık birleşimi olan

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

ye M nin **tanjant demeti** (tanjant bundle) denir. TM tanjant demetinin kesitine M üzerinde **vektör alanı** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).



Eğriler teorisi diferensiyel geometrinin temel konularından biri olup günümüzde üzerindeki çalışmalar devam etmektedir. Son zamanlarda en çok çalışılan konulardan biri de dejenere alt manifoldlardır. Null eğriler de 1-boyutlu dejenere alt manifoldlar olduğundan null eğriler üzerine olan çalışmalar oldukça önemlidir.

Tanım 1.4.6. M sabit v indeksli reel $(n+2)$ -boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. I , $\mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir dönüşümüne M de bir eğri adı verilir (O'Neill, 1983).

M de bir eğri,

$$i : \alpha \rightarrow M$$

immersiyonu ile de tanımlanır. Şimdi α , M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri ve α üzerinde bir koordinat komşuluğu U olsun. U ya karşılık gelen lokal parametrenin de t olduğunu kabul edelim. Bu takdirde α eğrisi lokal olarak $\forall t \in I$ için,

$$\alpha_i = \alpha_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, n+2\}, \quad \text{rank} \left[\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_{n+2}}{dt} \right] = 1$$

denklemleri ile verilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.4.7. M bir $(n+2)$ -boyutlu Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin $t \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü ya da tanjant vektörü

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_{n+2}}{dt} \Big|_t \right)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.8. M bir $(n+2)$ -boyutlu Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \rightarrow M$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α nın tanjant vektörü $\frac{d\alpha}{dt}$ olmak üzere

i) $\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \rangle > 0$ ise α ya **space-like eğri**,

ii) $\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \rangle < 0$ ise α ya **time-like eğri**,

iii) $\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \rangle = 0$ ve $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$ ise α ya **null veya light-like eğri** denir (O'Neill, 1983).

M bir $(n+2)$ -boyutlu Lorentz manifoldu ve α , M de bir null eğri olsun. α nın tanjant demetine $T\alpha$ diyelim. α nın nonnull eğri olması durumunda, ξ_p , p noktasında α ya teğet null vektör olmak üzere

$$T\alpha^\perp = \bigcup_{p \in \alpha} T_p\alpha^\perp; T_p\alpha^\perp = \{v_p \in T_pM \mid \langle v_p, \xi_p \rangle = 0\}$$

tanımlayalım. Burada $T\alpha^\perp$, α üzerinde $(n+1)$ -ranklı bir vektör demetidir.

$$\langle \xi_p, \xi_p \rangle = 0$$

olduğundan α nın $T\alpha$ tanjant demeti $T\alpha^\perp$ in bir alt vektör demeti olup rankı 1 dir.

Şimdi $T\alpha^\perp$ de $T\alpha$ nın tümleyeni olan $S(T\alpha^\perp)$ vektör demetini gözönüne alalım.

Bu taktirde

$$T\alpha^\perp = T\alpha \perp S(T\alpha^\perp)$$

yazabiliriz. Burada $p \in \alpha$ noktasında $S(T\alpha^\perp)$ in lifleri $T_p\alpha^\perp$ in enaz bir **görüntü (ekran=screen)** altuzayı olup $S(T\alpha^\perp)$ nondejenere bir vektör demetidir. Dolayısıyla

$$TM|_\alpha = S(T\alpha^\perp) \perp S(T\alpha^\perp)^\perp \quad (1.4.1)$$

olur. Burada $S(T\alpha^\perp)^\perp$, $TM|_\alpha$ da $S(T\alpha^\perp)$ e ortogonal tümleyen vektör demetidir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 1.4.1. M bir Lorentz manifoldu ve M de bir null eğri α olsun. α nın görüntü (ekran=screen) vektör demeti $S(T\alpha^\perp)$ olsun. Bu taktirde α üzerinde rankı 1 olan bir tek E vektör demeti mevcuttur; öyleki herbir $U \subset \alpha$ kordinat komşuluğu üzerinde

$$\langle \frac{d\alpha}{dt}, N \rangle = +1 \quad (1.4.2)$$

$$\langle N, N \rangle = \langle N, X \rangle = 0, \forall X \in \Gamma(S(T\alpha^\perp)|_U)$$

olacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(E|_U)$ mevcuttur (Duggal ve Bejancu, 1996).

Buradaki E vektör demetine α nın **null transversal demeti** denir ve $\text{ntr}(\alpha)$ ile gösterilir. Şimdi

$$\text{tr}(\alpha) = \text{ntr}(\alpha) \perp S(T\alpha^\perp) \quad (1.4.3)$$

vektör demetini gözönüne alalım. Bu $\text{tr}(\alpha)$ vektör demeti $TM|_\alpha$ ve (1.4.2) ifadelerine göre tümleyen uzaylardır, ancak $TM|_\alpha$ da $T\alpha$ ya ortogonal değildir. Böylece

$$TM|_\alpha = T\alpha \oplus \text{tr}(\alpha) = (T\alpha \oplus \text{ntr}(\alpha)) \perp S(T\alpha^\perp)$$

elde edilir.

Tanım 1.4.9. (1.4.3) eşitliği ile verilen $\text{tr}(\alpha)$ ya α nın $S(T\alpha^\perp)$ e göre **transversal vektör demeti** denir. Teorem 1.4.1 de verilen N vektör alanına da α nın $\frac{d\alpha}{dt}$ ye göre **null transversal vektör alanı** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

M , $(n+2)$ -boyutlu bir Lorentz manifoldu ve α da M üzerinde bir null eğri olsun.

Bu takdirde M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ∇ ve $\frac{da}{dt} = \lambda$ olmak üzere $n \geq 5$ için,

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}\lambda &= \kappa\lambda + k_1W_1 \\ \nabla_{\lambda}N &= -\kappa N + k_2W_1 + k_3W_2 \\ \nabla_{\lambda}W_1 &= -k_2\lambda - k_1N + k_4W_2 + k_5W_3 \\ \nabla_{\lambda}W_2 &= -k_3\lambda - k_4W_1 + k_6W_3 + k_7W_4 \\ \nabla_{\lambda}W_3 &= -k_5W_1 - k_6W_2 + k_8W_4 + k_9W_5 \\ &\dots = \\ \nabla_{\lambda}W_{n-2} &= -k_{2n-5}W_{n-4} - k_{2n-4}W_{n-3} + k_{2n-2}W_{n-1} + k_{2n-1}W_n \\ \nabla_{\lambda}W_{n-1} &= -k_{2n-3}W_{n-3} - k_{2n-2}W_{n-2} + k_{2n}W_n \\ \nabla_{\lambda}W_n &= -k_{2n-1}W_{n-2} - k_{2n}W_{n-1} \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

dir. Burada κ ve $\{k_1, \dots, k_{2n}\}$ M üzerinde C^∞ -sınıftan diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$, $\Gamma(S(T\alpha^\perp)|_M)$ nin ortonormal bir bazıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.4.10. $n>0$ olmak üzere $\{\frac{da}{dt}, N, W_1, \dots, W_n\}$ sistemine $S(T\alpha^\perp)$ e göre α boyunca M üzerinde bir Frenet çatısı ve $\{k_1, \dots, k_{2n}\}$ fonksiyonlarına da α nın Frenet çatısına göre eğrilik fonksiyonları denir. (1.4.4) eşitliklerine Frenet denklemleri adı verilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.4.11. $M(n+2)$ -boyutlu Lorentz uzayı olsun. $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_n\}$ bazı için

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= \langle Y, Y \rangle = 0 \\ \langle X, Z_i \rangle &= \langle Y, Z_i \rangle = 0 \\ \langle X, Y \rangle &= -1 \\ \langle Z_i, Z_j \rangle &= \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlıyorsa bu baza M nin pseudo-ortonormal bazı adı verilir (Magid, 1985).

Bu tanıma göre; $X = \lambda$, $Y = -N$ ve $Z_i = W_i$, $1 \leq i \leq n$, olmak üzere (1.4.4) eşitlikleri

$$\begin{aligned}
 \nabla_X X &= \kappa X + k_1 Z_1 \\
 \nabla_X Y &= -\kappa Y - k_2 Z_1 - k_3 Z_2 \\
 \nabla_X Z_1 &= k_2 X + k_1 Y + k_4 Z_2 + k_5 Z_3 \\
 \nabla_X Z_2 &= k_3 X - k_4 Z_1 + k_6 Z_3 + k_7 Z_4 \\
 \nabla_X Z_3 &= -k_5 Z_1 - k_6 Z_2 + k_8 Z_4 + k_9 Z_5 \\
 &\dots = \dots\dots\dots \\
 \nabla_X Z_{n-2} &= -k_{2n-5} Z_{n-4} - k_{2n-4} Z_{n-3} + k_{2n-2} Z_{n-1} + k_{2n-1} Z_n \\
 \nabla_X Z_{n-1} &= -k_{2n-3} Z_{n-3} - k_{2n-2} Z_{n-2} + k_{2n} Z_n \\
 \nabla_X Z_n &= -k_{2n-1} Z_{n-2} - k_{2n} Z_{n-1}
 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

şeklinde olur.

Tanım 1.4.12. M bir Lorentz manifoldu ve M üzerinde bir eğri α olsun. α üzerinde bir Z vektör alanı için $\nabla_{\alpha'} Z = 0$ ise Z vektör alanına α eğrisi boyunca **paralel vektör alanıdır** denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.13. M bir Lorentz manifoldu olsun. M üzerinde bir α eğrisi için

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$$

ise α eğrisine bir **geodezik eğri** adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.4.14. M bir Lorentz manifoldu ve M üzerinde bir null eğri α olsun. Eğer α null eğrisi için

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$$

ise α eğrisine M nin bir **null geodeziği** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.4.15. M bir Lorentz hiperyüzeyi olsun. $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü S ve M de bir eğri α olsun. Eğer $t \in I$ olmak üzere α eğrisi için

$$\langle S(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

ise α ya M üzerinde bir **asimptotik eğri** denir (Turgut, 1995).

Tanım 1.4.16. M bir Lorentz hiperyüzeyi ve $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer bir $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisinin teğet vektör alanı için,

$$S(\alpha'(t)|_p) = k(p) \alpha'(t)|_p, \quad \forall p \in \alpha$$

ise α eğrisine M üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir (Turgut, 1995).



İKİNCİ BÖLÜM

2.GENELLEŞTİRİLMİŞ NULL SCROLLAR

2.1. $\mathbb{R}_1^n$ n-Boyutlu Lorentz Uzayında Genelleştirilmiş Null Scroll'ların Özellikleri

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}_1^n$ n-boyutlu Lorentz uzayında bir null eğri

$$\begin{aligned}\alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^n \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

olsun. $\alpha(t)$ boyunca (1.4.5) eşitlikleri sağlanacak şekilde bir pseudo-ortonormal çatı

$$\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{n-2}\}$$

olsun. $\mathbb{R}_1^n$ in $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}_1^n)$ olmak üzere;

$$\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$$

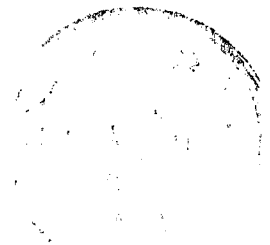
cümlesi bu uzayın bir r-boyutlu alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzayı $W_r(t)$, $1 \leq r \leq n-2$, ile gösterelim.

$$M = \psi(G)$$

olmak üzere $W_r(t)$ tarafından oluşturulan bu nokta cümleleri bir

$$I \times \mathbb{R}^r = G \subset \mathbb{R}_1^{r+1}$$

bölgesi üzerinde bulunan $\mathbb{R}_1^n$ uzayının bir $(r+1)$ -boyutlu alt manifoldudur. Bu manifold için bir parametrizasyon, $u = (u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$ olmak üzere,



$$\psi : I \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}_1^n$$

$$(t, u) \rightarrow \psi(t, u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = \alpha(t) + u_0 Y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i Z_i(t) \quad (2.1.1)$$

olup

$$\begin{aligned} \text{rank}(\psi_t, \psi_{u_0}, \psi_{u_1}, \dots, \psi_{u_{r-1}}) &= \text{rank}(\alpha'(t) + u_0 Y'(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i Z_i'(t), Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)) \\ &= r+1 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

için M manifolduna $(r+1)$ -boyutlu **genelleştirilmiş null scroll**; α eğrisine genelleştirilmiş null scroll'un **dayanak eğrisi** ve $W_r(t)$ uzayına da $\alpha(t)$ noktasında genelleştirilmiş null scroll'un **doğrultman uzayı** veya **dejenere doğrultmanı** denir.

$$g = \begin{bmatrix} \langle \psi_t, \psi_t \rangle & \langle \psi_t, \psi_{u_0} \rangle & \dots & \langle \psi_t, \psi_{u_{r-1}} \rangle \\ \langle \psi_{u_0}, \psi_t \rangle & \langle \psi_{u_0}, \psi_{u_0} \rangle & \dots & \langle \psi_{u_0}, \psi_{u_{r-1}} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_{u_{r-1}}, \psi_t \rangle & \langle \psi_{u_{r-1}}, \psi_{u_0} \rangle & \dots & \langle \psi_{u_{r-1}}, \psi_{u_{r-1}} \rangle \end{bmatrix}_{(r+1) \times (r+1)}$$

olmak üzere,

$$\det g = -(1 + u_1 k_2 + u_2 k_3)^2 < 0$$

elde edilir. Bu da M null scroll'unun Lorentz yüzeyi olduğunu ve (2.1.2) eşitliğinin sağlandığını gösterir.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r-1} = \mathbb{R}^r$ olduğundan M için ψ parametrizasyonu, $1 \leq i \leq r-1$ olmak üzere,

$$\psi: I \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, u_0, u_i) \rightarrow \psi(t, u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = \alpha(t) + u_0 Y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i Z_i(t)$$

şeklinde de alınabilir. Aksi belirtilmedikçe çalışmamız boyunca (2.1.1) parametrizasyonunu kullanacağız.

