

150108

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GERİ BESLEMELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE KAOTİK
DAVRANIŞLARIN TAHMİN EDİLMESİ

150108

Vedat ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

ELAZIĞ, 2004

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

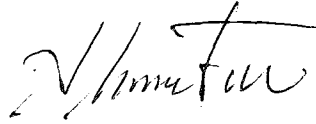
GERİ BESLEMELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE KAOTİK DAVRANIŞLARIN TAHMİN EDİLMESİ

Vedat ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

Bu tez, 16/01/2004 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet UÇAR



Üye: Doç. Dr. Erhan AKIN



Üye: Doç. Dr. Yakup DEMİR



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 21.1.2004. tarih ve 3/6 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet UÇAR' a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇİNDEKİLER.....	I
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	II
SİMGELER LİSTESİ.....	IV
KISALTMALAR LİSTESİ.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
1.GİRİŞ.....	1
2.GENELLEŞTİRİLMİŞ AKTARIM İŞLEVİ ANALİZİ.....	5
2.1 Nyquist Kararlılık Kriteri.....	5
Mapping Teoremi.....	8
Kapalı Çevrim Kontrol Sistemlerinde Mapping Teoremi.....	9
2.2 Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analiz Metodu.....	13
2.2.1 Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi.....	15
Limit Çevriminin Kararlılığı.....	16
2.2.2 Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi.....	23
Loeb Kriteri.....	25
3.GERİ BESLEMELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE KAOTİK DAVRANIŞLARIN TAHMİN EDİLMESİ.....	34
3.1 Genesio-Tesi Metodu.....	34
Genesio - Tesi Varsayımı.....	34
4. UYGULAMA.....	53
5.SONUÇ VE TARTIŞMA.....	84
KAYNAKLAR.....	85
ÖZGEÇMİŞ.....	87

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Bölüm 4'te verilen Örnek 2'deki sistemin çıkışındaki; (a) $K=0.06$,.....	1
Şekil 1.2 Şekil 1.1 (a)'daki sistemin (a) $x_0(0.02, 0, 0)$ için sistem çıkış işareti;.....	3
Şekil 1.3 Şekil 1.1 (b)'deki sistemin; (a) $x_0(0.02, 0, 0)$ için sistem çıkış işareti;	3
Şekil 2.1 Kapalı çevrimli bir sistem.....	6
Şekil 2.2 Bir Mapping Point gösterimi.....	7
Şekil 2.3 Bir Mapping Contour gösterimi.....	8
Şekil 2.4 s -düzleminde kapalı eğri.....	9
Şekil 2.5(a) $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ 'nın $1 + G(s)H(s)$ -düzlemindeki değişimi	10
Şekil 2.6 Örnek 2.1'deki açık çevrim transfer fonksiyonunun $K=5$, $K=10$ ve $K=15$	12
Şekil 2.7 Lur'e tipi geri beslemeli sistem.....	14
Şekil 2.8 $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi.....	18
Şekil 2.9 $G(j\omega)=1/(-j\omega^3-0.4\omega^2+2j\omega+1)$ ile $-1/N(B)=4/(3B^2)$ 'nin kompleks.....	21
Şekil 2.10 $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7'teki kapalı çevrimli sistemin çıkışının,.....	22
Şekil 2.11 $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin durum.....	23
Şekil 2.12(a) Kararlı limit çevrimine karşılık gelen kesişme şekli (b) Karasız limit.....	27
Şekil 2.13 $G(j\omega)=1/(-j\omega^3-0.4\omega^2+2j\omega+1)$ ile $-1/N_{11}(B)=1/(1-\sqrt{1-2B^2})$	31
Şekil 2.14 $1.409 < \omega < 1.420$ aralığı ve $0.41 < B < 0.45$ aralığı için Şekil 2.13'teki Q	31
Şekil 2.15 $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin çıkışının,.....	32
Şekil 2.16 $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin durum.....	33
Şekil 3.1 $n(y)+y/G(0)$ 'ın değişimi, denge noktaları ve limit çevriminin genişlemesi.....	35
Şekil 3.2 Kararlı bir limit çevrimi için $G(j\omega)$ ve $-1/N_1(B)$ 'nin, değişim yönleri sırasıyla	38
Şekil 3.3 Örnek 3.1'deki sistem, denklem (3.4) sağlanacak şekilde, $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$	40
Şekil 3.4 $G(j\omega)=1/(-j\omega^3-0.4(j\omega)^2+2(j\omega)+1)$ 'nin polar diyagramı ve kompleks.....	42
Şekil 3.5 $G(j\omega)=1/((j\omega)^3+a(j\omega)^2+b(j\omega)+c)$ olmak üzere, $a=0.32$, $b=2.5$, $c=1$	43
Şekil 3.6 Örnek 3.1'deki sistemin, (a) $a=0.32$, $b=2.5$, $c=1$ için, (b) $a=0.5$, $b=1.6$, $c=1$	44
Şekil 3.7 Örnek 3.1'in $c=1$ için $b-a$ düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve.....	45
Şekil 3.8 Şekil 3.7'deki $S_1(1.07, 0.5)$ noktasına karşılık gelen parametrelerde.....	46
Şekil 3.9 Şekil 3.7'deki (a) Asimtotik kararlı bölgeden $P_1(2.1, 0.5)$ noktasına.....	47
Şekil 3.10 Örnek 3.1'in $a=1$ için $b-c$ düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve.....	48
Şekil 3.11 Şekil 3.10'daki (a) Asimtotik kararlı bölgeden $P_2(1, 0.18)$ noktasına.....	49
Şekil 3.12 Şekil 3.10'daki $S_2(1, 0.58)$ noktasına karşılık gelen parametrelerde.....	50

Şekil 3.13 Örnek 3.1'in $b=0.8$ için a - c düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve.....	50
Şekil 3.14 Şekil 3.13'teki (a) Asimtotik kararlı bölgeden $P_3(1.3, 1)$ noktasına.....	51
Şekil 3.15 Şekil 3.13'deki $S_3(0.69, 1)$ noktasına karşılık gelen parametrelerde.....	52
Şekil 4.1 Doğrusal olmayan geri beslemeli sistem.....	53
Şekil 4.2 $y+(1/c)(y^3-dy)=0$ ifadesinin değişimi ve denge noktaları.....	57
Şekil 4.3 Polar diyagramda, $G(j\omega) = 1/((j\omega)^3 + 0.4(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1)$ 'nin ile.....	58
Şekil 4.4 $a=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ için Örnek 4.1'deki sistemin x_{01} ve x_{02} başlangıç.....	59
Şekil 4.5 Şekil 4.1'deki sistemin $c=1$ ve $d=2$ için b - a düzleminde kaotik davranışın.....	61
Şekil 4.6 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$	62
Şekil 4.7 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$	63
Şekil 4.8 Şekil 4.1'deki sistemin $a=0.2$ ve $d=2$ için b - c düzleminde kaotik davranışın.....	64
Şekil 4.9 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $a=0.2$ ve $d=2$	66
Şekil 4.10 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $a=0.2$ ve $d=2$	67
Şekil 4.11 Şekil 4.1'deki sistemin $b=1$ ve $d=2$ için a - c düzleminde kaotik davranışın.....	68
Şekil 4.12 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $b=1$ ve $d=2$	69
Şekil 4.13 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $b=1$ ve $d=2$	69
Şekil 4.14 PI kontrolörlü doğrusal olmayan geri beslemeli kontrol sistem.....	70
Şekil 4.15 Şekil 4.14'deki geri beslemeli kontrol sisteminin, doğrusal ve doğrusal	71
Şekil 4.16 $y+(1/c)(-y^2)=0$ ifadesinin değişimi ve denge noktaları.....	74
Şekil 4.17 Örnek 4.2'de verilen sistemin limit çevrim davranış göstereceği PI	75
Şekil 4.18 Kompleks düzlemde,.....	76
Şekil 4.19 Örnek 4.2'deki sistemin Şekil 4.17'daki P noktasına karşılık gelen PI	77
Şekil 4.20 Farklı T_i değerleri için,.....	79
Şekil 4.21 Şekil 4.15'deki sistemin $a=0.26$, $b=1.4$ ve $c=1$ için PI parametreleri olan T_i - K ..	80
Şekil 4.22 Örnek 4.2'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-10}, 0, 0)$ başlangıç şartında.....	81
Şekil 4.23 Örnek 4.2'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-10}, 0, 0)$ başlangıç şartında.....	82
Şekil 4.24 Örnek 4.2'de verilen sistemin $x_0(2*10^{-10}, 0, 0)$ başlangıç şartında.....	83

SİMGELER LİSTESİ

$T(s)$	: Doğrusal geri beslemeli sistem
$G(s)$	: Doğrusal sistem
$H(s)$	: Doğrusal geri besleme elemanının transfer fonksiyonu
P	: Açık çevrimli sistemin kutup sayısı
Z	: Kapalı çevrimli sistemin kutup sayısı
N	: $-1+j0$ noktasının Nyquist eğrisinin sarım sayısı
$G_p(s)$	: Kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonu
$G_c(s)$	: Kontrolör transfer fonksiyonu
$n(\bullet)$	: Doğrusalsızlık
$N(B)$	: Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi
$N_0(A,B)$	: Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevinin sabit bileşeni
$N_1(A,B)$	: Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevinin değişken bileşeni
ω	: Limit çevriminin frekansı
A	: Limit çevriminin sabit bileşeni
B	: Limit çevriminin değişken bileşeni
$r(t)$	: Sistem girişi
$y(t) ; y_0(t)$	: Sistem çıkışı
$x_1 ; x_2 ; x_3$	: Durum değişkenleri
$\angle \eta$	: $-1/N_1(B)$ 'nin, $-1/N_1(B)$ ve $G(j\omega)$ 'nin kompleks düzlemde kesiştikleri noktasındaki teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı
$\angle \xi$	: $G(j\omega)$ 'nin $-1/N_1(B)$ ve $G(j\omega)$ 'nin kompleks düzlemde kesiştikleri noktasındaki teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı

KISALTMALAR LİSTESİ

GAİ	: Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi
TGGAİ	: Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi
ÇGGAİ	: Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GERİ BESLEMELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE KAOTİK DAVRANIŞLARIN TAHMİN EDİLMESİ

Vedat ÇELİK

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı

2004, Sayfa: 87

Bu tezde doğrusal olmayan geri beslemeli sistemlerde karşılaşılan ve kaotik davranış olarak belirlenen doğrusal olmayan davranış türünün tahmini için bir metot verildi. Bu metot literatürde Genesio-Tesi varsayımı olarak bilinmektedir.

Tezde doğrusal olmayan kapalı çevrimli sistemlerde oluşabilen limit çevrimin karakteristiği Genelleştirilmiş Aktarım İşlevinden (GAI) yararlanılarak bulundu. Ayrıca Genesio-Tesi varsayımının GAI ile ilişkisi verildi ve sistemin doğrusal kısmına ilişkin dinamiği değiştirilerek limit çevrimin bozulması ile oluşan kaotik davranışın tahmini;

- Analitik,
- Grafiksel

olarak elde edildi ve incelendi.

Tezin sonunda kontrolsüz iken kaotik davranış göstermesi olanaksız doğrusal olmayan geri beslemeli sistem, PI kontrolör ile kontrol edilmek istendiğinde kontrol parametreleri uygun seçilmez ise nasıl kaotik davranış gösterebileceğine dikkat çekildi.

Anahtar Kelimeler : Doğrusal olmayan geri beslemeli sistem, Limit çevrimi, Genelleştirilmiş aktarım işlevi, Kaos, PI kontrollü doğrusal olmayan geri beslemeli sistem

ABSTRACT

Master Thesis

THE PREDICTION OF CHAOTIC BEHAVIORS IN FEEDBACK CONTROL SYSTEMS

Vedat ÇELİK

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering

2004, Page: 87

In this thesis, a method to predict a nonlinear behavior namely chaotic behavior, which is observed in nonlinear feedback systems, is given. In the literature, this method is called the Genesio-Tesi conjecture.

In the thesis, the characteristic of the limit cycle, which can occur in closed loop systems, is obtained by employing Describing Function (DF). In addition, the relationship between the Genesio-Tesi conjecture and DF is given and chaotic behavior is observed and studied by both

- Analytical,
- Graphical

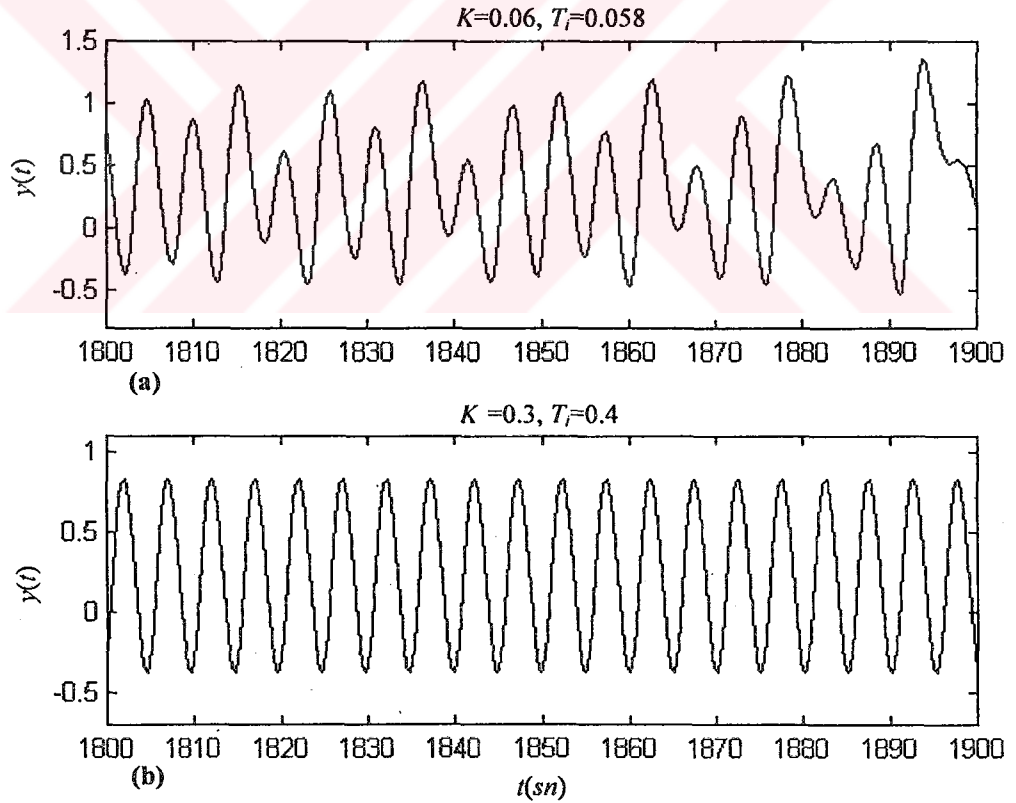
methods in which demolished limit cycle behavior obtained by adjusting linear part of the system dynamics.

