

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**3 BOYUTLU MİNKOWSKI UZAYINDA KUATERNİYONİK
BAZI YÜZEYLERİN KARAKTERİZASYONU**

**DOKTORA TEZİ
Muhammed Talat SARIAYDIN
(121121201)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri**

Danışman: Prof. Dr. Vedat ASİL

Temmuz-2016

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**3 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA KUATERNİYONİK
BAZI YÜZEYLERİN KARAKTERİZASYONU**

**DOKTORA TEZİ
Muhammed Talat SARIAYDIN
(121121201)**

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Vedat ASİL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 01 Temmuz 2016

Temmuz-2016

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**3 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA KUATERNİYONİK BAZI YÜZEYLERİN
KARAKTERİZASYONU**

DOKTORA TEZİ

Muhammed Talat SARIAYDIN

(121121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01. 07. 2016

Tezin Savunulduğu Tarih : 26.07. 2016

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)
Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ (İ.Ü)
Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR (M.A.Ü)
Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU (F.Ü)

TEMMUZ-2016

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarında bana her türlü gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Vedat ASİL'e, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren çalışmamın şekillenmesinde ilk günden itibaren ilgi ve alakasını esirgemeyen çok değerli sayın hocam Doç. Dr. Talat KÖRPINAR'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan babam Ömer Faruk SARIAYDIN'a ve çalışmam süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan eşim Nuhile SARIAYDIN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed Talat SARIAYDIN
ELAZIĞ-2016

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
SİMGELER LİSTESİ	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
ÖZET	IV
SUMMARY	V

1. BÖLÜM.....	1
Giriş.....	1
2. BÖLÜM	6
2.1. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Teoremler.....	6
2.2. Kuaterniyonlar Teorisi	15
2.3. Split Kuaterniyonlar Teorisi.....	21
3. BÖLÜM.....	25
3.1. Öklid Uzayında Koordinat Çatıları.....	25
3.2. Bir Yüzeyin Eğriliklerinin Hesaplanması.....	28
4. BÖLÜM.....	34
4.1. Kuaterniyonik Deniz Kabuğu Yüzeyleri ve Karakterizasyonları.....	34
4.2. Kuaterniyonik Deniz Kabuğu Yüzeyinin Eğrilikleri	45
5. BÖLÜM.....	56
5.1. Kuaterniyonik Eğri-Eğri Açığortay Yüzeyi.....	56
5.1.1. Dejenere Durumlar	59
5.1.2. Kuaterniyonik Eğri-Eğri Açığortay Yüzeyin Eğrilikleri ...	60
5.2. Nokta-Kuaterniyonik Eğri Açığortay Yüzeyi.....	65
5.2.1. Dejenere Durum	68
5.2.2. Nokta-Kuaterniyonik Eğri Açığortay Yüzeyin Eğrilikleri ..	68
6. BÖLÜM.....	75
Uygulamalar	75
7. BÖLÜM.....	84
Sonuç	84
KAYNAKLAR.....	86

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu Öklid Uzay
$\langle, \rangle_L$	: Lorentzian iç çarpım
$\wedge_L$	: Lorentzian vektörel çarpım
Sp	: Şekil operatörü
$K(p)$	: Gauss eğriliği
$H(p)$	: Ortalama eğriliği
$d\varphi_p$	: Diferensiyellenebilir dönüşüm
$\mathfrak{n}$	: Pozitif yönlü birim normal vektör alanı
$\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$	: Split kuaterniyon kümesi
$*$	: Split kuaterniyon çarpımı
$\bar{q}$	: Split kuaterniyonun eşleniği
I_q	: Birim kuaterniyon
N_q	: Split kuaterniyonun normu
q^{-1}	: Split kuaterniyonun tersi
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının cümlesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 Deniz kabuğu yüzeyleri	2
Şekil 1.2 Deniz kabuğu yüzeyi geometrisi	3
Şekil 1.3 Deniz kabuğu yüzeyinin mimaride kullanımı	3
Şekil 1.4 Küresel eğri-nokta açığortay yüzeyi	4
Şekil 1.5 Çember-çember açığortay yüzeyi	4
Şekil 1.6 İki koni açığortay ve iki silindir açığortay yüzeyleri	5
Şekil 4.1 Deniz kabuğu yüzeyinin oluşumu	36
Şekil 6.1 $\mathbb{R}_1^3$ de iki spatial split kuaterniyonik eğri	76
Şekil 6.2 $\mathfrak{F}(s, t)$ Kuaterniyonik eğri-eğri açığortay yüzeyi	76
Şekil 6.3 $\mathbb{R}_1^3$ de iki spatial split kuaterniyonik eğri	78
Şekil 6.4 $\mathfrak{H}(s, t)$ Kuaterniyonik eğri-eğri açığortay yüzeyi	78
Şekil 6.5 $\mathbb{R}_1^3$ de iki spatial split kuaterniyonik eğri	79
Şekil 6.6 $\mathfrak{V}(s, t)$ Kuaterniyonik eğri-eğri açığortay yüzeyi	79
Şekil 6.7 $\mathbb{R}_1^3$ de bir nokta ve bir spatial split kuaterniyonik eğri	81
Şekil 6.8 $\mathfrak{O}(s, t)$ Kuaterniyonik eğri-nokta açığortay yüzeyi	81
Şekil 6.9 $\mathbb{R}_1^3$ de bir nokta ve bir spatial split kuaterniyonik eğri	83
Şekil 6.10 $\mathfrak{E}(s, t)$ Kuaterniyonik eğri-nokta açığortay yüzeyi	83

ÖZET

3 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA KUATERNİYONİK BAZI YÜZEYLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, Minkowski uzayında eğriler, yüzeyler, deniz kabuğu yüzeyi ve açıortay yüzeyi üzerine yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verildi.

İkinci bölümde; çalışmada sıklıkla kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölüm çalışmanın materyal ve metod bölümünü oluşturmaktadır.

Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde; ilk olarak Minkowski uzayında helikal spiral tanımlandı. Bu helikal spiralın timelike ve spacelike olma durumlarına göre bu eğriyi merkez eğri olarak alan ve Minkowski uzayında yeni bir yüzey olan deniz kabuğu yüzeyi tanımlandı. Daha sonra bu yüzeylerin farklı karakterizasyonları ile kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyleri oluşturuldu ve son olarak bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri klasik diferensiyel geometriden farklı olarak kuaterniyonik yöntemlerle elde edildi.

Beşinci bölümde; ilk olarak spatial split kuaterniyonik eğri-eğri açıortay yüzeyi tanımlandı. Ayrıca bu yüzeyin dejenere durumları araştırıldı. Daha sonra bir nokta ile bir spatial split kuaterniyonik eğrinin açıortay yüzeyi oluşturuldu ve bu yüzeyin dejenere durumu elde edildi. Son olarak bu iki yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri klasik diferensiyel geometriden farklı olarak kuaterniyonik işlemlerle elde edildi.

Altıncı bölümde; kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyleri ve kuaterniyonik açıortay yüzeyleri ile ilgili bazı uygulamalar verildi.

Yedinci bölüm ise çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzayı, regle yüzey, deniz kabuğu yüzeyi, açıortay yüzeyi, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, split kuaterniyonlar.

SUMMARY

CHARACTERIZATION OF QUATERNIONIC SOME SURFACES IN MINKOWSKI 3-SPACE

This thesis consist of seven chapters.

The first chapter is an introduction which information about studies of curves in Minkowski space, surfaces, sea shell surface and bisector surface.

In the second chapter; fundemental definitions and theorems used in the study are given.

In the third section includes material and method section.

Fourth, fifyh and sixth sections are the original part of the study.

In the fourth chapter; helical spiral in Minkowski space is defined firstly a new surface in Minkowski space called sea shell surface is defined which consider this curve as central curve in the case of this helical spiral timelike or spacelike. Then, quaternionic sea shell surface is created from different characterization of this surface. Finally, Gaussian and mean curvatures is obtained by quaternionic method different from differential geometry.

In the fifth chapter; spatial split quaternionic curve-curve bisector surface is defined. Furthermore, degerenate case of this surface is investigated. Then, bisectors of split quaternionic curves is created from a point and degen-erate case of this surface is obtained. Finally, Gaussian and mean curvatures of these two spaces are obtained by quaternionic operations different from classical differential geometry.

In the sixth chapter, some application concerned about quaternionic sea shell surfaces and quaternionic bisector surfaces are given.

The seventh chapter is a devoted to the conclusion.

Keywords: Minkowski space, ruled surface, sea shell surface, bisector surface, Gaussian curvature, mean curvature, split quaternions.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kuaterniyonlar, 1843 yılında William Rowan Hamilton tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli olmayan reel cebir yapısına sahip olan kuaterniyonlar, kompleks sayıların özelliklerinin çoğunu taşıdığından kompleks sayılarla benzer bir yapıya sahiptir. Bu çalışmada kuaterniyonlar cebiri $\mathbb{H}$ ile gösterilmiştir. Günümüzde, kuaterniyonlar, özellikle fizik, kinematik, bilgisayar grafikleri, animasyon, katı cisim dönüştürmelerini içeren optimizasyon problemlerinde kullanılmaktadır.

Küre üzerinde iki nokta arasındaki en kısa uzaklık geodezikler ile ölçülür. Kuaterniyonlar yardımıyla küre üzerinde iki nokta arasındaki geodezik eğri tanımlanabilmektedir, bu ise küre üzerinde küresel lineer interpolasyonu mümkün kılmaktadır. Slerp gösterimi ile bu konu robot kinematığında geniş bir şekilde işlenmektedir. Kinematikte, robot hareketlerinin modellenmesinde küresel interpolasyonlar önemli bir yere sahiptir. Kol ve ayak hareketlerinde küresel model esastır. Kuaterniyonlar bu hareketlerin modellenmesinde aktif bir şekilde kullanılmaktadır. Kuaterniyonlar yardımıyla, $i^2 = -1 = j^2 = k^2 = 1$ kabul edilerek oluşturulan split kuaterniyon cümlesi, kuaterniyonların Öklid uzayında kullanıldığı gibi, üç boyutlu Minkowski uzayında da kullanılabilir. Split kuaterniyonlar cebiri $\mathbb{Q}_\mathbb{H}$ ile gösterilmiştir, [20]. Kuaterniyonlar ve split kuaterniyonlar geçmişten günümüze kadar bu özelliklerinden dolayı önemli çalışma alanı olmuştur.

Minkowski uzayında sabit ortalama eğrilikli timelike yüzeyler split kuaterniyonlar kullanarak Inoguchi tarafından yeniden karakterize edilmiştir. Daha sonra Özdemir, 3 boyutlu Minkowski uzayında birim timelike kuaterniyonlar ile dönmeleri, non-lightlike eğrilerin timelike kuaterniyon çatılarını ve split kuaterniyonların kökleri yardımıyla De Moivre formüllerini ifade etmiştir. Kula ise yarı Öklid uzayında split kuaterniyonları ve dönmelerini araştırmıştır. Ayrıca Alagöz split kuaterniyon matrislerini, kompleks adjonit matrislerini inceledi, [1,12, 16, 24, 25, 26].

Diğer taraftan, eski Yunan döneminden başlayarak Isaac Newton'un, diferensiyel ve integral hesabı bulmasına kadar geçen zaman boyunca, yüzey ve eğri geometrisi matematikle ilgilenenlerin büyük ilgisini çekmiştir. 18. yüzyıl boyunca diferensiyel hesabın kullanılması ile geometri çalışmaları diferensiyel geometrinin gelişmesini sağlamıştır. Ayrıca Carl Friedrich Gauss diferensiyel geometrinin gelişmesine öncülük etmiş ve diferensiyel geometriye,

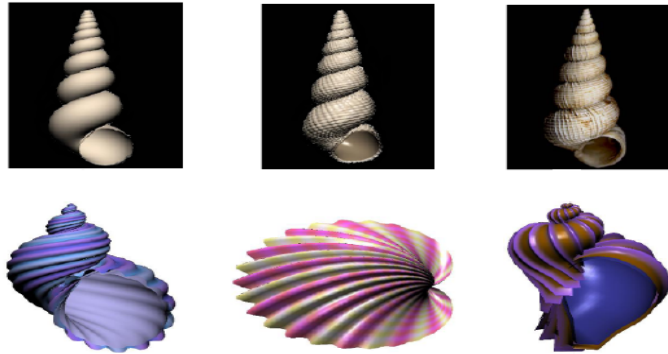
matematikin diğ er branşlarının da kullanabileceğ i bir bakış ađ ısı getirmiştir.

Gauss, özellikle birinci temel form üzerinde durmuş ve bir yüzeyin Gauss eđ riliğ ini veren Egregium teoreminin sadece birinci temel formun katsayıları ve onların türevleri ile ifade edilebileceğ ini göstermiştir.

19. yüzyılda regle yüzeyler ve özellikle ađ ılabilir regle yüzeylerin tüm özelliklerinin çok iyi bilindiğ i ve kayda değ er tüm sonuçlarının bulunduğ u düşünülüyordu fakat bu konular getiğ imiz yarım yüzyıldan beri tekrar araştırma konusu olmuş ve bir çok önemli zelliğ i keşfedilmiştir, [30]. Bu konuda birçok matematikçi tarafından bilimsel araştırma yapılmaktadır. rneğ in;

Krpınar, Sol_3 uzayda genel helisler ile oluş an regle yüzeylerinin paralel yüzeylerini ve Lorentz Heisenberg grupta timelike biharmonik eđ rilerin rekti-fyan ađ ılabilir yüzeylerini, Shen rasyonel regle yüzeylerin karakterizasyonunu ve Yu, 3 boyutlu klid uzayında regle yüzeylerin yapılarını ve karakterizasyonlarını incelemiştir, [14, 15, 31, 37].

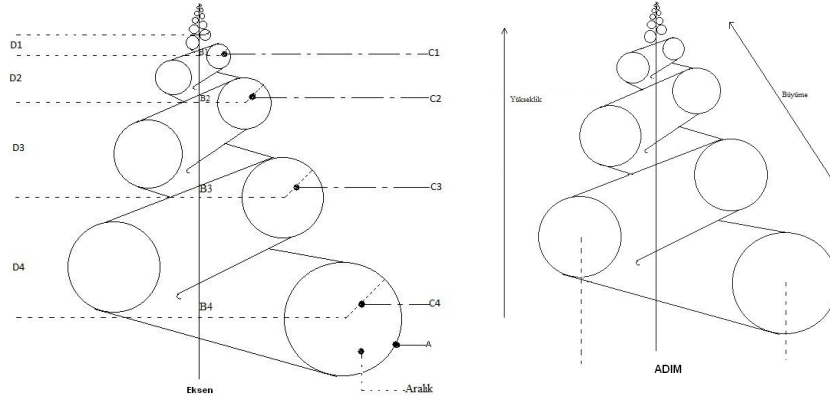
Deniz kabuğ u yüzeyinin zarif şekli sanatçıların, bilim adamlarının ve matematikçilerin gözünde daima dikkat çekmiştir. Doç ada bulunan deniz kabuklarının şaşırtıcı bir şekilde eşitliliğ ine rağ men, hemen hemen tüm deniz kabuğ u yüzeyinin bytmesi  üstel fonksiyon ve kapalı bir eđ ri ile tanımlanabilir, [2].



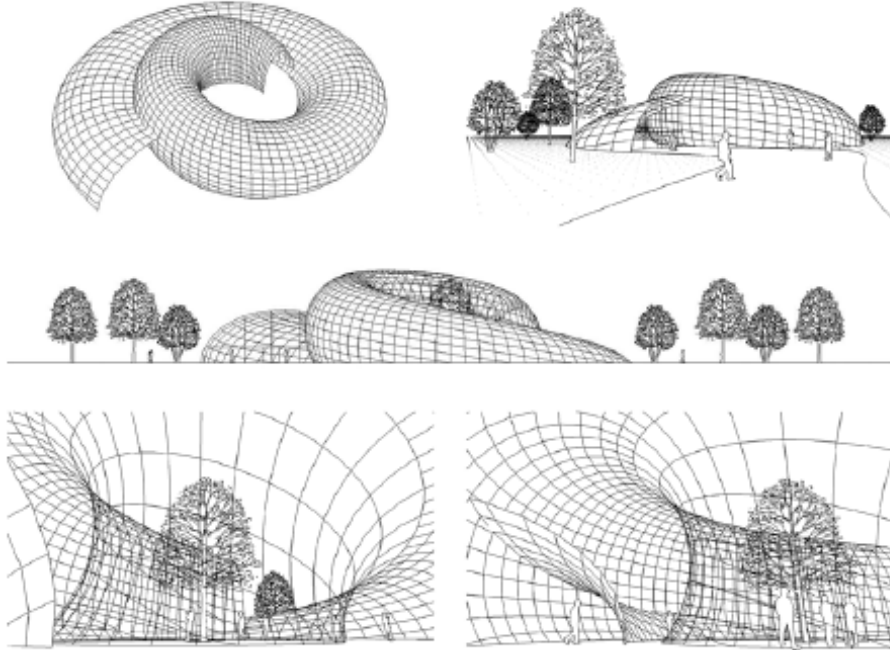
şekil 1.1 Deniz kabuğ u yüzeyleri, [2].

Ayrıca şekil 2’den deniz kabuğ u yüzeyinin geometrisi aralığ ın şekli, eksen ile deniz kabuğ unun merkezi arası uzaklık, yarıçap ve yükseklik olmak üzere dört temel parametre ile ifade edilir. Bu şekilde elde edilen yüzeyler matematik

ve mimari gibi farklı bilim alanlarda kullanılır. Örneğin farklı matematiksel eğriler ile üretilen şekil 3 deki gibi farklı mimari yapılar elde edilmektedir, [13].



Şekil 1.2 Deniz kabuğu yüzeyi geometrisi.



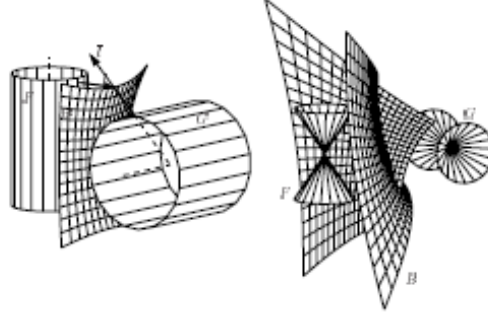
Şekil 1.3, Deniz kabuğu yüzeyinin mimaride kullanımı, [13].

Açıortay yüzeyleri nokta, eğri ve yüzey gibi herhangi iki obje ile üretilir. Bu objelerin aralıkları her iki objeye ortogonal olarak ölçülür. Ayrıca bu



Şekil 1.4 Küresel eğri-nokta açığortay yüzeyi, [27].

4



Şekil 1.6 İki koni ve iki silindir açkırtay yüzeyi, [27].

genellikle Öklid uzayında geçmişten günümüze kadar bilimsel araştırmalarla incelenmiştir. Örneğin; Zhao, kesiklen açkırtay yüzeylere dayanan 3D nesnelerin sınıflandırılmasını, Elber ise eğri-yüzey ve yüzey-yüzey açkırtay yüzeylerinin modellemesi üzerinde çalışmıştır, [8, 38].

Bu çalışmada ise 3-boyutlu Minkowski uzayında ilk olarak helikal spiral ve deniz kabuğu yüzeyi tanımlandı. Daha sonra bu deniz kabuğu yüzeyinin bazı kuaterniyonik karakterizasyonları ve klasik differensiyel geometri yönteminden farklı olarak kuaterniyonik işlemlerle eğrilikleri elde edildi. Diğer taraftan 3-boyutlu Minkowski uzayında iki kuaterniyonik eğri ve bir sabit nokta ve bir kuaterniyonik eğri yardımıyla rasyonel açkırtay yüzeyleri oluşturuldu. Ayrıca bu yüzeylerin dejenere durumları araştırılıp bu yüzeylerin eğrilikleri yine kuaterniyonik işlemlerle hesaplandı.

2. BÖLÜM

Bu bölümde çalışmada sıkça kullanılan temel tanım ve teoremler verildi.

2.1. Minkowski Uzayında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1

V bir reel vektör uzayı olsun,

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v \in V$ için

- i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
- ii) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$
 $\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle, \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir, [23].

$\langle, \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Bu simetrik bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir;

1) Tanımlı Durum: Eğer,

- i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,
- ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif tanımlı denir.

2) Semi-tanımlı Durum: Eğer,

- i) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif semi-tanımlı,
- ii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif semi-tanımlı denir.

3) Non-dejenere Durum: Eğer,

- $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna non-dejenere simetrik form denir, [23].

Tanım 2.1.2

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir, [23].

Tanım 2.1.3

V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir. g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır, [23].

Tanım 2.1.4

V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir, [23].

Tanım 2.1.5

V bir Lorentz uzayı olsun. $\forall v \in V$ için

$$\begin{aligned} g(v, v) &> 0 \quad \text{veya} \quad v = 0 \text{ ise } v \text{ ye space-like vektör,} \\ g(v; v) &< 0 \quad \text{ise } v \text{ ye time-like vektör,} \\ v &\neq 0 \quad \text{iken} \quad g(v; v) = 0 \text{ ise } v \text{ ye light-like (null) vektör} \end{aligned}$$

denir, [23].

Tanım 2.1.6

V skalar çarpımlı bir uzay ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| = |g(v, v)|^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına v vektörünün normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör denir, [23].

Tanım 2.1.7

V bir Lorentz uzayı ve W , V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

- g_W pozitif tanımlı ise W ya space-like altuzay,
- g_W non-dejenere ve indeksli ise W ya time-like altuzay,
- g_W dejenere ise W ya light-like altuzay

denir, [23].

Teorem 2.1.8

V bir Lorentz uzayı, V nin bir altuzayı W ve $\dim W \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler, [23].

- i) W time-like altuzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır,
- ii) W uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir,
- iii) W uzayı bir tane time-like vektör içerir.

Tanım 2.1.9

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, non-dejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$ -tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir. Başka bir deyişle g , M manifoldunun her p noktasına $T_p(M)$ tanjant uzayı üzerinde bir g_p skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır, [23].