Tanım 2.1.2. $W_i(t)$ lineer alt uzaylarının, doğrultman vektör uzayları tarafından belirlenen noktalar cümlesi,

$$\Lambda: I \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, u) \rightarrow \Lambda(t, u) = u_0 Y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i Z_i(t), \quad u = (u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$$

olmak üzere,

$$\text{rank}(\Lambda_t, \Lambda_{u_0}, \Lambda_{u_1}, \dots, \Lambda_{u_{r-1}}) = r+1$$

için Λ ye genelleştirilmiş null scroll'un $(r+1)$ -boyutlu **yön konisi** denir. Bu koninin tepesi civarında $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}_1^n$ Lorentz küresi ile olan kesitine $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'un **doğrultman resmi (tasviri)** denir.

Tanım 2.1.3. S_1^{n-1} Lorentz küresi üzerindeki M nin küresel doğrultman resminde bulunan $Y(t)$, $Z_1(t)$, ..., $Z_{r-1}(t)$ küresel eğrilerini ve $Y'(t)$, $Z_1'(t)$, ..., $Z_{r-1}'(t)$ teğet vektörlerini gözönüne alalım.

$$\tilde{A}(t) = \text{Sp}\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t), Y'(t), Z_1'(t), \dots, Z_{r-1}'(t)\}$$



şeklinde tanımlı $\tilde{A}(t)$ alt vektör uzayına genelleştirilmiş M null scroll'unun $W_r(t)$ içindeki asimptotik demeti denir.

$\tilde{A}(t)$ uzayı $W_r(t)$ yi kapsayan bir alt vektör uzayı olup bu uzayın ortonormal bazını aşağıdaki şekilde bulabiliriz:

$$\langle W_r, W_r \rangle \neq 0$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} W_r &= Z_1' - \langle Z_1', Y \rangle Y - \sum_{s=1}^{r-1} \langle Z_1', Z_s \rangle Z_s \\ &= k_2 X + (k_1 - k_2) Y, \quad k_1 \neq 0, k_2 \neq 0 \end{aligned}$$

vektörünü inşa edelim. Bu taktirde

$$\langle W_r, Z_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, r-1$$

dir. Şimdi

$$Y_1 = \frac{1}{\langle W_r, Y \rangle} \left\{ W_r - \frac{\|W_r\|^2}{2 \langle W_r, Y \rangle} Y \right\}$$

vektörünü gözönüne alalım. Y_1 null vektördür. Gerçekten,

$$Y_1 = -X$$

olup, X null vektör olduğundan Y_1 de null vektördür. Böylece

$$\langle Y_1, Y \rangle = 1 \quad \text{ve} \quad \langle Y_1, Z_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, r-1$$

olur. Buradan



$$Z_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + Y_1)$$

$$Z_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - Y_1)$$

vektörleri, sırasıyla, birim space-like ve birim time-like vektörlerdir. Dolayısıyla

$$\{Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_{r-1}(t), Z_r(t), Z_{r+1}(t), Y'(t), Z'_2(t), \dots, Z'_{r-1}(t)\}$$

cümlesini elde ederiz. Burada

$$\{Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_{r-1}(t), Z_r(t), Z_{r+1}(t)\}$$

ortonormal bir cümle olduğundan

$$\langle Z_j, Z_k \rangle = \varepsilon_j \delta_{jk}, \quad \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & , \quad 1 \leq j \leq r \\ -1 & , \quad j = r+1 \end{cases}$$

eşitliklerini sağlar.

Ayrıca, Gramm-Schmidt metoduyla $\langle A_{r+m}, A_{r+m} \rangle \neq 0$ olmak üzere,

$$A_{r+m} = Z'_m - \sum_{s=1}^{r+1} \langle Z'_m, Z_s \rangle Z_s - \langle Z'_m, Y \rangle Y, \quad 2 \leq m \leq r-1$$

ve

$$W_{r+m} = \frac{A_{r+m}}{\|A_{r+m}\|}$$

seçilerek işaretleri dışında;

$$\{Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_{r-1}(t), Z_r(t), Z_{r+1}(t), W_{r+2}(t), \dots, W_{r+m}(t)\}$$



ortonormal bazı bulunabilir. Burada $2 \leq m \leq r-1$ dir. Dolayısıyla;

$$\text{boy } \tilde{A}(t) = r+m$$

olur. Buradan

$$Y' = \sum_{j=1}^{r+1} b_{0j} Z_j + \sum_{k=2}^m c_{0k} W_{r+k}$$

$$i = 1, \dots, r-1 \quad (2.1.3)$$

$$Z'_i = \sum_{j=1}^{r+1} b_{ij} Z_j + \sum_{k=2}^m c_{ik} W_{r+k}$$

olacağı açıktır.

$$\langle Z'_i, Z_j \rangle + \langle Z_i, Z'_j \rangle = 0, \quad 1 \leq i, j \leq r-1$$

olduğundan,

$$b_{ij} = -b_{ji}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.1. $t_0 \in J$ olmak üzere, $W_r(t)$ doğrultman uzayının bir $\{Y(t_0), Z_1(t_0), \dots, Z_{r-1}(t_0)\}$ bazı verildiğinde, J nin t_0 'ı kapsayan öyle bir I açık aralığı bulunabilir ki, bu aralıkta $W_r(t)$ uzayının $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ bazı $\forall t \in I$ için

$$\begin{aligned} \langle Z_i, Z_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle Z'_i, Z_j \rangle &= 0 \quad i, j = 1, \dots, r-1 \\ \langle Y, Z_i \rangle &= 0 \\ \langle Y, Y \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

olacak şekilde tek olarak belirlenir.



İspat. $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ cümlesini

$$\begin{aligned} \langle Z_i(t), Z_j(t) \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle Y(t), Y(t) \rangle &= 0 \quad i, j = 1, \dots, r-1 \\ \langle Y(t), Z_i(t) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

olarak alalım. a_j^h , $j, h = 1, \dots, r-1$ fonksiyonlarını

$$(a_j^h)' + \sum_{i=1}^{r-1} a_j^h \langle Z_i', Z_h \rangle = 0 \quad (2.1.6)$$

diferensiyel denkleminin çözümleri olacak şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= a_0^0 Y, \quad a_0^0 \neq 0 \\ \bar{Z}_j &= \sum_{i=1}^{r-1} a_j^i Z_i \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

vektörlerini tanımlayalım. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \bar{Y}' &= (a_0^0)' Y + a_0^0 Y' \\ \bar{Z}_j' &= \sum_{i=1}^{r-1} (a_j^i)' Z_i + \sum_{i=1}^{r-1} a_j^i Z_i' \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

olur. (2.1.5) ve (2.1.8) den

$$\langle \bar{Y}', Y \rangle = 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca



$$\langle \bar{Z}_j', Z_h \rangle = (a_j^h)' + \sum_{i=1}^{r-1} a_i^j \langle Z_i', Z_h \rangle = 0$$

ve

$$\langle \bar{Z}_j, \bar{Z}_\ell \rangle = \sum_{h=1}^{r-1} a_\ell^h \langle \bar{Z}_j, Z_h \rangle = 0$$

bulunur. Böylece

$$\{ \bar{Y}, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_{r-1} \}$$

bazılarının bu sistemi (2.1.4) ün ikinci, üçüncü ve dördüncü şartını sağlar. (2.1.7) den

$$\langle \bar{Y}, \bar{Z}_i \rangle = 0$$

ve

$$\langle \bar{Y}, \bar{Y} \rangle = 0$$

olduğu açıktır. Buradan

$$(\langle \bar{Z}_j, \bar{Z}_\ell \rangle)' = 0$$

elde ederiz, yani $\bar{Z}_j$ ve $\bar{Z}_\ell$ nin iç çarpımları sabittirler. (2.1.7) den

$$\begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{Z}_1 \\ \vdots \\ \bar{Z}_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1^1 & \dots & a_1^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{r-1}^1 & \dots & a_{r-1}^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{r-1} \end{bmatrix}$$

dir. Eğer (2.1.6) sisteminin çözümlerini belli bir t_0 başlangıç değeri için $[a_j^h(t_0)]$ matrisi ortogonal olacak şekilde alırsak $\{\bar{Y}(t_0), \bar{Z}_j(t_0)\}$ bazı t_0 değeri için olduğu gibi t nin tüm değerleri için de aynı şekilde ortogonal kalacaktır. O halde (2.1.4) ün ilk şartı da sağlanmış olur.

Şimdi $\{\bar{Y}(t), \bar{Z}_1(t), \dots, \bar{Z}_{r-1}(t)\}$ bazının tek olduğunu gösterelim. Bunun için $\bar{Y}'$ ve $\bar{Z}_i'$ lerin $\bar{Y}$ ve $\bar{Z}_i$, $i = 1, \dots, r-1$, vektörlerine ortogonal olduğunu göstermeliyiz. Bu bir anlamda tüm $\bar{u}_j'$ vektörlerinin Y, Z_i , $i = 1, \dots, r-1$ lere dik olması demektir. $\bar{Y}$ ve $\bar{Z}_i$ lerle Y, Z_i ler lineer bağımlı olduğundan a_j^h fonksiyonları (2.1.6) sistemini sağlayacak şekilde tek olarak bellidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$$\langle \bar{Z}_i', Z_j \rangle = 0, \quad \langle Y', Y \rangle = 0 \quad (2.1.9)$$

Herbir $W_r(t)$ doğrultman uzayı $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}_1^n$ üzerinde bir S_1^{r-1} Lorentz küresini belirler. $\forall t \in I$ için S_1^{r-1} Lorentz alt küreleri ψ nin doğrultmanının küresel resmini tararlar. (2.1.9) a göre $\forall t \in I$ için $Y(t), Z_i(t)$, $1 \leq i \leq r-1$, küresel eğrilerinin teğetleri, yani $Y'(t), Z_i'(t)$ ler, sırasıyla, $Y(t)$ ve $Z_i(t)$ lere diktir. Bu nedenle $Y(t)$ ve $Z_i(t)$ küresel eğrileri S_1^{n-1} Lorentz alt kürelerinin dik izdüşümüdür. Buna ψ nin doğrultmanının küresel resminin izdüşümü diyeceğiz.

Teorem 2.1.2. Bir M , $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'unun $W_r(t)$ doğrultman uzaylarının $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ bazları $I \subset J$ açık aralığında

$$\langle Y^0(t), Y^0(t) \rangle = 0, \quad \langle Y^0(t), Z_1^0(t) \rangle = 0 \quad (k_2 = 0 \text{ olmak üzere})$$

$$\langle Z_i^0(t), Z_j^0(t) \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, r-1, \quad i \neq j, \quad r > 2, \quad \forall t \in I$$

$$\langle Z_1^0(t), Z_1^0(t) \rangle \geq \dots \geq \langle Z_{r-1}^0(t), Z_{r-1}^0(t) \rangle \geq 0$$

olacak şekilde seçilebilirler. Burada



$$Y^0 = Y' - \sum_{j=1}^{r-1} \langle Y', Z_j \rangle Z_j$$

$$Z_i^0 = Z_i' - \sum_{j=1}^{r-1} \langle Z_i', Z_j \rangle Z_j - \langle Z_i', Y \rangle Y, \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (2.1.10)$$

dir.

İspat.

$$Y^0 = Y' - \sum_{j=1}^{r-1} \langle Y', Z_j \rangle Z_j$$

eşitliğinde (1.4.5) eşitlikleri kullanılırsa;

$$Y^0 = -hY$$

olup Y null vektör olduğundan $\forall t \in I$ için

$$\langle Y^0(t), Y^0(t) \rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca,

$$\langle Y^0(t), Z_i^0(t) \rangle = -h \langle Y, Z_i' \rangle$$

olur. Burada (1.4.5) eşitlikleri kullanılırsa; $i \geq 2$ için

$$\langle Y^0(t), Z_i^0(t) \rangle = 0$$

ve $i = 1$ için

$$\langle Y^0(t), Z_1^0(t) \rangle = hk_2$$

olur. Buradan

$$\langle Y^0(t), Z_1^0(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0$$

bulunur.



$t \in J$ için, $\langle Z(t), Z(t) \rangle = 1$ olacak şekilde herhangi bir birim vektör

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i(t) Z_i(t) + a_0 Y(t) \quad a_0 = \text{sbt.} \quad (2.1.11)$$

olsun. Bu takdirde,

$$Z'(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i'(t) Z_i(t) + \sum_{i=1}^{r-1} a_i(t) Z_i'(t) + a_0 Y'(t) \quad (2.1.12)$$

olur. Diğer taraftan (2.1.10) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$Z^0 = Z' - \sum_{j=1}^{r-1} \langle Z', Z_j \rangle Z_j - \langle Z', Y \rangle Y \quad (2.1.13)$$

şeklinde yazılır. (2.1.13) de (2.1.12) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Z^0(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i(t) \left[Z_i'(t) - \sum_{j=1}^{r-1} \langle Z_i'(t), Z_j(t) \rangle Z_j(t) - \langle Z_i'(t), Y(t) \rangle Y(t) \right] \\ + a_0 \left[Y'(t) - \sum_{j=1}^{r-1} \langle Y', Z_j \rangle Z_j \right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.1.10) yerine yazılırsa,

$$Z^0(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i(t) Z_i^0(t) + a_0 Y^0(t), \quad t \in J \quad (2.1.14)$$

elde edilir. Böylece (2.1.11) den $Z^0(t)$ de $Z(t)$ nin katsayıları ile belirlenmiş olur.

