

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ümit ÇAKAN

Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Haziran-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ümit ÇAKAN
(091121101)

Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17 Mayıs 2011

Haziran-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ümit ÇAKAN

(091121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17 Mayıs 2011

Tezin Savunulduğu Tarih: 03 Haziran 2011

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

Haziran - 2011

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN 'a üzerimde ki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr. Hıfı ALTINOK 'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ümit ÇAKAN

ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

İÇİNDEKİLER.....	I
ÖZET	II
SİMGELER LİSTESİ.....	IV
GİRİŞ	1
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN FARKLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	9
3. $w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ UZAYI İLE $S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ UZAYI ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER	16
4. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI . .	22
5. SONUÇ.....	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Ümit ÇAKAN

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
2011, Sayfa:31+IV

Dört bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın ilk bölümünde fuzzy sayı dizileri hakkında temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; fuzzy sayı dizilerinin ve farklarının istatistiksel yakınsaklığı ile modülüs fonksiyonu arasındaki ilişkiler incelendi.

Üçüncü bölümde; modülüs fonksiyonu ile Cesàro toplanabilen diziler arasındaki ilişkiler gösterildi.

Son bölümde ise fuzzy sayı dizilerinin modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış istatistiksel yakınsaklığı tanımlandı ve ilgili teoremler verildi.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy dizileri, Modülüs fonksiyonu, İstatistiksel yakınsaklık, Pre-Cauchy dizisi.

SUMMARY

Master Thesis

THE STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

Ümit ÇAKAN

Firat University

Institute of Science and Technology

Department of Mathematics

2011, Page:31+IV

In the first chapter of this thesis that consists of four chapters, we give some fundamental definitions and theorems.

In the second chapter, we examine some relations between modulus function and statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and their differences.

In the third chapter, we examine some relations between modulus function and Cesàro summable sequences.

In the last chapter, we define the statistical convergence of sequences of fuzzy numbers defined by a modulus function and give some theorems.

Keywords: Sequences of fuzzy numbers, Modulus function, Statistical convergence, Sequences of pre-Cauchy.

SİMGELER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n –boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\circ$	: Bileşke fonksiyon
Δ	: Fark operatörü
χ	: Karakteristik fonksiyon
$L(\mathbb{R}^n)$	: n –boyutlu fuzzy sayılar kümesi
$[u]^\alpha$	: u fuzzy sayısının α –kesimi
$w(F)$	: bütün fuzzy dizilerinin kümesi
h.h.k	: hemen hemen her k için
S_F	: İstatistiksel yakınsak fuzzy dizileri kümesi
$S_F(\Delta)$	: Δ –istatistiksel yakınsak fuzzy dizileri kümesi

GİRİŞ.

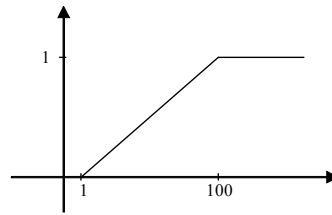
1965 'de Zadeh [1] doğruluk derecesi olası olan çok değerli bir mantığı büyük bir titizlikle hazırladı. Zadeh tarafından yayınlanan bu makale modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Zadeh, bu makalede kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu fuzzy küme teorisini ortaya koydu.

Fuzzy kümeler, boş olmayan bir X kümesinin ilgili elemanlarına göre göz önüne alınır. Temel düşünce, her bir $x \in X$ elemanının $[0, 1]$ aralığında değerler alan bir $u(x)$ üyelik derecesine atanmasıdır. Burada $u(x) = 0$, üyeliğin olmamasına; $0 < u(x) < 1$ kısmi üyeliğe ve $u(x) = 1$ de tam üyeliğe karşılık gelir. Zadeh 'e göre X 'in bir fuzzy alt kümesi en az bir $u : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu için $X \times [0, 1]$ kümesinin boş olmayan bir $\{(x, u(x) : x \in X)\}$ alt kümesidir.

Örneğin

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{99}(x - 1), & 1 < x \leq 100 \text{ ise} \\ 1, & 100 < x \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu reel $x \geq 1$ sayılarının fuzzy kümesine bir örnek olarak verilebilir (Şekil 0.1). Şüphesiz üyelik derece fonksiyonunun pek çok farklı uygun seçimleri vardır.



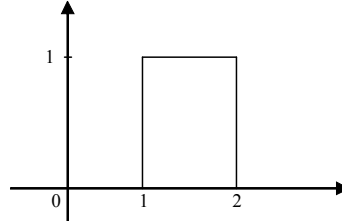
Şekil 0.1. Reel $x \gg 1$ sayılarının bir fuzzy kümesi

X 'in adi bir A alt kümesi için üyelik ihtimalleri sadece üyesizlik ve tam üyeliktir. Buna göre böyle bir küme, kendisinin $\chi_A : X \rightarrow [0, 1]$ karakteristik fonksiyonuyla X kümesi üzerinde verilen bir fuzzy kümesiyle tanımlanabilir, yani

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \text{ ise} \\ 1, & x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanabilir.

Şekil 2, $0 \leq x \leq 2$ aralığının karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.



Şekil 0.2. $\chi_{[1,2]}$ fuzzy kümesi

Fuzzy kümeler bizim günlük hayatımızda sık sık kullandığımız belirsizliklerle ilgilenmenin daha zekice bir yoludur. Örneğin, araba kullanan birisine frene basma zamanı hakkında bir tavsiyede bulunacaksınız. Tavsiyeniz: "Yaya geçidine 25 metre mesafe kala fren yapmaya başla" yoksa "Yaya geçidine yaklaşırken frene basmaya başla" şeklinde mi olurdu? Elbette ikincisi olurdu. Çünkü ilk talimat kolayca yerine getirilemeyecek kadar kesindir.