Tanım 2.1.10

$\mathbb{R}^n$; n -boyutlu standart reel vektör uzayı $\forall p \in \mathbb{R}^n$ üzerinde $\forall v_p, w_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\langle v_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-v} v_i w_i - \sum_{i=n-v+1}^n v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen v -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerinin bileşenleridir, [23].

Tanım 2.1.11

$\mathbb{R}_v^n$ yarı Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}_1^n$ yarı Öklidyen uzayına Minkowski n -uzayı denir, [23].

Tanım 2.1.12

M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer $\langle, \rangle$ fonksiyona M üzerinde bir iç çarpım, metrik tensör, diferensiyellenebilir metrik veya Riemann metriği denir. $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine de bir Riemann manifoldu denir, [21].

Tanım 2.1.13

M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olmak üzere

i) Simetrik: $Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, Y) = g(Y, X)$$

ii) 2-lineer: $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g(aX + bY, Z) &= ag(X, Z) + bg(Y, Z), \\ g(X, aY + bZ) &= ag(X, Y) + bg(X, Z) \end{aligned}$$

iii) Non-dejenere: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, Y) = 0 \Rightarrow Y = 0$$

özelliklerini sağlayan g tensörüne bir yarı Riemann metriği ve (M, g) ikilisine de yarı Riemann manifoldu denir, [23].

Tanım 2.1.14

M bir yarı Riemann manifoldu olsun. $\dim M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir Lorentz manifoldu denir. Bu tanıma göre bir M Lorentz manifoldu için

$$g_p(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \mid_p w_i \mid_p - v_n \mid_p w_n \mid_p, \quad p \in M, \quad v_p, w_p \in T_p(M)$$

dir, [23].

Tanım 2.1.15

M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

- i) $g(T, T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- ii) $g(T, T) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- iii) $g(T, T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine null eğri

denir. Eğrinin bir özel hali olan doğru gözönüne alınsın. Doğrunun doğrultman vektörü space-like ise doğru space-like doğru, doğrultman vektörü time-like ise doğru time-like doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur, [23].

Tanım 2.1.16

M ve $\bar{M}$ sırasıyla n ve $(n + d)$ -boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere $x : M \rightarrow \bar{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için

$$dx_p : T_p(M) \rightarrow T_{x(p)}(\bar{M})$$

türev dönüşümü birebir ise x fonksiyonuna bir immersiyon (daldırma) denir, [7].

Tanım 2.1.17

M ve $\bar{M}$ sırasıyla n ve $(n + d)$ -boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere $x : M \rightarrow \bar{M}$ dönüşümü bir immersiyon olsun. $\bar{M}$ manifoldu bir Riemann yapıya sahip ise x yardımıyla $\bar{M}$ den indirgenen metrik için, $\forall p \in M$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle dx_p(X), dx_p(Y) \rangle_{x(p)}, \quad \forall X, Y \in T_p(M)$$

eşitliği sağlandığında x e bir izometrik immersiyon denir, [7].

Tanım 2.1.18

M_v^m m –boyutlu ve v indeksli bir yarı Riemann manifoldu ve $\bar{M}_q^n$ n –boyutlu ve q indeksli bir diğer yarı Riemann manifoldu olsun.

$$j : M_v^m \rightarrow \bar{M}_q^n$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise ($rank j = m$) M_v^m manifolduna $\bar{M}_q^n$ nin bir yarı Riemann altmanifoldu denir, [23].

Tanım 2.1.19

$\bar{M}$, M nin bir yarı Riemann altmanifoldu ve üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olsun.

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

in $\bar{M}$ ye indirgenmiş olan

$$\bar{D} : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})$$

fonksiyonuna M den $\bar{M}$ yarı Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir. Buradaki $\chi(\bar{M})$ $\bar{M}$ nin herbir p noktasına $T_p(\bar{M})$ de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\mathfrak{F}(\bar{M})$ modülünü göstermektedir, [23].

Lemma 2.1.20

$\bar{M}$, M nin bir yarı Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} II & : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})^\perp \\ (V, W) & \rightarrow II(V, W) = nor D_v W \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathfrak{F}(\bar{M})$ bilineer ve simetriktir. Burada II ye $\bar{M}$ nin ikinci temel form tensörü denir, [23].

Tanım 2.1.21

n –boyutlu bir yarı Riemann manifoldunun $(n - 1)$ –boyutlu bir $\bar{M}$ yarı Riemann alt manifolduna M nin bir yarı Riemann hiperyüzeyi denir, [23].

Tanım 2.1.22

M nin bir yarı Riemann hiperyüzeyi $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $V, W \in \chi(\bar{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), N)$$

şeklindeki $(1; 1)$ -tipinden tensör alanı S ye $\bar{M}$ nin N den elde edilen şekil operatörü denir. Diğer bir deyişle, S şekil operatörü, N birim normal vektör alanı olmak üzere, $\bar{M}$ nin her p noktasında

$$\begin{array}{ccc} S & : & T_p(\bar{M}) \rightarrow T_p(\bar{M}) \\ & & X_p \rightarrow S(X_p) - D_{X_p}N \end{array}$$

bir lineer operatördür, [23].

Tanım 2.1.23

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere bu iki vektörün skaler çarpımı

$$\begin{array}{ccc} \langle, \rangle & : & \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v} & , & \vec{w}) \rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3 \end{array}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $v = w$ ise

$$\|\vec{v}\|_L = |\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|^{1/2}$$

eşitliği ile tanımlı $\|\vec{v}\|_L$ reel sayısına, v vektörünün Lorentz anlamında normu denir. Normu 1 olan vektöre de Lorentz anlamında birim vektör denir, [23].

Tanım 2.1.24

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_2 w_1 - v_1 w_2)$$

vektörüne $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ nin vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir. $\vec{v} \wedge \vec{w}$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ve

$$e_i = \{\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}\}$$

olmak üzere

$$v \wedge w = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = -e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

dir. Saat yönünün tersi pozitif olarak alınmıştır. Saat yönünde tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman

$$e_1 \wedge e_2 = -e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

dir. Bu durumda

$$v \wedge w = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir, [23].

Tanım 2.1.25

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında $A^t \varepsilon A = \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine semi-ortogonal matris denir. Burada, $\det A = 1$ olup

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisine işaret matrisi denir, [23].

Teorem 2.1.26

V bir Lorentz uzayı ve v, w iki timelike vektör olsun. Bu durumda

- i) $|g(v, w)| \geq \|v\| \|w\|$ eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart v ve w vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.
- ii) v, w timelike vektörleri aynı time-konide ise

$$g(v, w) = -\|v\| \|w\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına v ve w timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

Burada v ve w vektörleri aynı time-konide değilseler o zaman

$$|g(v, w)| = \|v\| \|w\| \cosh \varphi$$

dir.

V Lorentz uzayında spacelike vektörler v ve w olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{g(v, w)}{\|v\| \|w\|}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \varphi \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya v ve w spacelike vektörleri arasındaki açı denir. v ve w spacelike vektörler için

$$g(v, w) \leq \|v\| \|w\|$$

eşitsizliği vardır, [23].

Tanım 2.1.27

$\mathbb{R}^3$ de 1-parametrelili küre ailesinin zarfına kanal yüzeyi denir. Alternatif olarak kanal yüzeyi, merkezlerinin yörüngesi bir $B(t)$ eğrisi ve yarıçap fonksiyonu $r(t)$ olan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır, [10].

Teorem 2.1.28

α bir timelike eğri olsun. Her s için α Frenet üç ayaklısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olmak üzere Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

α bir spacelike eğri olsun. Bu durumda

i) $\mathbf{T}'$ vektörü spacelike ise Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}$$

olur.

ii) $\mathbf{T}'$ vektörü timelike ise Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}$$

olur, [18]. Ayrıca Frenet vektörleri arasında

$$\varepsilon_{\mathbf{T}} = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle, \quad \varepsilon_{\mathbf{N}} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle, \quad \varepsilon_{\mathbf{B}} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) \wedge_L \mathbf{N}(s) &= \varepsilon_{\mathbf{T}} \varepsilon_{\mathbf{N}} \mathbf{B}(s), \\ \mathbf{N}(s) \wedge_L \mathbf{B}(s) &= \varepsilon_{\mathbf{N}} \varepsilon_{\mathbf{B}} \mathbf{T}(s), \\ \mathbf{B}(s) \wedge_L \mathbf{T}(s) &= \varepsilon_{\mathbf{B}} \varepsilon_{\mathbf{T}} \mathbf{N}(s) \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır, [18].

Theorem 2.1.29

$v \in V$ olmak üzere

i) $\|v\| > 0$,

ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v$ bir null vektördür,

iii) v bir timelike vektör ise $\|v\|^2 = -g(v, v)$,

iv) v bir spacelike vektör ise $\|v\|^2 = g(v, v)$ dir, [23].

2.2 Kuaterniyonlar Teorisi

Tanım 2.2.1 $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir q kuaterniyonu

$$\begin{aligned} q &= (a_0, a_1, a_2, a_3) \\ &= (a_0, \mathbf{w}) \\ &= a_0 1 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

şeklindedir, burada $S_q = a_0$, q nun skaler kısmı ve $\mathbf{V}_q = (a_1, a_2, a_3)$ da vektörel kısmıdır. Böylece q kuaterniyonu $q = S_q + \mathbf{V}_q$ şeklinde yazılabilir, [4].

Tanım 2.2.2

$q = S_q + \mathbf{V}_q$ kuaterniyonu ve $p = S_p + \mathbf{V}_p$ kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = (S_q + S_p) + (\mathbf{V}_q + \mathbf{V}_p)$$

dir, [4].

Tanım 2.2.3

$q = S_q + \mathbf{V}_q$ kuaterniyonunun bir $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleriyle çarpımı

$$\lambda q = \lambda S_q + \lambda \mathbf{V}_q$$

şeklindedir, [4].

Tanım 2.2.4

$q = S_q + \mathbf{V}_q$ kuaterniyonunun eşleniği

$$\bar{q} = S_q - \mathbf{V}_q$$

dir, [4].

Tanım 2.2.5

$\mathbb{H} = \{q = a_0 1 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ kuaterniyon cebiri olmak üzere $\mathbb{H}$ üzerinde tanımlı reel değerli, non dejenere bilinear form $q, p \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\rightarrow h(q, p) = \frac{1}{2}[q * \bar{p} + p * \bar{q}] \end{aligned}$$

dir, [32]. Diğer taraftan, $q_1 \cdot q_2 = \langle q_1, q_2 \rangle$ olmak üzere

$$q_1 \cdot q_2 = \text{Re}(q_1 * \bar{q}_2) = \text{Re}(\bar{q}_1 * q_2)$$

dir, [19, 35].

Tanım 2.2.6

$q = a_0 1 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ kuaterniyonun normu

$$N_q = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

dir, [4]. Benzer şekilde

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q * \bar{q} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

yazılabilir, [36].

Tanım 2.2.7

$q = a_0 1 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ kuaterniyonu için $N_q = 1$ ise q ya birim kuaterniyon denir. Her q kuaterniyonu

$$q = N_q(\cos \theta + \sin \theta \mathbf{v})$$

şeklinde kutupsal biçimde yazılabilir, burada, [4],

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a_0}{N_q}, \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{N_q}, \\ \mathbf{v} &= \frac{a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Tanım 2.2.8

$q = S_q + \mathbf{V}_q$ ve $p = S_p + \mathbf{V}_p$ kuaterniyonlarının, kuaterniyon çarpımı

$$q * p = S_q S_p - \langle \mathbf{V}_q, \mathbf{V}_p \rangle + S_q \mathbf{V}_p + S_p \mathbf{V}_q + \mathbf{V}_q \wedge \mathbf{V}_p$$

eşitliğiyle verilir, burada $\langle \mathbf{V}_q, \mathbf{V}_p \rangle$ ve $\mathbf{V}_q \wedge \mathbf{V}_p$ sırasıyla $\mathbf{V}_q$ ve $\mathbf{V}_p$ arasındaki iç çarpımı ve vektörel çarpımı gösterir, [4].

Eğer $a = S_a + \mathbf{a}$, $b = S_b + \mathbf{b}$ ve $c = S_c + \mathbf{c}$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır, [17];

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \mathbf{a} * \mathbf{b} &= -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \\ \text{ii)} \quad a * (b * c) &= a * b + a * c, \\ \text{iii)} \quad (a + b) * c &= a * c + b * c, \\ \text{iv)} \quad (a * b) * c &= a * (b * c), \\ \text{v)} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle &= \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle, \\ \text{vi)} \quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \\ \text{vii)} \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{a} \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle, \\ \text{viii)} \quad \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \rangle, \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle, \\ \text{ix)} \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle \mathbf{c} - \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Tanım 2.2.9

Kuaterniyonların $\mathbb{H} = \langle q = a_0 1 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \rangle$ cebiri, $\langle 1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ bazı ile $\mathbb{R}$ üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır. Baz elemanları arasında aşağıdaki özellikler vardır;

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} * \mathbf{j} * \mathbf{k} = -1, \\ \mathbf{i} * \mathbf{j} &= -\mathbf{j} * \mathbf{i} = \mathbf{k} \end{aligned}$$

dır. Açıkça $\mathbb{H}$, birleşmeli fakat değişmeli olmayan bir cebirdir ve $\mathbb{H}$ in birim elemanı 1 dir, [3].

Tanım 2.2.10

q kuaterniyonunun tersi $I_q = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ olmak üzere

$$q^{-1} = \frac{1}{I_q} \bar{q}$$

dir. Ayrıca

$$q * q^{-1} = q^{-1} * q = 1$$

ve

$$(q * p)^{-1} = p^{-1} * q^{-1}$$

dir, [4].

Tanım 2.2.11

$q = S_q + \mathbf{V}_q$ kuaterniyonu için $S_q = 0$ ise q ya pür kuaterniyon denir, [4].

Tanım 2.2.12

Herhangi iki q ve p kuaterniyonları için

$$\langle q, p \rangle = \frac{\bar{q} * p + \bar{p} * q}{2}$$

dir. Eğer $q = p$ ise

$$I_q = \langle q, q \rangle = \bar{q} * q$$

dur, [33].

Tanım 2.2.13

Bir $\mathbf{w}$ pür kuaterniyonu üzerinde

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{w} &\rightarrow \phi(\mathbf{w}) = q * \mathbf{w} * q^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ϕ fonksiyonu lineerdir. Genelliği bozmadan $N_q = 1$ seçilirse $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ olduğundan eğer $q = a_0 1 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ ise

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{i}) &= (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)\mathbf{i} + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)\mathbf{j} + (2a_1a_3 - 2a_0a_2)\mathbf{k}, \\ \phi(\mathbf{j}) &= (-2a_0a_3 + 2a_1a_2)\mathbf{i} + (a_0^2 + a_2^2 - a_1^2 - a_3^2)\mathbf{j} + (2a_0a_1 - 2a_2a_3)\mathbf{k}, \\ \phi(\mathbf{k}) &= (2a_0a_23 + 2a_1a_3)\mathbf{i} + (2a_2a_3 - 2a_0a_1)\mathbf{j} + (a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

dır. Böylece ϕ dönüşümünün matris gösterimi;

$$R_q = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2a_0a_3 + 2a_1a_2 & 2a_1a_3 - 2a_0a_2 \\ -2a_0a_3 + 2a_1a_2 & a_0^2 + a_2^2 - a_1^2 - a_3^2 & 2a_0a_1 - 2a_2a_3 \\ 2a_0a_23 + 2a_1a_3 & 2a_2a_3 - 2a_0a_1 & a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. R_q ortogonal yani $R_q R_q^T = I$ ve $\det R_q = 1$ dir. Böylece $\phi(\mathbf{w}) = q * \mathbf{w} * q^{-1}$ lineer dönüşümü $\mathbb{R}^3$ de bir dönme gösterir, [4].

Tanım 2.2.14

$\mathbb{R}^3$ üç boyutlu Öklid uzayı $\{p \in Q_{\mathbb{H}} \mid p + \bar{p} = 0\}$ spatial kuaterniyonların uzayı olarak tanımlanır. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olarak alınırsa $\mathbb{R}^3$ de kuaterniyonik bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow Q_{\mathbb{H}} \\ s &\rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 3 \end{aligned}$$

ve bu eğrinin eğrilikleri $\{k, \tau\}$, Frenet vektörleri $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}$$

olur, [22].

Tanım 2.2.15

$\mathbb{R}^4$ dört boyutlu Öklid uzayı kuaterniyonların uzayı olarak tanımlanır. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olarak alınırsa $\mathbb{R}^4$ de kuaterniyonik bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{H} \\ s &\rightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i(s) \vec{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 4, e_4 = 1 \end{aligned}$$

ve bu eğrinin eğrilikleri $\{K, k, r - K\}$, Frenet vektörleri $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}_1(s), \mathbf{B}_2(s)\}$ olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}_1'(s) \\ \mathbf{B}_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & r - K \\ 0 & 0 & -(r - K) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}_1(s) \\ \mathbf{B}_2(s) \end{bmatrix}$$

olur, [22].

2.3 Split Kuaterniyonlar Teorisi

Tanım 2.3.1

Split kuaterniyon cebiri,

$$\begin{aligned} -i^2 &= j^2 = k^2 = 1, \\ i * j &= k, \quad j * k = i, \quad k * i = j \end{aligned}$$

koşullarını taşıyan $q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ($q_i \in \mathbb{R}$) sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişmeli ve bölmeli olmayan bir cebirdir. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu cümle $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ ile gösterilir, [26].

Tanım 2.3.2

$\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ split kuaterniyon kümesi ve $p, q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ için $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ ve $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ split kuaterniyonlarının split kuaterniyon çarpımı,

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Q}_{\mathbb{H}} \times \mathbb{Q}_{\mathbb{H}} &\rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{H}} \\ (q, p) &\rightarrow q * p = S_q S_p + \langle V_q, V_p \rangle_L + S_q V_p + S_p V_q + V_q \wedge_L V_p \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\langle, \rangle_L$ ve $\wedge_L$ sırasıyla, Lorentzian iç çarpım ve Lorentzian vektörel çarpımı göstermektedir, [26].

Diğer yandan

$$q * p = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 2.3.3

$\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ split kuaterniyon kümesi, $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ ve $q = S_q + V_q$ için, $S_q = 0$ ise, bu durumda q ya saf split kuaterniyon denir. İki saf split kuaterniyonun çarpımı, $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} q * p &= \langle V_q, V_p \rangle_L + V_q \wedge_L V_p \\ &= -q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 + \begin{bmatrix} -i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir, [20].

Tanım 2.3.4

$q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = S_q + V_q$ bir split kuaterniyon olmak üzere, split kuaterniyonun eşleniği $\bar{q}$ ile gösterilir ve $K_q = \bar{q} = S_q + V_q$ şeklinde tanımlanır, [26].

Tanım 2.3.5

Bir q split kuaterniyonu için

$$I_q = \bar{q} * q = q * \bar{q} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

şeklinde tanımlanır, [20].

Tanım 2.3.6

$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ split kuaterniyonunun normu

$$N_q = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2|}$$

şeklinde tanımlanır. $N_q = \bar{q} * q = q * \bar{q} = 1$ olduğu zaman, q ya birim split kuaterniyon denir. $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ ile birim split kuaternionlar kümesini gösterelim. Ayrıca $N_q \neq 0$ olmak üzere,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$$

bir split kuaterniyonunun tersini belirtir, [20].

Teorem 2.3.7

Split kuaterniyonlar $\forall q, r, s \in \mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ için aşağıdaki özellikleri sağlarlar, [26];

$$\begin{aligned} q * (r * s) &= (q * r) * s, \\ q * (r + s) &= q * r + q * s, \\ K(q * r) &= K_q * K_r, \\ I_{q*r} &= I_q I_r, \\ N_{q*r} &= N_q N_r \end{aligned}$$

V_q paralel V_r olması için gerek ve yeter şart $q * r = r * q$ olmasıdır.

Tanım 2.3.8

Kompleks sayılarda ve kuaterniyonlarda olduğu gibi split kuaterniyonlar da kutupsal formda ifade edilebilir. Fakat, split kuaterniyonlarda, split kuaterniyonun spacelike yada timelike olması hatta timelike kuaterniyonlarda vektörel kısmın timelike ya da spacelike olması bu kutupsal formu değiştirir. Yani, split kuaterniyonlar için ayrı ayrı kutupsal formlar belirtilecektir, [26].

i) Her $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \tilde{\mathbb{Q}}_{\mathbb{H}}$ birim spacelike kuaterniyonu

$$\sinh \varphi = \frac{q_0}{N_q}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{N_q}$$

ve

$$\varepsilon = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

spacelike birim vektör olmak üzere

$$q = N_q (\sinh \varphi + \varepsilon \cosh \varphi)$$

formunda yazılabilir.

ii) Vektörel kısmı spacelike olan her $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \tilde{\mathbb{Q}}_{\mathbb{H}}$ timelike birim kuaterniyon

$$\cosh \varphi = \frac{q_0}{N_q}, \quad \sinh \varphi = \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{N_q}$$

ve

$$\varepsilon = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

spacelike birim vektör olmak üzere,

$$q = N_q (\cosh \varphi + \varepsilon \sinh \varphi)$$

formunda yazılabilir.

iii) Vektörel kısmı timelike olan her $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \tilde{\mathbb{Q}}_{\mathbb{H}}$ timelike birim kuaterniyon

$$\cos \varphi = \frac{q_0}{N_q}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}{N_q}$$

ve

$$\varepsilon = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}$$

timelike birim vektör olmak üzere

$$q = N_q (\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi)$$

dir.

Tanım 2.3.9

Bir q split kuaterniyonu için

$$I_q = \bar{q} * q = q * \bar{q} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe göre

- i) $I_q > 0$ ise q 'ya timelike kuaterniyon,
 - ii) $I_q < 0$ ise q 'ya spacelike kuaterniyon,
 - iii) $I_q = 0$ ise q 'ya lightlike kuaterniyon
- denir. Açıkça görülmektedir ki burada

$$-I_q = -q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

eşitliği $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ split kuaterniyonunun dört boyutlu bir vektör olarak $\langle q, q \rangle_L$ şeklinde yarı Öklidyen iç çarpımına eşittir, [26].