Buradan

$$\langle Z^0(t), Z^0(t) \rangle = \sum_{i,j=1}^{r-1} a_i(t) a_j(t) \langle Z_i^0(t), Z_j^0(t) \rangle + 2 \sum_{i=1}^{r-1} a_i(t) a_0 \langle Z_i^0(t), Y^0(t) \rangle \quad (2.1.15)$$



olur. S_1^{r-1} Lorentz birim küresinin kompaktlığından dolayı $\langle Z^0, Z^0 \rangle$ fonksiyonu belli bir t anında $a_1, \dots, a_{r-1}$ değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. Ayrıca $\langle Z(t), Z(t) \rangle = 1$ den

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{r-1}^2 - 1 = 0 \quad (2.1.16)$$

olur. Buna göre $\langle Z^0, Z^0 \rangle$ fonksiyonunun (2.1.16) şartı altında ekstremum değerlerini araştıracağız. Bunun için λ^2 Lagrange çarpanı yardımıyla

$$F(t, a_1, \dots, a_{r-1}) = \|Z^0\|^2(t, a_1, \dots, a_{r-1}) - \frac{1}{2}\lambda^2[\|Z\|^2(t, a_1, \dots, a_{r-1}) - 1] \quad (2.1.17)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\langle Z^0(t), Z^0(t) \rangle = f(a_1, \dots, a_{r-1}) = \sum_{i,j=1}^{r-1} a_i a_j \langle Z_i^0, Z_j^0 \rangle + 2 \sum_{i=1}^{r-1} a_i a_0 \langle Z_i^0, Y^0 \rangle, \quad t = \text{sbt.}$$

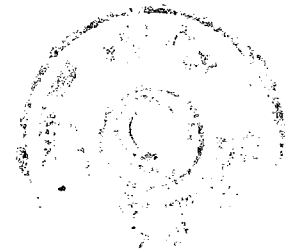
şeklinde alıp (2.1.16) eşitliğini de gözönüne alırsak, $t = \text{sbt.}$ olmak üzere

$$F(t, a_1, \dots, a_{r-1}) = \sum_{i,j=1}^{r-1} a_i a_j \langle Z_i^0, Z_j^0 \rangle + 2 \sum_{i=1}^{r-1} a_i a_0 \langle Z_i^0, Y^0 \rangle - \frac{1}{2}\lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{r-1}^2 - 1) \quad (2.1.18)$$

elde edilir. Buradan $F_{a_1}(t), \dots, F_{a_{r-1}}(t)$ ye göre türev alırsak ve bunu genel olarak $F_{a_i}(t)$ ile gösterirsek, ekstremum olma şartından,

$$F_{a_i}(t) = \sum_{j=1}^{r-1} a_j \langle Z_i^0, Z_j^0 \rangle + 2a_0 \langle Z_i^0, Y^0 \rangle - \lambda^2 a_i = 0, \quad i = 1, \dots, r-1$$

bulunur. Bu $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$ lere göre bir lineer denklem sistemidir. Buna göre



$$\begin{aligned}
Fa_1(t) &= \sum_{j=1}^{r-1} a_j \langle Z_1^0, Z_j^0 \rangle - \lambda^2 a_1 = 0 \\
Fa_2(t) &= \sum_{j=1}^{r-1} a_j \langle Z_2^0, Z_j^0 \rangle - \lambda^2 a_2 = 0 \\
&\dots = \dots = \dots \\
Fa_{r-1}(t) &= \sum_{j=1}^{r-1} a_j \langle Z_{r-1}^0, Z_j^0 \rangle - \lambda^2 a_{r-1} = 0
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

sisteminin katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} \langle Z_1^0(t), Z_1^0(t) \rangle - \lambda^2 & \langle Z_1^0(t), Z_2^0(t) \rangle & \dots & \langle Z_1^0(t), Z_{r-1}^0(t) \rangle \\ \langle Z_2^0(t), Z_1^0(t) \rangle & \langle Z_2^0(t), Z_2^0(t) \rangle - \lambda^2 & \dots & \langle Z_2^0(t), Z_{r-1}^0(t) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Z_{r-1}^0(t), Z_1^0(t) \rangle & \langle Z_{r-1}^0(t), Z_2^0(t) \rangle & \dots & \langle Z_{r-1}^0(t), Z_{r-1}^0(t) \rangle - \lambda^2 \end{bmatrix}$$

simetrik bir matris olduğundan “ simetrik matrislerin tüm karakteristik değerleri reeldir ve $\det(\Delta - \lambda^2 I_{r-1}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 > 0$ dır.” Dolayısıyla λ^2 nin $\{b_1, \dots, b_{r-1}\}$ gibi (r-1)-tane değeri elde edilir. Buna bağlı olarak $a_1, \dots, a_{r-1}$ lerin çözümleri bulunur. Bulunan bu çözüm takımı

$$Z^0(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i(t) Z_i^0(t) + a_0 Y^0(t), \quad t \in J$$

eşitliğinde yerine yazılırsa elde edilen değer $Z^0(t)$ nin ekstremum değeridir. $t_0 \in J$ için $W_r(t)$ doğrultman uzayında herhangi bir kısıtlama yapmaksızın $\forall t \in J$ için de $\|Z^0(t)\|^2$ nin ekstremum değeri bulunabilir. Buna karşılık $\forall t_0 \in J$ için de bu ekstremum değeri mevcuttur. Diğer taraftan $W_r(t_0)$ ın $\{Y(t_0), Z_1(t_0), \dots, Z_{r-1}(t_0)\}$ bazını öyle seçelim ki, $W_r(t_0)$ da $\|Z_{r-1}^0\|^2$ nin mutlak minimumu $Z_{r-1}(t_0)$ olacak şekilde $W_r(t_0)$ ın bir bazını alalım. (2.1.11) den



$$Z_{r-1}(t_0) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i(t_0)Z_i(t_0) + a_0 Y(t_0)$$

yazabiliriz. $\{Z_1(t_0), \dots, Z_{r-1}(t_0)\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$a_0 = 0, a_1(t_0) = a_2(t_0) = \dots = a_{r-2}(t_0) = 0 \text{ ve } a_{r-1} = 1 \quad (2.1.20)$$

bulunur. $t_0 \in J$ için bu şartlar altında (2.1.19) dan

$$\begin{aligned} \langle Z_1^0, Z_{r-1}^0 \rangle &= \langle Z_2^0, Z_{r-1}^0 \rangle = \dots = \langle Z_{r-2}^0, Z_{r-1}^0 \rangle = 0 \\ \langle Z_{r-1}^0, Z_{r-1}^0 \rangle &= \lambda_{r-1}^2 \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

elde edilir. Burada $\lambda_{r-1}^2(t_0)$ değeri $[\langle Z_i^0(t_0), Z_j^0(t_0) \rangle]$ matrisinin $Z_{r-1}(t_0)$ vektörünü veren karakteristik değeridir. $\lambda_{r-1} = 0$ ise

$$\langle Z_{r-1}^0(t_0), Z_{r-1}^0(t_0) \rangle = 0$$

olacağından $Z_{r-1}^0(t_0) = 0$ olur. Ayrıca (2.1.10) eşitliğinden

$$Z_{r-1}^0(t_0) = Z'_{r-1}(t_0) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j(t_0)Z_j(t_0) + a_0 Y(t_0)$$

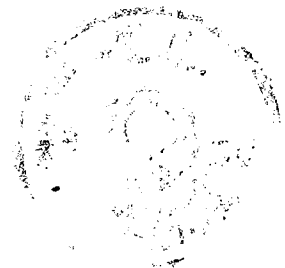
olduğundan

$$Z'_{r-1}(t_0) = \sum_{j=1}^{r-1} a_j(t_0)Z_j(t_0) - a_0 Y(t_0)$$

bulunur. Bu

$$Z'_{r-1}(t_0) \in \text{Sp}\{Y(t_0), Z_1(t_0), \dots, Z_{r-1}(t_0)\}$$

olduğunu gösterir.



$$F_{a_i}(t) = \sum_{j=1}^{r-1} a_j(t) \langle Z_i^0(t), Z_j^0(t) \rangle - \lambda^2(t) a_i(t) + 2a_0 \langle Z_i^0(t), Y^0(t) \rangle, \quad i = 1, \dots, r-1$$

eşitliğiyle tanımlı F_{a_i} fonksiyonu t ye göre sürekli olduğundan (2.1.20) ve (2.1.21) eşitlikleri $\forall t \in I_{r-1}$ için sağlanacak şekilde I nın I_{r-1} açık aralığı vardır. $r=3$ ise $m \leq 3$ dir ve $t \in I_{r-1}$ için $Sp\{Y, Z_1, Z_2, Y', Z_1', Z_2'\}$ uzayı 4-boyutlu genelleştirilmiş M null scroll'unun asimptotik demetidir. $W_3(t)$ uzayının $Z_2(t)$ baz vektörü yukarıdaki şekilde seçilirse $Z_1(t)$ işareti dışında tek olarak bellidir. $\langle Z_2^0, Z_2^0 \rangle$ minimum olacak şekilde seçtiğimizden,

$$\langle Z_1^0(t), Z_1^0(t) \rangle \geq \langle Z_2^0(t), Z_2^0(t) \rangle$$

$$\lambda_1^2(t) \geq \lambda_2^2(t), \quad \forall t \in I = I_{r-1}$$

olur. (2.1.21) den

$$\langle Z_1^0(t), Z_2^0(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I = I_k \quad (2.1.22)$$

elde edilir. Böylece $r = 3$ için teorem ispatlanmış olur. $r > 3$ ise $t \in I_{r-1}$ için $W_r(t)$ doğrultman uzayında $Z_{r-1}(t)$ vektörünün ortogonal tümleyenini olan vektör uzayında $Z_{r-1}(t)$ yi (2.1.20) ve (2.1.21) deki gibi alabiliriz. Böylece I_{r-1} için bir I_{r-2} açık alt aralığında

$$\langle Z_1^0, Z_{r-2}^0 \rangle = \langle Z_{r-3}^0, Z_{r-1}^0 \rangle = 0$$

$$\langle Z_{r-2}^0, Z_{r-2}^0 \rangle = \lambda_{r-2}^2 \geq \lambda_{r-1}^2$$

eşitlikleri geçerli olur. Bu şekilde devam edersek $W_r(t)$ uzayının $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ bazı I aralığında teoremin hipotezini sağlayacak şekilde bulunabilir. Bu da ispatı tamamlar.



Tanım 2.1.3. M genelleştirilmiş null scroll'unun sabit bir noktası P olsun.

$$P = \psi(t, u_0, u_1, \dots, u_{r-1})$$

ise P noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının bir bazı

$$\{\psi_t, \psi_{u_0}, \psi_{u_1}, \dots, \psi_{u_{r-1}}\}$$

yani

$$\{\alpha' + u_0 Y' + \sum_{i=1}^{r-1} u_i Z_i', Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\} \quad (2.1.23)$$

dir. t sabit tutularak u_i , $0 \leq i \leq r-1$ sayıları değiştirilirse, P noktası $W_r(t)$ uzayının noktalarını tarar. Buna göre

$$Sp\{\alpha', Y', Z_1', Z_2', \dots, Z_{r-1}', Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\} \quad (2.1.24)$$

uzayı $W_r(t)$ nin her P noktasındaki tanjant uzayların birleşimini kapsar. Bu uzaya M nin $W_r(t)$ içindeki **teğetsel demeti** denir ve $T(t)$ ile gösterilir. $T_p(M)$ uzayı $\alpha(t)$ noktasına kaydırılırsa $T_p M \subset T(t)$ olur. Ayrıca $\tilde{A}(t) \subset T(t)$ dir. (2.1.24) den teğetsel demetin boyutu

$$r+m \leq \text{boy } T(t) \leq r+m+1 \quad (2.1.25)$$

dir, yani

$$\text{boy } T(t) = r+m$$

ya da

$$\text{boy } T(t) = r+m+1$$

dir.

M genelleştirilmiş null scroll'unun doğrultman uzayını

$$W_r(t) = Sp\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$$



olarak tanımlamıştık. $W_r(t)$ bir dejenere uzaydır. Dolayısıyla

$$\text{Rad}(W_r(t)) = \text{Sp}\{Y(t)\}$$

$$S(W_r(t)) = \text{Sp}\{Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$$

olmak üzere

$$W_r(t) = \text{Rad}(W_r(t)) \perp S(W_r(t))$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\text{Rad}(W_r(t))$ ye doğrultman uzayın radikal uzayı, $S(W_r(t))$ ye de doğrultman uzayın screen (görüntü=ekran) uzayı denir. Dolayısıyla Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.2, $S(W_r(t))$ ye göre aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 2.1.3. $t_0 \in J$ olmak üzere, $S(W_r(t))$ nin bir $\{Z_1(t_0), \dots, Z_{r-1}(t_0)\}$ ortonormal bazı verildiğinde, J nin t_0 'ı kapsayan öyle bir I açık aralığı bulunabilir ki, bu aralıkta $S(W_r(t))$ uzayının $\{Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ ortonormal bazı $\forall t \in I$ için

$$\langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle Z_i', Z_j \rangle = 0 \quad i, j = 1, \dots, r-1$$

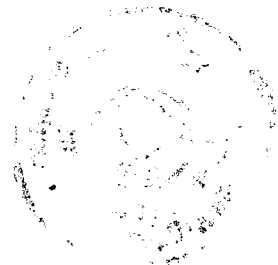
olacak şekilde tek olarak belirlenir.

Teorem 2.1.4. $(r+1)$ -boyutlu bir genelleştirilmiş null scroll M ve M nin doğrultman uzayı $W_r(t)$ olsun. $W_r(t)$ nin screen (görüntü=ekran) uzayları $S(W_r(t))$ lerin $\{Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ ortonormal bazları $I \subset J$ açık aralığında

$$\langle Z_i^0(t), Z_j^0(t) \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, r-1, \quad i \neq j, \quad r \geq 2, \quad \forall t \in I$$

$$\langle Z_1^0(t), Z_1^0(t) \rangle \geq \dots \geq \langle Z_{r-1}^0(t), Z_{r-1}^0(t) \rangle \geq 0$$

olacak şekilde seçilebilirler. Burada



$$Z_i^0 = Z_i' - \sum_{j=1}^{r-1} \langle Z_i', Z_j' \rangle Z_j, \quad i = 1, \dots, r-1$$

dir.

Tanım 2.1.4. M , $\mathbb{R}_1^n$ de bir genelleştirilmiş null scroll olsun. M nin doğrultman uzaylarının her birini dik olarak kesen eğriye genelleştirilmiş **null scroll'un ortogonal yörüngesi** denir.

Tanım 2.1.5. M bir genelleştirilmiş null scroll olsun. M üzerinde bir eğri

$$\beta(t) = \alpha(t) + u_0(t)Y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i(t)Z_i(t)$$

olsun. Eğer $\forall t \in I$ için

$$\langle \beta'(t), Y(t) \rangle = -1$$

$$\langle \beta'(t), Z_i(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$$

eşitlikleri sağlanıyorsa β eğrisine M nin **pseudo-ortogonal yörüngesi** denir.

Burada Tanım 2.1.4 ü yörüngenin time-like veya space-like olması halinde ve Tanım 2.1.5 i yörüngenin null olması halinde verdik.