Veri yapılarının fuzzy yorumları, çeşitli problemleri çözmenin ve bunları formüle dökmenin doğal ve akla mantığa çok uygun bir yoludur. Kesin kümeler, üyelik için gereken kesin özellikleri sağlayan nesneleri ihtiva eder. 6 'dan 8 'e kadar olan sayılardan oluşan bir H kümesini $H = \{r \in R : 6 \leq r \leq 8\}$ şeklinde yazarız. Bu yazım biçimine denk olarak H ,

$$X_H(r) = \begin{cases} 1, & 6 \leq r \leq 8 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $X_H : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ üyelik (veya karakteristik) fonksiyonuyla tanımlanır. Her r reel sayısı ya H 'a aittir yada değildir. X_H tüm $r \in \mathbb{R}$ reel sayılarını $(0, 1)$ gibi iki noktaya dönüştürdüğü için kesin kümeler iki değerli mantığa karşılık gelir: "aittir veya ait değildir, açık veya kapalı, siyah veya beyaz, 1 veya 0 ". Mantıkta, X_H 'ın değerleri " r , H 'a ait midir?" sorusu için iki değerlidir denilir. Cevabın evet olması için gerek ve yeter şart $X_H(r) = 1$ olmasıdır. Aksi halde cevap hayırdır.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. $C(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ nin boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini gösterebilirsin. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

ve

$$1A = A$$

dir ve $\alpha, \beta \geq 0$ ise bu durumda

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

dir.

$\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ nin alışılmış Öklid (Euclidean) normu olmak üzere; A ve B kümeleri arasındaki uzaklık, Hausdorff metrik yardımıyla

$$\delta_\infty(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$ tam bir metrik uzaydır [2].

Tanım 1.2. $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna, en az bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $u(x) = 1$ oluyorsa normaldir denir [1].

Örnek 1.3.

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{5}, & x \in [\frac{5}{2}, 5] \\ \frac{-2x+15}{5}, & x \in [5, \frac{15}{2}] \end{cases}$$

funksiyonu, $x = 5$ için 1 değerini aldığından normaldir.

Tanım 1.4. $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere; her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min [u(x), u(y)]$$

sağlamıyorsa $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna fuzzy konveksdir denir [1].

Tanım 1.5. Aşağıdaki (i)–(iv) şartlarını sağlayan her bir $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ elemanına bir fuzzy sayısı denir ve bu sayıların kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir [3].

(i) u normaldir,

(ii) u fuzzy konveksdir,

(iii) u üst yarı süreklidir,

(iv) $[u]^0$ kompakttır (Burada $[u]^0, \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}$ kümesinin kapanışını göstermektedir.).

Özel olarak grafiği düzlemde geometrik bir şekil teşkil eden fuzzy sayıları, oluşturdukları şekil ile adlandırılırlar (üçgen fuzzy sayısı, yamuk fuzzy sayısı gibi). Bu çalışmada uygulama yönünden kolaylık sağlaması amacıyla genellikle üçgen fuzzy sayılarını kullanacağız.

Tanım 1.6. u bir fuzzy sayısı ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere; u için α seviye kümesi $[u]^\alpha$ ile gösterilir ve

$$[u]^\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}}, & \alpha = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Ayrıca $L(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki toplama ve skalarla çarpma işlemleri $u, v \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$$

ve

$$[ku]^\alpha = k [u]^\alpha$$

dir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
[u]^\alpha + [v]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\} + \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) + v(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : (u + v)(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\
&= [u + v]^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[ku]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R}^n : (ku)(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : ku(x) \geq \alpha\} \\
&= k \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\} \\
&= k [u]^\alpha
\end{aligned}$$

dir.

Sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık tanımı Fast [5] tarafından kısa bir not olarak verildi. Daha sonra bir çok matematikçi tarafından istatistiksel yakınsaklık toplanabilme metodu olarak incelendi.

Tanım 1.7. Bir $E \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_E(k)$$

limitiyle tanımlanır. Burada χ_E , E nin karakteristik fonksiyonu olup

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [4].

Teorem 1.8. Sonlu sayıda elemana sahip bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Ayrıca E^c , E nin tümleyeni olmak üzere;

$$\delta(E^c) = 1 - \delta(E)$$

dir, [4].

İspat. Teoremin ilk kısmı aşıkâr olduğundan burada sadece ikinci kısmın ispatını vereceğiz.

$$\begin{aligned}
\delta(E^c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{E^c}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - \chi_E(k)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n \chi_E(k) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_E(k) \\
&= 1 - \delta(E)
\end{aligned}$$

Tanım 1.9. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanıyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $S\text{-}\lim x_k = L$ şeklinde gösterilir [5]. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ olması halinde S_0 , yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
S &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}, \\
S_0 &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

dir. Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Gerçekten $m=1,2,3,\dots$ için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : |x_k| \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S\text{-}\lim x = 0$ demektir. Diğer taraftan $x = (x_k)$ dizisinin yakınsak olmadığı kolayca görülebilir.

Tanım 1.10. Aşağıdaki şartları sağlayan $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna bir modülüs fonksiyonu denir [6].

- (i) $f(x) = 0 \iff x = 0$
- (ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall x \geq 0, y \geq 0$ için
- (iii) f artandır.
- (iv) $f, x = 0$ noktasında sağdan süreklidir.

Ruckle [6] tarafından

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\},$$

dizi uzayı f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış ve bu dizi uzayının bazı özellikleri incelenmiştir.

Şimdi modülüs fonksiyonuna örnek verelim.

Örnek 1.11. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ve $f(x) = \log(1+x)$ fonksiyonları birer modülüs fonksiyonudur ve yukarıdaki şartların sağlandığı aşikardır. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir.

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [7] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 1.12. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $l_{\infty}(\Delta), c(\Delta), c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned} l_{\infty}(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in l_{\infty}\}, \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Kızmaz [7] bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty}$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu göstermiştir. 1995 yılında Et ve Çolak [8]

$$\begin{aligned}
m &\in \mathbb{N}, \Delta^0 x = (x_k), \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \\
\Delta^m x_k &= (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}), \\
&\Rightarrow \Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
l_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in l_\infty\}, \\
c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}, \\
c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\},
\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu göstermiştir.

Daha sonra Et ve Nuray [9], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genelleştirerek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

2. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN FARKLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde fuzzy sayı dizilerinin daha önceden incelenen Δ -istatistiksel yakınsaklığı, Δ -istatistiksel Cauchy dizisi ve Δ -Cesàro toplanabilirliği kavramları verilmiş ve özellikleri örneklerle incelenmiştir. Ayrıca bu kavramların modülüs fonksiyonu ile ilişkisi incelenmiştir.