In the end of the thesis, an attention is given to a nonlinear feedback control system that chaotic behavior cannot be observed, but it observed when the system controlled by a PI controller with unsuitable controller design parameters.

Keywords: Nonlinear feedback system, Limit cycle, Describing function, Chaos, PI controlled nonlinear feedback system

1.GİRİŞ

Çevremize baktığımızda rastlantıya dayanan veya rasgele olarak isimlendirilecek tipte davranışlar görmek mümkündür. Bu davranış türleri, aldığımız kararlardan toplumsal olaylara, ekonomiden biyolojik sistemlere, meteorolojiden mühendislik ile ilgili sistemlere çok geniş alanda gözlemlenebilir. İçilen sigara dumanının yükselişi, rüzgarda salınan bayrağın şekli veya musluktan damlayan suyun zamanla periyodikliğini kaybetmesi bu davranış şekillerine basit birkaç örnektir. İşte bu şekilde rasgele oluşan davranışlara kaos denmektedir. Daha teknik bir tarif yapılacak olursa; doğrusal olmayan sistemlerin zaman cevabında, düzensiz ve kestirilemeyen davranışlara *kaos* denir [1]. Kaos davranışının olduğu sisteme de *kaotik sistem* denir. Kaosun tanımı içerisinde düzensiz ve önceden kestirilemeyen davranış ifadesi vardır, Şekil 1.1(a) ve (b)'de Bölüm 4'te verilen Örnek 2'deki *PI* kontrollü doğrusal olmayan geri beslemeli kontrol sisteminde *PI* parametrelerine bağlı olarak, sırasıyla kaotik ve periyodik yani; düzensiz ve önceden kestirilemeyen ile düzenli ve önceden belirlenebilen sistem çıkışının zamana göre değişimi verilmiştir.



Şekil 1.1 Bölüm 4'te verilen Örnek 2'deki sistemin çıkışındaki; (a) $K=0.06, T_i=0.058$ *PI* parametrelerindeki kaotik işaret (b) $K=0.3, T_i=0.4$ *PI* parametrelerindeki periyodik işaret

Şekil 1.1(a)'da görüldüğü gibi sistem çıkışındaki işaret kendini tekrarlamamaktadır ve herhangi bir “ t ” anında çıkışın ne olacağı hakkında bir şeyi önceden söylemek mümkün değildir. Ama; Şekil 1.1(b)'deki sistemin çıkışında sinüzoidal bir işaret vardır ve bu işaretin genliği ve frekansı önceden tespit edilebilmektedir.

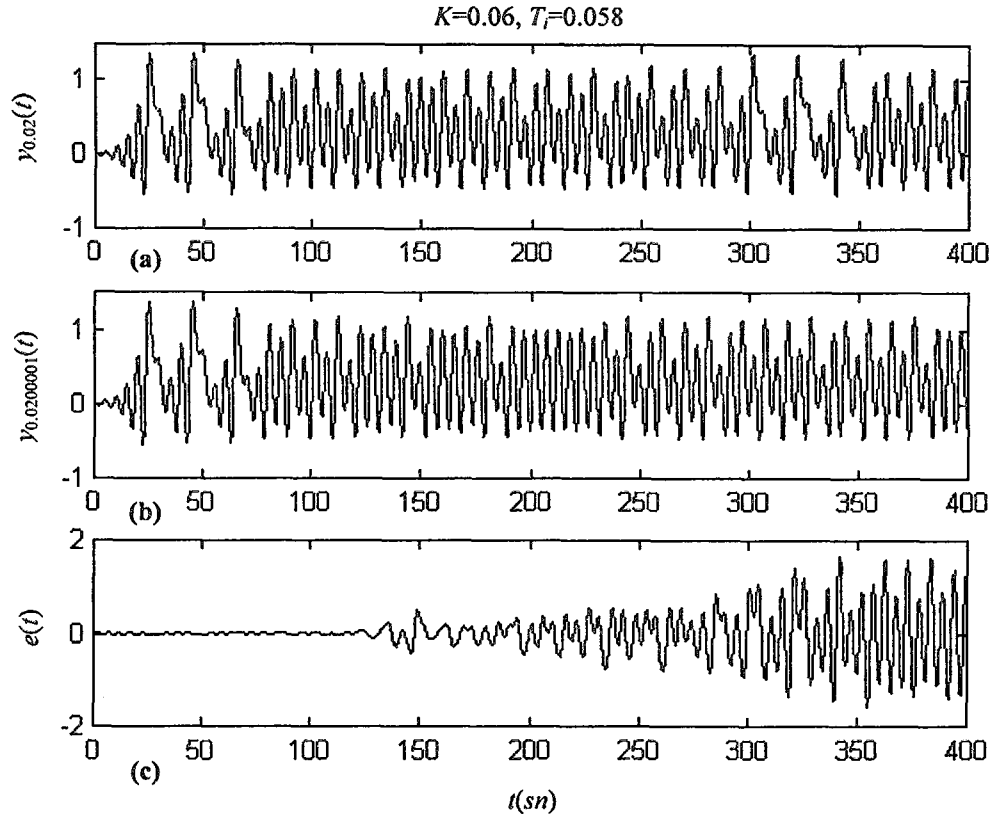
Sürekli zamanlı bir sistemde kaotik davranışının görülebilmesi için;

- Sistemin *durum değişken sayısı*, $n \geq 3$ olması,
- Sistemin *doğrusal olmayan bir eleman* içermesi,
- Sistemin *başlangıç şartına hassas bağlı* olması,

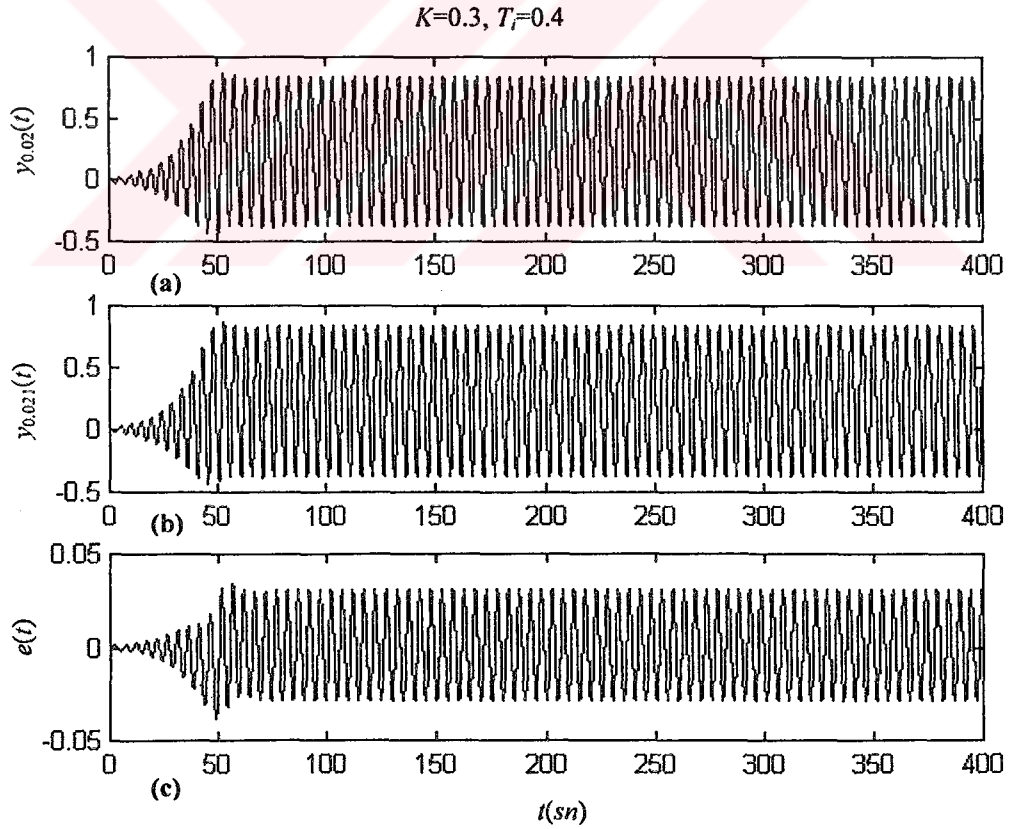
gerekir.

Doğadaki çoğu sistemler doğrusal olmayan eleman içerirler. Sürekli zamanlı bir sistemin kaotik davranış göstermesi için sistemin durum değişkeninin başlangıç şartına göre yörüngesinin hassas olması gerekir. Başlangıç şartına sistem yörüngesinin duyarlılığı aşağıdaki gibi açıklanabilir: Kaotik olmayan bir sistem farklı fakat birbirine çok yakın durum değişkeninin iki başlangıç şartı için sistem yörüngesi bir öncekine bakılarak tahmin edilebilir. Kaotik bir sistemde bu olanaksızdır. Kaotik sistemde sistem durum değişkeninin birbirine çok yakın iki farklı başlangıç değeri için sistem yörüngesi kısa bir süre sonra birbiriyle ilişkisi tahmin edilemeyecek derecede değişim gösterir [1]. Bu durumun daha iyi anlaşılabilmesi için Şekil 1.2'de yukarıdaki şartları sağlayan bir sistemin farklı ama birbirine oldukça yakın iki başlangıç şartı için elde edilmiştir. Şekil 1.2(a) ve (b)'de görüldüğü gibi başlangıçta $t < 120$ için iki yörünge arasındaki fark çok küçüktür. Ancak $t > 120$ için hata gittikçe artmakta ve bir süre sonra tahmin edilemeyecek bir değişim göstermektedir. Şekil 1.2'de açıkça görüldüğü gibi $t > 120$ 'den sonra sistem yörüngesinin değişimi $t < 120$ kısmına bakılarak farklı başlangıç değerleri için tahmin edilemez. Kaotik olmayan sistemde ise Şekil 1.3'te görüldüğü gibi sistemin yörüngesi geçici rejim bittikten sonra bir osilasyon olduğu ve osilasyon karakteristiği rahatlıkla farklı başlangıç şartları için tahmin edilebilir.

Mühendislik ile ilgili çoğu sistemde kaotik davranış istenmez ama askeri haberleşme ve uydu sistemleri gibi istenildiği yerler de vardır. Bu yüzden mühendislik sistemlerinin kaotik davranış gösterip göstermeyeceği veya hangi sistem parametrelerinde kaotik davranışın gözleneceğinin tespiti önemlidir. Bunun için çeşitli metotlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada; geri beslemeli kontrol sistemlerinde kaotik davranışların tespiti ve tahmini ile ilgili olarak Genesio-Tesi varsayımı [2,3] anlatılacaktır. Bu varsayıma dayanarak yapılacak uygulamalara temel teşkil edecek; doğrusal sistemlerin kararlılık analiz yöntemlerinden biri olan Nyquist kararlılık kriteri ile doğrusal olmayan sistemlerde oluşan kararlı ve kararsız limit çevrimi olarak adlandırılan osilasyonların tespitinde kullanılan, tek ve çift girişli olmak üzere Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi (GAF) analizi örneklerle Bölüm 2'de verilecektir. Bölüm 3'te ise Genesio-Tesi varsayımı



Şekil 1.2 Şekil 1.1 (a)'daki sistemin (a) $x_0(0.02, 0, 0)$ için sistem çıkış işareti; $y_{0.02}(t)$ (b) $x_0(0.0200001, 0, 0)$ için sistem çıkış işareti; $y_{0.0200001}(t)$ (c) (a) ve (b) arasındaki hata; $e(t) = y_{0.02}(t) - y_{0.0200001}(t)$



Şekil 1.3 Şekil 1.1 (b)'deki sistemin; (a) $x_0(0.02, 0, 0)$ için sistem çıkış işareti; $y_{0.02}(t)$ (b) $x_0(0.021, 0, 0)$ için sistem çıkış işareti; $y_{0.021}(t)$ (c) (a) ve (b) arasındaki hata; $e(t) = y_{0.02}(t) - y_{0.021}(t)$

açıklanacaktır. Genseio-Tesi varsayımına göre kararsız denge noktası ile kararlı limit çevrimi etkileşime girdiği zaman sistem kaotik davranış gösterecektir. Nyquist kararlılık kriteri kullanılarak sistemdeki doğrusal olmayan elemanın doğrusallaştırılmış eş değeri ile denge noktasının kararlılığı incelenecek, GAI ile de limit çevriminin varlığı ve kararlılığı tespit edilecektir. Nyquist kararlılık kriteri ile GAI analizinin ortak özelliği ikisinin de grafiksel bir yöntem olmasıdır. Bu özellik Bölüm 3'te anlatılan Genseio-Tesi varsayımının uygulamalarında kolaylık sağlayacaktır. Ayrıca Bölüm 3'te doğrusal olmayan geri beslemeli bir örnek sistem ile varsayım pekiştirilecektir. Bölüm 4'te uygulama olarak birinci örnekte; doğrusal olmayan kısmı kübik türde, doğrusal kısmı üçüncü dereceden olan geri beslemeli sistemin kaotik davranış beklenenecek sistem parametrelerinin tespiti yapılacak, ikinci örnek olarak; PI kontrolör ile doğrusal kısmı ikinci dereceden ve doğrusal olmayan kısmı karesel tipe olan geri beslemeli sistemin kaotik davranış beklenenecek PI parametrelerinin tespiti yapılacak ve simülasyon sonuçları ile kıyaslanacaktır. Son olarak ta Bölüm 5'te sonuç ve tartışma kısmı verilecektir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ AKTARIM İŞLEVİ ANALİZİ

Frekans cevap metodu doğrusal kontrol sistemlerinin tasarım ve analizi için etkili bir araçtır [4]. Bu metot, doğrusal bir sistemin diferansiyel denklem yerine, frekans cevabının kompleks bir değer fonksiyonu tarafından tanımlanmasına dayanır. Metodun etkinliği, analiz ve tasarımda kolaylık sağlayan grafiksel gösterim, frekans cevap fonksiyonlarının fiziksel anlama sahip olmaları ve son olarak ta metodun karmaşıklığının sistem derecesinden çok az etkilenmesidir. Fakat frekans analizi direkt olarak doğrusal olmayan sistemlere uygulanamaz. Çünkü; frekans cevap fonksiyonları doğrusal olmayan sistemler için tanımlı değildir.