Teorem 2.3.10

Vektörel kısmı spacelike olan her $q = \cosh \varphi + \varepsilon \sinh \varphi$ timelike kuaterniyonu, aralarındaki açı φ olan iki u, v Lorentz vektörleri cinsinden

$$v * u^{-1} \tag{2.1}$$

olarak yazılabilir, [26]. Ayrıca bu vektörler aşağıdaki koşulları sağlarlar:

- i) u ve v timelike vektörleri ε spacelike vektörüne dik vektörlerdir,
- ii) u ve v spacelike vektörleri $|\langle u, v \rangle| > 1$ ve ε spacelike vektörüne dik vektörlerdir.

Teorem 2.3.11

Vektörel kısmı timelike olan her $q = \cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi$ timelike kuaterniyonu, ε timelike vektörüne dik, aralarındaki açı φ olan iki spacelike u, v Lorentz vektörleri cinsinden

$$u * v \tag{2.2}$$

olarak yazılabilir, [26].

3. BÖLÜM

Bu bölüm çalışmanın materyal ve metod kısmını oluşturmaktadır ve bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan literatürdeki bazı kavramlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

3.1. Öklid Uzayında Koordinat Çatıları

3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri, $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan

$$\begin{aligned} \alpha &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu ile tanımlanır. Burada s değişkeni I 'da artarak değiştirildiğinde α birim hızlı eğrisinin $\alpha(s)$ noktası hangi yönde ilerliyorsa $\alpha'(s)$ vektörü yani $\mathbf{T}(s)$ birim teğet vektörü o yöndedir denir.

Buna göre $\mathbf{T}$, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır ve $\mathbf{T}(s)$, $\alpha(s)$ noktasında $\mathbf{T}_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$ vektör uzayının bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzayı 1 boyutlu bir vektör uzayıdır. Geometrik olarak $\alpha(s)$ noktasından geçen ve $\mathbf{T}(s)$ vektörüne paralel olan bir doğrudur. Bu doğruya eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet uzayı denir ve $\mathbf{T}_{\alpha(s)}(\alpha(I))$ biçiminde gösterilir.

Diğer yandan bu α eğrisi üzerindeki bir koordinat çatısı olarak $\{\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{M}\}$ vektörlerini alırsak eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken $\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{M}$ vektörleri değişirler. Dolayısıyla küresel göstergeler oluşurlar. Eğrinin $\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{M}$ üç ayaklısının her s anına bir eksen etrafında ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksen denir. Bu eksen $\mathbf{F}$ ile gösterilirse genelleştirilmiş Darboux vektör alanı

$$\mathbf{F} = k_1 \mathbf{T} + k_2 \mathbf{L} + k_3 \mathbf{M} \quad (3.1)$$

dir, [5, 29].

(3.1) denklemiyle verilen Darboux vektör alanı kullanılarak $\{\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{M}\}$ çatısı için

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{T}, \\ \mathbf{L}' &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{L}, \\ \mathbf{M}' &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{M} \end{aligned}$$

denklemleri yazılır. Yani genelleştirilmiş Darboux vektör alanı için $\mathbb{E}^3$ 'de genelleştirilmiş bir çatı denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{L}' \\ \mathbf{M}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dir. (3.2) eğitliği yardımıyla α eğrisinin her bir noktasındaki lokal koordinatlar kullanılarak $\mathbb{E}^3$ 'de klasik bir çatı olan Frenet-Serret çatısı elde edilir. Frenet çatısı için $k_1 = \tau(s)$, $k_2 = 0$, $k_3 = \kappa(s)$ alınarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s), \quad (1)$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s), \quad (3)$$

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|, \quad (4)$$

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \quad (5)$$

eşitlikleri elde edilir.

Benzer düşünceyle Bishop çatısı için $k_1 = 0$, $k_2 = -k_2$, $k_3 = k_1$ alınarak

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'_1(s) \\ \mathbf{N}'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & k_2 \\ -k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_2(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}_1(s) \\ \mathbf{N}_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} \cos \varphi - \mathbf{B} \sin \varphi$$

$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{N} \sin \varphi + \mathbf{B} \cos \varphi$$

$$\varphi = \arctan \frac{k_2}{k_1}$$

$$\kappa = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

yazılır.

(3.2), (3.3), (3.4) denklemleriyle elde edilen ve diğer tüm 3-boyutlu koordinat çatıları kuaterniyonların dönme matrisi yardımıyla kuaterniyon formunda ifade edilir. Bu dönme matrisinin sütunları sırasıyla $\{\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{M}\}$ vektörleri olduğu düşünülürse bunların herbiri;

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_1] &= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & -q_2 & q_3 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \\ -q_2 & q_3 & -q_0 & q_1 \end{bmatrix}, \\ [\mathcal{W}_2] &= \begin{bmatrix} -q_3 & q_2 & q_1 & -q_0 \\ q_0 & -q_1 & q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \end{bmatrix}, \\ [\mathcal{W}_3] &= \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_1 & -q_0 & q_3 & q_2 \\ q_0 & -q_1 & -q_2 & q_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{T}=[W_1][q], \mathbf{L}=[W_2][q], \mathbf{M}=[W_3][q]$$

olarak yazılır. Son olarak elde edilen eşitlikleri (3.1) de göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}'_0(s) \\ \mathbf{q}'_1(s) \\ \mathbf{q}'_2(s) \\ \mathbf{q}'_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & 0 & -k_3 & k_2 \\ k_2 & k_3 & 0 & -k_1 \\ k_3 & -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(s) \\ \mathbf{q}_1(s) \\ \mathbf{q}_2(s) \\ \mathbf{q}_3(s) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu yolla alternatif bir yol olarak dönme dönüşümü kullanılarak

$$R_q(V) = q * V * q^{-1}$$

eşitliği doğrudan yazılır. Kuaterniyonların türev özellikleri gereğince

$$dq = q * (q^{-1} * dq), \quad (3.6)$$

$$q^{-1} * dq = - (dq^{-1} * q) \quad (3.7)$$

eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} q' &= \frac{1}{2}q * (0, k_1, k_2, k_3) \\ &= \frac{1}{2}q * (0, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve

$$(q^{-1})' = -\frac{1}{2}(0, \mathbf{k}) * q^{-1}$$

yazılır. Burada $\mathbf{k} = \mathbf{2}(q_0 d\mathbf{q} - \mathbf{q} dq_0 - \mathbf{q} \times d\mathbf{q})$ olduğundan

$$\begin{aligned} k_0 &= 2(q_1 dq_1 + q_2 dq_2 + q_3 dq_3 + q_0 dq_0) = 0, \\ k_1 &= 2(q_0 dq_1 - q_1 dq_0 - q_3 dq_2 + q_2 dq_3), \\ k_2 &= 2(q_0 dq_2 - q_2 dq_0 - q_3 dq_1 + q_1 dq_3), \\ k_3 &= 2(q_0 dq_3 - q_3 dq_0 - q_1 dq_2 + q_2 dq_1) \end{aligned}$$

olup (2.5) gereğince $k_0 = 0$ dır, [11].

Diğer taraftan $\{\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{M}\}$ üç koordinat ekseninin herbirini döndermek için keyfi bir q kuaterniyonu kullanılarak R^i nin bir sütunu olarak her bir orto-normal çatı bileşeni

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= q * (0, \hat{x}) * q^{-1}, \\ \mathbf{L} &= q * (0, \hat{y}) * q^{-1}, \\ \mathbf{M} &= q * (0, \hat{z}) * q^{-1} \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Daha sonra (3.6), (3.7), (3.8) eşitlikleri göz önünde bulundurularak $\mathbf{T}$ için aşağıdaki eşitlik hesaplanabilir, [11];

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= dq * (0, \hat{x}) * q^{-1} + q * (0, \hat{x}) * dq^{-1} \\ &= \frac{1}{2}q * (0, \mathbf{k}) * (0, \hat{x}) * q^{-1} + q * (0, \hat{x}) * -\frac{1}{2}(0, \mathbf{k}) * q^{-1} \\ &= \frac{1}{2}[q * [(0, \mathbf{k}) * (0, \hat{x}) - (0, \hat{x}) * (0, \mathbf{k})] * q^{-1}] \\ &= q * (0, \mathbf{k}) * (0, \hat{x}) * q^{-1} \end{aligned}$$

3.2 Bir Yüzeyin Eğriliklerinin Hesaplanması

Non-dejenere (u, v) koordinatlarıyla verilen bir yüzey $\mathcal{K}(u, v)$ olsun. $\mathcal{K}(u, v)$ yüzeyinin birinci türevleri $\mathbf{T}_1 = \mathcal{K}_u = \partial\mathcal{K}/\partial u$, $\mathbf{T}_2 = \mathcal{K}_v = \partial\mathcal{K}/\partial v$ olmak üzere ($\mathcal{K}_u \cdot \mathcal{K}_v \neq 0$ ise Gram-Schmidt yöntemiyle ortogonalleştirilerek)

$$\mathbf{N} = \mathcal{K}_u \wedge \mathcal{K}_v$$

dir. O halde $\mathcal{K}(u, v)$ yüzeyi üzerinde bir yüzey çatısı

$$\{\mathbf{T}_1(u, v), \mathbf{T}_2(u, v), \mathbf{N}(u, v)\} \quad (3.9)$$

olarak yazılabilir, [11].

$U = \mathcal{K}_u \cdot \nabla$, $V = \mathcal{K}_v \cdot \nabla$ olarak alınırsa

$$\nabla_U \mathbf{N} \wedge \nabla_V \mathbf{N} = K(U, V), \quad (3.10)$$

$$\nabla_U \mathbf{N} \wedge V + U \wedge \nabla_V \mathbf{N} = 2H(U, V) \quad (3.11)$$

eşitlikleri (U, V) vektör alanlarının herhangi lineer bağımsız lokal eğrilikleri olarak ifade edilebilir, [10, 11]. Ayrıca (3.9) çatısı ve (3.1), (3.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v) \\ \mathbf{T}_2(u, v) \\ \mathbf{N}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_3(u, v) & -a_2(u, v) \\ -a_3(u, v) & 0 & a_1(u, v) \\ a_2(u, v) & -a_1(u, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v) \\ \mathbf{T}_2(u, v) \\ \mathbf{N}(u, v) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v) \\ \mathbf{T}_2(u, v) \\ \mathbf{N}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_3(u, v) & -b_2(u, v) \\ -b_3(u, v) & 0 & b_1(u, v) \\ b_2(u, v) & -b_1(u, v) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v) \\ \mathbf{T}_2(u, v) \\ \mathbf{N}(u, v) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

yazılabilir. (3.12) ve (3.13) eşitliklerinden

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathbf{N}(u, v)}{\partial v} \end{bmatrix} = [\mathcal{L}] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(u, v) \\ \mathbf{T}_2(u, v) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

elde edilir. O halde $\mathcal{K}(u, v)$ yüzeyinin Gauss eğriliği (3.14) den

$$K = \det [\mathcal{L}]$$

ve ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} i z [\mathcal{L}]$$

dir, [11].

Diğer yandan 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\mathcal{K}(u, v)$ yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki şekilde de hesaplanılabilir:

$\mathcal{K}(u, v)$, $\mathbb{R}_1^3$ de bir yüzey ve $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ bir immersiyon olsun. Yani φ diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\forall P \in \mathcal{K}$ için

$$d\varphi_P : T_P(\mathcal{K}) \rightarrow T_{\varphi(P)}(\mathbb{R}_1^3)$$

birebirdir. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\langle, \rangle_P$ Lorentz metriğinin φ ile geri getirilmiş g_P olsun. Buna göre $g_P = \varphi^* (\langle, \rangle_P)$ olduğundan $\forall u, v \in T_P(\mathcal{K})$ olmak üzere

$$g_P(u, v) = \langle u, v \rangle_P = \langle d\varphi_P(u), d\varphi_P(v) \rangle$$

olur. Burada $T_P(\mathcal{K})$ uzayı üç tipte olabilir:

- i) g_P pozitif tanımlı ise $T_P(\mathcal{K})$ spacelike düzlemdir,
- ii) g_P metriğinin indeksi 1 ise $T_P(\mathcal{K})$ timelike düzlemdir,
- iii) g_P dejenere metrik ise $T_P(\mathcal{K})$ lightlike düzlemdir.

$\mathcal{K}(u, v)$ yüzeyi içinde $\varphi(U)$ diferensiyellenebilir yüzeyi için $Q \in U$ ve $\varphi(Q) = P$ olmak üzere

$$\varphi_u(Q) = \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} (Q) \right), \quad \varphi_v(Q) = \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} (Q) \right)$$

olarak tanımlanır. $\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q)\}$ kümesi $T_P(\mathcal{K})$ uzayının bir bazıdır.

$$\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q)\}$$

bazının denklik sınıfını, $T_P(\mathcal{K})$ vektör uzayını pozitif yönü olarak alacağız. Böylece $\varphi(U)$ basit yüzeyinin her bir P noktasındaki teğet düzlemi yönlendirilmiş olur. $\varphi(U)$ basit yüzeyinin her bir P noktasında $\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q), N(P)\}$ kümesi $T_P(\mathbb{R}^3)$ uzayının pozitif yönlü bir bazı olacak biçimde $\varphi(U)$ üstünde, $\mathfrak{n}$ birim normal vektör alanı tek olarak belirlidir ve

$$\mathfrak{n} = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

dir. Bu $\mathfrak{n}$ vektör alanına $\varphi(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim normal vektör alanı diyeceğiz.

$\mathfrak{n}, \varphi(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim normal vektör alanı ise,

$$\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q), -\mathfrak{n}(P)\}$$

kümesi $T_P\mathbb{R}^3$ uzayının negatif yönlü bir çatı alanı olur. $-\mathfrak{n}$ vektör alanına, $\varphi(U)$ basit yüzeyinin negatif yönlü birim normal vektör alanı denir. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $\mathcal{K}$ yüzeyini gözönüne alalım. $P \in \mathcal{K}$ olsun, P noktasını içeren en az bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunduğunu biliyoruz. Buna göre, P noktasında

$\varphi(U)$ basit yüzeyinden elde edilen pozitif yönlü bir $\mathfrak{m}(P)$ birim normal vektörü vardır. P noktasında, P noktasını içeren başka bir $\varphi_*(H)$ basit yüzeyine göre de pozitif yönlü $Y(P)$ birim normal vektör alanı vardır.

$$Y(P) = \mathfrak{m}(P) \text{ veya } Y(P) = -\mathfrak{m}(P)$$

olduğu açıktır, [18].

$\mathcal{K}$ yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu Minkowski uzayı ve $\bar{\mathcal{K}}$ yarı-Riemann hiperyüzeyi olarak da (U, φ) parametrizasyonu ile verilen, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{aligned}$$

ile belirli olan $\varphi(U)$ yüzeyi göz önüne alınsın. Lineer bağımsız $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ cümlesi, yüzeyin vektör alanlarının bir bazıdır. Yüzeyin birim normali

$$\mathfrak{m} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

ile belirlidir. Yüzeyin I . formunu, yani metriğini hesaplamadan önce bazı eşitlikler verilecektir.

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

olup

$$\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \rangle_L = \left\langle \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}, \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \right\rangle_L$$

dir. Lagrange özdeşliğinden

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \rangle_L &= (\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_L)^2 - \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_L \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L \\ &= F^2 - EG \end{aligned}$$

elde edilir. Yüzeyin I . temel formunu hesaplamak için, φ nin tam diferensiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$$

ile belirlidir. Buradan

$$\begin{aligned} I &= (ds)^2 = \langle d\varphi, d\varphi \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle (dv)^2 \\ &= E (du)^2 + 2F dudv + G (dv)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2F \frac{du}{dv} + G$$

ve $\lambda = \frac{du}{dv}$, $I' = \frac{(ds)^2}{(dv)^2}$ olmak üzere

$$I' = E\lambda^2 + 2F\lambda + G$$

elde edilir. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi üzerindeki $I = (ds)^2$ indirgenmiş metriğinin pozitif tanımlı veya indefinit olup olmadığını incelemek ile, $I = (dv)^2 I'$ olduğundan I' yü incelemek aynıdır.

$\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\bar{\mathcal{K}}$ olsun. $p \in \bar{\mathcal{K}}$ ve $\forall v_p, w_p \in T_p(\bar{\mathcal{K}})$ için $\langle v_p, w_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0$ önermesi sağlanıyorsa v_p ye $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir non-dejenere yüzey denir. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

ile belirlidir. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi üzerindeki metriğin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0 \text{ veya } EG - F^2 \neq 0$$

olmasıdır, [6,23].

Tanım 3.2.1

3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\bar{\mathcal{K}}$ olsun. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\bar{\mathcal{K}}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir, [5].

Tanım 3.2.2

3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\bar{\mathcal{K}}$ olsun. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\bar{\mathcal{K}}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike yüzey denir, [5].

3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\bar{\mathcal{K}}$ ve M nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $\forall p \in \bar{\mathcal{K}}$ için

$$K(p) = \varepsilon \det S_p$$

ifadesine, $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği ve $K : \bar{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Burada, $\varepsilon = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = \pm 1$ ile belirlidir. $\mathfrak{w}$, $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = -1$ dir. Bu durumda, $K(p) = -\det S_p$ dir. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi timelike ise $\varepsilon = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = 1$ dir. Bu durumda, $K(p) = \det S_p$ dir. Ayrıca $\forall p \in \bar{\mathcal{K}}$ için

$$H(p) = \frac{1}{2} \varepsilon i z S_p$$

ifadesine, $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği ve $H : \bar{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Burada, $\varepsilon = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = \pm 1$ dir. $\mathfrak{w}$, $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi spacelike ise $\varepsilon = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = -1$ dir. Bu durumda, $H(p) = -\frac{1}{2} i z S_p$ dir. $\bar{\mathcal{K}}$ yüzeyi timelike ise $\varepsilon = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = 1$ dir. Bu durumda, $H(p) = \frac{1}{2} i z S_p$ dir. $H = 0$ yani $EN + GL - 2FM = 0$ ise bu yüzeye minimal yüzey denir, [23].

Teorem 3.2.3 $X : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathcal{K}$ yüzeyinin spacelike bir immersiyonu olsun. X in Gauss ve ortalama eğriliği

$$\begin{aligned} K &= -\frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ H &= -\frac{1}{2} \frac{Ge - Eg - 2Ff}{EG - F^2} \end{aligned}$$

olur (immersiyonun timelike olması durumunda formüllerde sadece işaret değişir), [18].

4. BÖLÜM

4.1. Kuaterniyonik Deniz Kabuğu Yüzeyleri ve Karakterizasyonları

Bu bölümde, ilk olarak Minkowski uzayında sırasıyla x , y ve z eksenleri etrafında dönerek oluşan helikal spiraller tanımlanacaktır. Fakat bu çalışmada ele alınan helikal spiralın z -ekseni etrafında dönerek oluştuğu kabul edilecektir. Daha sonra bu eğriyi merkez eğrisi olarak alan ve yeni bir yüzey olan deniz kabuğu yüzeyi tanımlanacaktır. Böylece bu eğrinin bazı karakterizasyonları yardımıyla kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyi tanımlanıp, bu yüzeyin bazı özellikleri araştırılacaktır.

Ayrıca $g(,) = -dx^2 + dy^2 + dz^2$ metriği kullanılarak dönme eksenini sırasıyla x -timelike, y -spacelike, z -spacelike olan helikal spiral aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 4.1.1 $\mathbb{R}_1^3$ de timelike x -ekseni etrafında dönme açısı ξ , negatif olmayan büyüklük sabitleri k_r ve k_z , başlangıç yarıçap ve yükseklik değerleri sırasıyla r_0 ve z_0 olmak üzere yarıçap ve yükseklik fonksiyonları

$$\begin{aligned} r(\xi) &= r_0 e^{k_r \xi}, \\ z(\xi) &= z_0 e^{k_z \xi} \end{aligned}$$

ile verilirse, o zaman bir helikal spiral

$$\mathcal{H}(\xi) = (z(\xi), r(\xi) \cos \xi, r(\xi) \sin \xi)$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan bir deniz kabuğu yüzeyi oluşturulurken helikal spiralın üzerinde tanımlanan aralık, yükseklik ve yarıçap gibi üstel olarak büyüyen bir aralıktır. Bu aralık bir $\mathcal{P}(\varphi)$ şekil fonksiyonu ve $a(\xi) = a_0 e^{k_a \xi}$ üstel büyüme fonksiyonunun çarpımıyla oluşur.

Tanım 4.1.2 $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike y -ekseni etrafında dönme açısı γ , negatif olmayan büyüklük sabitleri k_r ve k_z , başlangıç yarıçap ve yükseklik değerleri sırasıyla r_0 ve z_0 olmak üzere yarıçap ve yükseklik fonksiyonları

$$\begin{aligned} r(\gamma) &= r_0 e^{k_r \gamma}, \\ z(\gamma) &= z_0 e^{k_z \gamma} \end{aligned}$$

ile verilirse, o zaman bir helikal spiral

$$\mathcal{H}(\gamma) = (r(\gamma) \sinh \gamma, z(\gamma), r(\gamma) \cosh \gamma)$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan bir deniz kabuğu yüzeyi oluşturulurken helikal spiralin üzerinde tanımlanan aralık, yükseklik ve yarıçap gibi üstel olarak büyüyen bir aralıktır. Bu aralık bir $\mathcal{P}(\varphi)$ şekil fonksiyonu ve $a(\gamma) = a_0 e^{k_a \gamma}$ üstel büyüme fonksiyonunun çarpımıyla oluşur.