Tanım.2.1. Her $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(u, v) = \left(\int_0^1 [\delta_\infty([u]^\alpha, [v]^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

$L(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir metriktir ve bu metrik kısaca d ile gösterilir. $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$ ve c bir sabit olmak üzere; d metriği

$$d(cX, cY) = |c| d(X, Y)$$

$$d(X + Z, Y + Z') \leq d(X, Y) + d(Z, Z')$$

özelliklerine sahiptir [2]. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \delta_\infty(c[X]^\alpha, c[Y]^\alpha) &= \max \left\{ \sup_{a \in c[X]^\alpha} \inf_{b \in c[Y]^\alpha} \|a - b\|, \sup_{b \in c[Y]^\alpha} \inf_{a \in c[X]^\alpha} \|a - b\| \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{m \in [X]^\alpha} \inf_{n \in [Y]^\alpha} |c| \|m - n\|, \sup_{n \in [Y]^\alpha} \inf_{m \in [X]^\alpha} |c| \|m - n\| \right\}, \quad \left(\frac{a}{c} = m \text{ ve } \frac{b}{c} = n \right) \\ &= |c| \max \left\{ \sup_{m \in [X]^\alpha} \inf_{n \in [Y]^\alpha} \|m - n\|, \sup_{n \in [Y]^\alpha} \inf_{m \in [X]^\alpha} \|m - n\| \right\} \\ &= |c| \delta_\infty([X]^\alpha, [Y]^\alpha) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
d(cX, cY) &= \left(\int_0^1 [\delta_\infty([cX]^\alpha, [cY]^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 [\delta_\infty(c[X]^\alpha, c[Y]^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 [|c| \delta_\infty([X]^\alpha, [Y]^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.1) \text{ eşitliğinden} \\
&= |c| \left(\int_0^1 [\delta_\infty([X]^\alpha, [Y]^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |c| d(X, Y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d(X + Z, Y + Z') &= \left(\int_0^1 [\delta_\infty([X + Z]^\alpha, [Y + Z']^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 [\delta_\infty([X]^\alpha + [Z]^\alpha, [Y]^\alpha + [Z']^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^1 [\delta_\infty([X]^\alpha + [Y]^\alpha) + \delta_\infty([Z]^\alpha + [Z']^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^1 [\delta_\infty([X]^\alpha + [Y]^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 [\delta_\infty([Z]^\alpha + [Z']^\alpha)]^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= d(X, Y) + d(Z, Z')
\end{aligned}$$

dir.

Tanım.2.2. Fuzzy sayılarının bir $X = (X_k)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R}^n)$ nin içine tanımlanan bir fonksiyondur. Böylece her bir pozitif k sayısına karşılık bir $X(k)$ fuzzy sayısı vardır. Gösterim olarak $(X(k))$ yerine kısaca X yazılacaktır [10].

Tanım 2.3. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer fuzzy sayıların $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlıysa $X = (X_k)$ dizisine sınırlıdır denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir k_0 doğal sayısı mevcut ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir. Bu durum $\lim X_k = X_0$ şeklinde ifade edilir [10].

$l_\infty(\mathcal{F})$ ile bütün sınırlı fuzzy sayı dizilerini, $c(\mathcal{F})$ ile bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerini ve $w(\mathcal{F})$ ile de bütün fuzzy sayı dizilerinin kümesi gösterilir.

$X = (X_k), Y = (Y_k)$ yakınsak birer fuzzy sayı dizisi ve

$$\lim_k X_k = X_0$$

$$\lim_k Y_k = Y_0$$

olmak üzere; bu diziler aşağıdaki cebirsel özelliklere sahiptirler [10].

$$(i) \lim_{k \rightarrow \infty} (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow \infty} (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$$

$$(iii) \lim_{k \rightarrow \infty} (X_k Y_k) = X_0 Y_0$$

$$(iv) \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}, (Y_k \neq 0)$$

$\Delta : w(\mathcal{F}) \rightarrow w(\mathcal{F})$ operatörü

$$\Delta^0 X_k = X_k, \Delta X_k = X_k - X_{k+1}, \Delta^m X_k = \Delta^{m-1} X_k - \Delta^{m-1} X_{k+1}$$

olacak şekilde tanımlanır.

Tanım 2.4. $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olsun. Bu durumda eğer $\{\Delta X_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlı ise $X = (X_k)$ dizisine Δ -sınırlıdır denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir k_0 doğal sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisine X_0 fuzzy sayısına Δ -yakınsaktır denir. Bu durum

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta X_k = X_0$$

şeklinde belirtilir.

$l_\mathcal{F}^\infty(\Delta)$ ile bütün Δ -sınırlı dizilerin kümesini ve $c_\mathcal{F}(\Delta)$ ile bütün Δ -yakınsak dizilerin kümesini göstereceğiz [11].

Tanım 2.5. Her $\varepsilon > 0$ için $k, l > N$ olduğunda $d(X_k, X_l) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy dizisine Cauchy dizisi denir [10].

Eğer bir $X = (X_k)$ dizisi bir p özelliğini, sıfır yoğunluklu bir kümeye ait olmayan bütün k değerleri için sağlıyorsa, X_k hemen hemen her k için p özelliğini sağlar denir ve bu durum *h.h.k* şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.6. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcut ise yani $h.h.k$ için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $S_{\mathcal{F}} - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \rightarrow X_0(S_{\mathcal{F}})$ şeklinde gösterilir. İstatistiksel yakınsak bütün fuzzy sayı dizilerinin ailesi $S_{\mathcal{F}}$ ile gösterilir [12].

Tanım 2.7. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcut ise yani $h.h.k$ için $d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $S_{\mathcal{F}}(\Delta) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \rightarrow X_0(S_{\mathcal{F}}(\Delta))$ şeklinde gösterilir. Δ -istatistiksel yakınsak bütün fuzzy sayı dizilerinin ailesi $S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ ile gösterilir [13].

Şunu belirtelim ki; fuzzy Δ -yakınsak bütün diziler fuzzy Δ -istatistiksel yakınsaktır; fakat bunun tersi doğru değildir.