Ancak doğrusal olmayan sistemlerin frekans cevap metoduyla incelenmesi pratik olarak çok önemlidir. Bunun için metotlar geliştirilmiş ve kontrol sistemlerinde *Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi (GAI)* olarak adlandırılan ve doğrusal olmayan sistemlerin yaklaşık çözümünü veren metot oldukça kullanılmaktadır [5]. Bu metot, bilgisayarların kontrol sistemlerinin bir parçası durumuna geldiği günümüzde doğrusal olmayan sistemlerin analizinde kullanılan metotların başında gelmektedir [6]. *GAI*'nin temel kullanımı doğrusal olmayan sistemlerde limit çevriminin tahmin edilmesi olmakla birlikte alt harmoniklerin tespiti, atlama olayı, doğrusal olmayan sistemlerin sinüzoidal girişlere cevabı için de kullanılır [4].

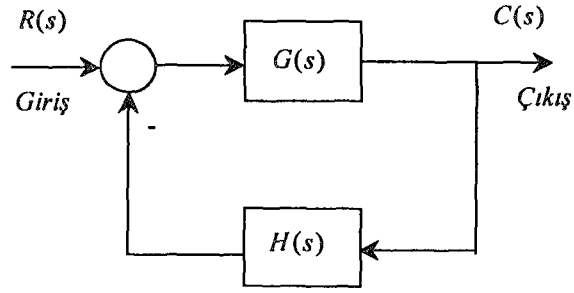
Bu bölümde, *GAI*'nin iyi anlaşılması için önce; doğrusal sistemlerin frekans cevap metotlarından Nyquist kararlılık kriteri verilecek ardından doğrusal olmayan sistemlerin analizi için kullanılan *GAI* analiz metodu anlatılacaktır.

2.1 Nyquist Kararlılık Kriteri

Bu kriter sistemin açık çevrim kutup yerleşimi ve frekans cevabından yararlanarak, sistemin kapalı çevriminin kararlılığı konusunda ilişki kurar. Böylece sistemin açık çevrim frekans cevabından kapalı çevrimli sistemin kararlılığı hakkında bilgi edinilebilir [7]. Şekil 2.1'de verilen kapalı çevrimli bir sistemin transfer fonksiyonu;

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.1)$$

dir ve kararlılık için; $1 + G(s)H(s) = 0$ karakteristik denkleminin tüm köklerinin sol yarı s -düzleminde olması gerekir.



Şekil 2.1 Kapalı çevrimli bir sistem

Nyquist kararlılık kriteri; $G(j\omega)H(j\omega)$ açık çevrim frekans cevabından, sağ yarı s -düzlemindeki $1 + G(s)H(s)$ 'in sıfır ve kutuplarının sayılarını ilişkilendirir.

Nyquist kriteri kompleks değişkenler teorisini esas alan bir metottur. Bu nedenle aşağıdaki dört kavramın bilinmesi gerekir.

- 1) $G(s)H(s)$ kutupları ile karakteristik denklem, $1 + G(s)H(s)$ 'nin kutupları arasındaki ilişkiyi,
- 2) Karakteristik denklem, $1 + G(s)H(s)$ 'in sıfırları ile kapalı çevrim transfer fonksiyonu olan $T(s)$ 'in kutupları arasındaki ilişkiyi,
- 3) Mapping Point kavramını,
- 4) Mapping Contour kavramını,

$$G(s) = \frac{N_G}{D_G} \text{ şeklinde bir polinom olsun.} \quad (2.2.a)$$

$$H(s) = \frac{N_H}{D_H} \text{ şeklinde bir polinom olsun.} \quad (2.2.b)$$

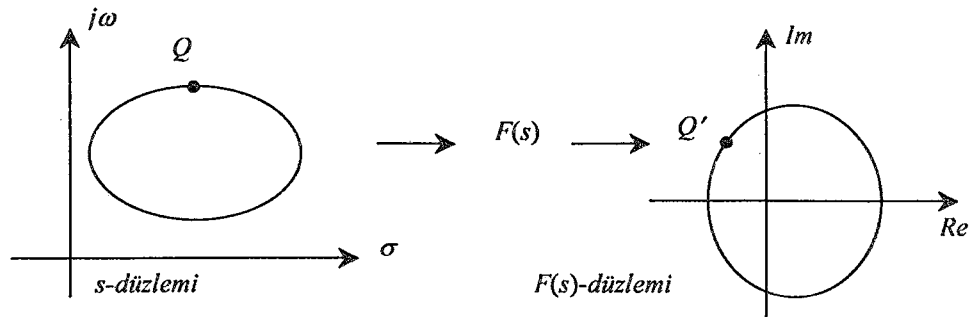
$$G(s)H(s) = \frac{N_G N_H}{D_G D_H} \text{ olur.} \quad (2.2.c)$$

$$1 + G(s)H(s) = \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H} \text{ olur.} \quad (2.2.d)$$

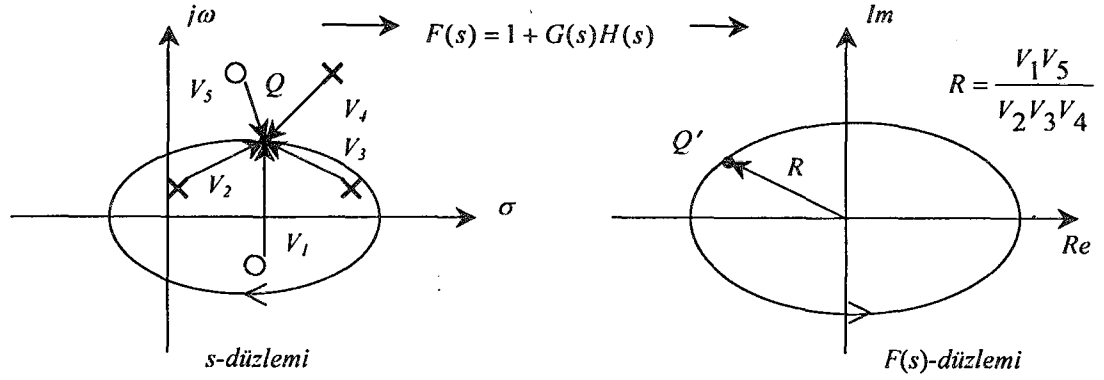
$$T(s) = \frac{N_G D_H}{D_G D_H + N_G N_H} \quad (2.2.e)$$

- 1) Denklem (2.2)'ye bakılırsa karakteristik denklemin açık çevrim için; $1 + G(s)H(s)$ 'in kutupları ile açık çevrim transfer fonksiyonu $G(s)H(s)$ 'in kutupları aynıdır.
- 2) Kapalı çevrim için; karakteristik denklem $1 + G(s)H(s)$ 'in sıfırları ile $T(s)$ 'in kutupları aynıdır.
- 3) Mapping terimi, s -düzleminde bir kompleks sayının temsil ettiği noktayı $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ fonksiyonundan geçirirsek (s -düzleminde bir noktayı temsil eden Q noktası için; $Q(a, jb)$, $F(s)$ -düzleminde $F(a, jb)$ noktasına, Q' karşılık gelir.) yeni bir kompleks düzleme aktarmış olunur. Bu düzleme $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ düzlemi denilecektir. s -düzlemindeki Q noktasını, $F(s)$ -düzlemindeki Q' noktasına aktarma işlemine de "Mapping Point" denir.
- 4) Aynı işlem s -düzleminde kapalı bir eğri boyunca yapılırsa (Kapalı eğrinin geçtiği yolun üzerinde $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ 'in hiçbir kökünün olmaması kaydıyla.), $F(s)$ -düzleminde de kapalı bir eğri elde edilir. Bu işlemde "Mapping Contour" denir.

Burada; s -düzlemindeki kapalı eğride yalnız bir kutup veya yalnız bir sıfır varsa $F(s)$ -düzleminde oluşan eğri orijini çevreleyen kapalı bir eğri olur. s -düzleminde kapalı eğri içerisinde sıfır, Z , ve kutuplardan, P , oluşan kökler var ise; $F(s)$ -düzlemindeki eğrinin orijin etrafında yapacağı sarım sayısı, $P-Z$ sayısı kadardır. Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'de sırasıyla bir Mapping Point ve Mapping Contour temsili gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Bir Mapping Point gösterimi



Şekil 2.3 Bir Mapping Contour gösterimi

Mapping Teoremi:

Şekil 2.1'deki sistemin karakteristik denklemi;

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) \quad \text{ve} \quad F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (2.3)$$

şeklinde iki polinom olarak ifade edilsin. $P(s)$ polinomunda Z kadar sıfır ve $Q(s)$ polinomunda da P kadar kutup olsun. Sistemin karakteristik denklemini ifade eden $F(s)$ 'e ait kutup ve sıfırlar s -düzleminde kapalı bir eğri içerisine alınırsa, (Çakışık kutuplar ve sıfırlar dikkate alınarak belirlenen kapalı eğri, sıfır veya kutbun üzerinden geçmemek üzere) bu kapalı eğriyi $F(s)$ -düzleminde de kapalı bir eğri oluşacağı Şekil 2.3'de gösterilmiştir. Burada saat yönün tersinde $F(s)$ -düzleminin orijinini çevreleyen eğrinin çevrim sayısına da N denilirse;

$$N = Z - P \quad (2.4)$$

olur. Karakteristik denklem $F(s)$ 'in sıfırları sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonun kutupları olduğundan sıfırların tespit edilmesi gerekir. $F(s)$ 'in sıfırları;

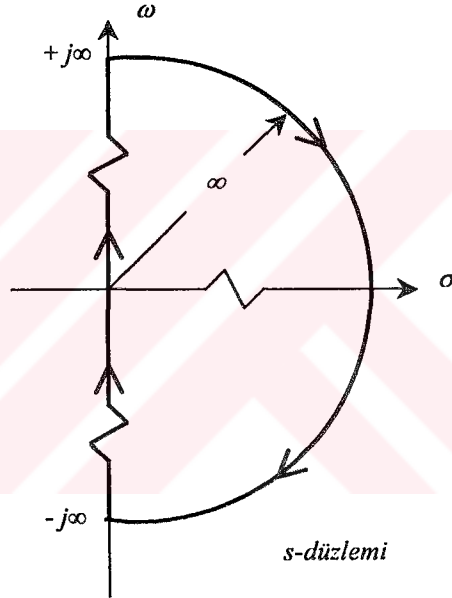
$$Z = N + P \quad (2.5)$$

dir. Burada $F(s)$ -düzlemindeki eğrilerin gerçek değişimi değil kapalı eğrinin $F(s)$ -düzleminin orijinini çevreleyip çevrelemediği önemlidir.

Sonuç olarak, $F(s)$ -düzleminde oluşan kapalı eğri orijini çevreliyorsa ve değişim yönü s -düzlemindeki ile aynıysa, s -düzlemindeki kapalı eğrinin içerisinde sıfır veya sıfırlar baskındır ve işareti pozitifdir. Tersi durumunda kutup veya kutuplar baskındır ve işareti negatiftir sonucuna varılır.

Kapalı Çevrim Kontrol Sistemlerinde Mapping Teoremi:

Doğrusal kontrol sistemleri için s -düzleminin sağ yarı tarafını tümüyle içine alan bir yarım daire alınsın ve bu yarım dairenin yarı çapı ∞ olsun. Bu yarım daire $\omega (-\infty, +\infty)$ arasında değişmiş ve sistemin hiçbir kutbunu veya sıfırını kesmemiş olsun. Bu eğriye Nyquist eğrisi denir. Bu eğrinin yönü saat yönündedir. s -düzleminde oluşturulan kapalı eğri temsili olarak Şekil 2.4'de gösterilmektedir.



Şekil 2.4 s -düzleminde kapalı eğri

Eğer, $1 + G(s)H(s)$ 'in hiçbir sıfırı ve kutbu s -düzleminin sağ yarı kısmında yoksa, $F(s)$ -düzleminde sistemin polar diyagramı orijinini sarmayacağından dolayı kararlıdır denilir.