Tanım 4.1.3 $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike z -ekseni etrafında dönme açısı θ , negatif olmayan büyüklük sabitleri k_r ve k_z , başlangıç yarıçap ve yükseklik değerleri sırasıyla r_0 ve z_0 olmak üzere yarıçap ve yükseklik fonksiyonları

$$\begin{aligned} r(\theta) &= r_0 e^{k_r \theta}, \\ z(\theta) &= z_0 e^{k_z \theta} \end{aligned}$$

ile verilirse, o zaman bir helikal spiral

$$\mathcal{H}(\theta) = (r(\theta) \sinh \theta, r(\theta) \cosh \theta, z(\theta)) \quad (4.1)$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan bir deniz kabuğu yüzeyi oluşturulurken helikal spiralin üzerinde tanımlanan aralık, yükseklik ve yarıçap gibi üstel olarak büyüyen bir aralıktır. Bu aralık bir $\mathcal{P}(\varphi)$ şekil fonksiyonu ve $a(\theta) = a_0 e^{k_a \theta}$ üstel büyüme fonksiyonunun çarpımıyla oluşur.

Buna göre 3-boyutlu Minkowski uzayında bir deniz kabuğu yüzeyi aşağıdaki gibi ifade edilir.

Önerme 4.1.4 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.1) denkleminde verilen helikal spiralin başlangıç aralık büyüklüğü a_0 , negatif olmayan büyüme oranı k_a olmak üzere aşağıdaki durumlar mevcuttur;

i) Eğer $\mathcal{H}(\theta)$ timelike asli normale sahip helikal spiral ise deniz kabuğu yüzeyi;

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) (\sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{B}(\theta)), \quad (4.2)$$

ii) Eğer $\mathcal{H}(\theta)$ timelike binormale sahip helikal spiral ise deniz kabuğu yüzeyi;

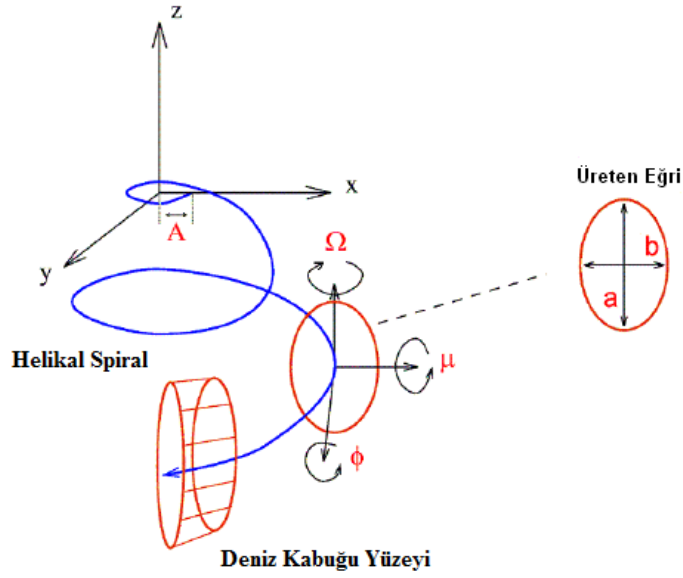
$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) (\cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \sinh \varphi \mathbf{B}(\theta)), \quad (4.3)$$

iii) Eğer $\mathcal{H}(\theta)$ timelike bir helikal spiral ise deniz kabuğu yüzeyi;

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) (\cos \varphi \mathbf{N}(\theta) + \sin \varphi \mathbf{B}(\theta)) \quad (4.4)$$

formülleri ile verilir.

İspat



Şekil 4.1. Deniz kabuğu yüzeyinin oluşumu, [28].

$\mathbb{R}_1^3$ de verilen bir eğri $\mathcal{H}(\theta)$ ve bu eğrinin timelike asli normale sahip Frenet çatı alanı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun. Diğer taraftan şekil 4.1 de görüldüğü gibi helikal spiral üzerinde $\mathbf{NB}$ düzlemindeki eğri için

$$-y^2 + z^2 = 1$$

olduğundan

$$y = \sinh \varphi, \quad z = \cosh \varphi$$

elde edilir. O halde merkez eğrisi $\mathcal{H}(\theta)$, şekil fonksiyonu $\mathcal{P}(\varphi)$ ve büyüme fonksiyonu $a(\theta)$ olmak üzere $\mathbb{R}_1^3$ de deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) (\sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{B}(\theta))$$

dir.

Teorem 4.1.5 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.2) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir spacelike

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \sinh \varphi + \cosh \varphi \mathbf{B}(\theta) \quad (4.5)$$

birim kuaterniyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) = & \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) \\ & + \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \bar{\mathbf{T}}(\theta)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

dir.

İspat (4.5) eşitliği ile verilen spacelike kuaterniyonunun her iki yanı soldan $\mathbf{N}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{B}(\theta)$$

dır. $\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{B}(\theta) = -\mathbf{T}(\theta)$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) - \cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) \quad (4.7)$$

elde edilir. Benzer olarak $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonunun her iki yanı sağdan $\mathbf{N}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) = \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) \quad (4.8)$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) denklemlerinden

$$\sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) = \frac{1}{2} [\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta)] \quad (4.9)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (4.5) ile verilen $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonunun her iki yanı sağdan $\mathbf{T}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{T}(\theta) = \sinh \varphi \mathbf{T}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) \quad (4.10)$$

ve son elde edilen eşitliğin her iki yanı soldan $\mathbf{T}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{T}(\theta) = \sinh \varphi - \cosh \varphi \mathbf{B}(\theta) \quad (4.11)$$

bulunur. Böylece (4.5) ve (4.11) eşitliklerinden

$$\cosh \varphi \mathbf{B}(\theta) = \frac{1}{2} [\mathbf{q}(\varphi, \theta) - \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{T}(\theta)]$$

elde edilir. Ayrıca

$$-\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{T}(\theta) = \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \bar{\mathbf{T}}(\theta)$$

olduğundan

$$\cosh \varphi \mathbf{B}(\theta) = \frac{1}{2}[\mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \bar{\mathbf{T}}(\theta)] \quad (4.12)$$

dir. (4.9) ve (4.12) den

$$\begin{aligned} \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{B}(\theta) &= \frac{1}{2}[\mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) + \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) \\ &\quad + \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \bar{\mathbf{T}}(\theta)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

olur. (4.13) eşitliği (4.2) de yerine yazılırsa deniz kabuğu yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) &= \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) \\ &\quad + \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \bar{\mathbf{T}}(\theta)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.2) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir spacelike

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \sinh \varphi + \cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) \quad (4.14)$$

birim kuaterniyonu yardımıyla

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) \quad (4.15)$$

dir.

İspat Minkowski uzayında (4.14) eşitliği ile verilen spacelike kuaterniyonunun her iki yanı soldan $\mathbf{N}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{T}(\theta) \quad (4.16)$$

dir. $\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{T}(\theta) = \mathbf{B}(\theta)$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \cosh \varphi \mathbf{B}(\theta) \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) eşitliği (4.2) de yerine yazılırsa deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta)$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.7 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.3) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve de bir spacelike vektör parçalı timelike

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cosh \varphi + \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta) \quad (4.18)$$

birim kuaterniyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) = & \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{T}(\theta) * (\mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) \\ & * \mathbf{B}(\theta)) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * (\mathbf{N}(\theta) + \bar{\mathbf{T}}(\theta))] \end{aligned} \quad (4.19)$$

dir.

İspat Spacelike vektör parçalı timelike bir kuaterniyon (4.18) eşitliği ile verilsin. (4.18) kuaterniyonunun her iki yanı soldan $\mathbf{T}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) + \sinh \varphi \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{N}(\theta) \quad (4.20)$$

dır. $\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{N}(\theta) = \mathbf{B}(\theta)$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) + \sinh \varphi \mathbf{B}(\theta) \quad (4.21)$$

elde edilir. Benzer olarak $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonunun her iki yanı sağdan $\mathbf{T}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{T}(\theta) = \cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) - \sinh \varphi \mathbf{B}(\theta) \quad (4.22)$$

bulunur. O halde (4.21) ve (4.22) denklemlerinden

$$\sinh \varphi \mathbf{B}(\theta) = \frac{1}{2} [\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \bar{\mathbf{T}}(\theta)] \quad (4.23)$$

bulunur.

Diğer taraftan (4.21) ve (4.22) denklemleri tekrar göz önüne alınırsa

$$\cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) = \frac{1}{2} [\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{T}(\theta)] \quad (4.24)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki yanını tekrar sağdan $\mathbf{B}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\cosh \varphi \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{B}(\theta) = \frac{1}{2} [\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{B}(\theta)] \quad (4.25)$$

dir. $\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{B}(\theta) = \mathbf{N}(\theta)$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) = \frac{1}{2} [\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta)] \quad (4.26)$$

elde edilir. Bu durumda (4.23) ve (2.26) dan

$$\begin{aligned} \cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \sinh \varphi \mathbf{B}(\theta) &= \frac{1}{2} [\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{T}(\theta) \\ &\quad * \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) \\ &\quad * \mathbf{N}(\theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * \bar{\mathbf{T}}(\theta)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

olur. (4.27) eşitliği (4.3) de yerine yazılırsa deniz kabuğu yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) &= \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{T}(\theta) * (\mathbf{q}(\varphi, \theta) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) \\ &\quad * \mathbf{B}(\theta)) + \mathbf{q}(\varphi, \theta) * (\mathbf{N}(\theta) + \bar{\mathbf{T}}(\theta))] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.7 yardımıyla aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

Sonuç 4.1.8 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.22) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ spacelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyonu için spacelike $\mathbf{N}(\theta)$ vektörüne dik $\mathbf{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ birim timelike vektörleri verilsin. O halde $\mathbf{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise deniz kabuğu yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) &= \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{T}(\theta) * (\mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) \\ &\quad + \mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta)) + \mathbf{r}(\varphi, \theta) \\ &\quad * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) * (\mathbf{N}(\theta) + \bar{\mathbf{T}}(\theta))] \end{aligned} \quad (4.28)$$

dir.

İspat Spacelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyon (4.18) ile verilen

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cosh \varphi + \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta)$$

olsun. (4.18) kuaterniyonu ile birim timelike $\mathbf{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonları için (2.1) denkleminde

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = |\mathbf{p}(\varphi, \theta)| |\mathbf{r}(\varphi, \theta)| \cosh \varphi + |\mathbf{p}(\varphi, \theta)| |\mathbf{r}(\varphi, \theta)| \sinh \varphi \mathbf{N}(\theta)$$

dir. Ayrıca

$$\langle \mathbf{p}(\varphi, \theta), \mathbf{r}(\varphi, \theta) \rangle_L = -|\mathbf{p}(\varphi, \theta)| |\mathbf{r}(\varphi, \theta)| \cosh \varphi$$

ve

$$\mathbf{p}(\varphi, \theta) \wedge_L \mathbf{r}(\varphi, \theta) = |\mathbf{p}(\varphi, \theta)| |\mathbf{r}(\varphi, \theta)| \sinh \varphi$$

olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = -\langle \mathbf{p}(\varphi, \theta), \mathbf{r}(\varphi, \theta) \rangle_L + \mathbf{p}(\varphi, \theta) \wedge_L \mathbf{r}(\varphi, \theta)$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$V(\mathbf{p}(\varphi, \theta), \mathbf{r}(\varphi, \theta)) = \mathbf{p}(\varphi, \theta) \wedge_L \mathbf{r}(\varphi, \theta)$$

ve

$$S(\mathbf{p}(\varphi, \theta), \mathbf{r}(\varphi, \theta)) = \langle \mathbf{p}(\varphi, \theta), \mathbf{r}(\varphi, \theta) \rangle_L$$

olduğu ve sırasıyla $V(\mathbf{p}(\varphi, \theta), \mathbf{r}(\varphi, \theta))$, $S(\mathbf{p}(\varphi, \theta), \mathbf{r}(\varphi, \theta))$ nin alterne ve simetri özelliklerinden

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = -[S(\mathbf{r}(\varphi, \theta), \mathbf{p}(\varphi, \theta)) + V(\mathbf{r}(\varphi, \theta), \mathbf{p}(\varphi, \theta))]$$

bulunur. O halde

$$S(\mathbf{r}(\varphi, \theta), \mathbf{p}(\varphi, \theta)) + V(\mathbf{r}(\varphi, \theta), \mathbf{p}(\varphi, \theta)) = \mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}(\varphi, \theta)$$

olduğundan

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = -\mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}(\varphi, \theta)$$

dir. Böylece

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta)$$

olduğu (4.19) da yerine yazılırsa deniz kabuğu yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) &= \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{T}(\theta) * (\mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) \\ &\quad + \mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta)) + \mathbf{r}(\varphi, \theta) \\ &\quad * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) * (\mathbf{N}(\theta) + \bar{\mathbf{T}}(\theta))] \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.9 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.19) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi için $\mathbf{N}(\theta)$ birim spacelike vektörüne dik $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ birim spacelike vektörleri verilsin. O halde $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasında ki açı φ ise bu deniz kabuğu yüzeyinin denklemi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) = & \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{T}(\theta) * (\mathfrak{l}(\varphi, \theta) * \mathfrak{s}^{-1}(\varphi, \theta) \\ & + \mathfrak{l}(\varphi, \theta) * \mathfrak{s}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta)) + \mathfrak{l}(\varphi, \theta) \\ & * \mathfrak{s}^{-1}(\varphi, \theta) * (\mathbf{N}(\theta) + \bar{\mathbf{T}}(\theta))] \end{aligned} \quad (4.29)$$

dir. Burada $|\langle \mathfrak{s}(\varphi, \theta), \mathfrak{l}(\varphi, \theta) \rangle| > 1$ dir.

Teorem 4.1.10 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.3) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir spacelike vektör parçalı timelike

$$\mathfrak{q}(\varphi, \theta) = \cosh \varphi + \sinh \varphi \mathbf{T}(\theta) \quad (4.30)$$

birim kuaterniyonu yardımıyla

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathfrak{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) \quad (4.31)$$

dir.

İspat Spacelike vektör parçalı timelike bir kuaterniyon (4.30) eşitliği ile verilen $\mathfrak{q}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonu olsun. (4.30) un her iki yanı sağdan $\mathbf{N}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathfrak{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) = \cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \sinh \varphi \mathbf{T}(\theta) * \mathbf{N}(\theta)$$

dır. $\mathbf{T}(\theta) * \mathbf{N}(\theta) = \mathbf{B}(\theta)$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathfrak{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) = \cosh \varphi \mathbf{N}(\theta) + \sinh \varphi \mathbf{B}(\theta) \quad (4.32)$$

elde edilir. (4.32) eşitliği (4.3) de yerine yazılırsa deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathfrak{q}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta)$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.10 yardımıyla aşağıdaki sonuçlar yazılabilir.

Sonuç 4.1.11 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.31) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ spacelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyonu için spacelike $\mathbf{T}(\theta)$ vektörüne dik $\mathbf{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ birim timelike vektörleri verilsin. O halde $\mathbf{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) \quad (4.33)$$

dir.

Sonuç 4.1.12 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.31) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi için $\mathbf{T}(\theta)$ birim spacelike vektörüne dik $\mathbf{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{l}(\varphi, \theta)$ birim spacelike vektörleri verilsin. O halde $\mathbf{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{l}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise bu deniz kabuğu yüzeyinin denklemi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{l}(\varphi, \theta) * \mathbf{s}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta) \quad (4.34)$$

dir. Burada $|\langle \mathbf{s}(\varphi, \theta), \mathbf{l}(\varphi, \theta) \rangle| > 1$ dir.

Teorem 4.1.13 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.4) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir timelike vektör parçalı timelike

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{T}(\theta) \quad (4.35)$$

birim kuaterniyonu yardımıyla

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) \quad (4.36)$$

dir.

İspat (4.35) eşitliği ile verilen timelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyonunun her iki yanı soldan $\mathbf{N}(\theta)$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cos \varphi \mathbf{N}(\theta) + \sin \varphi \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{T}(\theta)$$

dır. $\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{T}(\theta) = \mathbf{B}(\theta)$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cos \varphi \mathbf{N}(\theta) + \sin \varphi \mathbf{B}(\theta) \quad (4.37)$$

elde edilir. (4.37) eşitliği (4.4) de yerine yazılırsa deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{q}(\varphi, \theta)$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.13 yardımıyla aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.1.14 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.36) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ timelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyonu için timelike $\mathbf{T}(\theta)$ vektörüne dik $\mathbf{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{l}(\varphi, \theta)$ birim spacelike vektörleri verilsin. O halde $\mathbf{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{l}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathbf{s}(\varphi, \theta) * \mathbf{l}(\varphi, \theta) \quad (4.38)$$

dir.

İspat Timelike vektör parçalı timelike bir kuaterniyon (4.35) ile verilen

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{T}(\theta)$$

olsun. (4.35) ile birim spacelike $\mathbf{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{l}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonları için (2.2) denkleminde

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = |\mathbf{s}(\varphi, \theta)| |\mathbf{l}(\varphi, \theta)| \cos \varphi + |\mathbf{s}(\varphi, \theta)| |\mathbf{l}(\varphi, \theta)| \sin \varphi \mathbf{T}(\theta)$$

dir. Ayrıca

$$\langle \mathbf{s}(\varphi, \theta), \mathbf{l}(\varphi, \theta) \rangle_L = |\mathbf{s}(\varphi, \theta)| |\mathbf{l}(\varphi, \theta)| \cos \varphi$$

ve

$$\mathbf{s}(\varphi, \theta) \wedge_L \mathbf{l}(\varphi, \theta) = |\mathbf{s}(\varphi, \theta)| |\mathbf{l}(\varphi, \theta)| \sin \varphi$$

olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \langle \mathbf{s}(\varphi, \theta), \mathbf{l}(\varphi, \theta) \rangle_L + \mathbf{s}(\varphi, \theta) \wedge_L \mathbf{l}(\varphi, \theta)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = S(\mathbf{s}(\varphi, \theta), \mathbf{l}(\varphi, \theta)) + V(\mathbf{s}(\varphi, \theta), \mathbf{l}(\varphi, \theta))$$

olduğundan

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = S(\mathbf{s}(\varphi, \theta), \mathbf{l}(\varphi, \theta)) + V(\mathbf{s}(\varphi, \theta), \mathbf{l}(\varphi, \theta))$$

bulunur.

$$\mathbf{q}(\varphi, \theta) = \mathbf{s}(\varphi, \theta) * \mathbf{l}(\varphi, \theta) \quad (4.39)$$

dir. (4.39) eşitliği (4.36) de yerine yazılırsa deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathfrak{s}(\varphi, \theta) * \mathfrak{l}(\varphi, \theta)$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Kuaterniyonik Deniz Kabuğu Yüzeyinin Eğrilikleri

Bu bölümde, Minkowski uzayında split kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri klasik diferensiyel geometriden farklı olarak kuaterniyonik işlemlerle elde edilecektir. Ayrıca bu yüzey üzerindeki ortonormal çatı alanı $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$ olmak üzere $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}$ çatısının kartezyen eksen üzerinde

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{X} * (0, x) * \mathbf{X}^{-1}, \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{X} * (0, y) * \mathbf{X}^{-1}, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{X} * (0, z) * \mathbf{X}^{-1} \end{aligned} \quad (4.40)$$

dönüşümleri tanımlansın. O halde aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.2.1 $\mathbb{R}_1^3$ de kuaterniyonik bir deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathfrak{s}(\varphi, \theta) * \mathfrak{l}(\varphi, \theta)$$

ise bu yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathfrak{S}} &= 4((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\ &\quad + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\ &\quad \times (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\ddot{a}w_0 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\ddot{a}w_1 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_1) \\ &\quad + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\ddot{a}w_2 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\ddot{a}w_3 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_3)) \\ &\quad - ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\ &\quad + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))(-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\ &\quad \times (\mathcal{P}\ddot{a}w_0 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\ddot{a}w_1 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\ &\quad \times (\dot{h}_2 + \mathcal{P}\ddot{a}w_2 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\ddot{a}w_3 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_3))), \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{S}} &= \frac{1}{2}(2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\ &\quad + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\ &\quad - (2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}\ddot{a}w_0 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\ddot{a}w_1 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_1) \\ &\quad + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\ddot{a}w_2 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\ &\quad \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\ddot{a}w_3 + \mathcal{P}\ddot{a}w'_3))) \end{aligned}$$

dır.