Şimdi M $(r+1)$ -boyutlu bir genelleştirilmiş null scroll ve M nin $\forall t \in I$ için $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ bazları ile belirtilen bir doğrultman uzayı $W_r(t)$ olsun. $\alpha(t)$ de M nin dayanak eğrisi olsun. M nin diğer bir dayanak eğrisi de

$$\beta(t) = \alpha(t) + u_0(t)Y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i(t)Z_i(t)$$

olmak üzere β , M nin pseudo-ortogonal yörüngesi olsun. Bu taktirde

$$\langle \beta', Y \rangle = -1$$

$$\langle \beta', Z_i \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$$

olması için gerek ve yeter şartları arayalım:

$$\langle \beta', Y \rangle = -1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r-1} u_i \langle Z_i', Y \rangle = 0$$

olur.

$$\langle \beta', Z_i \rangle = 0 \Leftrightarrow u_0 \langle Y', Z_i \rangle + u_i' = 0$$

diferensiyel denklemini sağlayan u_i leri araştıralım:

Eğer

$$\langle Y', Z_i \rangle = 0 \text{ veya } u_0 = 0$$

ise bu taktirde $u_i = \text{sabit}$ elde edilir.

Eğer

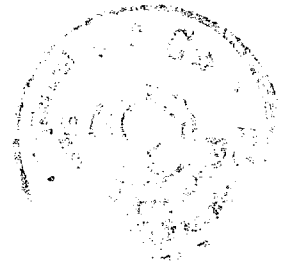
$$u_0 \neq 0 \text{ ve } \langle Y', Z_i \rangle \neq 0 \text{ ise } \langle Y', Z_i \rangle = \lambda$$

olmak üzere

$$u_i(t) = -\lambda \int u_0(t) dt + C$$

çözümleri mevcut olur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.1.5. $M, \mathbb{R}_1^n$ de bir genelleştirilmiş null scroll olsun. $\forall t \in I$ için M nin $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ bazları ile belirtilen bir doğrultman uzayı $W_r(t)$ ve $\alpha(t)$ de M nin dayanak eğrisi olsun. Bu taktirde M nin pseudo-ortogonal yörüngesinin mevcut olması için gerek ve yeter şart



$$\sum_{i=1}^{r-1} u_i \langle Z_i', Y \rangle = 0$$

ve

$$i = 1, \dots, r-1$$

$$u_i = -\lambda \int u_0(t) dt + C$$

olmasıdır. Burada $\lambda = \langle Y', Z_i \rangle$ dir.

Sonuç 2.1.1. $M, \mathbb{R}_1^n$ de bir genelleştirilmiş null scroll olsun. $\forall t \in I$ için M nin $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ bazıları ile belirtilen bir doğrultman uzayı $W_r(t)$ ve $\alpha(t)$ de M nin dayanak eğrisi olsun. $\alpha(t)$ eğrisinin M nin pseudo-ortogonal yörüngesi olması için gerek ve yeter şart $u_0(t) = 0$ ve $u_i(t) = 0, i = 1, \dots, r-1$ olmasıdır.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.1. Genelleştirilmiş Null Scroll'ların Eğrilikleri

M , $\mathbb{R}_1^n$ de $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. M nin dayanak eğrisi $\alpha(t)$ ve $W_r(t)$ doğrultman uzayının baz vektörleri $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{r-1}(t)\}$ olsun. M nin $\alpha(t)$ dayanak eğrisini $W_r(t)$ doğrultman uzaylarının pseudo-ortogonal yörüngesi olarak seçelim. Bu taktirde M , $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'u (2.1.1) den

$$\psi(t, u_0, u_1, \dots, u_{r-1}) = \alpha(t) + u_0 Y(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i Z_i(t), \quad (3.1.1)$$

şeklinde parametrelendirilir. $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$, $\chi(M)$ nin bir pseudo-ortonormal bazı olacak şekilde

$$X = \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

vektör alanını seçelim. (3.1.1) den

$$\begin{aligned} \psi_t &= \alpha'(t) + u_0 Y'(t) + \sum_{i=1}^{r-1} u_i Z_i'(t) \\ \psi_{u_0} &= Y(t) \\ \psi_{u_i} &= Z_i(t), \quad i = 1, \dots, r-1 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

dir.

$\bar{\nabla}$, $\mathbb{R}_1^n$ n-boyutlu Lorentz uzayının Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere (3.1.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{Z_i} Z_j &= 0 \\
\bar{\nabla}_Y Z_i &= 0, \quad i, j = 1, \dots, r-1, \\
\bar{\nabla}_{Z_i} Y &= 0
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

dir.

(1.3.1) de (3.1.3) eşitlikleri gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
h(Z_i, Z_j) &= 0 \\
i, j &= 1, \dots, r-1
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$$h(Z_i, Y) = 0$$

bulunur. Bu demektir ki $W_r(t)$ doğrultman uzayı total geodeziktir.

$\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ bir pseudo-ortonormal çatı olduğundan (3.1.3) eşitlikleri de kullanılırsa,

$$\langle \bar{\nabla}_{Z_i} X, Z_j \rangle = 0 \tag{3.1.5}$$

ve

$$\langle \bar{\nabla}_{Z_i} X, X \rangle = 0 \tag{3.1.6}$$

elde edilir. (3.1.5) ve (3.1.6) dan

$$\bar{\nabla}_{Z_i} X \perp Z_j \quad \text{ve} \quad \bar{\nabla}_{Z_i} X \perp X$$

olur, yani

$$\bar{\nabla}_{Z_i} X \in \chi(M)^\perp$$

dir. Böylece

$$\bar{\nabla}_{Z_i} X = \mu_i h(Z_i, X), \quad \mu_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq r-1 \tag{3.1.7}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\bar{\nabla}_Y X = \mu h(X, Y), \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (3.1.8)$$

bulunur. Burada $\mu = \mu_i = 1, 1 \leq i \leq r-1$, olarak kabul edeceğiz.

Teorem 3.1.1. M $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. $p \in M$ noktasının komşuluğunda, $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ pseudo-ortonormal bazını gözönüne alalım. $(Z_i)_p$ ve X_p vektörleri ile gerilen $T_p M$ nin 2-boyutlu P null düzleminin null kesit eğriliği;

$$K_X(P) = -\langle \bar{\nabla}_{Z_i} X, \bar{\nabla}_{Z_i} X \rangle \Big|_p, \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (3.1.9)$$

dir.

İspat. Tanım 1.3.21 den

$$K_X(P) = \frac{\langle R(Z_i, X)X, Z_i \rangle}{\langle Z_i, Z_i \rangle}$$

dir. $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ pseudo-ortonormal baz olduğundan,

$$K_X(P) = \langle R(Z_i, X)X, Z_i \rangle \quad (3.1.10)$$

olur. Burada

$$\langle R(Z_i, X)X, Z_i \rangle = \langle h(Z_i, Z_i), h(X, X) \rangle - \langle h(Z_i, X), h(Z_i, X) \rangle$$

olup, (3.1.4) eşitliği kullanılırsa,

$$\langle R(Z_i, X)X, Z_i \rangle = -\langle h(Z_i, X), h(Z_i, X) \rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.1.7) den

$$\langle R(Z_i, X)X, Z_i \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{Z_i} X, \bar{\nabla}_{Z_i} X \rangle$$

bulunur. Bu son eşitliği (3.1.10) da yerine yazarsak, $p \in M$ için

$$K_X(P) = -\langle \bar{\nabla}_{Z_i} X, \bar{\nabla}_{Z_i} X \rangle \Big|_p, \quad i = 1, \dots, r-1$$

olur. Bu da istenilendir.

$p \in M$ noktasında $\{X_p, Y_p\}$ ile gerilen 2-boyutlu σ Lorentz düzleminin kesit eğriligi

$$K_X(\sigma) = \frac{K(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{\langle X_p, X_p \rangle \langle Y_p, Y_p \rangle - \langle X_p, Y_p \rangle^2}$$

den, $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ nin pseudo-ortonormal baz olduğu da gözönüne alınırsa,

$$K_X(\sigma) = -K(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$$

olur. Burada

$$K(X_p, Y_p, X_p, Y_p) = \langle h(Y_p, Y_p), h(X_p, X_p) \rangle - \langle h(X_p, Y_p), h(X_p, Y_p) \rangle$$

olduğu ve $W_r(t)$ nin total geodezik olduğu gözönüne alınırsa,

$$K_X(\sigma) = \langle h(X_p, Y_p), h(X_p, Y_p) \rangle \quad (3.1.11)$$

olur. Böylece (3.1.8) den

$$K_X(\sigma) = \langle \bar{\nabla}_Y X, \bar{\nabla}_Y X \rangle \Big|_p \quad (3.1.12)$$



elde edilir.

$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r-1}\}$ sistemi $T_p M^\perp$ in ortonormal baz vektör alan sistemi olsun. Bu takdirde $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r-1}\}$ sistemi M genelleştirilmiş null scroll'unun her noktasında $T_p \mathbb{R}^n$ uzayının bir pseudo-ortonormal bazı olur. Dolayısıyla (1.3.2) den,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi_j &= a_{00}^j X + b_{00}^j Y + \sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^j Z_t + \sum_{q=1}^{n-r-1} e_{0q}^j \xi_q, \quad j = 1, \dots, n-r-1 \\ \bar{\nabla}_Y \xi_j &= a_{10}^j X + b_{10}^j Y + \sum_{t=1}^{r-1} c_{1t}^j Z_t + \sum_{q=1}^{n-r-1} e_{1q}^j \xi_q \\ \bar{\nabla}_{Z_i} \xi_j &= a_{1i}^j X + b_{1i}^j Y + \sum_{t=1}^{r-1} d_{it}^j Z_t + \sum_{q=1}^{n-r-1} f_{iq}^j \xi_q, \quad i = 1, \dots, r-1\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

yazabiliriz. $A_{\xi_j}(X), A_{\xi_j}(Y), A_{\xi_j}(Z_i) \in \chi(M)$, $i = 1, \dots, r-1, j = 1, \dots, n-r-1$, olduğu ve (1.3.2) eşitliği gözönüne alınırsa, A_{ξ_j} matrisi

$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} a_{00}^j & b_{00}^j & c_{01}^j & c_{02}^j & \dots & c_{0(r-1)}^j \\ a_{10}^j & b_{10}^j & c_{11}^j & c_{12}^j & \dots & c_{1(r-1)}^j \\ a_{11}^j & b_{11}^j & d_{11}^j & d_{12}^j & \dots & d_{1(r-1)}^j \\ a_{12}^j & b_{12}^j & d_{21}^j & d_{22}^j & \dots & d_{2(r-1)}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1(r-1)}^j & b_{1(r-1)}^j & d_{(r-1)1}^j & d_{(r-1)2}^j & \dots & d_{(r-1)(r-1)}^j \end{bmatrix}\tag{3.1.14}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.13) den

$$\langle \bar{\nabla}_Y \xi_j, Z_t \rangle = c_{1t}^j$$

ve

$$\langle \bar{\nabla}_Y \xi_j, Z_t \rangle = -\langle \bar{\nabla}_Y Z_t, \xi_j \rangle$$

olduğundan

$$\langle \bar{\nabla}_Y Z_t, \xi_j \rangle = -c_{it}^j; \quad j = 1, \dots, n-r-1, t = 1, \dots, r-1$$

bulunur. $W_r(t)$ total geodezik olduğundan

$$\bar{\nabla}_Y Z_t = 0$$

olup

$$c_{it}^j = 0, \quad j = 1, \dots, n-r-1, t = 1, \dots, r-1 \quad (3.1.15)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\langle \bar{\nabla}_Y Y, \xi_j \rangle = a_{i0}^j$$

ve

$$\bar{\nabla}_Y Y = 0 \quad (3.1.15')$$

olduğundan

$$a_{i0}^j = 0, \quad j = 1, \dots, n-r-1 \quad (3.1.16)$$

olur. (3.1.13) den

$$\langle \bar{\nabla}_{Z_i} Y, \xi_j \rangle = a_{li}^j$$

ve burada

$$\bar{\nabla}_{Z_i} Y = 0$$

olduğu gözönüne alınırsa,



$$a_{ji}^j = 0, \quad i = 1, \dots, r-1, j = 1, \dots, n-r-1, \quad (3.1.17)$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\langle \bar{\nabla}_{Z_t} Z_t, \xi_j \rangle = -d_{it}^j$$

olup, (3.1.3) den

$$d_{it}^j = 0, \quad i, t = 1, \dots, r-1, j = 1, \dots, n-r-1, \quad (3.1.18)$$

bulunur. Böylece (3.1.14) deki A_{ξ_j} matrisi

$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} a_{00}^j & b_{00}^j & c_{01}^j & c_{02}^j & \dots & c_{0(r-1)}^j \\ 0 & b_{10}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & b_{1(r-1)}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \quad j=1, \dots, n-r-1 \quad (3.1.19)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (3.1.13) den,

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \xi_j \rangle = a_{00}^j$$

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, \xi_j \rangle = b_{10}^j$$

dir. Dolayısıyla

$$a_{00}^j = b_{10}^j \quad (3.1.20)$$

elde edilir. Böylece A_{ξ_j} matrisi

$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} b_{10}^j & b_{00}^j & c_{01}^j & c_{02}^j & \dots & c_{0(r-1)}^j \\ 0 & b_{10}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1(r-1)}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(r+1) \times (r+1)} \quad j=1, \dots, n-r-1 \quad (3.1.21)$$

olur. Burada $r > 1$ için

$$\det A_{\xi_j} = 0 \quad (3.1.22)$$

dir.

Sonuç 3.1.1. $\mathbb{R}_1^n$ de $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll M olsun. $r > 1$ için M nin, her noktada ve her normal doğrultuda Lipschitz-Killing eğriliği sıfır olup, genelleştirilmiş null scroll açılabilir.

İspat. Tanım 1.3.8, Tanım 1.3.9 ve (3.1.22) den açıktır.