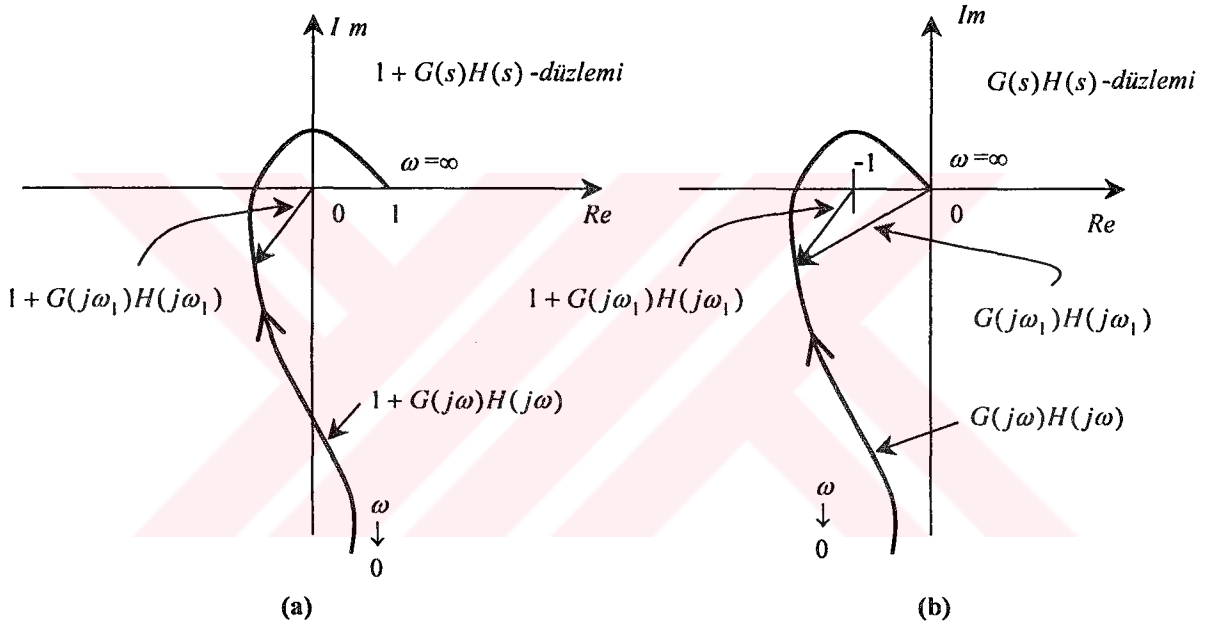
Şayet; $G(s)H(s)$ 'in kutup veya kutupları s -düzleminde orijinde olursa ($s=0$ için) Mapping teorem doğrudan uygulanamaz. Çünkü; s -düzlemindeki kapalı eğri üzerinde, yani $j\omega$ eksenini veya orijinde kök olması durumunda $F(s)$ -düzleminde kapalı bir eğri sonsuzda oluşur, bundan dolayı tanımsızdır. Mapping teoremi $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ 'e uygulanarak aşağıdaki denklem elde edilir;

$(1 + G(s)H(s)$ in sağ yarı s -düzlemindeki sıfırları) = $(1 + G(s)H(s)$ ' in sağ yarı s -düzlemindeki kutupları) + $(1 + G(s)H(s)$ -düzleminin saat yönünde orijini çevirme sayısı)

(2.6)

Karakteristik denklem $1 + G(s)H(s)$ 'in sıfırları sistemin transfer fonksiyonunun kutuplarıdır. Bu açıdan Nyquist kararlılık kriteri karakteristik denklem $1 + G(s)H(s)$ 'in sıfırlarını tespit etmeye dayalı bir metottur.

$1 + G(s)H(s)$ -düzlemindeki kapalı eğri $\omega = -\infty$ ' dan $\omega = \infty$ 'a değişirken basitçe $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ dır ve oluşan eğrinin $(0, \infty]$ aralığındaki değişimini Şekil 2.5(a)'daki gibi olduğu kabul edilsin. Eğer; $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ değişimi yerine, $G(j\omega)H(j\omega)$ 'nın değişimi çizilirse Şekil 2.5(b) elde edilir.



Şekil 2.5(a) $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ 'nın $1 + G(s)H(s)$ -düzlemindeki değişimi (b) $G(j\omega)H(j\omega)$ 'nın $G(s)H(s)$ -düzlemindeki değişimi

Görüldüğü gibi Şekil 2.5(b)'de $-1+j0$ noktası ile $G(j\omega_1)H(j\omega_1)$ vektörünün bitiş noktası arasındaki vektör, Şekil 2.5(a)'daki $1 + G(j\omega_1)H(j\omega_1)$ vektörü ile özdeşdir. Buna göre, s -düzlemindeki kapalı eğri $F(s) = G(s)H(s)$ düzlemine aktardıktan sonra çevirme referans noktası olarak $-1+j0$ noktası alınacaktır. Bir başka deyişle, kapalı çevrimli sistemin kararlılık analizini, $1 + G(s)H(s)$ -düzleminin orijini yerine, $G(s)H(s)$ -düzleminde $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin $-1+j0$ noktasını çevreleyip çevrelemediğine bakarak yapılacaktır. Böylece sistemin açık çevriminden yararlanarak kapalı çevrimli sistemin kararlılığı incelenir. Analiz

için, $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisi, $\omega \rightarrow (0, \infty)$ aralığındaki değişimidir. $\omega \rightarrow (-\infty, 0)$ aralığında ise; $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin reel eksene göre simetriği $G(-j\omega)H(-j\omega)$ alınır.

Yukarıdaki analize göre Nyquist kararlılık kriteri $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin $G(s)H(s)$ -düzleminde $-1+j0$ noktasını içine alıp almadığı durum olarak tanımlanabilir.

Eğer $G(s)H(s)$ 'in ne kutbu ve ne de $1+G(s)H(s)$ 'in sıfırı $j\omega$ eksenini veya orijinde olmamak kaydıyla (s -düzlemindeki kapalı eğri üzerinde bir kök olduğu takdirde (orijin veya $j\omega$ eksenini), sistemin kararlılığı konusunda net bir fikre sahip olunamaz. Bu durumda, $G(s)H(s)$ 'in kök veya köklerinin orijinde veya $j\omega$ eksenini üzerinde olduğu durumda kararlılık analizi yapabilmek için, Nyquist eğrisi yerine, bu kök veya kökleri içine almayacak şekilde değiştirilmiş Nyquist eğrisi kullanılmalıdır.), sistemin açık çevrim transfer fonksiyonunun $G(s)H(s)$ 'in k tane kutbu sağ yarı s -düzleminde ise; kapalı çevrimli sistemin kararlı olabilmesi için $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin $-1+j0$ noktasını mutlaka k kadar saat yönünün tersi ile çevirmesi gerekir. Aksi halde, yani; $G(s)H(s)$ 'in hiçbir kutbu sağ yarı s -düzleminde değil ise, $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin $-1+j0$ noktasını hiç çevrelememesi gerekir.

Sonuç olarak Nyquist kararlılık kriteri; $Z=P+N$ dir.

Z : $1+G(s)H(s)$ 'in sağ yarı s -düzlemindeki sıfır sayısı

P : $G(s)H(s)$ 'in sağ yarı s -düzlemindeki kutup sayısı

N : $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin $\omega \rightarrow (-\infty, \infty)$ aralığında $G(s)H(s)$ -düzleminde $-1+j0$ noktasını çevirme sayısıdır.

Eğer $P \neq 0$ ise; kararlı bir sistem için, $Z=0$ olmalıdır ve buna bağlı olarak $N=-P$ olur. Bu demektir ki; $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin $-1+j0$ noktasının, saat yönünün tersi ile P kadar çevrilmesi gerekiyor.

Eğer $P=0$ yani $G(s)H(s)$ 'in sağ yarı s -düzleminde hiç kutbu yok ise; $Z=N$ dir. Bu durumda sistemin kararlı olabilmesi için, $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisinin $-1+j0$ noktasını hiç çevrelememesi gerekir.

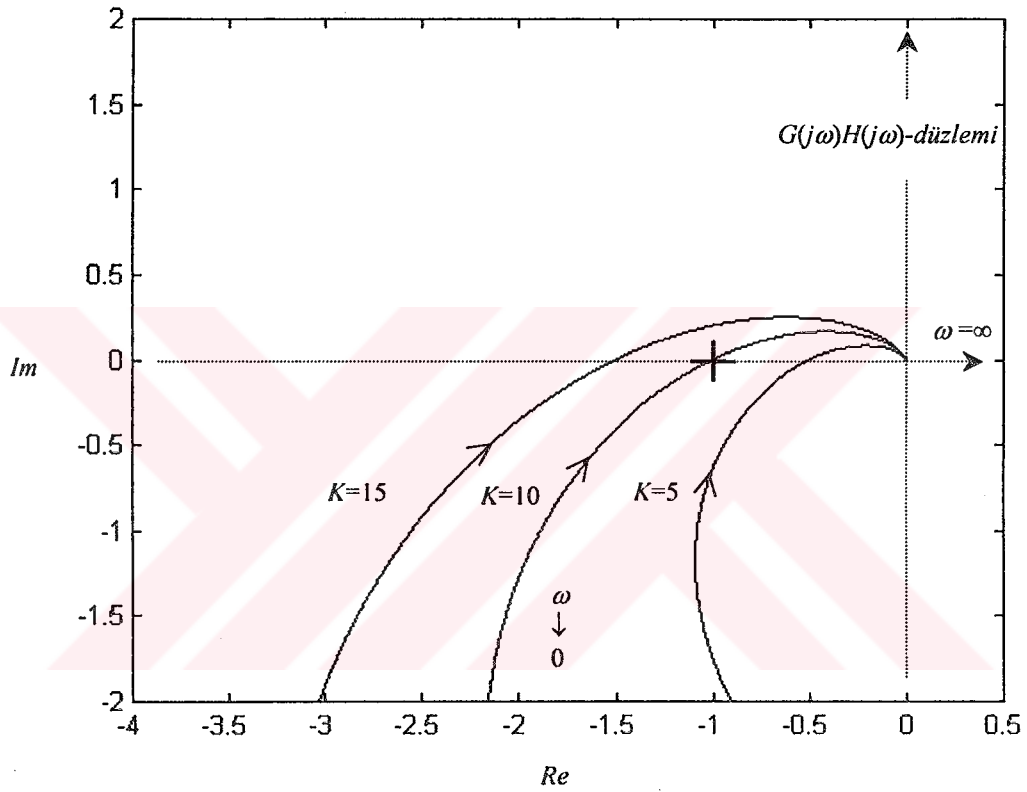
Nyquist kararlılık kriteri çok döngülü sistemlere uygulanırken dikkat edilmelidir. Çünkü; iç döngülerden biri kararsız olabilir. Buna rağmen dış döngü kararlıdır. Bu yüzden, $G(s)H(s)$ eğrisinin $-1+j0$ noktasını içine alıp almamasına göre sistem hakkında fikir verilmez. Bu noktada, Routh's kararlılık kriteri bu iç döngülerin kararlılığında Nyquist kararlılık kriterine yardımcı olmalıdır. Özellikle gecikme elemanının bulunduğu kontrol sistemlerinin gecikme elemanının büyüklüğü ile yaklaşık polinomal eşdeğeri bulunarak Routh's kararlılık kriteri uygulanmalıdır.

Eğer $G(j\omega)H(j\omega)$ eğrisi $-1+j0$ noktasından geçiyorsa bu sistem kritik kararlıdır.

Örnek 2.1:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(2s+1)(3s+1)} \quad (2.7)$$

açık çevrim transfer fonksiyonunun $K=5$, $K=10$ ve $K=15$ için kararlılığı Nyquist kararlılık kriterine göre incelenir. Şekil 2.6'da bu üç farklı kazanç değeri için, Nyquist diyagramı elde edilmiştir.



Şekil 2.6 Örnek 2.1'deki açık çevrim transfer fonksiyonunun $K=5$, $K=10$ ve $K=15$ için Nyquist diyagramları

Denklem (2.7)'de verilen sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu, $G(s)H(s)$ sağ yarı s -düzleminde kutbu yoktur ve $P=0$ dır.

$K=5$ için Nyquist diyagramında eğri $-1+j0$ noktasını çevrelememektedir, $N=0$. O zaman karakteristik denklemin sıfırları $Z = N + P = 0$ dır. Karakteristik denklemin sıfırları kapalı çevrimli sistemin kutupları olduğundan, sistemin sağ yarı s -düzleminde kutbu yoktur ve sistem kararlıdır.

$K=10$ için, Nyquist eğrisi $-1 + j0$ noktasından geçmektedir ve sistem kritik kararludur. Bundan dolayı sistem cevabı osilasyonludur.

$K=15$ için, Nyquist eğrisi $-1 + j0$ noktasını saat yönünde içine almaktadır, $N=1$ dir. Karakteristik denklemin sıfırları $Z = N + P = 1$ dir. O zaman sistemin bir kutbu sağ yarı s -düzleminindedir ve sistem kararsızdır.

Şekil 2.6'da görüldüğü gibi K arttıkça sistem kararsız hale gelmektedir.

2.2 Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analiz Metodu

GAI .metodu genel olarak doğrusal olmayan sistemlerde görülebilen periyodik osilasyonların analizinde kullanılır. Periyodik davranışların en başında limit çevrim gelir. *Limit çevrimi*, sistemin başlangıç şartlarından bağımsız sürekli durumda sabit genlik ve frekansa sahip davranış şekilleridir [8]. Bazı sistemlerde limit çevrimi istenebilir. Örnek olarak, elektronikte, laboratuvarlarda kullanılmak amacıyla osilatörlerde istenebilir. Ama yinede çoğu kontrol sisteminde limit çevrimi istenmez. Genel olarak *GAI* metot ile limit çevriminin dalga şekli hakkında kesin bir bilgi elde edilmese de, görülebilecek limit çevriminin yaklaşık genlik ve frekansının tespiti için kullanılır. Bununla beraber *GAI* metodu doğrusal olmayan sistemlerin limit çevrimine yönlendirmek veya limit çevriminden kurtarmak için kompanzatör dizaynında da kullanılır.