İspat $\mathbb{R}_1^3$ de (4.38) ile verilen yüzeyde

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\theta) * \mathfrak{s}(\varphi, \theta) * \mathfrak{l}(\varphi, \theta) &= [-n_1(s_3l_2 - s_2l_3) + n_2(s_3l_1 - s_1l_3) \\
&\quad + n_3(s_1l_2 - s_2l_1), n_1(-s_1l_1 + s_2l_2 + s_3l_3) \\
&\quad + n_3(s_3l_1 - s_1l_3) - n_2(s_1l_2 - s_2l_1), \\
&\quad n_2(-s_1l_1 + s_2l_2 + s_3l_3) + n_3(s_3l_2 - s_2l_3) \\
&\quad - n_1(s_1l_2 - s_2l_1), n_3(-s_1l_1 + s_2l_2 + s_3l_3) \\
&\quad - n_2(s_3l_2 - s_2l_3) + n_1(s_3l_1 - s_1l_3)] \\
&= (w_1, w_2, w_3, w_4)
\end{aligned}$$

olduğundan bu yüzey

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta)(w_0, w_1, w_2, w_3) \quad (4.41)$$

olarak yeniden yazılabilir. $\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3)$ yüzeyinin φ ye ve θ ya göre türevleri sırası ile

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \varphi} = \mathfrak{S}_\varphi = (\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2, \mathfrak{S}'_3)$$

ve

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \theta} = \mathfrak{S}_\theta = (\dot{\mathfrak{S}}_1, \dot{\mathfrak{S}}_2, \dot{\mathfrak{S}}_3)$$

olmak üzere (3.6) dan

$$\mathbf{T}_1 = \mathfrak{S}_\varphi = \mathfrak{S} * (\mathfrak{S}^{-1} * \mathfrak{S}_\varphi) \quad (4.42)$$

ve

$$\mathbf{T}_2 = \mathfrak{S}_\theta = \mathfrak{S} * (\mathfrak{S}^{-1} * \mathfrak{S}_\theta) \quad (4.43)$$

yazılır. (4.41) eşitliğinden $\mathfrak{S}(\varphi, \theta)$ yüzeyinin birinci türevleri ve eşleniği sırasıyla

$$\mathfrak{S}^{-1} = (\mathcal{P}aw_0, -h_1 - \mathcal{P}aw_1, -h_2 - \mathcal{P}aw_2, -h_3 - \mathcal{P}aw_3), \quad (4.44)$$

$$\mathfrak{S}_\varphi = (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0, \mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1, \mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2, \mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3), \quad (4.45)$$

$$\mathfrak{S}_\theta = (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0, \dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1, \dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2, \dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3) \quad (4.46)$$

dir. Son iki eşitlik (4.42) de yerine yazılır ve kuaterniyon çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 = \mathfrak{S}_\varphi = \mathfrak{S} * \frac{1}{2} [& 2(\mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), \quad (4.47) \\
& 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) \\
& - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_2 = \mathfrak{S}_\theta = \mathfrak{S} * \frac{1}{2} [& 2(\mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)), 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \quad (4.48) \\
& \times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)), \\
& 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)), \\
& 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3))]
\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde elde edilen $\mathbf{T}_1(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{T}_2(\varphi, \theta)$, $\mathfrak{S}(\varphi, \theta)$ yüzeyinin ortogonal teğetleridir. Eğer $\mathbf{T}_1(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{T}_2(\varphi, \theta)$ ortogonal değil iseler Gram-Schimit yöntemiyle ortogonalleştirilebilirler. Diğer yandan $\mathbf{T}_1(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{T}_2(\varphi, \theta)$, $\mathfrak{S}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyinin teğetleri olduğundan ve (3.8), (3.13) ve (3.14) eşitliklerini sağlayacağından

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3) = 0, \\
& \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3) = 0
\end{aligned}$$

dır. O halde $\mathfrak{S}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyinin teğetleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 = \mathfrak{S}_\varphi = \mathfrak{S} * \frac{1}{2} [0, 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0 \\
\times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
- (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
\times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
+ \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), \\
2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
+ \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))] \quad (4.49)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_2 = \mathfrak{S}_\theta = \mathfrak{S} * \frac{1}{2} [0, 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0 \\
\times (\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) \\
- (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)), 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
\times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
+ \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
\times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)), 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) \\
- (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
\times (\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3))] \quad (4.50)
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 \wedge_L \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ ortogonal olduğundan

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 * \mathbf{T}_2$$

yazılır. (4.47) ve (4.48) denklemleri son eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} = & \frac{1}{4} \mathfrak{S} * [0, 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), \\
& 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))] * \mathfrak{S} * [0, 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}\dot{a}w'_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}\dot{a}w'_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}\dot{a}w'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}\dot{a}w'_3)), 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}\dot{a}w'_0) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}\dot{a}w'_1) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}\dot{a}w'_2) \\
& - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}\dot{a}w'_3)), 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}\dot{a}w'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}\dot{a}w'_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}\dot{a}w'_2) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}\dot{a}w'_3))]
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\mathfrak{S}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyi üzerinde $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$ çatı alanı elde edilir. Ayrıca (3.7) eşitliğinden

$$(\mathfrak{S}^{-1})_{\theta} = \mathfrak{S}_{\theta}^{-1} = \mathfrak{S}_{\theta}^{-1} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}^{-1}$$

dir. Ayrıca (3.8) den

$$\mathfrak{S}_{\theta}^{-1} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{S}^{-1} * \mathfrak{S}_{\theta}) * \mathfrak{S}^{-1} \quad (4.51)$$

yazılır. (4.46) eşitliği (4.51) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_\theta^{-1} = & -\frac{1}{2}[0, 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)), 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)), 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3))] * \mathfrak{S}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. Bu durumda (4.49) ve (4.52) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_\varphi * \mathfrak{S}_\theta^{-1} = & -\frac{1}{4}\mathfrak{S}*[4(-((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\
& \times ((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)) \\
& + ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\
& \times ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)) \\
& + ((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times ((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3))), \\
& 4(((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\dot{h}_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3)) \\
& - ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\dot{h}_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3))), 4((-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\dot{h}_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3)) \\
& - ((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1) + (-h_1 \\
& - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3))), \\
& 4((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\dot{h}_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3)) \\
& - ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\dot{h}_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2 + \dot{\mathcal{P}}aw_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3 + \dot{\mathcal{P}}aw_3)))*\mathfrak{S}^{-1}
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde yukarıdaki eşitlik $\mathbf{I} = (1, \mathbf{0})$ birim eleman olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_\varphi * \mathfrak{S}_\theta^{-1} &= -\frac{1}{4}[[4(-((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\
& \times ((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{\mathcal{P}}aw_0 + \dot{\mathcal{P}}aw_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1 + \dot{\mathcal{P}}aw_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3) + ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) \\
& - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)) + ((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) \\
& - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) \\
& - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)))\mathbf{I} \\
& + [4(((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) \\
& - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)) - ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)))\mathbf{T}_1 \\
& + [4((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\
& \times ((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)) - ((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3))]\mathbf{T}_2 + [4((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)) \\
& - ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\
& \times (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)))\mathbf{N}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Son eşitlikten $\mathfrak{S}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyinin Gauss eğriligi

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathfrak{S}} = & 4((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\
& \times (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)) \\
& - ((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))(-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)))
\end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan (4.40), (4, 49) ve (4, 50) eşitliklerinden

$$\mathfrak{S}_{\varphi} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_{\varphi}^{-1} + \mathfrak{S}_{\theta} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_{\theta}^{-1} = \mathfrak{S} * (0, x) * \mathfrak{S}^{-1} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_{\varphi}^{-1} + \mathfrak{S} * (0, y) * \mathfrak{S}^{-1} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_{\theta}^{-1}$$

dir. $\mathfrak{S}^{-1} * \mathfrak{S} = \mathbf{I}$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathfrak{S}_{\varphi} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_{\varphi}^{-1} + \mathfrak{S}_{\theta} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_{\theta}^{-1} = \mathfrak{S} * (0, x) * \mathfrak{S}_{\varphi}^{-1} * \mathfrak{S} * (0, y) * \mathfrak{S}_{\theta}^{-1}$$

olur. (3.8) ve (4.52) den

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{\varphi} * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_{\varphi}^{-1} = & -\frac{1}{2}\mathfrak{S} * [(0, 1, 0, 0) * (0, 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))) + (0, 0, 1, 0) * (0, 2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)), 2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_1 + \mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\dot{h}_2 + \mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\
& , 2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& (\dot{h}_1 + \mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)))] * \mathfrak{S}^{-1} - \mathfrak{S}_\theta * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_\theta^{-1}
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_\varphi * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_\varphi^{-1} = & -\frac{1}{2} [[(2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0 \\
& \times (\dot{h}_1 + \mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\dot{h}_3 + \mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) - (2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))) \mathbf{I} \\
& - [2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_1 + \mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_3 + \mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))] \mathbf{T}_1 - [2((-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))] \mathbf{T}_2 \\
& + [(2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) \\
& - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) - (2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1) \\
& \times (\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\
& + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\
& \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3))] \mathbf{N}] - \mathfrak{S}_\theta * \mathfrak{S} * \mathfrak{S}_\theta^{-1}
\end{aligned}$$

olacağından $\mathfrak{S}(\varphi, \theta)$ kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathfrak{S}} = & \frac{1}{2}(2((-h_2 - \mathcal{P}aw_2)(\mathcal{P}'aw_0 + \mathcal{P}aw'_0) + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\mathcal{P}'aw_1 + \mathcal{P}aw'_1) \\ & + \mathcal{P}aw_0(\mathcal{P}'aw_2 + \mathcal{P}aw'_2) - (-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}'aw_3 + \mathcal{P}aw'_3)) \\ & - (2((-h_1 - \mathcal{P}aw_1)(\mathcal{P}\dot{a}w_0 + \mathcal{P}a\dot{w}_0) + \mathcal{P}aw_0(\dot{h}_1 + \mathcal{P}\dot{a}w_1 + \mathcal{P}a\dot{w}_1) \\ & + (-h_3 - \mathcal{P}aw_3)(\dot{h}_2 + \mathcal{P}\dot{a}w_2 + \mathcal{P}a\dot{w}_2) - (-h_2 - \mathcal{P}aw_2) \\ & \times (\dot{h}_3 + \mathcal{P}\dot{a}w_3 + \mathcal{P}a\dot{w}_3)))\end{aligned}$$

dir.

5. BÖLÜM

Bu bölümde, ilk olarak Minkowski uzayında regüler spatial split kuaterniyonik iki eğri yardımıyla rasyonel açıortay yüzeyi tanımlanacaktır. Daha sonra benzer şekilde Minkowski uzayında bir nokta ve bir regüler spatial split kuaterniyonik eğri yardımıyla rasyonel açıortay yüzeyi tanımlanacaktır. Böylece elde edilen bu yüzeylerin dejenere durumları araştırılacak ve klasik diferensiyel geometriden farklı olarak kuaterniyonik işlemlerle bu yüzeylerin eğrilikleri hesaplanacaktır.

5.1. Kuaterniyonik Eğri-Eğri Açıortay Yüzeyi

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayı $\mathbb{Q}_\mathbb{H}$ kuaterniyonların kümesi ile gösterilsin. O halde Minkowski uzayında regüler spatial split kuaterniyonik iki eğri

$$\begin{aligned} \mu : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q}_\mathbb{H} \\ u &\rightarrow \mu(u) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u) e_i; \quad 1 \leq i \leq 3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \eta : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q}_\mathbb{H} \\ v &\rightarrow \eta(v) = \sum_{i=1}^3 \eta_i(v) e_i; \quad 1 \leq i \leq 3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

olsun. Ayrıca bu eğrilerin C^1 -sınıfından sürekli teğet vektör alanları sırasıyla $t_\mu = (t_1, t_2, t_3)$ ve $t_\eta = (t^1, t^2, t^3)$ ile verilsin.

Diğer taraftan, $\mu(u_0)$ noktasında $\mu(u)$ nun $t_\mu(u_0)$ teğet vektörüne ortogonal olan normal düzlemi $\mathfrak{B}_1(u_0)$ ve benzer şekilde $\eta(v_0)$ noktasında $\eta(v)$ nun $t_\eta(v_0)$ teğet vektörüne ortogonal olan normal düzlemi $\mathfrak{B}_2(v_0)$ olsun. $t_\mu(u)$ ve $t_\eta(v)$ teğet vektörleri sürekli olduklarından dolayı $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ eğrileri boyunca bu düzlemler sürekli olarak hareketlidir. Ayrıca $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$ noktası bu spatial split kuaterniyonik eğrilerin açıortayları üzerinde ise $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ noktaları için; $\mathfrak{B}_1(u)$ ve $\mathfrak{B}_2(v)$ düzlemleri eşzamanlı olarak $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$ noktasını içerirler. Bu durumda $\mathfrak{B}_1(u)$ ve $\mathfrak{B}_2(v)$ düzlemleri için $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$ noktası aşağıdaki iki lineer denklemleri sağlar:

$$\varepsilon(\mathfrak{F} - \mu) \varepsilon(\bar{t}_\mu) (\mathfrak{F} - \mu) * \bar{t}_\mu + \varepsilon(t_\mu) \varepsilon(\overline{\mathfrak{F} - \mu}) t_\mu * (\overline{\mathfrak{F} - \mu}) = 0, \quad (5.3)$$

$$\varepsilon(\mathfrak{F} - \eta) \varepsilon(\bar{t}_\eta) (\mathfrak{F} - \eta) * \bar{t}_\eta + \varepsilon(t_\eta) \varepsilon(\overline{\mathfrak{F} - \eta}) t_\eta * (\overline{\mathfrak{F} - \eta}) = 0. \quad (5.4)$$

Ayrıca $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ noktaları arasında bulunan $\mathfrak{B}_{12}(u, v)$ açıortay düzlemide $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$ noktasını içerir. Bu durumda $\mathfrak{B}_{12}(u, v)$ açıortay düzlemi $\mu(u) -$

$\eta(v)$ vektörüne dik ve $\mu(u)$ ile $\eta(v)$ nin orta noktası olan $\frac{\mu(u)+\eta(v)}{2}$ den geçer. Sonuç olarak $\mathfrak{B}_{12}(u, v)$ açıortay düzlemi için $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$ noktası aşağıdaki lineer denklemi sağlar:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\mathfrak{F} - \frac{\mu+\eta}{2} \right) \varepsilon (\overline{\mu - \eta}) \left(\mathfrak{F} - \frac{\mu+\eta}{2} \right) * (\overline{\mu - \eta}) \\ & + \varepsilon (\mu - \eta) \varepsilon \left(\overline{\mathfrak{F} - \frac{\mu+\eta}{2}} \right) (\mu - \eta) * \left(\overline{\mathfrak{F} - \frac{\mu+\eta}{2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Yukarıda elde edilen (5.3), (5.4), (5.5) lineer denklemleri dikkate alınır ve $\mu, \eta, t_\mu, t_\eta, \mathfrak{F} - \mu, \mathfrak{F} - \eta, \mu - \eta, \mathfrak{F} - \frac{\mu+\eta}{2}$ nin timelike olduğu kabul edilirse aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 5.1.1 $\mathbb{R}_1^3$ de u ve v parametreleri ile parametrelendirilmiş reel spatial split kuaterniyonik iki eğri sırasıyla $\mu, \eta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ve $\mathfrak{B}_1(u)$, $\mathfrak{B}_2(v)$ ve $\mathfrak{B}_{12}(u, v)$ düzlemlerinin tek kesişim noktası $\mathfrak{F}$ olsun. O halde bu iki eğri ile oluşan açıortay yüzeyi

$$\mathfrak{F}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \quad (5.6)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & t_1[t^2(\mu_3 - \eta_3) + t^3(\eta_2 - \mu_2)] + t_2[t^1(\mu_3 - \eta_3) + t^3(\eta_1 - \mu_1)] \\ & + t_3[t^1(\eta_2 - \mu_2) + t^2(\mu_1 - \eta_1)] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\mathcal{J}} [\mathfrak{m}_1(t^2(\eta_3 - \mu_3) + t^3(\mu_2 - \eta_2)) + t_2(\mathfrak{m}_2(\eta_3 - \mu_3) + t^3\mathfrak{m}_3) \\ & \quad + t_3(\mathfrak{m}_2(\mu_2 - \eta_2) - t^2\mathfrak{m}_3)], \\ f_2 &= \frac{1}{\mathcal{J}} [t_1(\mathfrak{m}_2(\mu_3 - \eta_3) - t^3\mathfrak{m}_3) + \mathfrak{m}_1(t^1(\mu_3 - \eta_3) + t^3(\eta_1 - \mu_1)) \\ & \quad + t_3(\mathfrak{m}_2(\mu_1 - \eta_1) - t^1\mathfrak{m}_3)], \\ f_3 &= \frac{1}{\mathcal{J}} [t_1(\mathfrak{m}_2(\mu_2 - \eta_2) - t^2\mathfrak{m}_3) + t_2(t^1\mathfrak{m}_3 + \mathfrak{m}_2(\eta_1 - \mu_1)) \\ & \quad - \mathfrak{m}_1(t^1(\mu_2 - \eta_2) + t^2(\eta_1 - \mu_1))] \end{aligned}$$

dir.

İspat. $\mathbb{E}_1^3$ de (5.3) ile elde edilen denklem göz önüne alınırsa

$$(\mathfrak{F} - \mu) * \bar{t}_\mu + t_\mu * (\overline{\mathfrak{F} - \mu}) = 0$$

lineer denklemi elde edilir. Ayrıca yukarıdaki denklem düzenlenip

$$\mathfrak{m}_1 = \mu * \bar{t}_\mu + t_\mu * \bar{\mu}$$

olduğu kabul edilirse

$$\mathfrak{F} * \bar{t}_\mu + t_\mu * \bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{m}_1 \quad (5.7)$$

dir. Benzer şekilde (5.4) ve (5.5) lineer denklemleri göz önüne alınıp

$$\mathfrak{m}_2 = \eta * \bar{t}_\eta + t_\eta * \bar{\eta}$$

ve

$$\mathfrak{m}_3 = \frac{1}{2} (\mu + \eta) * (\overline{\mu - \eta}) + \frac{1}{2} (\mu - \eta) * (\overline{\mu + \eta})$$

olduğu kabul edilirse

$$\mathfrak{F} * \bar{t}_\eta + t_\eta * \bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{m}_2, \quad (5.8)$$

$$\mathfrak{F} * (\overline{\mu - \eta}) + (\mu - \eta) * \bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{m}_3 \quad (5.9)$$

elde edilir.

Aynı u ve v için, $\mathfrak{B}_1(u)$, $\mathfrak{B}_2(v)$ ve $\mathfrak{B}_{12}(u, v)$ düzlemlerinin kesişim noktası $\mathfrak{F}$ olacağından bu açıortay noktası aşağıdaki lineer denklem sisteminin çözümüyle elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} * \bar{t}_\mu + t_\mu * \bar{\mathfrak{F}} &= \mathfrak{m}_1, \\ \mathfrak{F} * \bar{t}_\eta + t_\eta * \bar{\mathfrak{F}} &= \mathfrak{m}_2, \\ \mathfrak{F} * (\overline{\mu - \eta}) + (\mu - \eta) * \bar{\mathfrak{F}} &= \mathfrak{m}_3. \end{aligned}$$

Ayrıca yukarıdaki lineer denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} -t_1 & t_2 & t_3 \\ -t^1 & t^2 & t^3 \\ \eta_1 - \mu_1 & \mu_2 - \eta_2 & \mu_3 - \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{f}_2 \\ \mathfrak{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{m}_1 \\ \mathfrak{m}_2 \\ \mathfrak{m}_3 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

olarak yazılır. (5.10) eşitliği Cramer sistemiyle çözülürse

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} -t_1 & t_2 & t_3 \\ -t^1 & t^2 & t^3 \\ \eta_1 - \mu_1 & \mu_2 - \eta_2 & \mu_3 - \eta_3 \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} \mathbf{m}_1 & t_2 & t_3 \\ \mathbf{m}_2 & t^2 & t^3 \\ \mathbf{m}_3 & \mu_2 - \eta_2 & \mu_3 - \eta_3 \end{vmatrix}, \\ f_2 &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} -t_1 & \mathbf{m}_1 & t_3 \\ -t^1 & \mathbf{m}_2 & t^3 \\ \eta_1 - \mu_1 & \mathbf{m}_3 & \mu_3 - \eta_3 \end{vmatrix}, \\ f_3 &= \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{vmatrix} -t_1 & t_2 & \mathbf{m}_1 \\ -t^1 & t^2 & \mathbf{m}_2 \\ \eta_1 - \mu_1 & \mu_2 - \eta_2 & \mathbf{m}_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde rasyonel açıortay yüzeyi

$$\mathfrak{F}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

dir. Ayrıca f_1 , f_2 ve f_3 ün paydası daima sıfırdan farklıdır.

5.1.1. Dejenere Durumlar

Aynı düzlemde bulunan iki spatial split kuaterniyonik eğri $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ ise bu eğrilerin teğetleri ile $\mu(u) - \eta(v)$ daima lineer bağımlıdır. Yani (5.10) sisteminin çözümü yoktur. Sonuç olarak $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ eşdüzlemlidir.

I. Durum. $t_\mu(u_0) * t_\eta(v) = t_\eta(v) * t_\mu(u_0)$:

Eğer $t_\mu(u_0) * t_\eta(v) = t_\eta(v) * t_\mu(u_0)$ ise sabit $t_\mu(u_0)$ teğet vektörü için v nin her değerinde $t_\eta(v)$ teğet vektörü $t_\mu(u_0)$ ile lineer bağımlıdır. Ayrıca $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ regüler olduklarından $t_\mu(u_0) \neq 0$ ve $t_\eta(v) \neq 0$ dir. Her v için bu teğet vektörler birbirlerine paralel olacaklarından $\eta(v)$ eğrisi $t_\mu(u_0)$ vektörüne paraleldir. Benzer şekilde, aynı koşullar tüm u değerleri için sağlanırsa, $t_\mu(u)$ teğet vektör alanı $\eta(v)$ ye paralel olur. Bu durumda $\mu(u)$, $\eta(v)$ ya paralel olmalıdır. Yani, $\mu(u) * \eta(v) = \eta(v) * \mu(u)$ dir. Sonuç olarak $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ eşdüzlemlidir.

II. Durum. $(\mu(u_0) - \eta(v)) * t_\eta(v) = t_\eta(v) * (\mu(u_0) - \eta(v))$:

Eğer $t_\mu(u_0) * t_\eta(v) \neq t_\eta(v) * t_\mu(u_0)$ ise $t_\mu(u_0)$ ve $t_\eta(v)$ vektör alanları lineer bağımsızdır. Diğer taraftan $t_\mu(u_0)$, $t_\eta(v)$ ve $\mu(u_0) - \eta(v)$ vektörleri

lineer bağımsız olsun. Ayrıca varsayalımki her v için $\mu(u_0) - \eta(v) \neq 0$ ve $\mu(u_0) - \eta(v)$ ve $t_\eta(v)$ vektörleri lineer bağımlı olsun. Bu durumda

$$(\mu(u_0) - \eta(v)) * t_\eta(v) = t_\eta(v) * (\mu(u_0) - \eta(v))$$

dir. $\eta(v)$ regüler olduğu için $t_\eta(v) \neq 0$ dir. O halde bazı $\alpha(v) \in \mathbb{R}$ için

$$\mu(u_0) - \eta(v) = \alpha(v) t_\eta(v)$$

yazılabilir. Yani

$$\mu(u_0) = \eta(v) + \alpha(v) t_\eta(v)$$

olacağından $\mu(u_0)$, $\eta(v)$ nın teğet doğrusundadır. Ayrıca bu durum tüm u değerleri için sağlanırsa $\mu(u)$, $\eta(v)$ ye paralel olmalıdır. Yani, $\mu(u)$ ve $\eta(v)$ eşdüzlemlidir.