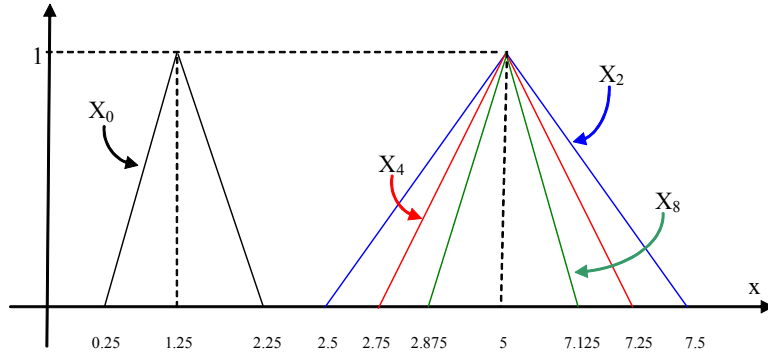
Örnek 2.8. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{2k+1}x + \frac{1-3k}{2k+1}, & x \in \left[\frac{3k-1}{k}, 5\right] \\ -\frac{k}{2k+1}x + \frac{7k+1}{2k+1}, & x \in \left[5, \frac{7k+1}{k}\right] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad \begin{matrix} k = 2^n \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \end{matrix}$$

$$X_0(x), \quad k \neq 2^n$$

$$X_0(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{4}, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right] \\ -x + \frac{9}{4}, & x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır fakat yakınsak değildir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1

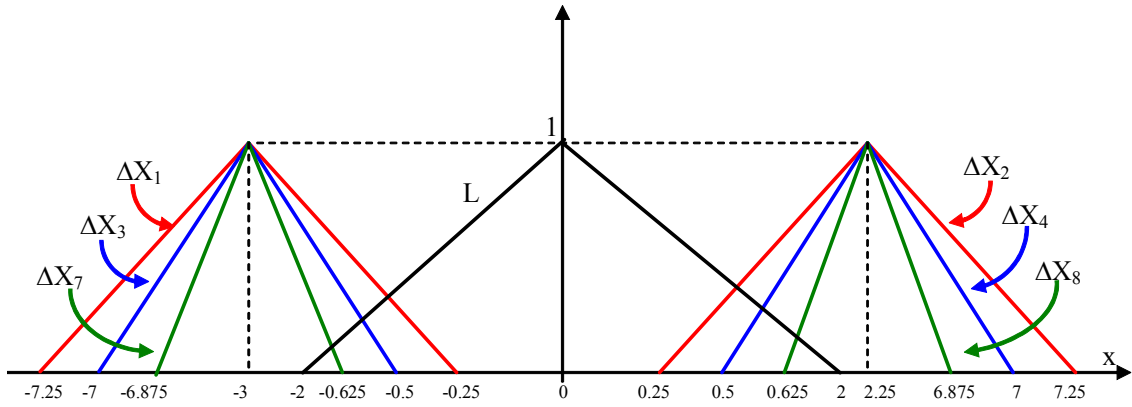
Buradan

$$[X_k(x)]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{3k-1+(2k+1)\alpha}{k}, \frac{7k+1-(2k+1)\alpha}{k} \right], & k = 2^n \\ \left[\frac{4\alpha+1}{4}, \frac{9-4\alpha}{4} \right], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{3k-4+(12k+4)\alpha}{4k}, \frac{27k+4-\alpha(12k+4)}{4k} \right], & k = 2^n \\ \left[\frac{-27k-31+(12k+16)\alpha}{4k+4}, \frac{-3k+1-\alpha(12k+16)}{4k+4} \right], & k+1 = 2^n \\ [-2+2\alpha, 2-2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. Böylece $L^\alpha = [-2+2\alpha, 2-2\alpha]$ olmak üzere $S_{\mathcal{F}}(\Delta) - \lim X_k = L$ dir. Fakat $X = (X_k)$ dizisi Δ -yakınsak değildir. (ΔX_k) dizisinin grafiği de Şekil 2.2 deki gibidir.



Şekil 2.2

Tanım 2.9. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, \Delta X_N) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde pozitif bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise $X = (X_k)$ dizisine Δ -istatistiksel Cauchy dizisi denir [14].

Teorem 2.10. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin Δ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $X = (X_k)$ dizisinin Δ -istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [14].

Tanım 2.11. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Δp -Cesàro toplanabilir denir ve $w_{\mathcal{F}}(p, \Delta) - \lim X_k = X_0$ yazılır. Bütün kuvvetli Δp -Cesàro toplanabilir dizilerin ailesi $w_{\mathcal{F}}(p, \Delta)$ ile gösterilir [15].

Tanım 2.12. $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde X_0 fuzzy sayısı varsa, $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına f modülüs fonksiyonu ile kuvvetli Δp -Cesàro toplanabilir denir ve $w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta) - \lim X_k = X_0$ yazılır. f modülüs fonksiyonu ile kuvvetli Δp -Cesàro toplanabilen fuzzy sayı dizilerinin ailesi $w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.13. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} |\{(j, k) : j, k \leq n, |x_k - x_j| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisine istatistiksel pre-Cauchy dizisi denir [17].

Teorem 2.14. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve f sınırlı bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel pre-Cauchy dizisi olması için gerek

ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k \leq n} f(|x_k - x_j|) = 0$$

olmasıdır [18].

Tanım 2.15. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} |\{(j, k) : j, k \leq n, d(\Delta X_k, \Delta X_j) \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine Δ -istatistiksel pre-Cauchy dizisi denir [16].

3. $w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ UZAYI İLE $S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ UZAYI ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

Bu bölümde bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin Δ -istatistiksel pre-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartları ve $w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ ile $S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ uzayları arasındaki bazı ilişkileri vereceğiz.

Teorem 3.1. $X = (X_k)$, fuzzy sayılarının $\Delta X = (\Delta X_k)$ sınırlı olacak şekilde bir dizisi olsun. Bu durumda $X = (X_k)$ dizisinin fuzzy Δ -istatistiksel pre-Cauchy dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart sınırlı bir f modülüs fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k \leq n} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] = 0$$

olmasıdır [16].

İspat. Kabul edelim ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k \leq n} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] = 0$$

dir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k \leq n} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] &= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j,k \leq n \\ d(\Delta X_k, \Delta X_j) < \varepsilon}} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j,k \leq n \\ d(\Delta X_k, \Delta X_j) \geq \varepsilon}} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] \\ &\geq \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j,k \leq n \\ d(\Delta X_k, \Delta X_j) \geq \varepsilon}} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] \\ &\geq f((\varepsilon)) \frac{1}{n^2} |\{(j, k) : j, k \leq n, d(\Delta X_k, \Delta X_j) \geq \varepsilon\}| \geq 0 \end{aligned}$$

yazarız ve böylece X fuzzy Δ -istatistiksel pre-Cauchy dizisidir.