Bir dinamik sistem Laplas formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$f(y(t), sy(t), \dots, s^n y(t); z_1(t), \dots, z_m(t)) = 0 \quad (2.8)$$

Burada $y(t)$ çıkış değişkeni, s Laplas operatörü ve f yapılacak tüm kabulleri sağlayan bir doğrusal olmayan gerçek fonksiyondur. Denklem (2.8)'de verilen $z_i(t)$ değişkeni denklem (2.9)'daki denkliği sağlasın.

$$q'(s)z_i(t) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(s)g_k(y(t), sy(t), \dots, s^{n-1}y(t)) \quad (2.9)$$

Burada $q'(s)$ ve $p_{ik}(s)$ dereceleri sırasıyla m 'ye eşit ve küçük iki polinomdur. g_k varsayılan tüm kabulleri sağlayan doğrusal olmayan gerçek bir fonksiyondur.

Denklem (2.8)'deki sistem denklem (2.10),(2.11) ve (2.12)'da verildiği gibi daha basit ve farklı özel durumlar için verilebilir.

1) q, n . dereceden bir polinom olmak üzere;

$$f(\) = q(s)y(t) + f_1(y(t), sy(t), \dots, s^{n-1}y(t); z_1(t), \dots, z_m(t)) = 0 \quad (2.10)$$

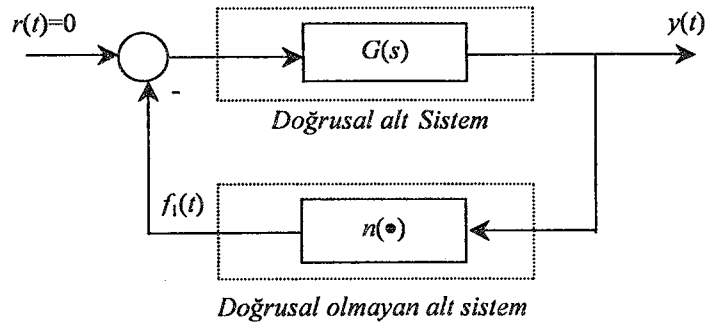
2) $m=0$, z 'li terimler olmaksızın, $p(s)$ bir polinom ve $p(s)$ derecesi ile h 'ın toplamı $n-1$ 'den büyük olmamak üzere;

$$f(\) = q(s)y(t) + p(s)f_2(y(t), sy(t), \dots, s^h y(t)) = 0 \quad (2.11)$$

3) $m=0$ olmak üzere denklem (2.11)'deki sistem daha da basitleştirilerek sistemin doğrusal ve doğrusal olmayan kısımları aşağıdaki gibi ayrıştırıla bilinir.

$$f(\) = q(s)y(t) + p(s)f_3(y(t)) = 0 \quad (2.12)$$

Denklem (2.9) ve (2.10) ile tanımlanan sistem, $G(s)$ doğrusal elemanın Şekil 2.7'deki gibi $n(\bullet)$ doğrusal olmayan elemanı ile birleştirilmesinden elde edilen Lur'e tipi geri beslemeli bir sistemdir [9]. Bu yapı, basitleştirilmiş olan denklem (2.11) ve (2.12) ile tanımlanmış sistemlerde daha da açık görülebilir. Geri beslemeli sistemin doğrusal kısmı $G(s)$ ve doğrusal olmayan kısmı da $n(\bullet)$ olarak tanımlansın. Denklem (2.9)'daki sistem için $G(s)$ ve $n(\bullet)$, g_k , $q'(s)$ ve $p_{ik}(s)$ 'e bağlıdır. Burada, z_i iç durum değişkenleridir. Denklem (2.10), (2.11) ve (2.12)'de verilen sistemlerde ise $G(s)$ ve $n(\bullet)$ hemen hemen birbirinden ayrıştırılmış formdadır ve $G(s)$, $q(s)$ 'e, $n(\bullet)$ ise sırasıyla f_1 , f_2 ve f_3 bağlıdır.



Şekil 2.7 Lur'e tipi geri beslemeli sistem

2.2.1 Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi

Denklem (2.8)'de verilen sistemin çözümü $y(t)$;

$$y_0(t) = B \sin \omega t, \quad B > 0, \omega > 0 \quad (2.13)$$

şekilde olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın.

a) $y = y_0(t)$ için, denklem (2.9)'daki sistemin sürekli durumda periyodu $2\pi/\omega$ olan bir çözümü olsun. Bu cevabın olması için sistemin rezonans frekansının sistem giriş işaretiyle aynı frekansta olmaması gerekir. Ayrıca, $q'(s)$ 'nin orijinde bir kutbu olduğu durumda sistemin bu kutbun veya kutupların etkisinden çıkarılması gerekir.

b) Denklem (2.10)'da f_1 doğrusal olmayan fonksiyonun çıkışı periyodik,

$$f_1(y_0(t), sy_0(t), \dots, s^{n-1}y_0(t); z_{10}(t), \dots, z_{m0}(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} (F_{kr}(B, \omega) \sin(k\omega t) + F_{kl}(B, \omega) \cos(k\omega t)) \quad (2.14)$$

olsun. Burada, F_{kr} ve F_{kl} Fourier katsayılarıdır. Denklem (2.14)'deki ifade, bir çok dinamik sistemin modellendiği denklem (2.9) ve (2.10)'daki sistemde verilen doğrusal olmayan elemanın çıkış sinyali, denklem (2.13)'te verilen ise giriş sinyalidir. Temel harmonik hariç tüm yüksek harmonikler ihmal edilirse ve denklem (2.10)'da yerine yazılırsa, aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$q(j\omega)B + F_{1r}(B, \omega) + F_{1l}(B, \omega) = 0 \quad (2.15)$$

Denklem (2.15)'deki $q(j\omega)$ sürekli durum frekansındaki fazör notasyonunu kullanarak elde edilir. Denklem (2.15), sabit bileşeni olmayan ve ω frekansına sahip GAI metodunun denklem (2.9) ve (2.10)'da verilen sisteme uygulanmasıdır.

$$\frac{1}{q(j\omega)} = G(j\omega) \quad (2.16)$$

Denklem (2.16) sistemin doğrusal kısmı olarak tanımlanırsa, bu durumda denklem (2.15);

$$1 + G(j\omega)N(B) = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde, Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin frekans domenindeki karakteristik denklemine dönüşür. Böylece Şekil 2.7'de gösterilen geri beslemeli sistemde doğrusal olmayan birim olan $n(\bullet)$, Tek Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi ($TGGAİ$) olarak, denklem (2.18) ile tanımlanır.

$$N(B, \omega) = \frac{F_{IR} + jF_{II}}{B} = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f_1(B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega + j \int_{-\pi}^{\pi} f_1(B \sin \omega t) \cos \omega t d\omega \right) \quad (2.18)$$

Denklem (2.17)'in çözümü ile limit çevriminin değişken bileşeni, B ve frekansı, ω değerleri elde edilebilir.

GAI metodu kullanarak çözüm yapılmak isteniyorsa, sistemin ana harmonik dışındaki frekans bileşenini azaltıcı filtreleme etkisine sahip olması gerekir. Bu yüzden sistemin doğrusal kısmının (2.19) eşitsizliğini sağlanması gerekir.

$$|G(j\omega)| \gg |G(kj\omega)|, \quad k = 2, 3, 4, \dots, \infty \quad (2.19)$$

Limit Çevriminin Kararlılığı:

Denklem (2.17) aşağıdaki şekilde tekrar yazılsın.

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(B)} \quad (2.20)$$

$G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimlerine göre oluşması muhtemel limit çevrimi kararlılığı bu iki değişimin kesişme noktası veya noktalarına komşu bölgelere bakılarak değerlendirilir. $G(j\omega)$ eğrisi $-1/N(B)$ 'yi tamamen çevreliyorsa bu sistem kararsızdır. Bu durumda sistemin çıkışında genliği giderek artan bir sinüzoidal işaret görülecektir. Eğer $G(j\omega)$ eğrisi hiçbir şekilde $-1/N(B)$ 'yi çevrelemiyor ise, sistem kararlıdır. Bu durumda sistem çıkışında genliği sıfıra giden bir sinüzoidal işaret beklenmelidir. $G(j\omega)$ eğrisi $-1/N(B)$ 'nin bir bölümünü çevreliyor, bir bölümünü çevrelemediği durumda çevrelediği kısımda bir nokta alındığında sistemin çıkışının genliği artacak, çevrelemediği kısımda bir nokta alındığında genlik azalacaktır. Kesişmenin olduğu nokta için osilasyonun

genliği B 'ye bağılı olarak $-1/N(B)$ 'nin değişiminden, frekansı olan ω 'nın değeri de $G(j\omega)$ 'nin değişiminden elde edilir [8].

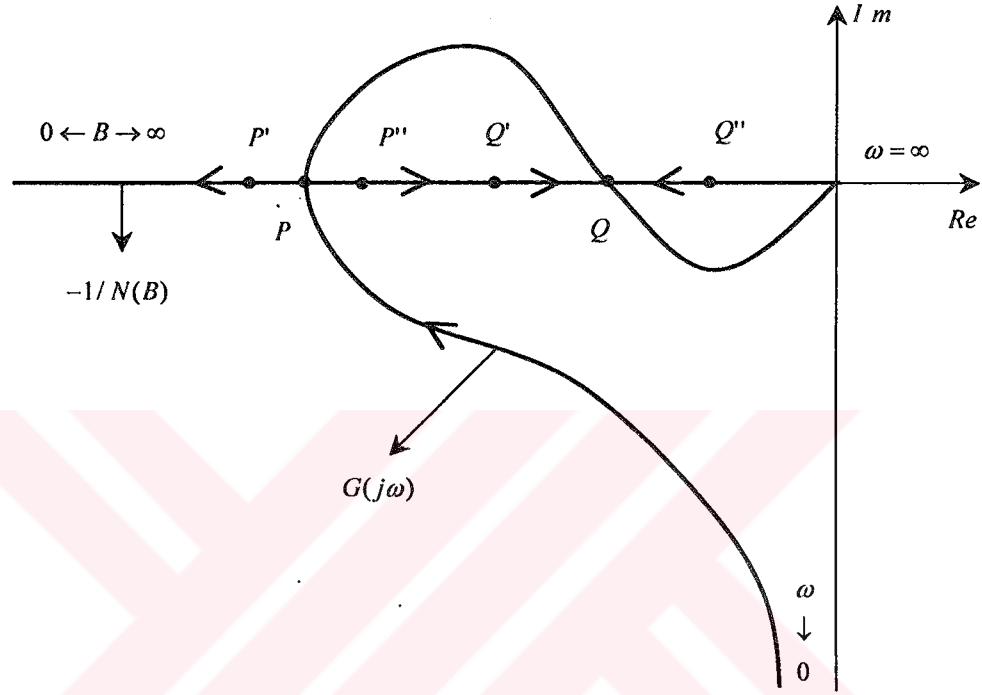
$G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi Şekil 2.8'de gösterildiği gibi olsun ve $G(j\omega)$ 'nin sağ yarı s -düzleminde hiç kutbu olamadığı kabul edilsin. Görüldüğü gibi $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ değişimleri P ve Q olmak üzere iki farklı noktada kesişmekte ve bu noktalarda denklem (2.20) sağlanmaktadır. $-1/N(B)$ değişimi üzerinde bulunan P noktasındaki B 'nin değeri, Q noktasındaki B 'nin değerinden küçük olduğu kabul edilsin. P noktasındaki osilasyonun kararlılığı incelenmek istenirse, bu noktada çalışan sistemde, sistem parametrelerinde bir değişme veya bozucu bir etki olduğunda bu çalışma noktası P' veya P'' 'ye kayacaktır. P' noktasına kayarsa bu nokta, $G(j\omega)$ eğrisi tarafından çevrelenmediği için B genliği azalacaktır ve P noktasından uzaklaşacaktır. Eğer bozulmanın etkisiyle çalışma noktası P'' 'ne kayarsa bu defa $G(j\omega)$ eğrisi bu noktayı içine aldığından B genliği artacak ve çalışma noktası gene P noktasından uzaklaşacaktır. Buna göre P noktası, *bir noktadan uzaklaşan* karakteristiğe sahiptir ve bu nokta kararsız bir limit çevrimine karşılık gelmektedir. Yani denklem (2.20)'den analitik olarak B_p ve ω_p değerleri hesaplanırsa bile sistemde limit çevrimi gözlenmeyecektir. Aynı şekilde bir bozucu etkiyle Q çalışma noktası Q' veya Q'' 'ne kayarsa, Q' 'ne doğru kaydığında $G(j\omega)$ tarafından çevrili bu noktada, genlik artarak Q noktasına kayacaktır. Q'' 'ne kaymışsa bu nokta $G(j\omega)$ tarafından çevrili olmadığından dolayı genlik azalacak ve çalışma noktası Q noktasına geri dönecektir. Q noktası, *bir noktada birleşen* karakteristiğe sahiptir ve bu noktada limit çevrimi karardır. Başka bir deyişle denklem (2.20) ile analitik olarak hesaplanan B_Q ve ω_Q 'nun yaklaşık olarak karakterize ettiği bir limit çevrimi gözlenir.

Yukarıda anlatılanlar özetlenecek olursa;

“ $G(j\omega)$ eğrisi ile $-1/N(B)$ 'nin her bir kesişme noktası, bir limit çevrimine karşılık gelmektedir. Eğer, kesişme ve yakınındaki noktalara bakıldığında, kesişme noktasından itibaren $-1/N(B)$ değişiminin B artım yönündeki kısmı, $G(j\omega)$ tarafından çevrelenmiyorsa, bu kesişme noktası kararlı bir limit çevrimine karşılık gelir. Aksi halde limit çevrimi kararsızdır” [4].