(1.3.1) ve (1.3.2) den

$$\langle \bar{\nabla}_{Z_i} X, \xi_j \rangle = \langle h(Z_i, X), \xi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n-r-1 \quad (3.1.23)$$

olur. Ayrıca

$$\langle h(Z_i, X), \xi_j \rangle = \langle X, A_{\xi_j}(Z_i) \rangle \quad (3.1.24)$$

elde ederiz. (3.1.13) den

$$\langle \bar{\nabla}_{Z_i} \xi_j, X \rangle = -b_{ji}^j$$

ya da

$$i = 1, \dots, r-1, j = 1, \dots, n-r-1$$

$$\langle \bar{\nabla}_{Z_i} X, \xi_j \rangle = b_{ii}^j$$

olur. Benzer şekilde

$$\langle \bar{\nabla}_Y \xi_j, X \rangle = -b_{i0}^j$$

ya da

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, \xi_j \rangle = b_{i0}^j \quad (3.1.25)$$

bulunur. (3.1.24) den

$$\langle h(Z_i, X), \xi_j \rangle = b_{ii}^j \quad (3.1.26)$$

elde edilir. Böylece

$$h(Z_i, X) = \sum_{j=1}^{n-r-1} b_{ii}^j \xi_j \quad (3.1.27)$$

ve

$$\bar{\nabla}_{Z_i} X = \sum_{j=1}^{n-r-1} b_{ii}^j \xi_j \quad (3.1.28)$$

olur. Benzer şekilde

$$h(X, Y) = \bar{\nabla}_Y X = \sum_{j=1}^{n-r-1} b_{i0}^j \xi_j \quad (3.1.29)$$

elde edilir. Burada (3.1.9) ve (3.1.12) de, sırasıyla, (3.1.27) ve (3.1.29) kullanılırsa,

$$K(Z_i, X) = - \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{ii}^j)^2$$

ve

$$i = 1, \dots, r-1 \quad (3.1.30)$$

$$K(X, Y) = - \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{i0}^j)^2$$



bulunur. (3.1.4) eşitlikleri göz önüne alınırsa, IR_1^n de M , $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'unun $i, j = 1, \dots, r$ değerleri için, her bir doğrultman uzayı ile eşlenen r -boyutlu alt manifoldu total geodeziktir. Bu taktirde $\{Z_i, Z_j\}$ ve $\{Y, Z_i\}$ doğrultusundaki Riemann eğriliği

$$K(Y, Z_i) = K(Z_i, Z_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, r-1$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 3.1.2. Bir $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'unun açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$K(Z_i, X) = K(X, Y) = 0$$

olmasıdır.

İspat. Tanım 1.3.9. dan açıktır.

Sonuç 3.1.3. Bir $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'unun total açılabilir olması için gerek ve yeter şart kesit eğriliğinin özdeş olarak sıfır olmasıdır.

İspat. Tanım 1.3.9, Tanım 1.3.20 ve Tanım 1.3.21 den aşıkardır.

Teorem 3.1.2. IR_1^n de $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll M ve M nin doğrultman uzayının bazı da $\{Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ olsun. M nin pseudo-ortonormal bazı da $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ olsun. M nin dayanak eğrisi doğrultman uzaylarının pseudo-ortogonal yörüngesi ise, X vektör alanı yönündeki ricci eğriliği doğrultman uzayının her bir vektör alanı doğrultusundaki ricci eğrilikleri toplamına eşittir.

İspat. M bir genelleştirilmiş null scroll olsun. $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ de M nin pseudo-ortonormal bazı olsun. $\{Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}, W_i(t)$ nin bazı olmak üzere M nin $\{Y, Z_i\}$, $i = 1, \dots, r-1$, vektör alanları doğrultusundaki Ricci eğriliği (1.3.16) dan,

$$\text{Ric}(Y, Y) = \sum_{i=1}^{r-1} K(Z_i, Y, Z_i, Y) + K(X, Y, X, Y) + K(Y, Y, Y, Y) \quad (3.1.31)$$

ve

$$\text{Ric}(Z_t, Z_t) = \sum_{i=1}^{r-1} K(Z_i, Z_t, Z_i, Z_t) + K(X, Z_t, X, Z_t) + K(Y, Z_t, Y, Z_t), \quad t = 1, \dots, r-1$$

olur. Burada;

$$\begin{aligned}
 K(Y, Y, Y, Y) &= 0 \\
 K(Z_i, Y, Z_i, Y) &= 0 \\
 K(X, Y, X, Y) &= -\langle h(X, Y), h(X, Y) \rangle \\
 K(Z_i, Z_t, Z_i, Z_t) &= 0 \\
 K(X, Z_t, X, Z_t) &= -\langle h(X, Z_t), h(X, Z_t) \rangle \\
 K(Y, Z_t, Y, Z_t) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulursa,

$$Ric(Y, Y) = -\langle h(X, Y), h(X, Y) \rangle \tag{3.1.33}$$

$$Ric(Z_t, Z_t) = -\langle h(X, Z_t), h(X, Z_t) \rangle$$

elde edilir. Burada (3.1.27) ve (3.1.29) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 Ric(Y, Y) &= - \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{10}^j)^2 \\
 Ric(Z_t, Z_t) &= - \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{1t}^j)^2, \quad t = 1, \dots, r-1
 \end{aligned}$$

olur. Şimdi M nin X vektör alanı doğrultusundaki Ricci eğriliğini hesaplayalım; (1.3.16) dan,

$$Ric(X, X) = \sum_{i=1}^{r-1} K(Z_i, X, Z_i, X) + K(Y, X, Y, X) + K(X, X, X, X) \tag{3.1.35}$$

$$Ric(X, X) = - \sum_{i=1}^{r-1} \langle h(X, Z_i), h(X, Z_i) \rangle - \langle h(X, Y), h(X, Y) \rangle$$

olur. Burada (3.1.27) ve (3.1.29) eşitlikleri kullanılırsa

$$\text{Ric}(X, X) = - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{ii}^j)^2 - \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{10}^j)^2 \quad (3.1.36)$$

elde edilir. $i=t$ alınır,

$$\text{Ric}(X, X) = - \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{it}^j)^2 - \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{10}^j)^2 \quad (3.1.37)$$

Bulunur. Burada (3.1.34) göz önüne alınır,

$$\text{Ric}(X, X) = \sum_{t=1}^{r-1} \text{Ric}(Z_t, Z_t) + \text{Ric}(Y, Y) \quad (3.1.38)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.4. M , $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. M nin pseudo-ortogonal yörüngesi dayanak eğrisi olarak alınır, M nin skalar eğriliği, X vektör alanı yönündeki ricci eğriliğinin iki katına eşittir.

İspat. Tanım 1.3.23 den

$$r = \text{Ric}(X, X) + \text{Ric}(Y, Y) + \sum_{t=1}^{r-1} \text{Ric}(Z_t, Z_t) \quad (3.1.39)$$

dir. (3.1.38) den

$$\sum_{t=1}^{r-1} \text{Ric}(Z_t, Z_t) = \text{Ric}(X, X) - \text{Ric}(Y, Y)$$

eşitliği (3.1.39) da yerine yazılırsa,

$$r = 2\text{Ric}(X, X) \quad (3.1.40)$$

elde edilir. Bu da istenilendir.

(3.1.40) eşitliğinde (3.1.37) kullanılırsa,

$$r = -2 \left\{ \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{1t}^j)^2 + \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{10}^j)^2 \right\} \quad (3.1.41)$$

elde edilir.

(3.1.13) ve (3.1.20) den

$$h(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-r-1} b_{10}^j \xi_j \quad (3.1.42)$$

yazılır. Ayrıca (3.1.21) den

$$\text{İz } A_{\xi_j} = -2 b_{10}^j \quad (3.1.43)$$

olur. Bu son iki eşitlikten,

$$h(X, Y) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-r-1} \text{İz } A_{\xi_j} \xi_j \quad (3.1.44)$$

elde edilir. Böylece Tanım 1.3.10 dan M nin ortalama eğriliği

$$H = -\frac{2}{r+1} h(X, Y) \quad (3.1.45)$$

olarak bulunur.

Burada $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll minimal ise $H = 0$ olacağından, (3.1.45) den

$$h(X, Y) = 0 \quad (3.1.46)$$



elde edilir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.1.3. M , $(r+1)$ -boyutlu bir genelleştirilmiş null scroll ve M nin doğrultman uzayının bazı $\{Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ olsun. Doğrultman uzaylarının pseudo-ortogonal yörüngesi de M nin dayanak eğrisi olsun. Genelleştirilmiş minimal null scroll'un total geodezik olması için gerek ve yetet şart X in bir asimptotik vektör alanı ve her bir Z_i , $i = 1, \dots, r-1$, vektör alanına eşlenik olmasıdır.

İspat. $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{r-1}\}$ $\chi(M)$ nin bir pseudo-ortonormal bazı olsun. Bu taktirde $U, V \in \chi(M)$ için

$$U = a_0 X + b_0 Y + \sum_{i=1}^{r-1} b_i Z_i$$

$$V = a_1 X + c_0 Y + \sum_{j=1}^{r-1} c_j Z_j$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} h(U, V) &= h(a_0 X + b_0 Y + \sum_{i=1}^{r-1} b_i Z_i, a_1 X + c_0 Y + \sum_{j=1}^{r-1} c_j Z_j) \\ &= a_0 a_1 h(X, X) + (a_0 c_0 + b_0 a_1) h(X, Y) + b_0 c_0 h(Y, Y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} (a_0 c_i + a_1 b_i) h(X, Z_i) + \sum_{i=1}^{r-1} (b_0 c_i + c_0 b_i) h(Y, Z_i) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{r-1} b_i c_j h(Z_i, Z_j) \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

olur. Buna göre,



($\Rightarrow$) Genelleştirilmiş minimal null scroll M , total geodezik olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $h(X, Y) = 0$ olacağından (3.1.4), (3.1.15') ve (3.1.46) eşitlikleri, (3.1.47) de gözönüne alınırsa,

$$h(X, X) = 0$$

ve

$$h(X, Z_i) = 0$$

elde edilir. Bu X in asimptotik bir vektör alanı ve Z_i ye ($i = 1, \dots, r-1$) eşlenik olması demektir.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki, X bir asimptotik vektör alanı ve her bir Z_i , $i = 1, \dots, r-1$, ye eşlenik olsun. O zaman (3.1.4), (3.1.15') ve (3.1.46) eşitlikleri, (3.1.47) de kullanılırsa,

$$h(X, Y) = 0$$

elde edilir ki, bu M nin total geodezik olması demektir. Bu da ispatı tamamlar.

$$H = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{n-r-1} i z A_{\xi_i} \xi_j \quad (3.1.48)$$

ortalama eğrilik vektör alanında (3.1.43) yerine yazılırsa,

$$H = -\frac{2}{r+1} \sum_{j=1}^{n-r-1} b_{i0}^j \xi_j \quad (3.1.49)$$

ve

$$\|H\|^2 = \frac{4}{(r+1)^2} \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{i0}^j)^2 \quad (3.1.50)$$



veya

$$\frac{(r+1)^2}{4} \|H\|^2 = \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{10}^j)^2 \quad (3.1.51)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4. M , $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. Bu taktirde M nin skalar normal eğriliği,

$$\begin{aligned} K_N = & \frac{(r+1)^2}{2} H^2 \sum_{i=1}^{n-r-1} \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^i)^2 - (r + \frac{1}{2} (r+1)^2 H^2) (\frac{(r+1)^2}{4} H^2) \\ & + 2 \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t=1}^{r-1} ((c_{0t}^i b_{1t}^j)^2 - c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0t}^j b_{1t}^i - c_{0t}^j b_{10}^i c_{0t}^i b_{10}^j - b_{1t}^i b_{10}^j b_{1t}^j b_{10}^i) \\ & + 2 \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t \neq k=1}^{r-1} (c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^j b_{1k}^i + c_{0t}^j b_{1t}^i c_{0k}^i b_{1k}^j) \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

dir. Burada H ve r , M nin, sırasıyla, ortalama eğrilik vektör alanı ve skalar eğriliğidir.

c_{0t}^j , b_{10}^j , b_{1t}^j , $t = 1, \dots, r-1$, $j = 1, \dots, n-r-1$, ler de A_{ξ_j} matrisinin elemanlarıdır.

İspat. $\chi(M)^\perp$ in ortonormal baz vektör alanı $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r-1}\}$ olsun. (3.1.21) den A_{ξ_i} matrisini $i, j = 1, \dots, n-r-1$ için

$$A_{\xi_i} = - \begin{bmatrix} b_{10}^i & b_{00}^i & c_{01}^i & c_{02}^i & \dots & c_{0(r-1)}^i \\ 0 & b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1(r-1)}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{r+1}^{r+1}$$

ve



$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} b_{10}^j & b_{00}^j & c_{01}^j & c_{02}^j & \dots & c_{0(r-1)}^j \\ 0 & b_{10}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1(r-1)}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alalım. Bu takdirde, $A_{\xi_i} A_{\xi_j}$ ve $A_{\xi_j} A_{\xi_i}$ matrisleri, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} b_{10}^i b_{10}^j & b_{10}^i b_{00}^j + b_{00}^i b_{10}^j + \sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j & b_{10}^i c_{01}^j & b_{10}^i c_{02}^j & \dots & b_{10}^i c_{0(r-1)}^j \\ 0 & b_{10}^i b_{10}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}^i b_{10}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12}^i b_{10}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1(r-1)}^i b_{10}^j & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} b_{10}^j b_{10}^i & b_{10}^j b_{00}^i + b_{00}^j b_{10}^i + \sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^j b_{1t}^i & b_{10}^j c_{01}^i & b_{10}^j c_{02}^i & \dots & b_{10}^j c_{0(r-1)}^i \\ 0 & b_{10}^j b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}^j b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12}^j b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1(r-1)}^j b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan $A_{\xi_i} A_{\xi_j} - A_{\xi_j} A_{\xi_i}$ matrisi



$$\begin{bmatrix} 0 & \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^i b_{1t}^j - c_{0t}^j b_{1t}^i) & c_{01}^j b_{10}^i - c_{01}^i b_{10}^j & c_{02}^j b_{10}^i - c_{02}^i b_{10}^j & \dots & c_{0(r-1)}^j b_{10}^i - c_{0(r-1)}^i b_{10}^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}^i b_{10}^j - b_{11}^j b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12}^i b_{10}^j - b_{12}^j b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & b_{1(r-1)}^i b_{10}^j - b_{1(r-1)}^j b_{10}^i & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Burada $i = j$ özel hali için M nin hiperyüzey olduğu açıktır. Tanım 1.3.11 den