Tersine $X = (X_k)$ dizisinin fuzzy Δ -istatistiksel pre-Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim ve $\varepsilon > 0$ için $f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısını seçelim. f sınırlı olduğundan

her $d(\Delta X_k, \bar{0})$ için $f(d(\Delta X_k, \bar{0})) < T$ olacak şekilde bir T tamsayısı vardır. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} \sum_{j,k \leq n} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] &= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j,k \leq n \\ d(\Delta X_k, \Delta X_j) < \delta}} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] \\
&+ \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j,k \leq n \\ d(\Delta X_k, \Delta X_j) \geq \delta}} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] \\
&\leq f(\delta) + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{j,k \leq n \\ d(\Delta X_k, \Delta X_j) \geq \delta}} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + T \left(\frac{1}{n^2} |\{(j, k) : j, k \leq n, d(\Delta X_k, \Delta X_j) \geq \delta\}| \right) \quad (3.1)
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

$X = (X_k)$ dizisi, Δ -istatistiksel pre-Cauchy dizisi olduğundan her $n > N$ için (3.1) eşitsizliğinin sağ tarafı ε dan küçük olacak şekilde bir N sayısı vardır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{l,k \leq n} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.2. f bir modültis fonksiyonu ve $0 < h = \inf_{k \in \mathbb{N}} p_k \leq p_k \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} p_k = H < \infty$ olsun. Bu durumda $w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta) \subset S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ dir ve bu kapsama kesindir [16].

İspat. $X \in w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ olsun. $\varepsilon > 0$ için $\sum_1$ ile bütün toplamın $k \leq n$ iken $d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon$ olan terimlerinin toplamını ve $\sum_2$ ile de $k \leq n$ iken $d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$ olan terimlerin toplamını gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} &= \frac{1}{n} \left(\sum_1 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_2 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \right) \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_1 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_1 [f(\varepsilon)]^{p_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{n} \sum_1 \min \left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right) \\
&= \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \min \left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H \right)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $X \in S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ dir. Fakat bu teoremin tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek 3.3. Her $k \in \mathbb{N}$ için $f(X_k) = X_k$ ve $p_k = 1$ alalım. (X_k) fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$X_k(x) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{x}{k^3} + 1, & -k^3 \leq x \leq 0 \\ &-\frac{x}{k^3} + 1, & 0 < x \leq k^3 \\ &0, & \text{diğer} \end{aligned} \right\}, & \begin{aligned} &k = n^3 \\ &(n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \\ \left. \begin{aligned} &x - 4, & 4 \leq x \leq 5 \\ &-x + 6, & 5 < x \leq 6 \\ &0, & \text{diğer} \end{aligned} \right\}, & \text{diğer} \end{cases}$$

Bu durumda

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [-k^3(1-\alpha), k^3(1-\alpha)], & k = n^3 \\ [4+\alpha, 6-\alpha], & \text{diğer} \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [-k^3-6+\alpha(k^3+1), k^3-4-\alpha(k^3+1)], & k=n^3, (n=1,2,3,\dots) \\ [-(k+1)^3(1-\alpha)+4+\alpha, (k+1)^3(1-\alpha)+6-\alpha], & k+1=n^3, (n=2,3,\dots) \\ [-2+2\alpha, 2-2\alpha], & \text{diğer} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $X_k \in S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ ve $X_k \notin w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.4. $0 < h = \inf_{k \in \mathbb{N}} p_k \leq p_k \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} p_k = H < \infty$ olsun. Bu durumda herhangi bir sınırlı f modülüs fonksiyonu için $S_{\mathcal{F}}(\Delta) \subset w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ dir [16].

İspat. $X \in S_{\mathcal{F}}(\Delta)$ ve f sınırlı bir modülüs fonksiyonu olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\sum_1, \sum_2$ Teorem 3.2 de olduğu gibi tanımlansın. f sınırlı olduğundan her k için $f(d(\Delta X_k, X_0)) < T$ olacak şekilde bir T tamsayısı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} &= \frac{1}{n} \left(\sum_1 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} + \sum_2 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_1 [T]^{p_k} + \frac{1}{n} \sum_2 [f(\varepsilon)]^{p_k} \\
&\leq \max(1, [T]^H) \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| + \max([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $X \in w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ elde edilir ki; bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.5. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun $0 < h = \inf_{k \in \mathbb{N}} p_k \leq p_k \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} p_k = H < \infty$ ve f sınırlı bir modülüs fonksiyonu olmak üzere; $X = (X_k)$ dizisinin X_0 fuzzy sayısına fuzzy Δ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} = 0$$

olmasıdır [16].

İspat. Teorem 3.2 ve Teorem 3.4 'den ispat çıkar.

Lemma 3.6. f bir modülüs fonksiyonu ve (x_k) reel yada kompleks terimli sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$M |x_k| \leq f(|x_k|) \leq K |x_k|$$

olcak şekilde $M, K > 0$ sayıları vardır [16].

İspat. $x_k = 0$ için eşitsizlik açıktır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \neq 0$ ve $M_1 > 0$ iken $M_1 \leq |x_k| \leq K_1$ sağlansın. f artan olduğundan $f(M_1) \leq f(|x_k|) \leq f(K_1)$ dır. $\frac{|x_k|}{M_1} \geq 1$ ve $\frac{|x_k|}{K_1} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{|x_k|}{K_1} f(M_1) \leq f(|x_k|) \leq f(K_1) \frac{|x_k|}{M_1}$$

yazabiliriz. $\frac{f(M_1)}{K_1} = M$ ve $\frac{f(K_1)}{M_1} = K$ alırsak

$$M |x_k| \leq f(|x_k|) \leq K |x_k|$$

elde ederiz ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.7. $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının, $\Delta X = (\Delta X_k)$ sınırlı olacak şekildeki bir dizisi olsun. Bu durumda $X = (X_k)$ dizisinin fuzzy Δ -istatistiksel pre-Cauchy dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j, k \leq n} d(\Delta X_k, \Delta X_j) = 0.$$

olmasıdır [16].