III. Durum. $h((\mu(u_0) - \eta(v)) \wedge_L t_\eta(v), t_\mu(u_0)) = 0$:

$\mu(u_0) - \eta(v)$ ve $t_\eta(v)$ lineer bağımsız olsun. Yani $\mu(u_0) - \eta(v)$ ve $t_\eta(v)$ vektörleri düzlemi gerer. Ayrıca $t_\mu(u_0)$, $t_\eta(v)$ ve $\mu(u_0) - \eta(v)$ vektörleri lineer bağımlı olduğundan

$$(\mu(u_0) - \eta(v)) \wedge_L t_\eta(v) \neq 0$$

yazılabilir. Bu durumda $t_\mu(u_0)$ vektörü $\mu(u_0) - \eta(v)$ ve $t_\eta(v)$ vektörlerinin gerdiği düzlemdedir. O halde

$$h((\mu(u_0) - \eta(v)) \wedge_L t_\eta(v), t_\mu(u_0)) = 0$$

olur. Sonuç olarak, $(\mu(u_0) - \eta(v)) \wedge_L t_\eta(v)$ vektör alanı daima $t_\mu(u_0)$ sabit vektörüne ortogonaldır.

5.1.2. Kuaterniyonik Eğri-Eğri Açığortay Yüzeyin Eğrilikleri

Bu bölümde, Minkowski uzayında iki split kuaterniyonik eğri ile elde edilen rasyonel açığortay yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri klasik diferensiyel geometriden farklı olarak kuaterniyonik işlemlerle elde edilecektir. Ayrıca bu yüzey üzerindeki ortonormal çatı alanı $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$ olmak üzere $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}$ çatısı için kartezyen eksen üzerinde (4.40) dönüşümleri tanımlansın. O halde (5.6) denklemi ile elde edilen açığortay yüzeyi için aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 5.1.2.1. $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ de iki split kuaterniyonik eğri ile elde edilen rasyonel açıortay yüzeyi

$$\mathfrak{F}(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

ise bu yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\mathfrak{F}} &= 4(-(-f_3 f'_1 + f_1 f'_3)(-f_3 \dot{f}_2 + f_2 \dot{f}_3) \\ &\quad + (-f_3 f'_2 + f_2 f'_3)(-f_3 \dot{f}_1 + f_1 \dot{f}_3)), \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{F}} &= \frac{1}{2}[2(-f_3 f'_1 + f_1 f'_3) - 2(-f_3 \dot{f}_2 + f_2 \dot{f}_3)]\end{aligned}$$

dır.

İspat $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ de (5.6) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3)$ yüzeyinin u ya ve v ye göre türevleri ve eşleniği sırası ile

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} = \mathfrak{F}_u = (f'_1, f'_2, f'_3), \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v} = \mathfrak{F}_v = (\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{f}_3) \quad (5.12)$$

ve

$$\mathfrak{F}^{-1} = (-f_1, -f_2, -f_3) \quad (5.13)$$

ile gösterilsin. (3.6) dan

$$\mathbf{T}_1 = \mathfrak{F}_u = \mathfrak{F} * (\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F}_u) \quad (5.14)$$

ve

$$\mathbf{T}_2 = \mathfrak{F}_v = \mathfrak{F} * (\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F}_v) \quad (5.15)$$

yazılır. Son iki eşitlikte (5.11), (5.12) ve (5.13) yerine yazılır ve kuaterniyon çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 &= \mathfrak{F}_u = \mathfrak{F} * \frac{1}{2}[2(f_1 f'_1 - f_2 f'_2 - f_3 f'_3), \\ &\quad 2(-f_3 f'_2 + f_2 f'_3), 2(-f_3 f'_1 + f_1 f'_3), \\ &\quad 2(f_2 f'_1 - f_1 f'_2)]\end{aligned} \quad (5.16)$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_2 &= \mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}^* \frac{1}{2} [2(\dot{f}_1 \dot{f}_1 - \dot{f}_2 \dot{f}_2 - \dot{f}_3 \dot{f}_3), \\ &\quad 2(-\dot{f}_3 \dot{f}_2 + \dot{f}_2 \dot{f}_3), 2(-\dot{f}_3 \dot{f}_1 + \dot{f}_1 \dot{f}_3), \\ &\quad 2(\dot{f}_2 \dot{f}_1 - \dot{f}_1 \dot{f}_2)]\end{aligned}\quad (5.17)$$

olur. Bu şekilde elde edilen $\mathbf{T}_1(u, v)$ ve $\mathbf{T}_2(u, v)$, $\mathfrak{F}(u, v)$ yüzeyinin ortogonal teğetleridir. Eğer $\mathbf{T}_1(u, v)$ ve $\mathbf{T}_2(u, v)$ ortogonal değil iseler Gram-Schmit yöntemiyle ortogonalleştirilebilirler. Diğer yandan $\mathbf{T}_1(u, v)$ ve $\mathbf{T}_2(u, v)$, $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin teğetleri olduğundan ve (3.8), (3.13) ve (3.14) eşitliklerini sağlayacağından

$$\begin{aligned}f_1 f'_1 - f_2 f'_2 - f_3 f'_3 &= 0, \\ \dot{f}_1 \dot{f}_1 - \dot{f}_2 \dot{f}_2 - \dot{f}_3 \dot{f}_3 &= 0\end{aligned}$$

dır. O halde $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin teğetleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 &= \mathfrak{F}_u = \mathfrak{F}^* \frac{1}{2} [0, 2(-f_3 f'_2 + f_2 f'_3), \\ &\quad 2(-f_3 f'_1 + f_1 f'_3), 2(f_2 f'_1 - f_1 f'_2)]\end{aligned}\quad (5.18)$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_2 &= \mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}^* \frac{1}{2} [0, 2(-\dot{f}_3 \dot{f}_2 + \dot{f}_2 \dot{f}_3), \\ &\quad 2(-\dot{f}_3 \dot{f}_1 + \dot{f}_1 \dot{f}_3), 2(\dot{f}_2 \dot{f}_1 - \dot{f}_1 \dot{f}_2)]\end{aligned}\quad (5.19)$$

olur. Diğer taraftan $\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 \wedge_L \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ ortogonal olduğundan

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 * \mathbf{T}_2$$

yazılır. (5.18) ve (5.19) denklemleri son eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{1}{4} \mathfrak{F}^* [0, 2(-f_3 f'_2 + f_2 f'_3), 2(-f_3 f'_1 + f_1 f'_3), \\ &\quad 2(f_2 f'_1 - f_1 f'_2)] * \mathfrak{F}^* [0, 2(-\dot{f}_3 \dot{f}_2 + \dot{f}_2 \dot{f}_3), \\ &\quad 2(-\dot{f}_3 \dot{f}_1 + \dot{f}_1 \dot{f}_3), 2(\dot{f}_2 \dot{f}_1 - \dot{f}_1 \dot{f}_2)]\end{aligned}\quad (5.20)$$

olur. Bu durumda $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyi üzerinde $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$ çatı alanı elde edilir. Ayrıca (3.7) eşitliğinden

$$(\mathfrak{F}^{-1})_v = \mathfrak{F}_v^{-1} = \mathfrak{F}_v^{-1} * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}^{-1}$$

dir. Ayrıca (3.8) den

$$\mathfrak{F}_v^{-1} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F}_v) * \mathfrak{F}^{-1} \quad (5.21)$$

yazılır. (5.12) eşitliği (5.21) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_v^{-1} = & -\frac{1}{2}[0, 2(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3), 2(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 \\ & + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3), 2(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2)] * \mathfrak{F}^{-1} \end{aligned} \quad (5.22)$$

elde edilir. Bu durumda (5.16) ve (5.22) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_u * \mathfrak{F}_v^{-1} = & -\frac{1}{4}\mathfrak{F} * [4(-(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & + (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & + (\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2)), \\ & 4((\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & - (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3)(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2)), \\ & 4((\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & - (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2)), \\ & 4(-(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & + (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3))] * \mathfrak{F}^{-1} \end{aligned} \quad (6) \quad (5.23)$$

yazılır. Benzer şekilde yukarıdaki eşitlik $\mathbf{I} = (1, \mathbf{0})$ birim eleman olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_u * \mathfrak{F}_v^{-1} = & -\frac{1}{4} [4(-(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & + (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & + (\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2))\mathbf{I} \\ & + 4((\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & - (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3)(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2))\mathbf{T}_1 \\ & + 4((\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & - (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2))\mathbf{T}_2 \\ & + 4(-(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & + (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3))\mathbf{N}] \end{aligned} \quad (5.24)$$

olarak elde edilir. Son eşitlikten $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin Gauss

eğriliği

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\mathfrak{F}} = & 4(-(\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3) \\ & + (-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3))\end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan (4.40), (5, 18) ve (5, 19) eşitliklerinden

$$\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1} = \mathfrak{F} * (0, x) * \mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F} * (0, y) * \mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1}$$

dir. $\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F} = \mathbf{I}$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1} = \mathfrak{F} * (0, x) * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F} * (0, y) * \mathfrak{F}_v^{-1}$$

olur. (3.8) ve (5.22) den

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} = & -\frac{1}{2}\mathfrak{F} * [(0, 1, 0, 0) * (0, 2(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3), \\ & 2(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3), 2(\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)) \\ & + (0, 0, 1, 0) * (0, 2(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3), \\ & 2(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3), 2(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2))] * \mathfrak{F}^{-1} \\ & - \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1}\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} = & -\frac{1}{2}[2(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_1 + \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_3) - 2(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_2 + \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_3)]\mathbf{I} \\ & - [2(\mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_1 - \mathfrak{f}_1\dot{\mathfrak{f}}_2)]\mathbf{T}_1 - [2(\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_2)]\mathbf{T}_2 \\ & + [2(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3) - 2(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3)]\mathbf{N}] \\ & - \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1}\end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{2}[2(-\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}'_1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}'_3) - 2(-\mathfrak{f}_3\dot{\mathfrak{f}}_2 + \mathfrak{f}_2\dot{\mathfrak{f}}_3)]$$

dir.

5.2. Nokta-Kuaterniyonik Eğri Açığortay Yüzeyi

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayı $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ kuaterniyonların kümesi ile gösterilsin. O halde Minkowski uzayında sırasıyla sabit bir nokta ve regüler birim hızlı split kuaterniyonik bir eğri

$$\mathfrak{N} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \quad (5.25)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q}_v \\ u &\rightarrow \mathfrak{M}(u) = \sum_{i=1}^3 \mathfrak{m}_i(u) e_i; \quad 1 \leq i \leq 3 \end{aligned} \quad (5.26)$$

olsun. Ayrıca bu eğrinin C^1 -sınıfından sürekli teğet vektör alanı $\mathbf{t}_{\mathfrak{M}} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$ ile verilsin.

Şimdi varsayalım ki $\mathfrak{M}(u_0)$ ve $\mathfrak{N}$ ayak noktaları ile $\mathfrak{M}(u_0)$ noktasında $\mathfrak{M}(u)$ eğrisinin normal düzlemi $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(u_0)$ olsun. O halde bu düzlem $\mathbf{t}_{\mathfrak{M}}(u_0)$ a ortogonaldır. $\mathbf{t}_{\mathfrak{M}}(u)$ teğet vektörü sürekli olduğundan $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(u_0)$ düzlemi $\mathfrak{M}(u)$ eğrisi boyunca sürekli olarak hareket eder. $\mathfrak{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ noktasında $\mathfrak{M}(u_0)$ noktasında $\mathfrak{M}(u)$ eğrisinin $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(u_0)$ düzlemi üzerindeki açığortay noktası ise $\mathfrak{F}$, aşağıdaki lineer denklemi sağlar:

$$\varepsilon(\mathfrak{F} - \mathfrak{M}) \varepsilon(\bar{\mathbf{t}}_{\mathfrak{M}}) (\mathfrak{F} - \mathfrak{M}) * \bar{\mathbf{t}}_{\mathfrak{M}} + \varepsilon(\mathbf{t}_{\mathfrak{M}}) \varepsilon(\overline{\mathfrak{F} - \mathfrak{M}}) \mathbf{t}_{\mathfrak{M}} * (\overline{\mathfrak{F} - \mathfrak{M}}) = 0. \quad (5.27)$$

Ayrıca $\mathfrak{F}$ noktası $\mathfrak{M}(u)$ - $\mathfrak{N}$ vektörüne ortogonal ve $\mathfrak{M}(u)$ ile $\mathfrak{N}$ nin orta noktası olan $\frac{\mathfrak{M}(u) + \mathfrak{N}}{2}$ den geçen $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}(u_0)$ açığortay düzleminde de bulunacağı için $\mathfrak{F}$, aşağıdaki lineer denklemi sağlar:

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}}{2}\right) \varepsilon(\overline{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}) \left(\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}}{2}\right) * (\overline{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}) \\ + \varepsilon(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \varepsilon\left(\overline{\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}}{2}}\right) (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) * \left(\overline{\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}}{2}}\right) = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Diğer taraftan, $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(u_0)$ ve $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}(u_0)$ düzlemlerinin kesişimi $\mathfrak{k}(u_0)$ ise $\mathfrak{k}(u_0)$ in yön vektörü $\mathfrak{P}(u)$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{P}(u)$ vektörü $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(u_0)$ ve $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}(u_0)$ düzlemlerinin normal vektörüne dik olduğundan $\mathfrak{P}(u)$ vektörü aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\mathfrak{P}(u) = \mathbf{t}_{\mathfrak{M}}(u) \wedge_L (\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N}). \quad (5.29)$$

(5.29) denklemi göz önüne alınarak $\mathfrak{N}$ sabit noktasından geçen ve $\mathfrak{k}(u)$ ve $\mathfrak{P}(u)$ a ortogonal olan bir düzlem $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}(u)$ olsun. Ayrıca bu $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}(u)$ düzlemi $\mathfrak{F}$ açığortay noktasını içereceğinden

$$\varepsilon(\mathfrak{F} - \mathfrak{N}) \varepsilon(\bar{\mathfrak{P}}) (\mathfrak{F} - \mathfrak{N}) * \bar{\mathfrak{P}} + \varepsilon(\mathfrak{P}) \varepsilon(\overline{\mathfrak{F} - \mathfrak{N}}) \mathfrak{P} * (\overline{\mathfrak{F} - \mathfrak{N}}) = 0 \quad (5.30)$$

lineer denklemi elde edilir.

Ayrıca $\mathfrak{k}(u_0)$ vektöründeki her nokta $\mathfrak{M}(u)$ eğrisindeki $\mathfrak{M}(u_0)$ aynı ortogonal ayak noktasına sahip olduğundan, böylece her bir ayak noktası bir doğru oluşturacağından bu çizgilerle oluşan açıortay yüzeyi bir regle yüzeydir. O halde (5.27), (5.28) ve (5.30) denklemleri kullanılarak ve $\mathfrak{M}, \mathfrak{t}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{F} - \mathfrak{M}, \mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}}{2}, \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ nin timelike olduğu varsayılarak bu regle yüzey ve bu regle yüzeyin rasyonel taban eğrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

Teorem 5.2.1. $\mathbb{R}_1^3$ de sabit bir nokta $\mathfrak{N}$ ve u yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş reel spatial split kuaterniyonik bir eğri $\mathfrak{M} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ olsun. Ayrıca $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(u)$, $\mathfrak{D}_{\mathfrak{B}}(u)$ ve $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}(u)$ düzlemlerinin tek kesişim noktası $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{k}(u)$ nun yön vektörü $\mathfrak{P}(u)$ ise bu $\mathfrak{N}$ noktası ve $\mathfrak{M}(u)$ eğrisi ile oluşan $\mathfrak{F}(u, v)$ açıortay yüzeyinin $\mathfrak{F}(u) = (\mathfrak{f}_1(u), \mathfrak{f}_2(u), \mathfrak{f}_3(u))$ taban eğrisi

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_1 &= \frac{1}{\mathcal{K}} [\mathfrak{h}_1 (\mathfrak{p}_2 (\mathfrak{n}_3 - \mathfrak{m}_3) + \mathfrak{p}_3 (\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{n}_2)) + \mathfrak{t}_2 (\mathfrak{h}_2 (\mathfrak{n}_3 - \mathfrak{m}_3) + \mathfrak{p}_3 \mathfrak{h}_3) \\ &\quad + \mathfrak{t}_3 (\mathfrak{h}_2 (\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{n}_2) - \mathfrak{p}_2 \mathfrak{h}_3)], \\ \mathfrak{f}_2 &= \frac{1}{\mathcal{K}} [\mathfrak{t}_1 (\mathfrak{h}_2 (\mathfrak{m}_3 - \mathfrak{n}_3) - \mathfrak{p}_3 \mathfrak{h}_3) + \mathfrak{h}_1 (\mathfrak{p}_1 (\mathfrak{m}_3 - \mathfrak{n}_3) + \mathfrak{p}_3 (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{m}_1)) \\ &\quad + \mathfrak{t}_3 (\mathfrak{h}_2 (\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{n}_1) - \mathfrak{p}_1 \mathfrak{h}_3)], \\ \mathfrak{f}_3 &= \frac{1}{\mathcal{K}} [\mathfrak{t}_1 (\mathfrak{p}_2 \mathfrak{h}_3 - \mathfrak{h}_2 (\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{n}_2)) + \mathfrak{t}_2 (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_2 (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{m}_1)) \\ &\quad - \mathfrak{h}_1 (\mathfrak{p}_1 (\mathfrak{m}_2 - \mathfrak{n}_2) + \mathfrak{p}_2 (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{m}_1))], \\ \mathcal{K} &= \mathfrak{t}_1 [\mathfrak{p}_2 (\mathfrak{m}_3 - \mathfrak{n}_3) + \mathfrak{p}_3 (\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{m}_2)] + \mathfrak{t}_2 [\mathfrak{p}_1 (\mathfrak{m}_3 - \mathfrak{n}_3) + \mathfrak{p}_3 (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{m}_1)] \\ &\quad + \mathfrak{t}_3 [\mathfrak{p}_1 (\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{m}_2) + \mathfrak{p}_2 (\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{n}_1)] \end{aligned}$$

olmak üzere rasyonel açıortay yüzeyi

$$\mathfrak{F}(u, v) = \mathfrak{F}(u) + v\mathfrak{P}(u)$$

dir.

İspat. $\mathbb{R}_1^3$ de (5.27) ile elde edilen denklem göz önüne alınırsa

$$(\mathfrak{F} - \mathfrak{M}) * \bar{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{M}} + \mathfrak{t}_{\mathfrak{M}} * (\overline{\mathfrak{F} - \mathfrak{M}}) = 0$$

lineer denklemi elde edilir. Ayrıca yukarıdaki denklem düzenlenip

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{M} * \bar{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{M}} + \mathfrak{t}_{\mathfrak{M}} * \bar{\mathfrak{M}}$$

olduğu kabul edilirse

$$\mathfrak{F} * \bar{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{M}} + \mathfrak{t}_{\mathfrak{M}} * \bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{h}_1 \quad (5.31)$$

dir. $\mathfrak{k}(u_0)$ eğrisinin yön vektörü $\mathfrak{P}(u)$ için

$$\mathfrak{P}(u) = \mathfrak{t}_{\mathfrak{M}}(u) \wedge_L (\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N}) \quad (5.32)$$

eşitliği yazılır.

Benzer şekilde (5.28) ve (5.30) lineer denklemleri göz önüne alınıp

$$\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{N} * \bar{\mathfrak{P}} + \mathfrak{P} * \bar{\mathfrak{N}}$$

ve

$$\mathfrak{h}_3 = \frac{1}{2} (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) * (\overline{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) * \overline{(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})}$$

olduğu kabul edilirse

$$\mathfrak{F} * \bar{\mathfrak{P}} + \mathfrak{P} * \bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{h}_2, \quad (5.33)$$

$$\mathfrak{F} * (\overline{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}) + (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) * \bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{h}_3 \quad (5.34)$$

lineer denklemleri elde edilir.

O halde $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(u)$, $\mathfrak{D}_{\mathfrak{N}}(u)$ ve $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}(u)$ düzlemlerinin kesişim noktası $\mathfrak{F}$ olduğundan bu açırtay noktası aşağıdaki lineer denklem sisteminin çözümüyle elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} * \bar{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{M}} + \mathfrak{t}_{\mathfrak{M}} * \bar{\mathfrak{F}} &= \mathfrak{h}_1, \\ \mathfrak{F} * \bar{\mathfrak{P}} + \mathfrak{P} * \bar{\mathfrak{F}} &= \mathfrak{h}_2, \\ \mathfrak{F} * (\overline{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}}) + (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) * \bar{\mathfrak{F}} &= \mathfrak{h}_3 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Ayrıca yukarıdaki lineer denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} -\mathfrak{t}_1 & \mathfrak{t}_2 & \mathfrak{t}_3 \\ -\mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_3 \\ \mathfrak{n}_1 - \mathfrak{m}_1 & \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{m}_3 - \mathfrak{n}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{f}_2 \\ \mathfrak{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{h}_1 \\ \mathfrak{h}_2 \\ \mathfrak{h}_3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

olarak yazılır. (5.36) eşitliği Cramer sistemiyle çözülürse

$$\mathcal{K} = \begin{vmatrix} -\mathfrak{t}_1 & \mathfrak{t}_2 & \mathfrak{t}_3 \\ -\mathfrak{p}_1 & \mathfrak{p}_2 & \mathfrak{p}_3 \\ \mathfrak{n}_1 - \mathfrak{m}_1 & \mathfrak{m}_2 - \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{m}_3 - \mathfrak{n}_3 \end{vmatrix}$$

olmak üzere $\mathfrak{F}(u, v)$ açkırtay yüzeyinin $\mathfrak{F}(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ rasyonel taban eğrisi

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\mathcal{K}} \begin{vmatrix} h_1 & t_2 & t_3 \\ h_2 & p_2 & p_3 \\ h_3 & m_2 - n_2 & m_3 - n_3 \end{vmatrix}, \\ f_2 &= \frac{1}{\mathcal{K}} \begin{vmatrix} -t_1 & h_1 & t_3 \\ -p_1 & h_2 & p_3 \\ n_1 - m_1 & h_3 & m_3 - n_3 \end{vmatrix}, \\ f_3 &= \frac{1}{\mathcal{K}} \begin{vmatrix} -t_1 & t_2 & h_1 \\ -p_1 & p_2 & h_2 \\ n_1 - m_1 & m_2 - n_2 & h_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dir. O halde bir rasyonel regle yüzey olan rasyonel açkırtay yüzeyi

$$\mathfrak{F}(u, v) = \mathfrak{F}(u) + v\mathfrak{P}(u)$$

dir. Ayrıca f_1, f_2 ve f_3 ün paydası daima sıfırdan farklıdır.