$$\begin{aligned} M(A_{\xi_i} A_{\xi_j} - A_{\xi_j} A_{\xi_i}) &= \left[\sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j - \sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^j b_{1t}^i \right]^2 \\ &+ \sum_{t=1}^{r-1} [(c_{0t}^j b_{10}^i)^2 - 2c_{0t}^j b_{10}^i c_{0t}^i b_{10}^j + (c_{0t}^i b_{10}^j)^2] \\ &+ \sum_{t=1}^{r-1} [(b_{1t}^i b_{10}^j)^2 - 2b_{1t}^i b_{10}^j b_{1t}^j b_{10}^i + (b_{1t}^j b_{10}^i)^2] \end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$\left(\sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j \right)^2 = \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^i b_{1t}^j)^2 + \sum_{t \neq k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^i b_{1k}^j$$

ve

$$\left(\sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j \right) \left(\sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^j b_{1t}^i \right) = \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^j b_{1k}^i$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} M(A_{\xi_i} A_{\xi_j} - A_{\xi_j} A_{\xi_i}) &= \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^i b_{1t}^j)^2 + \sum_{t \neq k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^i b_{1k}^j - 2 \sum_{t,k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^j b_{1k}^i \\ &+ \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^j b_{10}^i)^2 + \sum_{t \neq k=1}^{r-1} c_{0t}^j b_{10}^i c_{0k}^j b_{10}^i + \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^i b_{10}^j)^2 \\ &- 2 \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^j b_{10}^i c_{0t}^i b_{10}^j + b_{1t}^i b_{10}^j b_{1t}^j b_{10}^i) + \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^i b_{10}^j)^2 \\ &+ \sum_{t=1}^{r-1} (b_{1t}^i b_{10}^j)^2 + \sum_{t=1}^{r-1} (b_{1t}^j b_{10}^i)^2 \end{aligned}$$



elde edilir. (1.3.11) , (3.1.41) ve (3.1.51) gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
K_N &= \frac{(r+1)^2}{2} \|H\|^2 \sum_{i=1}^{n-r-1} \sum_{t=1}^{r-1} (c_{0t}^i)^2 - (r+1)^2 \|H\|^2 \left(\frac{(r+1)^2}{4} \|H\|^2 \right) \\
&+ 2 \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t=1}^{r-1} ((c_{0t}^i b_{1t}^j)^2) + 2 \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t \neq k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^i b_{1k}^j \\
&- 2 \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t,k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^i b_{1k}^j - 2 \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t=1}^{r-1} c_{0t}^j b_{10}^i c_{0t}^i b_{10}^j + b_{1t}^i b_{10}^j b_{1t}^j b_{10}^i)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t,k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^i b_{1k}^j = \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t=k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0t}^i b_{1t}^j + \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t \neq k=1}^{r-1} c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^i b_{1k}^j$$

yazılabileceği gözönünde bulundurulursa (3.1.52) eşitliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.5. M, (r+1)-boyutlu genelleştirilmiş null scroll'u minimal ise

$$\begin{aligned}
K_N &= 2 \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t=1}^{r-1} [(c_{0t}^i b_{1t}^j)^2 - c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0t}^j b_{1t}^i - c_{0t}^j b_{10}^i c_{0t}^i b_{10}^j - b_{1t}^i b_{10}^j b_{1t}^j b_{10}^i] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j=1}^{n-r-1} \sum_{t \neq k=1}^{r-1} (c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^i b_{1k}^j + c_{0t}^i b_{1t}^j c_{0k}^j b_{1k}^i) \right\} \quad (3.1.53)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. M minimal ise $H = 0$ dir. Dolayısıyla (3.1.52) den ispat aşıkardır.

Sonuç 3.1.6. M minimal ve total geodezik ise $K_N = 0$ dir.

İspat. M total geodezik ise (3.1.42) ve (3.1.27) den $b_{10}^j = 0$ ve $b_{1t}^j = 0$, $j = 1, \dots, n-r-1$;

$t = 1, \dots, r-1$ dir. Dolayısıyla (3.1.52) den

$$K_N = 0$$

bulunur. Bu da istenilendir.



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4.1. $\mathbb{R}_1^n$ de (n-1)-Boyutlu Genelleştirilmiş Null Scroll'lar

Burada $\mathbb{R}_1^n$ de bir hiperyüzey olan (n-1)-boyutlu M genelleştirilmiş null scroll'unun **asli eğrilikleri** ile **skalar** ve **ortalama eğrilikleri** arasındaki ilişki ve **normal eğriliği** hesaplandı. M nin herhangi bir U_p doğrultusunun eğrilik çizgisi olması ile ilgili bir karakterizasyon verildi.

$\mathbb{R}_1^n$ de (n-1)-boyutlu genelleştirilmiş null scroll M ve M nin dayanak eğrisi de doğrultman uzaylarının pseudo-ortogonal yörüngesi olsun. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ bir null eğri olmak üzere M için bir parametrizasyon;

$$\psi(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-3}) = \alpha(t) + u_0 Y(t) + \sum_{i=1}^{n-3} u_i Z_i(t) \quad (4.1.1)$$

şeklinde verilir. Burada $\{Y(t), Z_1(t), \dots, Z_{n-3}(t)\}$ sistemi (n-1)-boyutlu genelleştirilmiş null scroll'unun doğrultman uzayının bazı ve dayanak eğrisinin teğet vektör alanı $X = \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ olmak üzere $\{X, Y, Z_1, \dots, Z_{n-3}\}$ sistemi M nin bir pseudo-ortonormal vektör alanı sistemidir. ψ regüler olduğundan $\{\psi_*, \psi_{u_0}, \psi_{u_1}, \dots, \psi_{u_{n-3}}\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

M nin $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olmak üzere (3.1.21) den A_{ξ_j} matrisi S şekil operatörü matrisine eşittir, yani

$$S = - \begin{bmatrix} b_{10} & b_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0(n-3)} \\ 0 & b_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1(n-3)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

dir.

$$P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_{n-1}) = 0$$

den S nin karakteristik denklemi;

$$\det \begin{bmatrix} -b_{10} - \lambda & -b_{00} & -c_{01} & -c_{02} & \dots & -c_{0(n-3)} \\ 0 & -b_{10} - \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_{11} & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_{12} & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -b_{1(n-3)} & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

olup buradan da

$$(b_{10} + \lambda)^2 (-1)^{n-3} \lambda^{n-3} = 0 \quad (4.1.3)$$

elde edilir. Teorem 1.3.1 den S nin (n-3)-tane karakteristik değeri sıfırdır. Dolayısıyla,

$$\lambda^{n-3} = 0$$

veya

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_{n-1} = 0 \quad (4.1.4)$$



olur. Bu takdirde (4.1.3) den

$$\lambda = -b_{10}$$

yani

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -b_{10} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. (4.1.5) den

$$\lambda_1 = \lambda_2 = b_{10} \Rightarrow -2\lambda_1 = 2\lambda_2 = -2 b_{10}$$

dir. (4.1.2) den

$$\text{İz } S = -2 b_{10} \quad (4.1.6)$$

olur. M , $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'u için

$$H = \frac{\text{İz } S}{n-1}$$

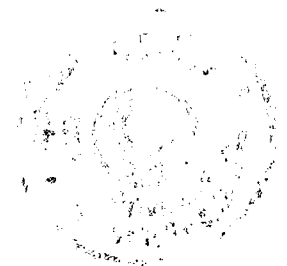
eşitliğinde (4.1.6) yerine yazılırsa,

$$H = -\frac{2}{n-1} b_{10} \quad (4.1.7)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{n-1}$$

olur. Eğer M minimal ise



$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

ve $\lambda_1 = \lambda_2$ olduğu da gözönüne alınırsa

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonucu yerebiliriz:

Sonuç 4.1.1. M , $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'u minimal ise M nin bütün asli eğrilikleri sıfırdır.

(3.1.41) de $j = 1$ alınırsa, $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll'un skalar eğriligi

$$r = -2 \sum_{i=1}^{n-3} (b_{1i})^2 - 2(b_{10})^2$$

şeklinde olur. (4.1.5) den

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (b_{10})^2$$

olduğundan

$$r = -2 \sum_{i=1}^{n-3} (b_{1i})^2 - 2\lambda_1^2$$

veya

$$r = -2 \sum_{i=1}^{n-3} (b_{1i})^2 - 2\lambda_2^2$$



şeklinde elde edilir. Burada $\lambda_1 (= \lambda_2)$ M nin sıfırdan farklı asli eğrilikleridir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.1.1. (n-1)-boyutlu genelleştirilmiş null scroll'un skalar eğriliği

$$r = -2 \left[\sum_{i=1}^{n-3} (b_{ii})^2 + \lambda^2 \right], \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$$

dir.

(4.1.2) de $n \geq 4$ için $\det S = 0$ dir. Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.1.2. (n-1)-boyutlu genelleştirilmiş null scroll M olsun. $n \geq 4$ ise M nin her noktasında Gauss eğriliği sıfırdır.

İspat. $n \geq 4$ için $\det S = 0$ olduğundan $G = \det S = 0$ olur. Bu da istenilendir.

Sonuç 4.1.3. M, (n-1)-boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. M nin normalı doğrultusundaki Lipschitz-Killing eğriliği ile Gauss eğriliği birbirine eşittir.

İspat. M nin normal demeti

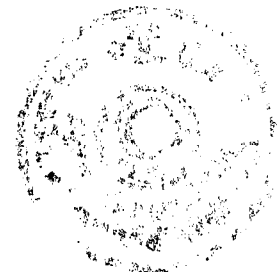
$$\chi^\perp(M) = \text{Sp}\{\xi\}$$

olduğundan $\forall p \in M$ için Tanım 1.3.8 ve Tanım 1.3.13 den

$$G(p) = G(p, \xi) = \det S$$

olur. Bu da istenilendir.

$V_p \in T_p(M)$ ve $V_p = (v, v_0, v_1, \dots, v_{n-3})$ olsun. (4.1.2) den



$$S(V_p) = - \begin{bmatrix} b_{10} & b_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0(n-3)} \\ 0 & b_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1(n-3)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-3} \end{bmatrix}$$

ve buradan da

$$S(V_p) = (-b_{10}v - b_{00}v_0 - \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i, -b_{10}v_0, -b_{11}v_0, \dots, -b_{1(n-3)}v_0) \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Böylece

$$\langle S(V_p), V_p \rangle = (b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i)v - (\sum_{i=0}^{n-3} b_{1i}v_i)v_0$$

olur. Burada (4.1.7) gözönüne alınırsa,

$$\langle S(V_p), V_p \rangle = \left(-\frac{(n-1)}{2}Hv + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i\right)v - \left(\sum_{i=0}^{n-3} b_{1i}v_i\right)v_0$$

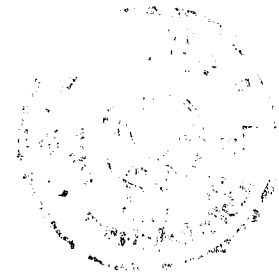
bulunur. Tanım 1.3.16 dan

$$k_n(V_p) = \left(-\frac{(n-1)}{2}Hv + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i\right)v - \left(\sum_{i=0}^{n-3} b_{1i}v_i\right)v_0$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.4. M , $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. M de birinci ve ikinci bileşeni sıfır olan tüm doğrultular asimptotik doğrultulardır.

İspat. Tanım 1.3.16 ve Tanım 1.4.15 den açıktır.



Teorem 4.1.2. M , $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. M nin herhangi bir $V_p = (v, v_0, v_1, \dots, v_{n-3})$ doğrultusunun eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart

$$-\frac{b_{1j}v_0}{v_j} + \frac{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i}{v} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-3$$

olmasıdır, burada $b_{00}, b_{1j}, c_{0i}, i = 1, \dots, n-3; j = 0, 1, \dots, n-3$, ler S matrisinin elemanlarıdır.

İspat.

($\Rightarrow$) Kabul edelim ki, V_p bir eğrilik çizgisi olsun. Bu takdirde Tanım 1.3.14 ve (4.1.8) den

$$(-b_{10}v - b_{00}v_0 - \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i, -b_{10}v_0, -b_{11}v_0, \dots, -b_{1(n-3)}v_0) = \lambda(v, v_0, v_1, \dots, v_{n-3})$$

yazabiliriz. Buradan

$$-b_{10}v - b_{00}v_0 - \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i = \lambda v \quad (4.1.9)$$

$$\lambda = -\frac{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i}{v}$$

ve

$$\lambda = -\frac{b_{1j}v_0}{v_j} \quad j = 0, 1, \dots, n-3$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$-\frac{b_{1j}v_0}{v_j} + \frac{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i}{v} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-3$$

bulunur ki, bu da istenendir.

($\Leftarrow$:) Kabul edelim ki,

$$-\frac{b_{1j}v_0}{v_j} + \frac{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i}{v} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-3$$

olsun. Bu takdirde,

$$v_j = \frac{b_{1j}v_0v}{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n-3 \quad (4.1.10)$$

bulunur. Böylece

$$V_p = \left(v, \frac{b_{10}v_0v}{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i}, \frac{b_{11}v_0v}{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i}, \dots, \frac{b_{1(n-3)}v_0v}{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i}v_i} \right)$$

olur. Buradan da



$$(b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i} v_i) V_p = v(b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i} v_i, b_{10}v_0, b_{11}v_0, \dots, b_{1(n-3)}v_0)$$

elde edilir. Böylece (4.1.8) gözönüne alınırsa,

$$S(V_p) = - \frac{b_{10}v + b_{00}v_0 + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i} v_i}{v} V_p$$

bulunur. Bu V_p nin bir eğrilik çizgisi olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.5. M , $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. M nin α dayanak eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart

$$-b_{1j} \frac{d\alpha_0}{dt} \frac{d\alpha_j}{dt} + \frac{d\alpha_j}{dt} (b_{10} \frac{d\alpha}{dt} + b_{00} \frac{d\alpha_0}{dt} + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i} \frac{d\alpha_i}{dt}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-3, \quad (4.1.11)$$

denklem sisteminin sağlanmasıdır.