İspat. f herhangi bir modülüs fonksiyonu olsun. (ΔX_k) sınırlı bir fuzzy sayı dizisi olduğundan $(d(\Delta X_k, \bar{0}))$ negatif olmayan reel sayıların sınırlı bir dizisidir. Böylece Lemma. 3.6. gereğince

$$M d(\Delta X_k, \Delta X_j) \leq f(d(\Delta X_k, \Delta X_j)) \leq K d(\Delta X_k, \Delta X_j)$$

olacak şekilde M ve K sayılar vardır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k \leq n} d(\Delta X_k, \Delta X_j) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j,k \leq n} [f(d(\Delta X_k, \Delta X_j))] = 0$$

yazabiliriz.

Teorem 3.8. f_1 ve f_2 iki modülüs fonksiyonu ve

$0 < h = \inf_{k \in \mathbb{N}} p_k \leq p_k \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} p_k = H < \infty$ olsun. Bu durumda

$$i) w_{\mathcal{F}}(f_1, p, \Delta) \subseteq w_{\mathcal{F}}(f_2 \circ f_1, p, \Delta),$$

$$ii) w_{\mathcal{F}}(f_1, p, \Delta) \cap w_{\mathcal{F}}(f_2, p, \Delta) \subseteq w_{\mathcal{F}}(f_1 + f_2, p, \Delta)$$

dir [16].

Teorem 3.9. $0 < p_k \leq q_k$ ve (q_k/p_k) sınırlı olsun. Bu durumda herhangi bir f modülüs fonksiyonu için $w_{\mathcal{F}}(f, q, \Delta) \subset w_{\mathcal{F}}(f, p, \Delta)$ dir [16].

Lemma 3.10. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \beta \text{ limiti vardır,}$$

$$(ii) 0 < \delta < 1 \text{ olmak üzere } \forall x \geq \delta \text{ için } f(x) \leq 2f(1)\delta^{-1}x \text{ sağlamır [19].}$$

Teorem 3.11. f herhangi bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ise bu durumda $w_{\mathcal{F}}(f, \Delta) = w_{\mathcal{F}}(\Delta)$ dir [16].

İspat. $w_{\mathcal{F}}(f, \Delta) \subset w_{\mathcal{F}}(\Delta)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $w_{\mathcal{F}}(\Delta) \subset w_{\mathcal{F}}(f, \Delta)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $X \in w_{\mathcal{F}}(\Delta)$ olsun. Bu durumda en az bir X_0 için

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\Delta X_k, X_0) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

dir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve her $t \in [0, \delta]$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ seçelim. Bu durumda Lemma 3.10. 'dan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(d(\Delta X_k, X_0))] &= \frac{1}{n} \sum_{d(\Delta X_k, X_0) < \delta}^n [f(d(\Delta X_k, X_0))] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{d(\Delta X_k, X_0) \geq \delta}^n [f(d(\Delta X_k, X_0))] \\
&\leq \frac{1}{n} n \varepsilon + 2f(1) \delta^{-1} S_n = \varepsilon + 2f(1) \delta^{-1} S_n
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

4. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde fuzzy sayı dizileri için modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayacağız. Daha sonra modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsak olan fuzzy sayı dizilerinin kümesini vereceğiz. Ayrıca modülüs fonksiyonunun seçiminin, yani seçilen fonksiyonun yapısının bu uzayı nasıl etkileceğini teoremlerle incelemeye çalışacağız. Modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsak olan dizilerde modülüs fonksiyonu özel olarak birim fonksiyon seçilirse, daha önceden tanımlanmış olan istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi elde edilir.

Tanım 4.1. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir modülüs fonksiyonu ve $L(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bütün fuzzy sayıların kümesi olmak üzere; bir $X = (X_k) \subset L(\mathbb{R})$ için, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : f[\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $X_0 \in L(\mathbb{R})$ sayısı mevcut ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına f modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaktır denir ve $X_k \rightarrow X_0(S_F(f))$ veya $S_F(f) - \lim X_k = X_0$ yazılır. Buradaki $\bar{d}$ metriği

$$\bar{d}(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d([u]^\alpha, [v]^\alpha)$$

şeklinde tanımlıdır.

Bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla bir X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak olan bütün fuzzy sayı dizilerinin ailesini $S_F(f)$ ile göstereceğiz. Yani

$$S_F(f) = \{X = (X_k) \in w(F) : X_k \rightarrow X_0(S_F(f)), X_0 \in L(\mathbb{R})\}$$

dir.

Tanım 4.2. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir modülüs fonksiyonu ve $\Delta X_k = X_k - X_{k+1}$ olmak üzere; bir $X = (X_k) \in L(\mathbb{R})$ için, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : f[\bar{d}(\Delta X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $X_0 \in L(\mathbb{R})$ sayısı mevcut ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına f modülüs fonksiyonu yardımıyla Δ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $X_k \rightarrow X_0(S_F(\Delta, f))$ veya $S_F(\Delta, f) - \lim X_k = X_0$ yazılır.

Bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla bir X_0 fuzzy sayısına Δ -istatistiksel yakınsak olan bütün fuzzy sayı dizilerinin ailesini $S_F(\Delta, f)$ ile göstereceğiz. Yani

$$S_F(\Delta, f) = \{X = (X_k) \in w(F) : X_k \rightarrow X_0(S_F(\Delta, f)), X_0 \in L(\mathbb{R})\}$$

dir.

Teorem 4.3. f_1 ve f_2 herhangi iki modülüs fonksiyonu olmak üzere;

$$S_F(f_1) \cap S_F(f_2) \subseteq S_F(f_1 + f_2)$$

dir.

İspat. Herhangi bir $X = (X_k) \in S_F(f_1) \cap S_F(f_2)$ alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : f_1[\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : f_2[\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır.

$$(f_1 + f_2)[\bar{d}(X_k, X_0)] = f_1[\bar{d}(X_k, X_0)] + f_2[\bar{d}(X_k, X_0)]$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : (f_1 + f_2)[\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

ve dolayısıyla $X = (X_k) \in S_F(f_1 + f_2)$ dir. Buradaki $X = (X_k)$ dizisi keyfi olarak seçildiğinden $S_F(f_1) \cap S_F(f_2) \subseteq S_F(f_1 + f_2)$ sonucu elde edilir.

Teorem 4.4. f_1 ve f_2 herhangi iki modülüs fonksiyonu olmak üzere;

$$S_F(\Delta, f_1) \cap S_F(\Delta, f_2) \subseteq S_F(\Delta, f_1 + f_2)$$

dir.