Bu noktada kısa bir değerlendirme yapılmak istenirse, Nyquist kararlılık kriterine göre doğrusal geri beslemeli sistemlerde $G(j\omega)$ değişimi $-1+j0$ noktasından geçtiği durumda,

sistem “başlangıç şartlarına bağlı osilasyonlar” yapacaktır. Fakat *GAI* metoduyla, doğrusal olmayan geri beslemeli sistemler incelendiğinde, $G(j\omega)$ eğrisi ile $-1/N(B)$ ’nin kesiştiği nokta veya noktaların karakterize ettiği ve kararlılığa bağlı olarak “başlangıç şartlarından bağımsız osilasyonlar” gözlenecektir. Bu doğrusal sistemler ile doğrusal olmayan sistemler arasındaki önemli bir farklılıktır [7].



Şekil 2.8 $G(j\omega)$ ve $-1/N(B)$ ’nin kompleks düzlemdeki değişimi

Örnek 2.2:

Şekil 2.7’deki doğrusal olmayan geri beslemeli sistemde; doğrusal alt sistem, $G(s)$ denklem (2.21)’de ve doğrusal olmayan alt sistem, Genesio’nun [2]’de verdiği örnekteki gibi $n(y)=y^3$ değil de denklem (2.22)’de verildiği gibi olsun ve bu sistemin osilasyon şartı *TGGAI* analiz metoduyla bulunmak istensin.

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}, \quad a, b, c > 0 \quad (2.21)$$

$$n(y) = -y^3 \quad (2.22)$$

Bu durumda öncelikle denklem (2.22) ile ifade edilen doğrusal olmayan elemanın $TGGA\dot{I}$ 'ni elde etmek gerekir. Bunun için denklem (2.18)'den,

$$\begin{aligned}
 N(B) &= \frac{1}{\pi B} \int_{-\pi}^{\pi} n(y) \sin \omega t d\omega t = \frac{1}{\pi B} \int_{-\pi}^{\pi} (-B \sin \omega t)^3 \sin \omega t d\omega t = -\frac{B^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \omega t d\omega t \\
 N(B) &= -\frac{B^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \omega t (1 - \cos^2 \omega t)) d\omega t = -\frac{B^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \omega t - \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t) d\omega t \\
 N(B) &= -\frac{B^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \omega t - (\frac{1}{2} \sin 2\omega t)^2) d\omega t = -\frac{B^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} - \frac{1}{4} (\frac{1 - \cos 4\omega t}{2})) d\omega t \\
 N(B) &= -\frac{B^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2} - \frac{1}{8} + \frac{\cos 4\omega t}{8}) d\omega t = -\frac{B^2}{\pi} (\pi - \frac{\pi}{4}) \\
 N(B) &= -\frac{3}{4} B^2
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

elde edilir. Denklem (2.17)'nin çözümünden limit çevriminin B , genlik ve ω , frekans değerleri a, b, c cinsinden elde edilir.

$$\left(\frac{c - a\omega^2}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} - j \frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) \left(-\frac{3}{4} B^2 \right) = -1 \tag{2.24}$$

Denklem (2.24)'ün sanal kısmını 0'a eşitleyerek,

$$\left(\frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) \left(-\frac{3}{4} B^2 \right) = 0 \tag{2.25}$$

frekans, $\omega = \sqrt{b}$ olarak bulunur. Sistemde bir limit çevrimi oluşabilmesi için $b > 0$ olması gerekir. Böylece frekans şartı sağlanmıştır. Denklem (2.24)'ün reel kısmını -1 'e eşitleyerek,

$$\left(\frac{c - a\omega^2}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) \left(-\frac{3}{4} B^2 \right) = -1 \quad (2.26)$$

genlik, $B = \sqrt{\frac{4}{3}(c - ab)}$ olarak bulunur. Sistemde limit çevriminin olabilmesi için $c > ab$ olmalıdır. Bu da genlik şartıdır. Limit çevriminin oluşması için frekans ve genlik şartlarının ikisinin de sağlanması gerekir.

Denklem (2.21)'deki sistem parametreleri, sistemde limit çevrimin oluşma şartlarını sağlayacak şekilde $a = 0.4, b = 2$ ve $c = 1$ alındığı durumda ve Şekil 2.7'teki sistemde başlangıç şartlarından bağımsız osilasyonların genliği, $B = \sqrt{\frac{4}{3}(c - ab)} = 0.516$ ve frekansı, $\omega = \sqrt{b} = 1.414 \text{ rad/sn}$ bulunur. Bu durumda Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin çıkışında beklenen osilasyon denklem (2.27)'deki biçimde olur.

$$y_0(t) = 0.516 \sin(1.414t) \quad (2.27)$$

Fakat, denklem (2.27) ile ifade edilen osilasyonun sistemin çıkışında pratikte gözlemlenmesi için limit çevrimi, kararlı olmalıdır. TGGAI metoduyla tespit edilen limit çevrimin, kararlılığının incelenmesi için denklem (2.20) sağlanmak koşuluyla, $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimlerine bakıldığında, iki değişimin kesişme noktasının *bir noktada birleşen* karakteristiğe sahip olması gerekir. Şekil 2.9'da $G(j\omega)$ ile $-1/N(B)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimleri verilmiştir.

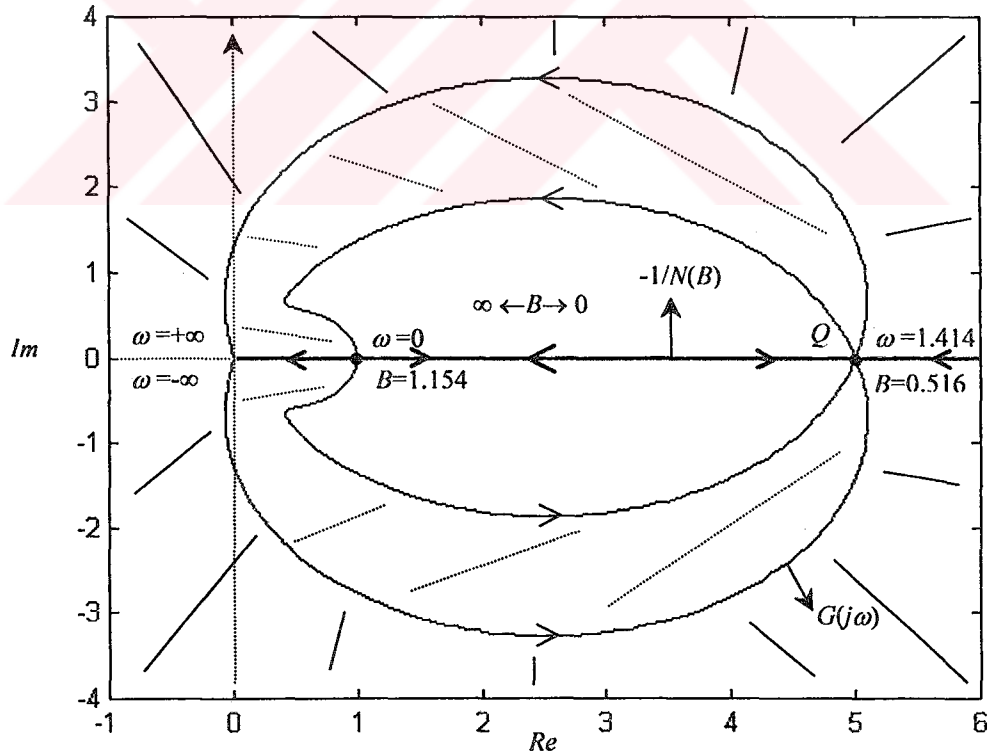
Şekil 2.9'da, sistemin verilen değerlere göre (2.24) denkleminin ω 'ya göre değişimi verilmiştir. Burada reel eksen $-1/N(B)$ dir. Dikkat edilirse Nyquist kararlılık kriterindeki $-1+j0$ noktası, burada $-1/N(B)$ değişimine karşılık gelmektedir. Şekil 2.9'a bakıldığında $G(j\omega)$ tarafından; taralı olmayan bölge saat yönünün tersinde 2 defa, $N=-2$, kesikli çizgilerle taranmış bölge saat yönünün tersiyle 1 defa, $N=-1$ çevrelenmiş ve düz çizgilerle taralı bölge hiç çevrelenmemiştir, $N=0$.

Bu sistem parametrelerinde açık çevrim transfer fonksiyonunun kutupları; $s_1=0.044+j1.428$, $s_2=0.044-j1.428$ ve $s_3=-0.489$ olmak üzere üç tanedir. Bunlardan s_1 ve s_2 sağ yarı s -düzlemindedir, $P=2$.

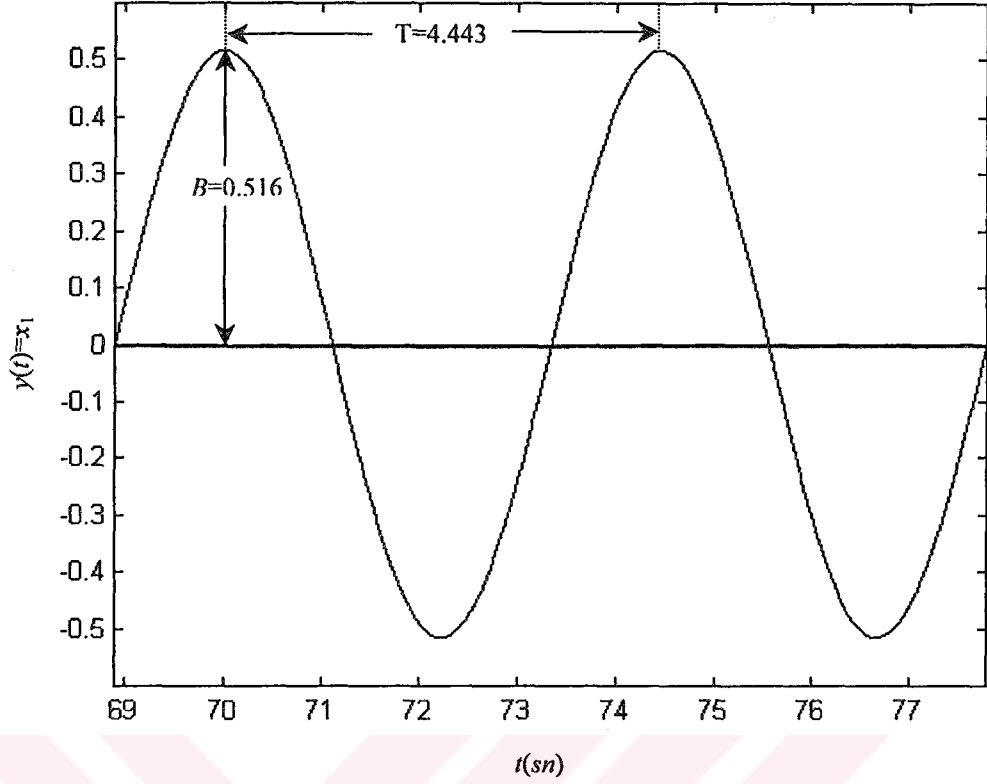
Nyquist kararlılık kriterine göre kapalı çevrimli sistemin kutupları açık çevrimli sistemin sıfırlarına eşittir ve açık çevrimli sistemin sıfırları da, $Z=P+N$ dir. Buna göre Şekil 2.9'daki düz çizgilerle taralı olan bölge ye denk gelen $0 < B < 0.516$ aralığındaki B değerleri

için Nyquist kararlılık kriteri uygulanırsa, $Z=2-0=2$, Şekil 2.7'deki sistemin 2 kutbu sağ yarı s -düzleminde ve sistem kararsız bir davranış gösterir. Böylece Şekil 2.7'deki sistemin çıkışındaki işaret artarak denge noktası olan Q noktasına kayar. Şekil 2.9'da kesikli çizgilerle taralı olan bölge $\infty > B > 1.154$ ve taralı olmayan bölge $1.154 > B > 0.516$ aralığına denk gelir. Buraya da Nyquist kararlılık kriteri uygulanırsa, taralı olmayan bölgedeki B değerlerinde, $Z=2-2=0$, Şekil 2.7'deki sistemin hiç bir kutbu sağ yarı s -düzleminde değildir. Bu aralıkta sistem kararlıdır ve Şekil 2.7'deki sistemin çıkışındaki işaretin genliği azalarak denge noktası olan Q 'ya kayacaktır. Aynı şekilde kesikli çizgilerle taranmış bölgede kalan B değerlerine bakıldığında burada da Şekil 2.7'deki sistemin sağ yarı s -düzleminde, $Z=2-1=1$, 1 tane kutbu vardır. Bu durumda bu bölgeye ait B değerlerini sağlayan başlangıç şartlarında Şekil 2.7'deki sistem kararsız bir davranış gösterecek ve çıkışındaki işaretin genliği artarak sonsuza gidecektir.

Yukarda yapılan değerlendirmelere göre Q noktası, *bir noktada birleşen* karakteristiğe sahiptir. Bu durumda denklem (2.20)'yi sağlayan ve Q noktasının karakterize ettiği bir limit çevrimi pratik olarak gözlenecektir. Bu sonucun doğruluğunu ve metodun etkinliğini görebilmek için Örnek 2.2'de verilen sistemin, simülasyon sonucunda elde edilen çıkışın, $y_0(t)=x_1$, zamana göre değişimi Şekil 2.10'da verilmiştir.