5.2.1. Dejenere Durum

$\mathfrak{P}(u)$ yön vektörü $\mathfrak{M}(u)$ eğrisinin teğeti ile $\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N}$ nin vektörel çarpımı ile elde edildiğinden bu vektörler lineer bağımsızdır. Aksine varsayalımki $\mathfrak{M}(u) * (\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N}) = (\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N}) * \mathfrak{M}(u)$ olsun. Yani, $\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N} \neq 0$ olmak üzere $\mathfrak{M}(u)$ eğrisi ile $\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N}$ lineer bağımlıdır. $\mathfrak{M}(u)$ vektörü regüler olduğundan $t_{\mathfrak{M}} \neq 0$ dir. Bu durumda $\mathfrak{M}(u)$ ve $\mathfrak{M}(u) - \mathfrak{N}$ birbirlerine paralel olduğundan $\mathfrak{S}(u) \in \mathbb{R}$ için

$$\mathfrak{N} - \mathfrak{M}(u) = \mathfrak{S}(u) t_{\mathfrak{M}} \quad (5.37)$$

yazılır. Son eşitlikten

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(u) + \mathfrak{S}(u) t_{\mathfrak{M}}$$

dir. Yani u için her $\mathfrak{N}$ noktası $\mathfrak{M}(u)$ eğrisi üzerinde olur.

5.2.2 Nokta-Kuaterniyonik Eğri Açkırtay Yüzeyin Eğrilikleri

Sabit bir nokta ve reel split kuaterniyonik bir eğri ile elde edilen açkırtay yüzeyler bir regle yüzeydir. Bundan dolayı bu bölümde bir regle yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri klasik diferensiyel geometriden farklı olarak

kuaterniyonik işlemlerle elde edilecektir. Ayrıca bu yüzey üzerindeki orto-normal çatı alanı $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$ olmak üzere $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}$ çatısı için kartezyen eksen üzerinde (4.40) dönüşümleri tanımlansın ve $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayı, $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ birim kuaterniyonların uzayı ile gösterilsin. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ da kuaterniyonik iki eğri

$$\mathbf{q} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{q}_i(u) e_i)$$

ve

$$\mathbf{t} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{t}_i(u) e_i)$$

dir. O halde kuaterniyonik bir regle yüzey

$$\mathfrak{F}(u, v) = \mathbf{q}(u) + v\mathbf{t}(u) \quad (5.38)$$

dir.

Teorem 5.2.2.1 $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ de kuaterniyonik bir regle yüzeyi

$$\mathfrak{F}(u, v) = \mathbf{q}(u) + v\mathbf{t}(u)$$

ise bu yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathfrak{F}} &= 4[-(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)) \\ &\quad \times (-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3) + (-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) \\ &\quad + (q_2 + vt_2)(q'_3 + vt'_3))(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3)], \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{F}} &= \frac{1}{2}[(2(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)) \\ &\quad - 2(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3)] \end{aligned}$$

dır.

İspat $\mathbb{Q}_{\mathbb{H}}$ de (5.38) eşitliğiyle verilen $\mathfrak{F}(u, v) = (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3)$ yüzeyinin u ya ve v ye göre türevleri sırasıyla

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} = \mathfrak{F}_u = (\mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2, \mathfrak{F}'_3)$$

ve

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v} = \mathfrak{F}_v = (\dot{\mathfrak{F}}_1, \dot{\mathfrak{F}}_2, \dot{\mathfrak{F}}_3)$$

ile gösterilsin. (3.6) dan

$$\mathbf{T}_1 = \mathfrak{F}_u = \mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F}_u) \quad (5.39)$$

ve

$$\mathbf{T}_2 = \mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F}_v) \quad (5.40)$$

yazılır. O halde (5.38) eşitliğinden $\mathfrak{F}(u, v)$ yüzeyinin birinci türevleri ve eşleniği sırasıyla

$$\mathfrak{F}^{-1} = (-q_1 - vt_1, -q_2 - vt_2, -q_3 - vt_3), \quad (5.41)$$

$$\mathfrak{F}_u = (q'_1 + vt'_1, q'_2 + vt'_2, q'_3 + vt'_3), \quad (5.42)$$

$$\mathfrak{F}_v = (t_1, t_2, t_3) \quad (5.43)$$

dir. Son iki eşitlik (5.39) ve (5.40) de yerine yazılır ve kuaterniyon çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = \mathfrak{F}_u = \mathfrak{F}^* \frac{1}{2} [& 2((q_1 + vt_1)(q'_1 + vt'_1) \\ & - (q_2 + vt_2)(q'_2 + vt'_2) - (q_3 + vt_3)(q'_3 + vt'_3)), \\ & 2(-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) + (q_2 + vt_2)(q'_3 + vt'_3)), \\ & 2(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)), \\ & 2((q_2 + vt_2)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_2 + vt'_2))] \end{aligned} \quad (5.44)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 = \mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}^* \frac{1}{2} [& 2((q_1 + vt_1)t_1 \\ & - (q_2 + vt_2)t_2 - (q_3 + vt_3)t_3), \\ & 2(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3), \\ & 2(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3), \\ & 2((q_2 + vt_2)t_1 - (q_1 + vt_1)t_2)] \end{aligned} \quad (5.45)$$

olur. Bu şekilde elde edilen $\mathbf{T}_1(u, v)$ ve $\mathbf{T}_2(u, v)$, $\mathfrak{F}(u, v)$ yüzeyinin ortogonal teğetleridir. Eğer $\mathbf{T}_1(u, v)$ ve $\mathbf{T}_2(u, v)$ ortogonal değil iseler Gram-Schimit yöntemiyle ortogonalleştirilebilirler. Diğer yandan $\mathbf{T}_1(u, v)$ ve $\mathbf{T}_2(u, v)$, $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin teğetleri olduğundan ve (3.8), (3.13) ve (3.14) eşitliklerini sağlayacağından

$$\begin{aligned} (q_1 + vt_1)(q'_1 + vt'_1) - (q_2 + vt_2)(q'_2 + vt'_2) - (q_3 + vt_3)(q'_3 + vt'_3) &= 0, \\ (q_1 + vt_1)t_1 - (q_2 + vt_2)t_2 - (q_3 + vt_3)t_3 &= 0 \end{aligned}$$

dır. O halde $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin teğetleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = \mathfrak{F}_u &= \mathfrak{F} * \frac{1}{2} [0, 2(-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) \\ &+ (q_2 + vt_2)(q'_3 + vt'_3)), 2(-(q_3 + vt_3) \\ &\times (q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)), \\ &2((q_2 + vt_2)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1) \\ &\times (q'_2 + vt'_2))] \end{aligned} \quad (5.46)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 = \mathfrak{F}_v &= \mathfrak{F} * \frac{1}{2} [0, 2(-(q_3 + vt_3)t_2 \\ &+ (q_2 + vt_2)t_3), 2(-(q_3 + vt_3)t_1 \\ &+ (q_1 + vt_1)t_3), 2((q_2 + vt_2)t_1 \\ &- (q_1 + vt_1)t_2)] \end{aligned} \quad (5.47)$$

olur. Diğer taraftan $\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 \wedge_L \mathbf{T}_2$ ve $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ ortogonal olduğundan

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 * \mathbf{T}_2$$

yazılır. (5.46) ve (5.47) denklemleri son eşitlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \frac{1}{4} \mathfrak{F} * [0, 2(-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) \\ &+ (q_2 + vt_2)(q'_3 + vt'_3)), 2(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) \\ &- (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)), 2((q_2 + vt_2)(q'_1 + vt'_1) \\ &- (q_1 + vt_1)(q'_2 + vt'_2))] * \mathfrak{F} * [0, 2(-(q_3 + vt_3)t_2 \\ &+ (q_2 + vt_2)t_3), 2(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3), \\ &2((q_2 + vt_2)t_1 - (q_1 + vt_1)t_2)] \end{aligned} \quad (5.48)$$

olur. Bu durumda $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyi üzerinde $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N}\}$ çatı alanı elde edilir. Ayrıca (3.7) eşitliğinden

$$(\mathfrak{F}^{-1})_v = \mathfrak{F}_v^{-1} = \mathfrak{F}_v^{-1} * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}^{-1}$$

dir. Ayrıca (3.8) den

$$\mathfrak{F}_v^{-1} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F}_v) * \mathfrak{F}^{-1} \quad (5.49)$$

yazılır. (5.43) eşitliği (5.49) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_v^{-1} = & -\frac{1}{2}[0, 2(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3), \\ & 2(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3), \\ & 2((q_2 + vt_2)t_1 - (q_1 + vt_1)t_2)]*\mathfrak{F}^{-1}\end{aligned}\quad (5.50)$$

elde edilir. Bu durumda (5.44) ve (5.50) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_u*\mathfrak{F}_v^{-1} = & -\frac{1}{4}\mathfrak{F}*[4[-(-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) + (q_2 + vt_2) \\ & \times (q'_3 + vt'_3))(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3) \\ & +(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)) \\ & \times(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3) + ((q_2 + vt_2) \\ & \times (q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_2 + vt'_2))((q_2 + vt_2)t_1 \\ & - (q_1 + vt_1)t_2)], 4[((q_2 + vt_2)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1) \\ & \times (q'_2 + vt'_2))(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3) \\ & -(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)) \\ & \times((q_2 + vt_2)t_1 - (q_1 + vt_1)t_2)], 4[((q_2 + vt_2) \\ & \times (q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_2 + vt'_2))(-(q_3 + vt_3)t_2 \\ & + (q_2 + vt_2)t_3) -(-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) \\ & + (q_2 + vt_2)(q'_3 + vt'_3))((q_2 + vt_2)t_1 - (q_1 + vt_1)t_2)], \\ & 4[-(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)) \\ & (- (q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3) + (- (q_3 + vt_3) \\ & \times (q'_2 + vt'_2) + (q_2 + vt_2)(q'_3 + vt'_3))(-(q_3 + vt_3)t_1 \\ & + (q_1 + vt_1)t_3)]]*\mathfrak{F}^{-1}\end{aligned}\quad (5.51)$$

yazılır. Benzer şekilde yukarıdaki eşitlik $\mathbf{I} = (1, \mathbf{0})$ birim eleman olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_u*\mathfrak{F}_v^{-1} = & -\frac{1}{4}[4[-(-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) + (q_2 + vt_2)(q'_3 + vt'_3) \\ & \times(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3) +(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) \\ & - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3))(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3) \\ & +((q_2 + vt_2)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_2 + vt'_2))((q_2 + vt_2)t_1 \\ & - (q_1 + vt_1)t_2)]\mathbf{I} + 4[((q_2 + vt_2)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1) \\ & \times (q'_2 + vt'_2))(-(q_3 + vt_3)t_1 + (q_1 + vt_1)t_3) -(-(q_3 + vt_3) \\ & \times (q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3))((q_2 + vt_2)t_1 \\ & - (q_1 + vt_1)t_2)]\end{aligned}\quad (5.52)$$

$$\begin{aligned}
& - (q_1 + vt_1) t_2)] \mathbf{T}_1 + 4[(q_2 + vt_2) (q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1) \\
& \times (q'_2 + vt'_2))(- (q_3 + vt_3) t_2 + (q_2 + vt_2) t_3) - (- (q_3 + vt_3) \\
& \times (q'_2 + vt'_2) + (q_2 + vt_2) (q'_3 + vt'_3))((q_2 + vt_2) t_1 \\
& - (q_1 + vt_1) t_2)] \mathbf{T}_2 + 4[-(- (q_3 + vt_3) (q'_1 + vt'_1) \\
& - (q_1 + vt_1) (q'_3 + vt'_3))(- (q_3 + vt_3) t_2 + (q_2 + vt_2) t_3) \\
& + (- (q_3 + vt_3) (q'_2 + vt'_2) + (q_2 + vt_2) (q'_3 + vt'_3)) \\
& \times (- (q_3 + vt_3) t_1 + (q_1 + vt_1) t_3)] \mathbf{N}]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Son eşitlikten $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\mathfrak{F}} = & 4[-(- (q_3 + vt_3) (q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1) (q'_3 + vt'_3)) \\
& (- (q_3 + vt_3) t_2 + (q_2 + vt_2) t_3) + (- (q_3 + vt_3) (q'_2 + vt'_2) \\
& + (q_2 + vt_2) (q'_3 + vt'_3))(- (q_3 + vt_3) t_1 + (q_1 + vt_1) t_3)]
\end{aligned}$$

dir.

Diğer taraftan (4.40), (5.46) ve (5.47) eşitliklerinden

$$\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1} = \mathfrak{F} * (0, x) * \mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F} * (0, y) * \mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1}$$

dir. $\mathfrak{F}^{-1} * \mathfrak{F} = \mathbf{I}$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1} = \mathfrak{F} * (0, x) * \mathfrak{F}_u^{-1} + \mathfrak{F} * (0, y) * \mathfrak{F}_v^{-1}$$

olur. (3.8) ve (5.50) den

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} = & -\frac{1}{2} \mathfrak{F} * [(0, 1, 0, 0) * (0, 2(- (q_3 + vt_3) (q'_2 + vt'_2) \\
& + (q_2 + vt_2) (q'_3 + vt'_3)), 2(- (q_3 + vt_3) (q'_1 + vt'_1) \\
& - (q_1 + vt_1) (q'_3 + vt'_3)), 2((q_2 + vt_2) (q'_1 + vt'_1) \\
& - (q_1 + vt_1) (q'_2 + vt'_2)))] + (0, 0, 1, 0) * (0, \\
& 2(- (q_3 + vt_3) t_2 + (q_2 + vt_2) t_3), 2(- (q_3 + vt_3) t_1 \\
& + (q_1 + vt_1) t_3), 2((q_2 + vt_2) t_1 - (q_1 + vt_1) t_2)] * \mathfrak{F}^{-1} \\
& - \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1}
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_u * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_u^{-1} = & -\frac{1}{2} [(2(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3) \\
& - (2(-(q_3 + vt_3)(q'_2 + vt'_2) + (q_2 + vt_2) \\
& \times (q'_3 + vt'_3)))\mathbf{I} - [2((q_2 + vt_2)t_1 \\
& - (q_1 + vt_1)t_2)\mathbf{T}_1 - [2((q_2 + vt_2)(q'_1 + vt'_1) \\
& - (q_1 + vt_1)(q'_2 + vt'_2))]\mathbf{T}_2 + [(2(-(q_3 + vt_3) \\
& \times (q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)) \\
& - 2(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3)]\mathbf{N}] \\
& - \mathfrak{F}_v * \mathfrak{F} * \mathfrak{F}_v^{-1}
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{F}(u, v)$ kuaterniyonik regle yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathfrak{F}} = & \frac{1}{2} [(2(-(q_3 + vt_3)(q'_1 + vt'_1) - (q_1 + vt_1)(q'_3 + vt'_3)) \\
& - 2(-(q_3 + vt_3)t_2 + (q_2 + vt_2)t_3)]
\end{aligned}$$

dir.

6. BÖLÜM

UYGULAMALAR

Örnek 6.1 $\mathbb{R}_1^3$ de, sırasıyla s ve t ile parametrize edilmiş birim hızlı kuaterniyonik

$$\alpha(s) = (0, \cos s, \sin s)$$

ve

$$\beta(t) = (\cosh t, 0, \sinh t)$$

eğrileri verilsin. O halde bu eğrilerin teğetleri sırasıyla

$$t_\alpha(s) = (0, -\sin s, \cos s)$$

ve

$$t_\beta(t) = (\sinh t, 0, \cosh t)$$

dir. Yukarıda yapılan hesaplamalar (5.10) da dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1 &= (0, \cos s, \sin s) * \overline{(0, -\sin s, \cos s)} + (0, -\sin s, \cos s) * \overline{(0, \cos s, \sin s)}, \\ \mathfrak{h}_2 &= (\cosh t, 0, \sinh t) * \overline{(\sinh t, 0, \cosh t)} + (\sinh t, 0, \cosh t) * \overline{(\cosh t, 0, \sinh t)}, \\ \mathfrak{h}_3 &= \frac{1}{2}((0, \cos s, \sin s) + (\cosh t, 0, \sinh t)) * \overline{((0, \cos s, \sin s) - (\cosh t, 0, \sinh t))} \\ &\quad + \frac{1}{2}((0, \cos s, \sin s) - (\cosh t, 0, \sinh t)) * \overline{((0, \cos s, \sin s) + (\cosh t, 0, \sinh t))} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{h}_1 = 0, \quad \mathfrak{h}_2 = 0, \quad \mathfrak{h}_3 = 1$$

dir. Diğer taraftan (5.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (f_1, f_2, f_3) * \overline{(0, -\sin s, \cos s)} + (0, -\sin s, \cos s) * \overline{(f_1, f_2, f_3)} &= \mathfrak{h}_1, \\ (f_1, f_2, f_3) * \overline{(\sinh t, 0, \cosh t)} + (\sinh t, 0, \cosh t) * \overline{(f_1, f_2, f_3)} &= \mathfrak{h}_2, \\ (f_1, f_2, f_3) * \overline{((0, \cos s, \sin s) - (\cosh t, 0, \sinh t))} & \\ + ((0, \cos s, \sin s) - (\cosh t, 0, \sinh t)) * \overline{(f_1, f_2, f_3)} &= \mathfrak{h}_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (6.1) lineer denklem sisteminde basit hesaplamalarla rasyonel açığortay yüzeyi

$$\mathfrak{F}(s, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t), f_3(s, t))$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\sin s \cosh t], \\ f_2 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\cos s \sinh t], \\ f_3 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\sin s \sinh t], \\ \mathfrak{K} &= -\sin s - \sinh t \end{aligned}$$

dir.



Şekil 6.1. $\alpha(s) = (0, \cos s, \sin s)$,
 $\beta(t) = (\cosh t, 0, \sinh t)$, $0 \leq s \leq \pi$
 $0 \leq t \leq 2$.

Şekil 6.2. İki split kuaterniyonik
 eğri ile elde edilen rasyonel
 $\mathfrak{F}(s, t)$ açığortay yüzeyi.

Örnek 6.2. $\mathbb{R}_1^3$ de, sırasıyla s ve t ile parametrize edilmiş birim hızlı iki kuaterniyonik eğri aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned} \mu(s) &= (\sinh s, \cosh s, 0), \\ \eta(t) &= (3t, 2t, 2t). \end{aligned}$$

O halde (3.10) eşitliği bu eğriler için göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_1 &= (\sinh s, \cosh s, 0) * \overline{(\cosh s, \sinh s, 0)} \\
&\quad + (\cosh s, \sinh s, 0) * \overline{(\sinh s, \cosh s, 0)}, \\
\mathbf{m}_2 &= (3t, 2t, 2t) * \overline{(3, 2, 2)} + (3, 2, 2) * \overline{(3t, 2t, 2t)}, \\
\mathbf{m}_3 &= \frac{1}{2}((\sinh s, \cosh s, 0) + (3t, 2t, 2t)) * \overline{((\sinh s, \cosh s, 0) - (3t, 2t, 2t))} \\
&\quad + \frac{1}{2}((\sinh s, \cosh s, 0) - (3t, 2t, 2t)) * \overline{((\sinh s, \cosh s, 0) + (3t, 2t, 2t))}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{m}_1 = 0, \quad \mathbf{m}_2 = -t, \quad \mathbf{m}_3 = \frac{1}{2}(1 + t^2)$$

dir. Diğer taraftan (5.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) * \overline{(\cosh s, \sinh s, 0)} + (\cosh s, \sinh s, 0) * \overline{(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3)} &= \mathbf{m}_1, \\
(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) * \overline{(3, 2, 2)} + (3, 2, 2) * \overline{(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3)} &= \mathbf{m}_2, \\
(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) * \overline{((\sinh s, \cosh s, 0) - (3t, 2t, 2t))} \\
+ ((\sinh s, \cosh s, 0) - (3t, 2t, 2t)) * \overline{(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3)} &= \mathbf{m}_3
\end{aligned} \tag{6.2}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (6.2) lineer denklem sisteminde basit hesaplamalarla rasyonel açıortay yüzeyi

$$\mathfrak{H}(s, t) = (\mathfrak{h}_1(s, t), \mathfrak{h}_2(s, t), \mathfrak{h}_3(s, t)),$$

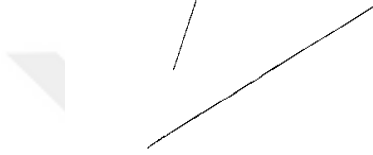
dir. Burada

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[(1 + t^2) \sinh s], \\
\mathfrak{h}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[(t^2 - 1) \cosh s], \\
\mathfrak{h}_3 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[(1 - t^2)(\cosh s + \frac{3}{2} \sinh s) + t(\cosh^2 s \\
&\quad + \sinh^2 s)]
\end{aligned}$$

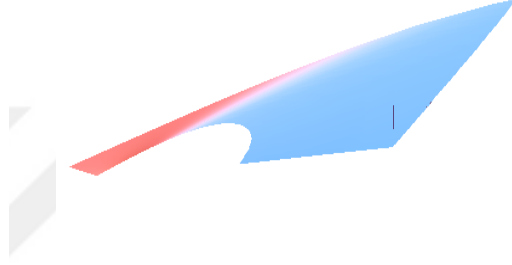
ve

$$\mathfrak{K} = -2 \cosh^2 s - 2 \sinh^2 s$$

dir.



Şekil 6.3. $\mu(s) = (\sinh s, \cosh s, 0)$,
 $\eta(t) = (3t, 2t, 2t)$, $0 \leq s \leq 2\pi$
 $\pi \leq t \leq 2\pi$.



Şekil 6.4. İki split kuaterniyonik
eğri ile elde edilen rasyonel
 $\mathfrak{H}(s, t)$ açığortay yüzeyi.