İspat. Teorem 4.3 'ün ispatına benzer olarak ispat yapılır.

Teorem 4.5. Her $u \in [0, \infty)$ için $f_1(u) \leq f_2(u)$ olacak şekildeki f_1 ve f_2 modülüs fonksiyonları için

$$S_F(f_2) \subseteq S_F(f_1)$$

dir.

İspat. Herhangi bir $X = (X_k) \in S_F(f_2)$ alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : f_2[\overline{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde X_0 fuzzy sayısı vardır. Her n doğal sayısı için

$$|\{k \leq n : f_1[\overline{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : f_2[\overline{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}|$$

olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\{k \leq n : f_1[\overline{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

ve böylece $X = (X_k) \in S_F(f_1)$ dir. $X = (X_k)$ keyfi olarak seçildiğinden $S_F(f_2) \subseteq S_F(f_1)$ dir.

Teorem 4.6. Her $u \in [0, \infty)$ için $f_1(u) \leq f_2(u)$ olacak şekildeki f_1 ve f_2 modülüs fonksiyonları için

$$S_F(\Delta, f_2) \subseteq S_F(\Delta, f_1)$$

dir.

İspat. Teorem 4.5 'in ispatına benzer olarak ispat aşıkardır.

Teorem 4.7. f_1 ve f_2 herhangi iki modülüs fonksiyonu olmak üzere

$$S_F(f_1) \subset S_F(f_2 \circ f_1)$$

dir.

İspat. Herhangi bir $X = (X_k) \in S_F(f_1)$ alalım. f_2 sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $f_2(\delta) = \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan $X = (X_k)$ dizisinin seçimi gereği $\delta > 0$ sayısına karşılık

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : f_1[\overline{d}(X_k, X_0)] \geq \delta\}| = 0$$

olacak şekilde X_0 fuzzy sayısı vardır. Buradan $k \leq n$ için

$$\begin{aligned} f_2(f_1[\bar{d}(X_k, X_0)]) &\geq f_2(\delta) = \varepsilon \\ (f_2 \circ f_1)[\bar{d}(X_k, X_0)] &\geq \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : (f_2 \circ f_1)[\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \delta\}| = 0$$

elde edilir ki; bu da $X = (X_k) \in S_F(f_2 \circ f_1)$ demektir. $X = (X_k)$ dizisi keyfi olarak seçildiğinden $S_F(f_1) \subset S_F(f_2 \circ f_1)$ dir.

Örnek 4.8. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi seçelim.

$$X_k = \begin{cases} \frac{k}{2k+3}x + \frac{-2k+3}{2k+3}, & x \in [\frac{2k-3}{k}, 4] \\ -\frac{k}{2k+3}x + \frac{6k+3}{2k+3}, & x \in [4, \frac{6k+3}{k}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad k = 3^n, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$X_0(x), \quad k \neq 3^n$$

$$X_0(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0] \\ -x + 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Böylece

$$[X_k(x)]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{(2k+3)\alpha+2k-3}{k}, \frac{-(2k+3)\alpha+6k+3}{k} \right], & k = 3^n \\ [\alpha - 1, 1 - \alpha], & k \neq 3^n \end{cases}$$

ve

$$[\Delta X_k(x)]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{(3+3k)\alpha+k-3}{k}, \frac{-(3k+3)\alpha+7k+3}{k} \right], & k = 3^n \\ \left[\frac{(6+3k)\alpha-7k-10}{k+1}, \frac{-(6+3k)\alpha-k+2}{k+1} \right], & k+1 = 3^n \\ [2\alpha - 2, -2\alpha + 2], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Şimdi $f(u) = \frac{u}{u+1}$ alarak $\bar{d}([X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha)$ ve $f[\bar{d}([X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha)]$ değerlerini inceleyelim. $k \neq 3^n$ ise $\bar{d}(X_k, X_0) = 0$ ve $k = 3^n$ için,

$$\begin{aligned}
\bar{d}(X_k, X_0) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d([X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha) \\
&= d([X_k]^0, [X_0]^0) \\
&= \max \left\{ \left| \underline{[X_k]^0} - \underline{[X_0]^0} \right|, \left| \overline{[X_k]^0} - \overline{[X_0]^0} \right| \right\} \\
&= \frac{5k+3}{k}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$f[\bar{d}(X_k, X_0)] = \begin{cases} \frac{5k+3}{6k+3}, & k = 3^n, (n = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & k \neq 3^n \end{cases}$$

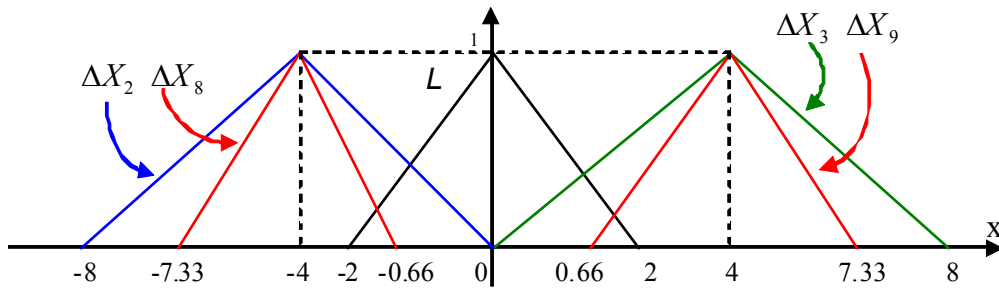
elde edilir. Benzer olarak

$$f[\bar{d}(\Delta X_k, L)] = \begin{cases} \frac{5k+3}{6k+3}, & k = 3^n \\ \frac{5k+8}{6k+9}, & k+1 = 3^n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : f[\bar{d}(\Delta X_k, L)] \geq \varepsilon\}| = 0$$

olup $X = (X_k) \in S_F(\Delta, f)$ dir. Bu dizinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1.