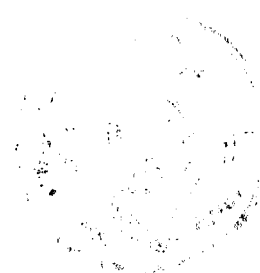
İspat. Teorem 4.1.2 de $v = \frac{d\alpha}{dt}$, $v_k = \frac{d\alpha_k}{dt}$, $k = 0, 1, \dots, n-3$, alınır (4.1.11) elde edilir.

Teorem 4.1.8. M , $(n-1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun. M nin herhangi bir β eğrilik çizgisinin diferensiyel denklem sistemi

$$-b_{1j} \frac{d\beta_0}{dt} \frac{d\beta_j}{dt} + \frac{d\beta_j}{dt} (b_{10} \frac{d\beta}{dt} + b_{00} \frac{d\beta_0}{dt} + \sum_{i=1}^{n-3} c_{0i} \frac{d\beta_i}{dt}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-3, \quad (4.1.12)$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.2 de $v = \frac{d\beta}{dt}$, $v_k = \frac{d\beta_k}{dt}$, $k = 0, 1, \dots, n-3$, alınır (4.1.12) elde edilir.



4.2. Genelleştirilmiş Null Scroll'lar İçin j. Ortalama Eğrilik ve Euler Teoremi

$\mathbb{R}_1^n$ de $(r+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş null scroll M olmak üzere (3.1.21) deki A_{ξ_j} lineer dönüşümünün karakteristik denklemi $i = 1, \dots, r+1$ ve $j = 1, \dots, n-r-1$ için

$$\det \begin{bmatrix} -b_{10}^j - \lambda_i^j & -b_{00}^j & -c_{01}^j & -c_{02}^j & \dots & -c_{0(r-1)}^j \\ 0 & -b_{10}^j - \lambda_i^j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_{11}^j & -\lambda_i^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_{12}^j & 0 & -\lambda_i^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -b_{1(r-1)}^j & 0 & 0 & \dots & -\lambda_i^j \end{bmatrix} = 0$$

den

$$(b_{10}^j + \lambda_i^j)^2 (\lambda_i^j)^{r-1} = 0 \quad (4.2.1)$$

bulunur. Böylece

$$(b_{10}^j + \lambda_i^j)^2 = 0 \text{ veya } (\lambda_i^j)^{r-1} = 0$$

dan

$$\lambda_1^j = -b_{10}^j, \quad \lambda_2^j = -b_{10}^j \quad (4.2.2)$$

ve

$$\lambda_3^j = \lambda_4^j = \dots = \lambda_r^j = \lambda_{r+1}^j = 0 \quad (4.2.3)$$



elde edilir. Böylece Tanım 1.3.24 den M nin birinci ortalama eğriliği

$$\binom{r+1}{1} H_1^j = \lambda_1^j$$

ve burada (4.2.2) göz önüne alınırsa,

$$H_1^j = -\frac{1}{r+1} b_{10}^j \quad (4.2.4)$$

elde edilir.

M nin ikinci ortalama eğriliği

$$\binom{r+1}{2} H_2^j = \lambda_1^j \lambda_2^j$$

den

$$\frac{r(r+1)}{2} H_2^j = (b_{10}^j)^2 \quad (4.2.5)$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.2.1) denklemini yeniden düzenlersek,

$$(\lambda_i^j)^{r+1} + 2b_{10}^j (\lambda_i^j)^r + (b_{10}^j)^2 (\lambda_i^j)^{r-1} = 0 \quad (4.2.6)$$

olur. (4.2.6) da (4.2.4) ve (4.2.5) kullanılırsa,

$$(\lambda_i^j)^{r+1} - 2(r+1)H_1^j (\lambda_i^j)^r + \frac{r(r+1)}{2} H_2^j (\lambda_i^j)^{r-1} = 0 \quad (4.2.7)$$

olur. (4.2.4) den



$$r = -2 \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{1t}^j)^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-r-1} (r+1)(H_1^j)^2 \quad (4.2.11)$$

veya

$$r = -2 \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{n-r-1} (b_{1t}^j)^2 - \sum_{j=1}^{n-r-1} r(r+1)(H_2^j) \quad (4.2.12)$$

dir.

İspat. (3.1.41) de (4.2.4) ve (4.2.5) kullanılırsa (4.2.11) ve (4.2.12) elde edilir.

Teorem 4.2.1.(Euler Teoremi) M , $(r+1)$ - boyutlu genelleştirilmiş null scroll olsun.

$U_p \in T_p M$ tanjant vektörünü gözönüne alalım. $\lambda_1^j (= \lambda_2^j)$ asli eğriliğine karşılık gelen vektör

$U_1^j (= U_2^j)$ olsun. U_p ile $U_1^j (= U_2^j)$ asli vektörü arasındaki açı $\theta_1^j (= \theta_2^j)$ ise

$$k_n^j(U_p) = -2\lambda_1^j \operatorname{ch}^2 \theta_1^j = -2\lambda_2^j \operatorname{ch}^2 \theta_2^j$$

dir.

İspat.

$$U_p = \operatorname{ch}^2 \theta_1^j X + \operatorname{ch}^2 \theta_2^j Y + \sum_{i=1}^{r-1} \operatorname{ch} \phi_i^j Z_i, \quad \|U_p\| = 1$$

Birim vektörünü alalım. U_p doğrultusundaki normal eğrilik

$$k_n^j(U_p) = \langle A_{\xi_j}(U_p), U_p \rangle$$

olup

$$A_{\xi_j}(X) = \lambda_1^j X$$

$$A_{\xi_j}(Y) = \lambda_2^j Y = \lambda_1^j Y$$

$$A_{\xi_j}(Z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, r-1$$



eşitlikleri ve A_{ξ_j} nin lineer olduğu gözönüne alınır

$$k_n^j(U_p) = -\lambda_1^j \operatorname{ch}^2 \theta_1^j \operatorname{ch}^2 \theta_2^j - \lambda_2^j \operatorname{ch}^2 \theta_1^j \operatorname{ch}^2 \theta_2^j$$

olur. Burada $\lambda_1^j = \lambda_2^j$ ve $\theta_1^j = \theta_2^j$ olduğu gözönüne alınır,

$$k_n^j(U_p) = -2\lambda_1^j \operatorname{ch}^2 \theta_1^j = -2\lambda_2^j \operatorname{ch}^2 \theta_2^j \quad (4.2.13)$$

elde edilir. Bu da istenilendir.

(4.2.13) de (4.2.9) ve (4.2.10) eşitlikleri kullanılırsa,

$$k_n^j(U_p) = -2(r+1)H_1^j \operatorname{ch}^2 \theta_1^j$$

veya

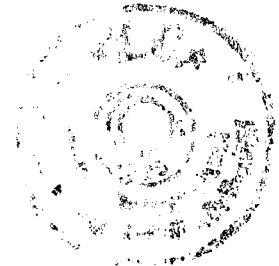
$$k_n^j(U_p) = \mp \sqrt{\frac{r(r+1)H_2^j}{2}} \operatorname{ch}^2 \theta_1^j$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.3. Minimal genelleştirilmiş null scroll'un normal eğriliği sıfırdır.

4.3. IR_1^n de 2-Boyutlu Null Scroll İçin Massey Teoremi

IR_1^n de bir null eğri α olsun. IR_1^n de 2-boyutlu null scroll'un dayanak eğrisini, doğrultman uzayın bir pseudo-ortogonal yörüngesi olarak alalım. Bu taktirde M null scroll'unu Y null vektör alanı olmak üzere (2.1.1) den



$$\psi(t, u) = \alpha(t) + uY(t) \quad (4.3.1)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Tanım 4.3.1. $\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu bir null scroll M olsun. M nin ikinci temel formu h olsun. Eğer $\forall W \in \chi(M)$ için $h(W, W) = 0$ ise W ya M üzerinde bir **asimptotik vektör alanı** denir.

Teorem 4.3.1. $\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu bir null scroll M olsun. Bu taktirde M nin doğrultmanları M nin asimptotikleri ve null geodezikleridir.

İspat. $\mathbb{R}_1^n$ nin doğrultmanları $\mathbb{R}_1^n$ de null geodezikler olduğundan

$$\bar{\nabla}_Y Y = 0$$

dır. Bu taktirde (1.3.1) den

$$\nabla_Y Y = -h(Y, Y)$$

elde edilir. Buradan $\nabla_Y Y \in \chi(M)$ ve $h(Y, Y) \in \chi^\perp(M)$ olduğundan $\nabla_Y Y = 0$ ve $h(Y, Y) = 0$ olur. Dolayısıyla Tanım 1.4.14 ve Tanım 4.3.1 den M nin doğrultmanları asimptotik ve null geodezik vektör alanlarıdır.

Şimdi kabul edelim ki, $\{X, Y\}$, $\chi(M)$ nin bir bazı ve $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}\}$, $\chi^\perp(M)$ nin bir space-like ortonormal bazı olsun. Bu taktirde

$$\bar{\nabla}_Y \xi_j = a_{00}^j X + a_{01}^j Y + \sum_{i=1}^{n-2} b_{1i}^j \xi_i, \quad j = 1, \dots, n-2 \quad (4.3.2)$$

$$\bar{\nabla}_X \xi_j = a_{10}^j X + a_{11}^j Y + \sum_{i=1}^{n-2} b_{2i}^j \xi_i$$



yazabiliriz. (4.3.2) eşitliklerinden

$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} a_{00}^j & a_{01}^j \\ a_{10}^j & a_{11}^j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n-2 \quad (4.3.3)$$

olur. Burada

$$\bar{\nabla}_Y \xi_j \perp \xi_j \quad \text{ve} \quad \bar{\nabla}_X \xi_j \perp \xi_j$$

olduğundan (4.3.2) den

$$b_{1i}^j = b_{2i}^j = 0, \quad j = 1, \dots, n-2$$

elde ederiz. Ayrıca (4.3.2) eşitliklerinden

$$\langle \bar{\nabla}_Y \xi_j, Y \rangle = -a_{00}^j$$

ve

$$\langle \bar{\nabla}_Y \xi_j, Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_Y Y, \xi_j \rangle$$

olduğundan

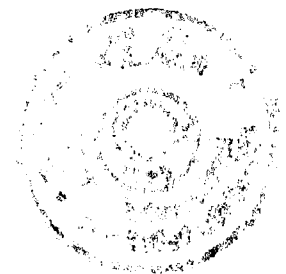
$$\langle \bar{\nabla}_Y Y, \xi_j \rangle = a_{00}^j$$

bulunur. Y, M nin null geodeziği olduğundan

$$a_{00}^j = 0, \quad j = 1, \dots, n-2 \quad (4.3.4)$$

elde ederiz. Ayrıca Gauss denkleminde

$$a_{10}^j = a_{01}^j \quad (4.3.5)$$



olur.

$$a_{01}^j = \langle \bar{\nabla}_Y X, \xi_j \rangle \quad (4.3.6)$$

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, Y \rangle = -\langle X, \bar{\nabla}_Y Y \rangle = 0 \quad (4.3.7)$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, X \rangle = 0 \quad (4.3.8)$$

dir. (4.3.7) ve (4.3.8) den

$$\bar{\nabla}_Y X \in \chi^\perp(M) \text{ veya } \bar{\nabla}_Y X = h(X, Y)$$

olduğu açıktır. (4.3.6) dan

$$\bar{\nabla}_Y X = h(Y, X) = \sum_{j=1}^{n-2} \langle \bar{\nabla}_Y X, \xi_j \rangle \xi_j = \sum_{j=1}^{n-2} a_{01}^j \xi_j \quad (4.3.9)$$

elde ederiz.

$$\langle h(X, Y), \xi_j \rangle = \langle Y, A_{\xi_j}(X) \rangle$$

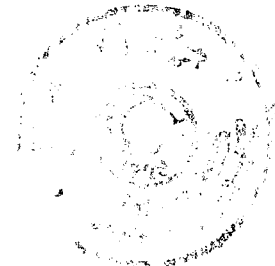
eşitliği ve (4.3.2) eşitlikleri gözönüne alınırsa;

$$-a_{11}^j = \langle \bar{\nabla}_X \xi_j, X \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X X, \xi_j \rangle = -\langle h(X, X), \xi_j \rangle = -\langle A_{\xi_j}(X), X \rangle \quad (4.3.10)$$

ve

$$\text{İz } A_{\xi_j} = -a_{11}^j = -\langle h(X, X), \xi_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n-2 \quad (4.3.11)$$

bulunur.



Teorem 4.3.2. M , $\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu null scroll olsun. $\{X, Y\}$ M nin pseudo-ortonormal bazı olsun. Bu takdirde $\bar{\nabla}$, $\mathbb{R}_1^n$ de Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere M nin Gauss eğriliği

$$G = \langle \bar{\nabla}_Y X, \bar{\nabla}_Y X \rangle$$

dir.

İspat. Teorem 3.1.1 in ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 4.3.2. ve (4.3.9) eşitliği kullanılırsa;

$$G = \sum_{i=1}^{n-2} (a_{01}^i)^2 \quad (4.3.12)$$

elde ederiz. Ayrıca

$$H = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\text{Iz} A_{\xi_j}}{2} \xi_j$$

eşitliğinde (4.3.11) kullanılırsa

$$H = - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\langle h(X, X), \xi_j \rangle}{2} \xi_j \quad (4.3.13)$$

bulunur.

Tanım 4.3.2. M , $\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu null scroll olsun. Eğer M nin teğet düzlemleri M nin anadoğruları boyunca sabit ise M ye **açılabilir** denir (Turgut, 1995).

Tanım 4.3.3. M , $\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu null scroll olsun. M nin ikinci temel formu h olsun.

Eğer $\forall Z, W \in \chi(M)$ için

$$h(Z, W) = 0$$

ise M ye **total geodeziktir** denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 4.3.3. $\mathbb{R}_1^n$ de bir 2-boyutlu null scroll M olsun. M nin açılabilir ve minimal olması için gerek ve yeter şart total geodezik olmasıdır.