Örnek 6.3. $\mathbb{R}_1^3$ de, sırasıyla s ve t ile parametrize edilmiş birim hızlı iki kuaterniyonik eğri aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{aligned}\mu(s) &= (0, \cos s, \sin s), \\ \eta(t) &= (2t, 0, \sqrt{3}t).\end{aligned}$$

O halde rasyonel açığortay yüzeyi

$$\mathfrak{V}(s, t) = (\mathfrak{v}_1(s, t), \mathfrak{v}_2(s, t), \mathfrak{v}_3(s, t)),$$

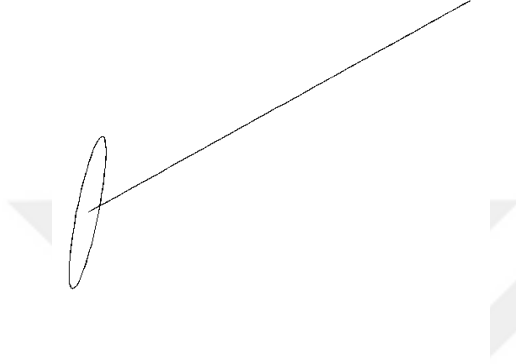
dir. Burada

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{K}} \left[\frac{3}{2} (t^2 - 1) \sin s - t \right], \\ \mathfrak{v}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{K}} [(t^2 - 1) \cos s], \\ \mathfrak{v}_3 &= \frac{1}{\mathfrak{K}} [(t^2 - 1) \sin s]\end{aligned}$$

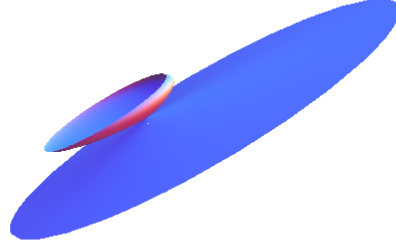
ve

$$\mathfrak{K} = -2$$

dir.



Şekil 6.5. $\mu(s) = (0, \cos s, \sin s)$,
 $\eta(t) = (2t, 0, \sqrt{3}t)$, $0 \leq s \leq 2\pi$
 $0 \leq t \leq 2$.



Şekil 6.6. İki split kuaterniyonik
eğri ile elde edilen rasyonel
 $\mathfrak{V}(s, t)$ açığortay yüzeyi.

Örnek 6.4 $\mathbb{R}_1^3$ de, sırasıyla sabit bir nokta ve s yay uzunluğu parametresi ile parametrize edilmiş bir birim hızlı kuaterniyonik eğri

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} &= (1, 1, 1), \\ \mathfrak{a}(s) &= (\cosh s, 0, \sinh s)\end{aligned}$$

olsun. O halde bu eğrinin teğeti ve $\mathfrak{k}(s_0)$ eğrisinin $\mathfrak{P}(s)$ yön vektörü sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}_a(s) &= (\sinh s, 0, \cosh s), \\ \mathfrak{P}(s) &= (-\cosh s, 1 + \sinh s - \cosh s, -\sinh s)\end{aligned}$$

dır. Yukarıda yapılan hesaplamalar (5.35) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_1 &= (\cosh s, 0, \sinh s) * \overline{(\sinh s, 0, \cosh s)} \\ &\quad + (\sinh s, 0, \cosh s) * \overline{(\cosh s, 0, \sinh s)}, \\ \mathfrak{h}_2 &= (1, 1, 1) * \overline{(-\cosh s, 1 + \sinh s - \cosh s, -\sinh s)} \\ &\quad + (-\cosh s, 1 + \sinh s - \cosh s, -\sinh s) * \overline{(1, 1, 1)}, \\ \mathfrak{h}_3 &= \frac{1}{2} ((\cosh s, 0, \sinh s) + (1, 1, 1)) * \overline{((\cosh s, 0, \sinh s) - (1, 1, 1))} \\ &\quad + \frac{1}{2} ((\cosh s, 0, \sinh s) - (1, 1, 1)) * \overline{((\cosh s, 0, \sinh s) + (1, 1, 1))}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3) * \overline{(\sinh s, 0, \cosh s)} + (\sinh s, 0, \cosh s) * \overline{(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3)} = 0, \\
& (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3) * \overline{(-\cosh s, 1 + \sinh s - \cosh s, -\sinh s)} \\
& + (-\cosh s, 1 + \sinh s - \cosh s, -\sinh s) * \overline{(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3)} = 1, \quad (6.3) \\
& (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3) * \overline{((\cosh s, 0, \sinh s) - (1, 1, 1))} \\
& + ((\cosh s, 0, \sinh s) - (1, 1, 1)) * \overline{(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3)} = -1
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (6.3) lineer denklem sisteminde basit hesaplamalarla rasyonel açığortay yüzeyinin taban eğrisi

$$\mathfrak{F}(s) = (\mathfrak{f}_1(s), \mathfrak{f}_2(s), \mathfrak{f}_3(s))$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\cosh^2 s + \sinh s \cosh s], \\
\mathfrak{f}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\sinh s - \cosh s], \\
\mathfrak{f}_3 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\sinh^2 s + \sinh s \cosh s], \\
\mathfrak{K} &= 1 + (\cosh^2 s + \sinh^2 s)(\sinh s - \cosh s) - (\sinh s + \cosh s)
\end{aligned}$$

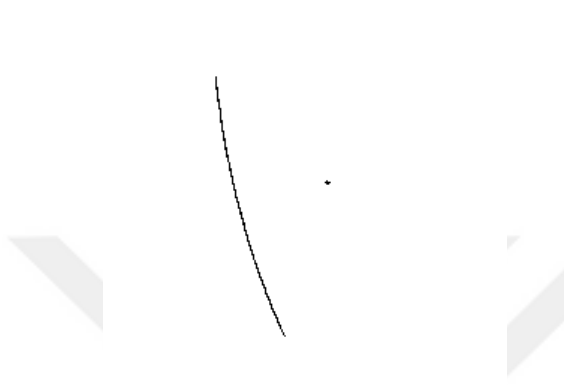
dir. O halde sabit bir nokta ve reel split kuaterniyonik bir eğri ile elde edilen $\mathfrak{D}(s, t) = (\mathfrak{o}_1(s, t), \mathfrak{o}_2(s, t), \mathfrak{o}_3(s, t))$ açığortay yüzeyi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\cosh^2 s + \sinh s \cosh s - t \cosh s], \\
\mathfrak{o}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\sinh s - \cosh s + t[1 + \sinh s - \cosh s]], \\
\mathfrak{o}_3 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[-\sinh^2 s + \sinh s \cosh s - t \sinh s]
\end{aligned}$$

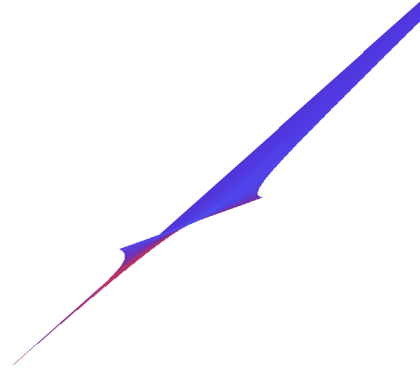
olmak üzere

$$\mathfrak{D}(s, t) = \mathfrak{F}(s) + t\mathfrak{P}(s)$$

dir.



Şekil 6.7. $\mathbf{a}(s) = (\cosh s, 0, \sinh s)$,
 $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$, $0 \leq s \leq \pi/10$
 $-2\pi \leq t \leq 2\pi$



Şekil 6.8. Bir nokta ve bir split
kuaterniyonik eğri ile elde edilen
rasyonel $\mathfrak{D}(s, t)$ açkırtay yüzeyi.

Örnek 6.5 $\mathbb{R}_1^3$ de, sırasıyla sabit bir nokta ve s yay uzunluğu parametresi ile parametrize edilmiş bir birim hızlı kuaterniyonik eğri

$$\begin{aligned}\mathfrak{w} &= (1, 0, 1), \\ \mathbf{q}(s) &= (0, \cos s, \sin s)\end{aligned}$$

olsun. O halde $\mathfrak{k}(s_0)$ eğrisinin $\mathfrak{P}(s)$ yön vektörü

$$\mathfrak{P}(s) = (\sin s - 1, -\cos s, -\sin s)$$

dır. Yukarıda yapılan hesaplamalar (5.35) de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_1 &= (0, \cos s, \sin s) * \overline{(0, -\sin s, \cos s)} \\ &\quad + (0, -\sin s, \cos s) * \overline{(0, \cos s, \sin s)}, \\ \mathfrak{r}_2 &= (1, 0, 1) * \overline{(\sin s - 1, -\cos s, -\sin s)} \\ &\quad + (\sin s - 1, -\cos s, -\sin s) * \overline{(1, 0, 1)}, \\ \mathfrak{r}_3 &= \frac{1}{2} ((0, \cos s, \sin s) + (1, 0, 1)) * \overline{((0, \cos s, \sin s) - (1, 0, 1))} \\ &\quad + \frac{1}{2} ((0, \cos s, \sin s) - (1, 0, 1)) * \overline{((0, \cos s, \sin s) + (1, 0, 1))}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sin s & \cos s \\ 1 - \sin s & -\cos s & -\sin s \\ 1 & \cos s & \sin s - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - 2 \sin s \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

matris denklemi elde edilir. (6.5) matris lineer denkleminde basit hesaplamalarla rasyonel açıortay yüzeyinin taban eğrisi

$$\mathfrak{F}(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s))$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[2 \sin^2 s - 3 \sin s + 2], \\ f_2 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[\sin s \cos s], \\ f_3 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[\sin^2 s], \\ \mathfrak{K} &= \sin^2 s - 2 \sin s + 2 \end{aligned}$$

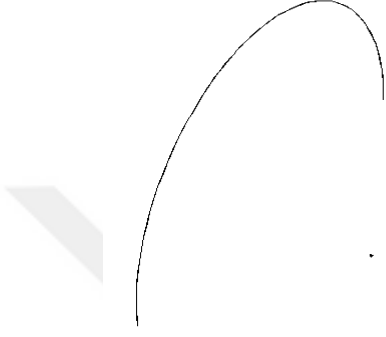
dir. O halde sabit bir nokta ve reel split kuaterniyonik bir eğri ile elde edilen $\mathfrak{E}(s, t) = (\mathfrak{e}_1(s, t), \mathfrak{e}_2(s, t), \mathfrak{e}_3(s, t))$ açıortay yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[2 \sin^2 s - 3 \sin s + 2 + t(\sin s - 1)], \\ \mathfrak{e}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[\sin s \cos s - t \cos s], \\ \mathfrak{e}_3 &= \frac{1}{\mathfrak{K}}[\sin^2 s - t \sin s] \end{aligned}$$

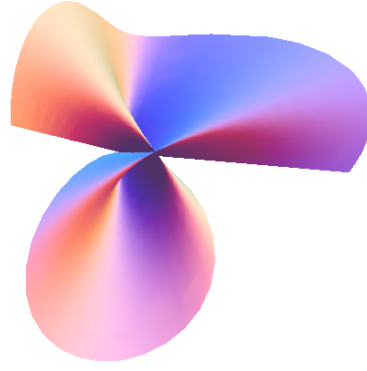
olmak üzere

$$\mathfrak{E}(s, t) = \mathfrak{F}(s) + t\mathfrak{P}(s)$$

dir.



Şekil 6.9. $\mathbf{q}(s) = (0, \cos s, \sin s)$,
 $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$, $0 \leq s \leq \pi$
 $0 \leq t \leq \pi/2$



Şekil 6.10. Bir nokta ve bir split
kuaterniyonik eğri ile elde edilen
rasyonel $\mathfrak{E}(s, t)$ açkırtay yüzeyi.

7. BÖLÜM

SONUÇ

Minkowski uzayında x , y ve z eksenleri etrafında dönerek oluşan helikal spiraller tanımlandı. Spiralin timelike ve spacelike olma durumuna göre, bu spirali merkez eğri olarak alan deniz kabuğu yüzeyi tanımlandı. Ayrıca bu eğrinin bazı karakterizasyonları yardımıyla kuaterniyonik deniz kabuğu yüzeyi tanımlanıp, bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri kuaterniyonik işlemlerle elde edildi.

Diğer taraftan, Minkowski uzayında iki split kuaterniyonik eğri ile elde edilen ve bir split kuaterniyonik eğri ile bir noktadan elde edilen rasyonel açıortay yüzeyi tanımlanıp bu yüzeyin bazı dejenere durumları elde edilmiştir. Ek olarak bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri dördüncü bölümle benzer şekilde klasik diferensiyel geometriden farklı olarak kuaterniyonik işlemlerle elde edilmiştir.

4. bölümdeki teoremlere bağlı olarak aşağıdaki bazı sonuçlar elde edildi.

Sonuç 7.1 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.22) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir $q(\varphi, \theta)$ spacelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyonu için spacelike $\mathbf{N}(\theta)$ vektörüne dik $\mathbf{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ birim timelike vektörleri verilsin. O halde $\mathbf{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise deniz kabuğu yüzeyi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) = & \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{T}(\theta) * (\mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) \\ & + \mathbf{r}(\varphi, \theta) * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta)) + \mathbf{r}(\varphi, \theta) \\ & * \mathbf{p}^{-1}(\varphi, \theta) * (\mathbf{N}(\theta) + \bar{\mathbf{T}}(\theta))] \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 7.2 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.19) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi için $\mathbf{N}(\theta)$ birim spacelike vektörüne dik $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ birim spacelike vektörleri verilsin. O halde $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasında ki açı φ ise bu deniz kabuğu yüzeyinin denklemi

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\varphi, \theta) = & \mathcal{H}(\theta) + \frac{1}{2} \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) [\mathbf{T}(\theta) * (\mathfrak{l}(\varphi, \theta) * \mathfrak{s}^{-1}(\varphi, \theta) \\ & + \mathfrak{l}(\varphi, \theta) * \mathfrak{s}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{B}(\theta)) + \mathfrak{l}(\varphi, \theta) \\ & * \mathfrak{s}^{-1}(\varphi, \theta) * (\mathbf{N}(\theta) + \bar{\mathbf{T}}(\theta))] \end{aligned}$$

dir. Burada $|\langle \mathfrak{s}(\varphi, \theta), \mathfrak{l}(\varphi, \theta) \rangle| > 1$ dir.

Sonuç 7.3 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.31) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir $\mathfrak{q}(\varphi, \theta)$ spacelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyonu için spacelike $\mathbf{T}(\theta)$ vektörüne dik $\mathfrak{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{r}(\varphi, \theta)$ birim timelike vektörleri verilsin. O halde $\mathfrak{p}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{r}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathfrak{r}(\varphi, \theta) * \mathfrak{p}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta)$$

dir.

Sonuç 7.4 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.31) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi için $\mathbf{T}(\theta)$ birim spacelike vektörüne dik $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ birim spacelike vektörleri verilsin. O halde $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise bu deniz kabuğu yüzeyinin denklemi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathfrak{l}(\varphi, \theta) * \mathfrak{s}^{-1}(\varphi, \theta) * \mathbf{N}(\theta)$$

dir. Burada $|\langle \mathfrak{s}(\varphi, \theta), \mathfrak{l}(\varphi, \theta) \rangle| > 1$ dir.

Sonuç 7.5 $\mathbb{R}_1^3$ de (4.36) denklemi ile verilen deniz kabuğu yüzeyi ve bir $\mathfrak{q}(\varphi, \theta)$ timelike vektör parçalı timelike birim kuaterniyonu için timelike $\mathbf{T}(\theta)$ vektörüne dik $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ birim spacelike vektörleri verilsin. O halde $\mathfrak{s}(\varphi, \theta)$ ve $\mathfrak{l}(\varphi, \theta)$ vektörleri arasındaki açı φ ise deniz kabuğu yüzeyi

$$\mathfrak{S}(\varphi, \theta) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{P}(\varphi) a(\theta) \mathbf{N}(\theta) * \mathfrak{s}(\varphi, \theta) * \mathfrak{l}(\varphi, \theta)$$

dir.

Bu çalışma Minkowski uzayında deniz kabuğu yüzeyi ve açıortay yüzeylerinin araştırılmasında önemli bir referans olacaktır.

Bu çalışmada deniz kabuğu yüzeyi Minkowski uzayında ilk kez tanımlandığından bu yüzey Minkowski uzayında uygun çalışmalara açıktır.

KAYNAKLAR

- [1] **Alagöz, Y., Oral, K.H., Yüce, S.**, 2012. Split Quaternion Matrices, Miskolc Mathematical Notes, 13(2), 223–232.
- [2] **Ashline, G.L., Kadas, Z.M., Monaghan, J.A.E., McCabe, D.J.**, 2009, Modeling Seashell Morphology.
- [3] **Ata E., Yaylı Y.**, 2009. Dual Quaternions and Dual Projective Spaces, Solitons&Fractals, 40(3), 1255-1263.
- [4] **Babaarslan M.**, 2013. Sabit Eğimli Yüzeyler ve Uygulamaları, Ankara Üniv. Fen Bil. Ens., Doktora Tezi, Ankara.
- [5] **Beem, J. K., Ehrlich, E. P.**, 1981. Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker. Inc., New York.
- [6] **Carmo M.P.**, 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- [7] **Chen, B.Y.**, 1973. Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker Inc., pp. 310, New York.
- [8] **Elber, G., Kim, M.S.**, 2000. A Computational Model for Nonrational Bisector Surfaces: Curve-Surface and Surface-Surface Bisectors, 364-372.
- [9] **Elber, G., Myung-Soo, K.**, 1998. The Bisector Surface of Rational Space Curves, ACM Transactions on Graph., 17, 32-49.
- [10] **Gray, A.**, 1999. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, second ed., CrcPress, USA.
- [11] **Hanson, A.J.**, 1998. Quaternion Gauss Maps and Optimal framings of Curves and Surfaces, Technical Report No:518, Indiana University, Indiana.
- [12] **Inoguchi, J.**, 1998. Timelike Surfaces Of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space, Tokyo J. Math., 21(1).
- [13] **Jirapong, K., Krawczyk, R.J.**, 2003. Seashell Architectures, ISAMA, Bridges Conference.
- [14] **Körpınar, T., Turhan, E.**, 2013. Parallel Surfaces to Normal Ruled Surfaces of General Helices in the Sol Space, Bol. Soc. Paran. Mat, 31(2), 245–253.
- [15] **Körpınar, T., Turhan, E.**, 2012. Rectifying Developable Surface of Timelike Bi-harmonic Curve in The Lorentzian Heisenberg Group Heis, TWMS J. App. Eng. Mat, 2(1), 101-108.

- [16] **Kula, L., Yaylı, Y.**, 2007. Split Quaternions and Rotations in Semi Euclidean Space, J. Korean Math. Soc., 44(6),1313-1327.
- [17] **Leunenn J.A.J.**, 2012. Q-Formulae, <http://www.e-physics.eu>.
- [18] **Lopez, R.**, 2014. Diferential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz- Minkowski space, arXiv:0810.3351v2.
- [19] **Mandic D.P., Jahanchahi C., Took C.C.**, 2011. A Quaternion Gradient Operator and Its Applications, IEEE Signal Pro. Letters, 18(1), 47-50.
- [20] **Naser, R.G.G.**, 2013. Kuaterniyonlar ve İnterpolasyonlar, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.
- [21] **Nomizu, K.**, 1966. Fundamentals of Linear Algebra, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [22] **Okuyucu O. Z.**, 2013. Characterizations of The Quaternionic Mannheim Curves in Euclidean Space $\mathbb{E}^4$, arxiv: 1301.5666v1 [math.DG].
- [23] **O'Neill, B.**, 1983. Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York.
- [24] **Özdemir, M.**, 2009. The Roots of a Split Quaternion, Applied Mathematics Letters, 22, 258–263.
- [25] **Özdemir, M., Ergin, A.A.**, 2008. Timelike Quaternion Frame of a Non-Lightlike Curve, Beitrage Zur Algebra Und Geometrie Contributions To Algebra And Geometry, 49(2), 325-333.
- [26] **Özdemir, M., Ergin, A.A.**, 2006. Rotations with Unit Timelike Quaternions in Minkowski 3 Space, Jour. Geom. Phy., 56, 322-336.
- [27] **Peternell, M.**, 2000. Geometric Properties of Bisector Surfaces, Graphical Models, 62, 202–236.
- [28] **Picado, J.**, 2009, Seashell: The Plainness and Beauty of Their Mathematical Description.
- [29] **Sabuncuoğlu, A.**, 2007. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [30] **Savcı, Ü. Z.**, 2011. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Eskişehir.
- [31] **Shen, L.Y., Diaz, S.P.**, 2014. Characterization of Rational Ruled Surfaces, Journal of Symbolic Computation, 63, 21-45.
- [32] **Şenyurt S., Çalışkan A.**, 2015. An Application According to Spatial Quaternionic Smarandache Curve, App. Math. Sci., 9(5), 219-228.
- [33] **Toth G.**, 1998. Glimpses of Algebra and Geometry, Springer, Berlin.

- [34] **Wang J.**, 1997. Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [35] **Wang X., Goldman R.**, 2015. Quaternion Rational Surfaces: Rational Surfaces Generated from The Quaternion Product of Two Rational Space Curves, Graph. Models, 81, 18-32.
- [36] **Yoon D.W., Tunçer Y., Karacan M.K.** , 2013. Generalized Mannheim Quaternionic Curves in Euclidean 4-Space, App. Math. Sci., 7(132), 6583-6592.
- [37] **Yu, Y., Liu, H., Jung, S.D.**, 2014. Structure and Characterization of Ruled Surfaces in Euclidean 3-Space, Applied Mathematics and Computation, 233, 252-259.
- [38] **Zhao, X., Wang, H., Komura, T.**, 2014. Indexing 3D Scenes Using the Interaction Bisector Surface, ACM Trans. Graph, DOI 10.1145/1559755.1559763.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2003 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2007 yılında Lisans öğrenimimi, 2012 yılında ise Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Bilimdalında yüksek lisans öğrenimimi tamamladım. Daha sonra aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Bilimdalında Doktora öğrenimime başladım. 2010 yılından itibaren Muş Alparslan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evli ve iki çocuk babasıyım.

Muhammed Talat SARIAYDIN