Genel olarak herhangi bir uzayda herhangi bir dizinin uzayın bir elemanına yakınsaklığını bozan terimlerini aykırı terim olarak adlandıralım. O halde bu dizinin aykırı terimleri hariç diğer terimlerinin oluşturduğu dizi yakınsak olur. Örneğin

$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, \dots)$ dizisinde aykırı terim diye adlandırdığımız 5., 10., 15. vs terimleri bu dizinin 0 'a yakınsaklığını bozmaktadır ve bu terimler olmasaydı dizi 0 'a yakınsak olurdu. Eğer bir (x_k) dizisinde her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde uzayın bir x_0 elemanı varsa (x_k) dizisine x_0 'a istatistiksel yakınsaktır deriz. Öyleyse istatistiksel yakınsak bir dizide, terimlerin istatistiksel limit noktasına yakınsama hızının büyüklüğü dizinin istatistiksel yakınsaklığının daha kuvvetli olması olarak adlandıırırsak; bir dizide yakınsaklığa aykırı terimlerin sayısı azaldıkça dizinin istatistiksel yakınsaklığı daha kuvvetli olur şeklinde yorumlayabiliriz.

İşte bu çalışmada tanımladığımız modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramında seçilen modülüs fonksiyonu dizinin istatistiksel yakınsaklığının kuvvetini doğrudan etkileyen faktördür. Buradan şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.9. Her $u \in [0, \infty)$ için $f_1(u) \leq f_2(u)$ olacak şekilde f_1 ve f_2 iki modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda "herhangi bir dizinin f_1 fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklığı, f_2 fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklığından daha kuvvetlidir". Şimdi bu sonucu bir fuzzy sayı dizisi için aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 4.10. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} 1, & k = \frac{1}{x} \\ 0, & k \neq \frac{1}{x} \\ \bar{0}, & x = 0 \end{cases}, \quad x \neq 0$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi bu dizinin $f_1(u) = \frac{u}{10u+1}$ ve $f_2(u) = 10^{10}u$ modülüs fonksiyonuna göre istatistiksel yakınsaklığını karşılaştıralım.

Her $0 \leq \alpha \leq 1$ için $[X_k]^\alpha = \{\frac{1}{k}\}$ ve $[\bar{0}]^\alpha = \{0\}$ olduğundan $\bar{d}(X_k, \bar{0}) = \frac{1}{k}$ elde edilir ve

$$\begin{aligned} f_1[\bar{d}(X_1, \bar{0})] &= \frac{1}{11} \\ f_1[\bar{d}(X_2, \bar{0})] &= \frac{1}{12} \\ f_1[\bar{d}(X_3, \bar{0})] &= \frac{1}{13}, \dots, f_1[\bar{d}(X_k, \bar{0})] = \frac{1}{k}, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 [\bar{d}(X_1, \bar{0})] &= 10^{10} \\
f_2 [\bar{d}(X_2, \bar{0})] &= \frac{10^{10}}{2} \\
f_2 [\bar{d}(X_3, \bar{0})] &= \frac{10^{10}}{3}, \dots, f_2 [\bar{d}(X_k, \bar{0})] = \frac{10^{10}}{k}, \dots
\end{aligned}$$

dir. Her $\varepsilon > 0$ seçimi için

$$|\{k \leq n : f_1 [\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : f_2 [\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}|$$

olacağından (X_k) dizisinin f_1 modülüsüne göre $\bar{0}$ fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaklığı, f_2 modülüsüne göre istatistiksel yakınsaklığından daha kuvvetlidir. Örneğin, $\varepsilon = 10^{-2}$ alınırsa, her $n \geq 10^{12}$ için

$$|\{k \leq n : f_1 [\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 90$$

ve

$$|\{k \leq n : f_2 [\bar{d}(X_k, X_0)] \geq \varepsilon\}| = 10^{12}$$

olur. Yani f_1 modülüsüne göre aykırı terim sayısı 90 iken f_2 modülüsüne göre 10^{12} dir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada fuzzy sayı dizileri için modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlandı. Modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsak olan fuzzy sayı dizilerinin kümesi incelendi ve bazı kapsama bağıntıları verildi.

KAYNAKLAR

1. **Zadeh, L.A., 1965**, Fuzzy sets, Inform and Control, **8**, 338-353.
2. **Diamond, P. and Kloeden, P., 1993**, Metric Spaces of Fuzzy Sets Theory and Applications, World Scientific, Singapore.
3. **Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1986**, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl. **114**, 409-422.
4. **Buck, R. C., 1953**, Generalized asymptotic density, Amer. J. Math., **75** , 335 - 346.
5. **Fast, H., 1951**, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., **2**, 241-244.
6. **Ruckle, W. H., 1973**, FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. Canad. J. Math. **25** , 973–978.
7. **Kızmaz, H., 1981**, On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., **24**, 169-176.
8. **Et, M. and Çolak, R., 1995**, On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. of Math., **21**, 377- 386.
9. **Et, M. and Nuray, F., 2001**, Δ^m – Statistical convergence, Indian J. Pure and Appl. Math., **32**(6) 961-969.
10. **Matloka, M., 1986**, Sequences of fuzzy numbers, BUSEFAL., **28**, 28-37.
11. **Savaş, E., 2000**, A note on sequence of fuzzy numbers. Inform. Sci. **124** , no. 1-4, 297–300.
12. **Nuray, F. and Savaş, E. , 1995**, Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, **45**(3), 269-273.
13. **Mursaleen, M. and Başarır, M., 2003**, On some new sequence spaces of fuzzy numbers, Indian J. Pure and Appl. Math., **34** (9), 1351-1357.
14. **Başarır, M. and Mursaleen, M., 2004**, Some sequence spaces of fuzzy numbers generated by infinite matrices, Fuzzy Math, **11** (3) 57–764.

15. **Bilgin, T., 2003**, Δ – Statistical and strong Δ – Cesàro convergence of sequences of fuzzy numbers, *Mathematical Communications*, **8** (1), 95-100.
16. **Çolak, R. Altın, Y. and Mursaleen, M., 2011**, On Some Difference Sequence Spaces of Fuzzy Numbers, *Soft Computing*, **15** (4), 787-793.
17. **Connor, J. Fridy, J and Kline, J., 1994**, Statistically pre-Cauchy sequences, *Analysis*, **14** , no. 4, 311–317.
18. **Gürdal, M., 2003**, Statistically pre-Cauchy sequences and bounded moduli, *Acta Comment. Univ. Tartu. Math. No.* **7**, 3–7.
19. **Maddox, I. J., 1987**, Inclusions between FK spaces and Kuttner’s theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 101, no. **3**, 523–527.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ 'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Elazığ 'da tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Lisans Programına başladı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik A.B.D Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programına başladı.

Ümit ÇAKAN