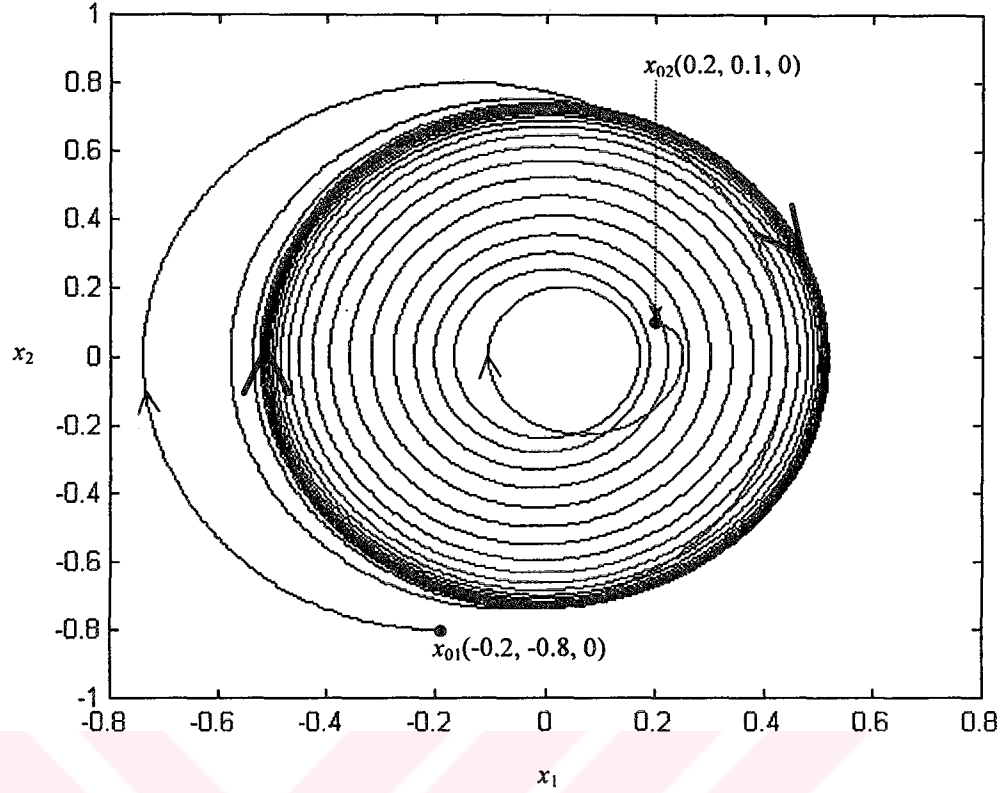


Şekil 2.9 $G(j\omega) = 1/(-j\omega^3 - 0.4\omega^2 + 2j\omega + 1)$ ile $-1/N(B) = 4/(3B^2)$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi



Şekil 2.10 $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7'teki kapalı çevrimli sistemin çıkışının, $y_0(t)=x_1$, geçici rejiminin elimine edilerek sürekli durumdaki değişimi

Şekil 2.10'da sürekli durumundan bir kesit verilen osilasyonda görüldüğü gibi limit çevrimin genliği, $B=0.516$ ve periyodu, $T=4.443$ dür. Bu sonuç *TGGAI* metod ile elde edilen ve denklem (2.27)'de ifade edilen sonucun aynısıdır. Burada *GAI* metodun etkinliği net bir şekilde görülmektedir. Şekil 2.11'de durum değişkenlerinin iki farklı başlangıç şartı; $x_{01}(-0.2, -0.8, 0)$ ve $x_{02}(0.2, 0.1, 0)$ için durum uzay diyagramında limit çevrimi elde edilmiştir.



Şekil 2.11 $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin durum değişkenlerinin iki farklı başlangıç şartı; $x_{01}(-0.2, -0.8, 0)$ ve $x_{02}(0.2, 0.1, 0)$ için limit çevriminin durum uzay diyagramındaki değişimi

Şekil 2.11'de görüldüğü gibi sistem başlangıç şartlarından bağımsız osilasyonlar yapmaktadır ve limit çevrimi rahatlıkla görülmektedir. Fakat Şekil 2.9'da kesikli çizgilerle belirtilen kısımdaki $-1/N(B)$ 'yi sağlayan B genlik değerlerini verecek başlangıç şartlarında, önceden belirtildiği gibi sistemin çıkışındaki işaretin genliği artarak sonsuza gidecektir ve bu durumda da limit çevrimi gözlenmeyecektir.

2.2.2 Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi Analizi

Denklem (2.8)'de verilen sistemin çözümü $y(t)$;

$$y_0(t) = A + B \sin \omega t, \quad B > 0, \omega > 0 \quad (2.28)$$

şekilde olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın.

a) $y = y_0(t)$ için, denklem (2.9)'daki sistemin sürekli durumda periyodu $2\pi/\omega$ olan bir çözümü olsun. Bu cevabın olması için sistemin rezonans frekansının sistem giriş işaretiyle aynı frekansta olmaması gerekir. Ayrıca, $q'(s)$ 'nin orijinde bir kutbu olduğu durumda sistemin bu kutbun veya kutupların etkisinden çıkarılması gerekir.

b) Denklem (2.10)'te f_1 doğrusal olmayan fonksiyonun çıkışı periyodik,

$$f_1(y_0(t), sy_0(t), \dots, s^{n-1}y_0(t); z_{10}(t), \dots, z_{m0}(t)) = F_0(A, B, \omega) + \sum_{k=1}^{\infty} (F_{kR}(A, B, \omega) \sin(k\omega t) + F_{kI}(A, B, \omega) \cos(k\omega t)) \quad (2.29)$$

olsun. Burada, $TGGAI$ olduğu gibi F_{kR} ve F_{kI} Fourier katsayılarıdır ve temel harmonik hariç tüm yüksek harmonikler ihmal edilirse, denklem (2.10)'dan denklem (2.30) ve (2.31) elde edilir.

$$q(0)A + F_0(A, B, \omega) = 0 \quad (2.30)$$

$$q(j\omega)B + F_{1R}(A, B, \omega) + F_{1I}(A, B, \omega) = 0 \quad (2.31)$$

Denklem (2.30) ve (2.31), A sabit ve B değişken bileşeni ile ω frekansına sahip GAI metodunun denklem (2.9) ve (2.10)'da verilen sisteme uygulanmasıdır. $G(j\omega)$ denklem (2.16)'daki gibi tanımlanırsa sırasıyla denklem (2.30) ve (2.31)'den, denklem (2.32) ve (2.33) elde edilir.

$$1 + G(0)N_0(A, B) = 0 \quad (2.32)$$

$$1 + G(j\omega)N_1(A, B) = 0 \quad (2.33)$$

Böylece Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin frekans domenindeki karakteristik denklemleri elde edilir. Bu durumda Şekil 2.7'deki geri beslemeli sistemde doğrusal olmayan birim olan $n(\bullet)$, Çift Girişli Genelleştirilmiş Aktarım İşlevi ($CGGAI$) olarak, denklem (2.34) ve (2.35) ile tanımlanır.

$$N_0(A, B) = \frac{F_0}{A} = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(A + B \sin \omega t) d\omega t \quad (2.34)$$

$$N_1(A, B) = \frac{F_{1R} + jF_{1I}}{B} = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f_1(A + B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega + j \int_{-\pi}^{\pi} f_1(A + B \sin \omega t) \cos \omega t d\omega \right) \quad (2.35)$$

Denklem (2.32) ve (2.33)'ün çözümü ile limit çevriminin sabit bileşeni A , değişken bileşeni, B ve frekansı, ω değerleri elde edilebilir. *TGGAİ*'de olduğu gibi sonuçların doğruluğu filtreleme etkisinin etkinlik derecesiyle doğru orantılıdır.

Loeb Kriteri:

ÇGGAİ uygulandığında geri beslemeli sistemde oluşan limit çevrimin kararlılığını tespit etmek için kullanılan yöntemlerden biride Loeb kriteridir [10]. Bu kriterin uygulanabilmesi için denklem (2.32)'den A 'nın B 'nin fonksiyonu olacak şekilde; $A=f(B)$ ile ifade edilmelidir. Böylece kararlılık analizi için denklem (2.33) aşağıdaki şekle döner.

$$1 + G(j\omega)N_1(f(B), B) = 0 \quad (2.36)$$

Bu durumda, N_1 sadece B 'nin fonksiyonu olacaktır ve aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N_1(B)} \quad (2.37)$$

Limit çevriminin var olabilmesi için $G(j\omega)$ ve $-1/N_1(B)$ 'nin kompleks düzlemde birbirini kesmelidir. Bunun anlamı denklem (2.37)'nin sağlanmasıdır.

Kesişme noktasının karakterize ettiği osilasyonda bir bozulma olduğu farz edilecek olursa, denklem (2.37),

$$G(j\omega + \Delta s) = -\frac{1}{N_1(B + \Delta B)} \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilir. Burada ΔB genlikteki değişim, $Im[\Delta s]$ frekanstaki sapma ve $Re[\Delta s]$ artış oranıdır. Bir limit çevriminin kararlı olabilmesi için, $Re[\Delta s]$ ve ΔB zıt işaretlere sahip olması gerekir. Bu durumda genlikteki pozitif değişim osilasyonun artmasına, negatif değişim osilasyonun azalmasına sebep olur ve sistem sürekli durumuna geri döner. Bu durumda;

$$\frac{\partial G(j\omega)}{\partial s} \Delta s = \frac{\partial}{\partial B} \left(-\frac{1}{N_1(B)} \right) \Delta B = -j \frac{\partial G(j\omega)}{\partial \omega} \Delta s \quad (2.39)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\frac{\Delta s}{\Delta B} = j \frac{\partial}{\partial B} \left(-\frac{1}{N_1(B)} \right) \left(\frac{\partial G(j\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (2.40)$$

sonucu elde edilir. Kompleks büyüklükler tanımlanacak olursa;

$$\xi = \frac{\partial G(j\omega)}{\partial \omega}, \quad \eta = \frac{\partial}{\partial B} \left(-\frac{1}{N_1(B)} \right) \quad (2.41)$$

olmak ve kompleks düzlemde $G(j\omega)$ 'nin değişim yönü, ω 'nın artışı ile elde edilen yön, $-1/N_1(B)$ 'nin değişim yönü, B 'nin artışı ile elde edilen yön olmak üzere;

$$\frac{\text{Re} \Delta s}{\Delta B} = -\text{Im} \left(\frac{\eta}{\xi} \right) \quad (2.42)$$

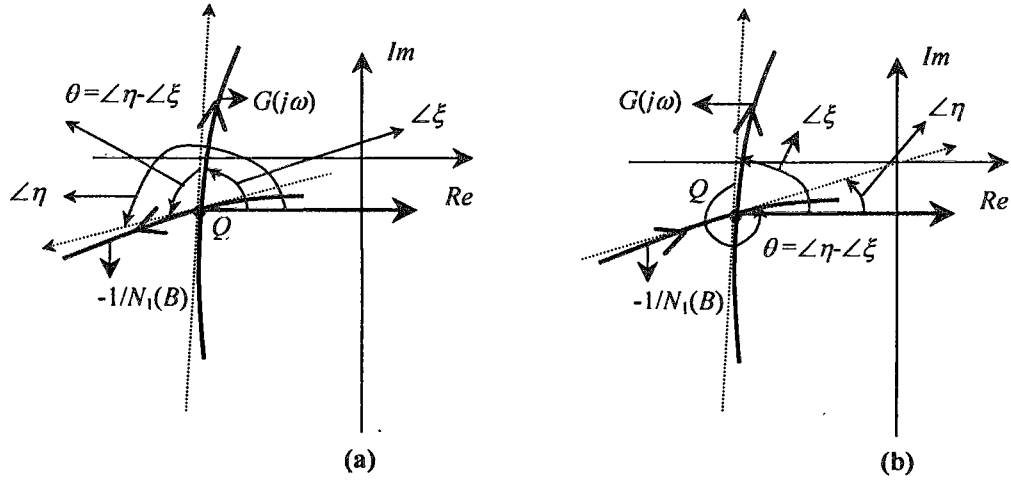
olmalıdır. Limit çeviriminin kararlı olabilmesi için gerekli şart,

$$\text{Im} \left(\frac{\eta}{\xi} \right) > 0 \quad (2.43)$$

veya

$$0 < (\angle \eta - \angle \xi) < \pi \quad (2.44)$$

dir. Bu sonuca göre Şekil 2.12(a) ve (b)'ye bakıldığında θ , denklem (2.44)'teki $\angle \eta$, $-1/N_1(B)$ 'nin Q noktasındaki teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı ve $\angle \xi$ ise $G(j\omega)$ 'nin Q noktasındaki teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı olmak üzere $\angle \eta - \angle \xi$ ye eşittir. Şekil 2.12(a) denklem (2.44)'ü $0 < \theta < \pi$ şeklinde sağlar ve böylece Q kesişme noktası kararlı bir limit çevrimine karşılık gelir. Şekil 2.12(b)'de ise $\theta > \pi$ dir ve bu denklem (2.44)'ü sağlamaz. Bu durumda Q kesişme noktasında kararsız bir limit çevrimi vardır.



Şekil 2.12(a) Kararlı limit çevrimine karşılık gelen kesişme şekli (b) Karasız limit çevrimine karşılık gelen kesişme şekli

Örnek 2.3:

Şekil 2.7'deki doğrusal olmayan geri beslemeli sistemde; doğrusal alt sistem, $G(s)$ denklem (2.45)'te ve doğrusal olmayan alt sistem, $n(y)$ denklem (2.46)'da verildiği gibi olsun [3] ve bu sistemin osilasyon şartı $\dot{C}GGA\dot{I}$ analiz metoduyla bulunmak istensin.