İspat. M açılabilir ve minimal olsun. $Z, W \in \chi(M)$ için

$$Z = aX + bY$$

$$W = cX + dY$$

yazabiliriz. Buradan,

$$h(Z, W) = ac h(X, X) + (ad + bc) h(X, Y) + bd h(Y, Y) \quad (4.3.14)$$

olur. Teorem 4.3.1 ve (4. 3.13) den M minimal ise,

$$h(Y, Y) = 0 \text{ ve } h(X, X) = 0$$

elde ederiz. Ayrıca M açılabilir olduğundan Teorem 4.3.2 den

$$\bar{\nabla}_Y X = 0$$

ve burada Gauss denklemi gözönüne alınırsa ,

$$\nabla_Y X = -h(Y, X)$$

olur. $\nabla_Y X \in \chi(M)$ ve $h(Y, X) \in \chi^\perp(M)$ olduğundan

$$h(Y, X) = 0$$



elde edilir ki, bu $\forall Z, W \in \chi(M)$ için

$$h(Z, W) = 0$$

demektir. Bu ise Tanım 4.3.3 den M nin total geodezik olduğunu gösterir.

Tersine, $\forall Z, W \in \chi(M)$ için $h(Z, W) = 0$ olsun. Bu takdirde

$$h(X, X) = 0, \quad h(Y, Y) = 0, \quad h(Y, X) = h(X, Y) = 0$$

dir. Teorem 4.3.1 den ve

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, Y \rangle = -\langle X, \bar{\nabla}_Y Y \rangle$$

ve

$$\bar{\nabla}_Y Y = 0$$

olduğundan

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, Y \rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \langle \bar{\nabla}_Y X, X \rangle = 0$$

bulunur. Bu demektir ki, $\bar{\nabla}_Y X$ bir normal vektör alanıdır ve

$$\bar{\nabla}_Y X = h(Y, X)$$

dir. $h(Y, X) = 0$ olduğundan $\bar{\nabla}_Y X = 0$ olur ki, bu M nin açılabilir olması demektir.

$h(X, X) = 0$ olduğundan $H = 0$ bulunur. Bu ise M nin minimal olması demektir. Bu da ispatı tamamlar.



$\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu bir null scroll M olsun. $\{X, Y\}$, $\chi(M)$ nin bir pseudo-ortonormal bazı ve $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}\}$ de $\chi^\perp(M)$ nin space-like ortonormal bazı olsun. Bu takdirde $\{X, Y, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}\}$, $\forall p \in \mathbb{R}_1^n$ noktasında $\mathbb{R}_1^n$ in bir pseudo-ortonormal bazı olur.

$\{X, Y, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}\}$ pseudo-ortonormal bazının kovaryant türev denklemleri (1.4.5) den

$$\begin{bmatrix} \bar{\nabla}_X X \\ \bar{\nabla}_X Y \\ \bar{\nabla}_X \xi_1 \\ \bar{\nabla}_X \xi_2 \\ \vdots \\ \bar{\nabla}_X \xi_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_{22} & -c_{23} & -c_{24} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & c_{35} & 0 & \dots & 0 \\ c_{41} & 0 & -c_{43} & 0 & c_{45} & c_{46} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -c_{53} & -c_{54} & 0 & c_{56} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{64} & 0 & -c_{65} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_{n-2} \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

şeklindedir.

Şimdi E^3 de regle yüzeyler için iyi bilinen Massey Teoremini $\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu null scroll'lar için verelim:

Teorem 4.3.4.(Massey Teoremi) M , $\mathbb{R}_1^n$ de 2-boyutlu bir null scroll olsun. $\{X, Y\}$, $\chi(M)$ nin bir pseudo-ortonormal bazı olsun. M nin doğrultmanlarının bir pseudo-ortogonal yörüngesi $\alpha(s)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler denktir:

i) M açılabilirdir,

ii) Lipschitz-Killing eğriliği

$$G(p, \xi_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

dir.

iii) Gauss eğriliği

$$G = 0$$

dir.

iv) (4.3.15) denkleminde $c_{31} = c_{41} = 0$ dir.

v) $A_{\xi_j}(X) = 0$ dir

vi) $\bar{\nabla}_X Y \in \chi(M)$ dir.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii): M açılabilir olsun. Bu taktirde (4.3.4) ve (4.3.5) den $a_{00}^j = 0$ ve $a_{10}^j = a_{01}^j$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{01}^j \\ a_{01}^j & a_{11}^j \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Dolayısıyla $1 \leq j \leq n-2$ için p noktasında ξ_j doğrultusunda M nin Lipschitz-Killing eğriliği

$$G(p, \xi_j) = \det A_{\xi_j} = -(a_{01}^j(p))^2, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

dir. (4.3.9) dan

$$\bar{\nabla}_Y X = \sum_{i=1}^{n-2} (a_{01}^i) \xi_i$$

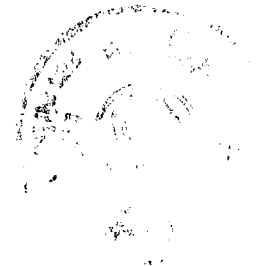
olur. M açılabilir olduğundan

$$\bar{\nabla}_Y X = 0$$

dir. Böylece

$$G(p, \xi_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

elde ederiz.



(ii $\Rightarrow$ iii): $G(p, \xi_j) = 0, 1 \leq j \leq n-2$ olsun.

$$G(p) = \sum_{i=1}^{n-2} G(p, \xi_j), \forall p \in M$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $G = 0, \forall p \in M$ bulunur.

(iii $\Rightarrow$ iv): $G = 0$ ise (4.3.12) den

$$a_{01}^j = 0$$

olur. Bu demektir ki, $\bar{\nabla}_X \xi_j$ nin X doğrultusunda bileşeni yoktur. Dolayısıyla (4.3.15)

$$c_{31} = c_{41} = 0$$

elde edilir.

(iv $\Rightarrow$ v): $c_{31} = c_{41} = 0$ olsun. Bu taktirde $\bar{\nabla}_X \xi_j$ nin X doğrultusunda bileşeni yoktur.

Böylece (4.3.2) den $a_{01}^j = 0$ dir.

$$\langle \bar{\nabla}_X \xi_j, X \rangle = -a_{11}^j = -\langle \xi_j, \bar{\nabla}_X X \rangle$$

$$\langle \bar{\nabla}_Y \xi_j, Y \rangle = -a_{00}^j = -\langle \xi_j, \bar{\nabla}_Y Y \rangle = 0$$

olduğundan

$$A_{\xi_j} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^j \end{bmatrix}$$

olur. Bu demektir ki,



$$A_{\xi_j}(X) = 0, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

dir.

(v $\Rightarrow$ vi): $A_{\xi_j}(X) = 0$ olsun. Bu taktirde Weingarten denkleminde

$$a_{00}^j = 0, \quad a_{01}^j = 0, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

dir. Ayrıca

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \xi_j \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_X \xi_j \rangle = -a_{01}^j$$

olup $a_{01}^j = 0$ olduğundan

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \xi_j \rangle = 0$$

elde edilir. Bu demektir ki, $\bar{\nabla}_X Y \in \chi(M)$ dir.

(vi $\Rightarrow$ i): $\bar{\nabla}_X Y \in \chi(M)$ olsun. Bu taktirde

$$\langle \bar{\nabla}_X Y, \xi_j \rangle = -a_{01}^j = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, X \rangle = 0$$

ve

$$\langle \bar{\nabla}_Y X, Y \rangle = 0$$

olur. Böylece bu son iki eşitlikten $\bar{\nabla}_Y X \in \chi(M)$ bulunur. (4.3.9) dan ve $a_{01}^j = 0$



olduğundan,

$$\bar{\nabla}_Y X = 0$$

bulunur. Bu demektir ki, M nin teğet düzlemleri M nin anadoğruları boyunca sabittir, yani M açılabilir.

Sonuç 4.3.1. M , $\mathbb{R}_1^n$ de Gauss eğriliği sıfır olan bir 2-boyutlu null scroll olsun. Eğer M minimal ise $c_{13} = c_{31} = c_{41} = 0$ dir.

İspat. M minimal olsun. Bu taktirde (4.3.13) den

$$h(X, X) = 0$$

olur. Böylece Gauss denkleminde

$$\bar{\nabla}_X X = \nabla_X X$$

bulunur. Bu demektir ki, $\bar{\nabla}_X X$ nin $\chi^\perp(M)$ de bileşeni yoktur. Böylece (4.3.15) den $c_{13} = 0$ bulunur. Diğer taraftan $G = 0$ olduğundan Teorem 4.3.4 gözönüne alınırsa $c_{31} = c_{41} = 0$ olur. Böylece $c_{13} = c_{31} = c_{41} = 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.



KAYNAKLAR

- AIYAMA, R.,(1991). **On Complete Space-like Surfaces With Mean Curvature in a Lorentzian 3-Space Form**,Tsukuba J. Math. Vol.15, No.1, 235-247.
- ALEDO, J. A., and ALIAS L.J.,(2000). **On the Curvature of Complete Spacelike Hypersurfaces in De Sitter Space**, Geometriae Dedicata 80, 51-58.
- ALIAS, L.J., FERRANDEZ, A., and LUCAS, P., (1998). **On The Gauss Map of B-Scrolls**, Tsukuba J. Math., Vol.22, No.2, 371-377.
- ALIAS, L.J., FERRANDEZ, A., and LUCAS, P., (1995). **Hypersurfaces in the Non-Flat Lorentzian Space Forms with a Characteristic Eigenvector Field**, Journal of Geometry, Vol.52, 10-24.
- ALTIN, A.,(1994). **Doktora Tezi**, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- BEEM,J.K., and EHRLICH,P.E., (1981). **Global Lorentzian Geometry**, Marcel Dekker Inc. New York.
- BEKTAŞ, M., (1998). **Doktora Tezi**, F.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü.
- BEKTAŞ, M., and ERGÜT, M., (1998). **Curvatures of Submanifolds in Lorentzian Space**, Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yılı Matematik Sempozyumu, 20-22 Mayıs.
- CHEN, B.Y., and ISHIKAWA, S., (1998). **Biharmonic Pseudo-Riemannian Submanifolds in Pseudo-Euclidean Spaces**, Kyushu journal of Mathematic, Vol.52, No.1.
- CHEN, B.Y.,(1973). **Geometry of Submanifold**, Marcell Dekker Inc. New York.
- CHOI, S. M., KI, U.K., and SCH, Y. J., (1998). **On the Gauss Map of Null Scrolls**, Tsukuba J. Math., Vol.22, No.1, 273-279.
- CHORNG-SHI HOUGH, (1972). **Surfaces with Maximal Lipschitz-Killing Curvature the Direction of Mean Curvature Vector**, Proceedings of American Math. Soc. Vol.35. No.2.
- DUGGAL, K. L., and BEJANCU, A.,(1996). **Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Its Applications**, Kluwer, Dortrecht.



EKİCİ, C., and GÖRGÜLÜ, A., (2000). **On The Curvatures of (k+1)-dimensional Semi-Ruled Surface in E_v^{n+1}** , Math.&Comp. Applications, Vol.5. No.3pp.139-155.

EKMEKÇİ, N.,(1991). **Doktora Tezi**, A. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.

ERGİN, A. A.,(1990). **Doktora Tezi**, A. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.

ERGÜT, M.,(1983). **Doktora Tezi**, F.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

ERGÜT, M.,(1989). **The Drall and the Scalar Normal Curvature of (k+1)-Dimensional Generalized Ruled Surfaces**, Commun. Fac. Sci. Ank. Series A1, 38, 115-125.

ERGÜT, M., AYDIN, A. P., and Bildik, N., (1988). **The Geometry of The Canonical Relative Systems and One Parameter Motions in 2-Dimensional Lorentzian Space**, The Journal of Fırat University, (1), 113-122.

FERRANDEZ, A., and LUCAS,P.,(1992). **Null 2-type Hypersurfaces in a Lorentzian Space**, Canad. Math. Bull. Vol(35)3, 354-360.

FRANK, H., and GIERING, O.,(1976). **Verallgemeinerte Regelflachen**, Mathematische Zeitschrift, 150, 261-271.

GRAVES, L.K. **Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces**, Trans. A.M.S. 252, pp. 367-392.

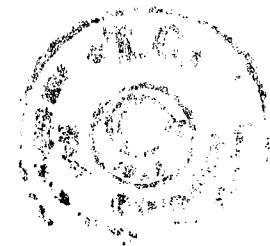
HACISALİHOĞLU, H.H.,(1983). **Diferensiyel Geometri**, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No.2.

JUNG, S.D., and PAK, J.,(1996). **Classification of Cylindrical Ruled surfaces Satisfying $\Delta H = AH$ in a 3-Dimensional Minkowski Space**, Bull. Korean Math. Soc. Vol. 33, No.1, 97-106.

JUZA, M. (1962). **Ligne de Striction Sur une Gneralisation A Plusierurs Dimensions d'une surface reglee**, Czechosl. Math. J. 12(87), 243-250.

KELEŞ, S., and KURUOĞLU, N.,(1984). **Properties of 2-Dimensional Ruled Surfaces In The Euclidean n-Space E^n and Massey's Theorem**, Communications, Faculty Of Sciences University Of Ankara, 151-158.

MAGID, M. A.,(1985). **Lorentzian Isoparametric Hypersurfaces**, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 118, No.1.



MARTIN, D.,(1991). **Manifolds Theory**, Ellis Horwood Lmt.

NOMIZU, K., (1966). **Fundamental of Linear Algebra**, McGraw-Hill Book Com.

O'NEILL, B., (1983). **Semi-Riemannian Geometry**, Academic Press, New York.

SABUNCUOĞLU, A.,(1982). **Doçentlik Tezi**, A.Ü.F.F. Matematik Bölümü.

THAS, C.,(1978). **Minimal Monosystems**, The Yokohama Math. Journ. Vol.XXVI, No.2, 157-167.

TOSUN, M., (1997). **On the (k-m+1)-dimensional Time-like Center Ruled Surface in the Minkowski Space IR_1^n** , SAÜ, Fen-Bilimleri Enstitüsü Dergisi 1. 69-74.

TURGUT, A., and HACISALİHOĞLU, H.H.,(1997). **Timelike Ruled Surfaces in the Minkowski 3-Space**, Far East Journal Mathematics Sci. 5(19), 83-90.

TURGUT, A.,(1995). **Doktora Tezi**, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.