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}, \quad a, b, c > 0 \quad (2.45)$$

$$n(y) = -y^2 \quad (2.46)$$

Bunun için öncelikle denklem (2.46) ile ifade edilen doğrusal olmayan elemanın $\dot{C}GGA\dot{I}$ 'ni elde etmek gerekir. Bunun için denklem (2.34)'den;

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) d\omega t = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} -(A + B \sin \omega t)^2 d\omega t \quad (2.47)$$

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \left(-A^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\omega t - 2AB \int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega t d\omega t - B^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \omega t d\omega t \right)$$

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} (-A^2(2\pi) - 2AB(0) - \frac{B^2}{2}(2\pi) + B^2(0)) = \frac{1}{2\pi A} (-2\pi A^2 - \pi B^2)$$

$$N_0(A, B) = -A - \frac{B^2}{2A} \quad (2.48)$$

ve denklem (2.28)'den;

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t + j \int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t \right) \quad (2.49)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (A + B \sin \omega t)^2 \sin \omega t d\omega t + j \int_{-\pi}^{\pi} (A + B \sin \omega t)^2 \cos \omega t d\omega t \right)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left((-A^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega t d\omega t - 2AB \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \omega t d\omega t - B^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \omega t d\omega t) \right.$$

$$\left. + j(-A^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \omega t d\omega t - AB \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin \omega t \cos \omega t d\omega t - B^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \omega t \cos \omega t d\omega t) \right)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} ((-A^2(0) - 2AB(\pi) - B^2(0)) + j(-A^2(0) - AB(0) - B^2(0))) = \frac{1}{\pi B} (-2AB\pi)$$

$$N_1(A, B) = -2A \quad (2.50)$$

elde edilir. Bu durumda denklem (2.32) ve (2.33) çözülerek muhtemel limit çevriminin A , B ve ω değerleri; a , b , c cinsinden elde edilebilir. Denklem (2.32)'den,

$$1 + \left(\frac{1}{c} \right) \left(-A - \frac{B^2}{2A} \right) = 0 \quad (2.51)$$

$$2A^2 - 2cA + B^2 = 0 \quad (2.52)$$

bulunur ve denklem (2.33)'de değerler yazılırsa,

$$1 + \left(\frac{c - a\omega^2}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} - j \frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) (-2A) = 0 \quad (2.53)$$

dir. Denklem (2.53) çözümünden, limit çevrimin frekansı, ω ve sabit bileşeni, A elde edilir. Bu durumda denklem (2.53)'ün sanal kısmı 0'a eşitlenerek,

$$\left(\frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) (-2A) = 0 \quad (2.54)$$

$\omega = \sqrt{b}$ olarak bulunur ve Şekil 2.7'deki sistemde bir limit çevrimin oluşması için $b > 0$ olması gerekir. Böylece frekans şartı sağlanmıştır. Denklem (2.53)'ün reel kısmını -1 'e eşitleyerek,

$$\left(\frac{c - a\omega^2}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) (-2A) = -1 \quad (2.55)$$

$$(c - ab)(2A) = b^3 + (a^2 - 2b)b^2 + (b^2 - 2ac)b + c^2 \Rightarrow$$

$$2A = \frac{a^2b^2 - 2abc + c^2}{c - ab}$$

$A = \frac{1}{2}(c - ab)$ sonucu elde edilir. Denklem (2.52)'de frekans, ω ve sabit bileşen, A değerleri yerine yazılırsa,

$$B^2 = 2c \left(\frac{1}{2}(c - ab) \right) - 2 \left(\frac{1}{2}(c - ab) \right)^2 \quad (2.56)$$

$$B^2 = \frac{c^2}{2} - \frac{a^2b^2}{2} = \frac{1}{2}(c - ab)(c + ab)$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(c - ab)(c + ab)} \quad \text{olarak ta limit çevrimin değişken bileşeni, } B \text{ bulunur. Şekil 2.7'deki}$$

kapalı çevrimli sistemde limit çevrimin oluşabilmesi için $c > ab$ olmalıdır. Bu durumda da genlik şartı sağlanmıştır.

Verilen sistemde limit çevirimin oluşma şartlarını sağlayacak şekilde $a = 0.4, b = 2$ ve $c = 1$ alındığı durumda Şekil 2.7'teki sistemde başlangıç şartlarından bağımsız osilasyonların gözlenip gözlenemeyeceği araştırılmak istensin.

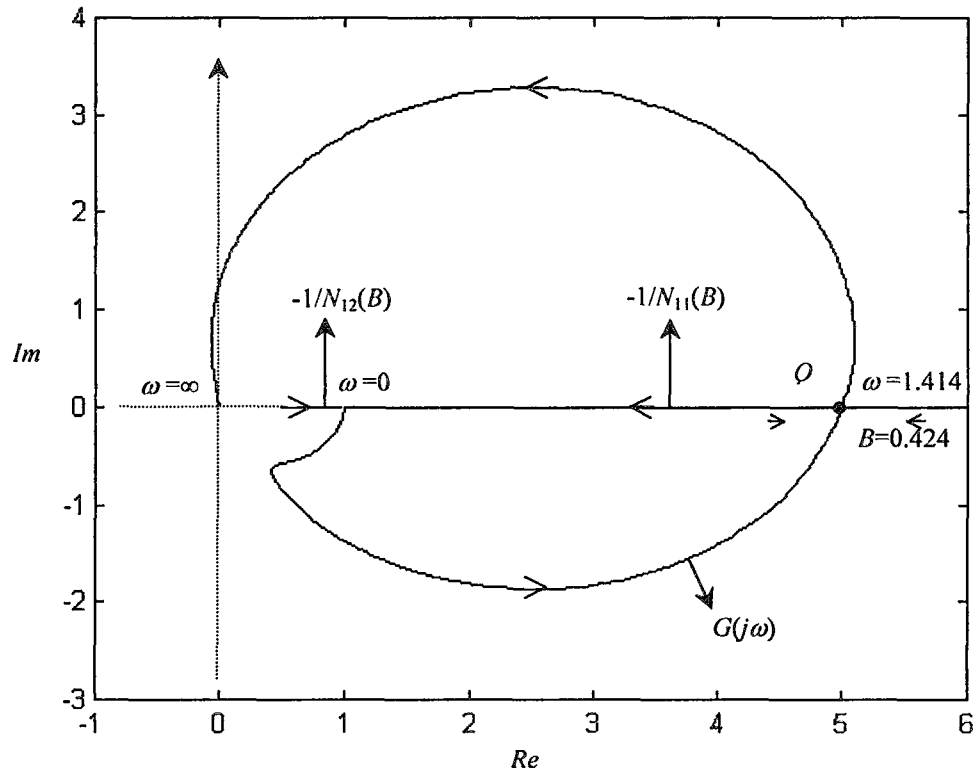
Analitik olarak gözlenmesi beklenen limit çevirimin frekansı, ω , denklem (2.54)'den, sabit bileşeni, A denklem (2.55)'den ve değişken bileşeni, B denklem (2.56)'dan elde edilecek olursa, $\omega = 1.414 \text{ rad/sn}$, $A = 0.1$ ve $B = 0.424$ olarak bulunur. Bu durumda Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin çıkışında beklenen başlangıç şartlarından bağımsız osilasyon denklem (2.57)'deki biçimde olur.

$$y_0(t) = 0.1 + 0.424 \sin(1.414t) \quad (2.57)$$

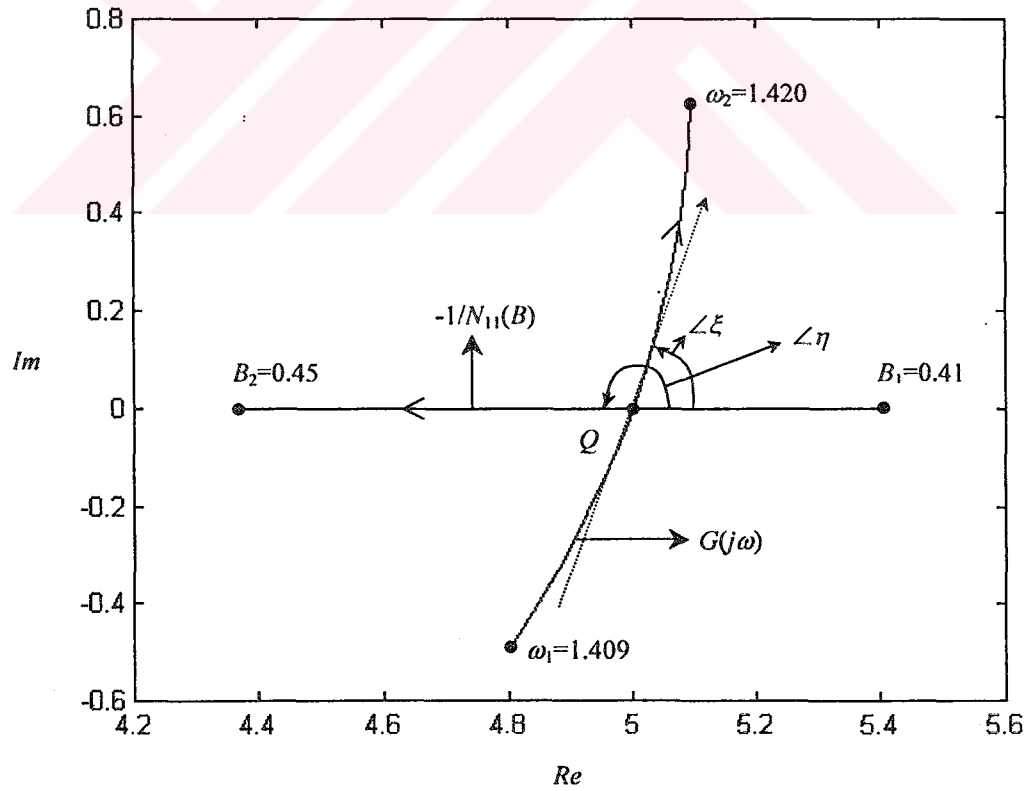
Denklem (2.57) ile tanımlanan osilasyonun pratikte gözlenebilmesi için limit çevriminin kararlı olması gerekir. Loeb kriteri gereğince denklem (2.52)'den A 'yı, B 'nin bir fonksiyonu olarak elde edilmek istenirse, bu durumda; $A_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 2B^2}}{2}$ elde edilir ve denklem (2.50) sadece B 'nin fonksiyonu olacak şekilde denklem (2.58)'deki gibi ifade edilebilir.

$$N_{1(1,2)}(B) = -1 \pm \sqrt{1 - 2B^2} \quad (2.58)$$

$G(j\omega)$ ile $-1/N_{1(1,2)}(B)$ 'nin değişimine bakılacak olursa, $(-1/N_{1(1,2)}(B))$ değişimi $B: 0 \rightarrow 1/\sqrt{2}$ için elde edilmiştir ve $B > 1/\sqrt{2}$ genlik değerlerinde $-1/N_{1(1,2)}(B)$ kompleksleşir) Şekil 2.7'de Q noktasında $G(j\omega)$ ile $-1/N_{11}(B)$ kesişmektedir. Bu denklem (2.57)'de elde edilmiş analitik sonuca karşılık gelmektedir. Şekil 2.14'te $\omega_1 < \omega < \omega_2$, $(1.409 < \omega < 1.420)$ aralığı ve $B_1 < B < B_2$, $(0.41 < B < 0.45)$ aralığı için Q noktası yakından elde edilmiştir. Bu şekilde de görüldüğü gibi analitik sonuçlar grafiksel olarak ta elde edilebilmektedir.

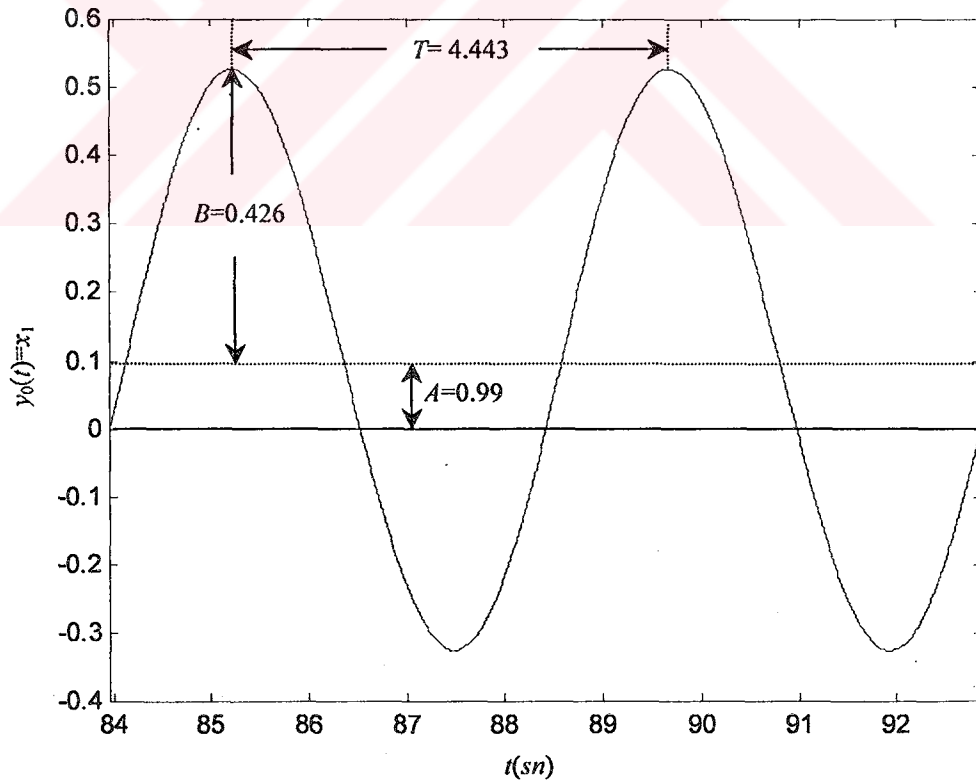


Şekil 2.13 $G(j\omega) = 1/(-j\omega^3 - 0.4\omega^2 + 2j\omega + 1)$ ile $-1/N_{11}(B) = 1/(1 - \sqrt{1 - 2B^2})$ ve $-1/N_{12}(B) = 1/(1 + \sqrt{1 - 2B^2})$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi



Şekil 2.14 $1.409 < \omega < 1.420$ aralığı ve $0.41 < B < 0.45$ aralığı için Şekil 2.13'teki Q noktasının yakından gösterilmiş hali

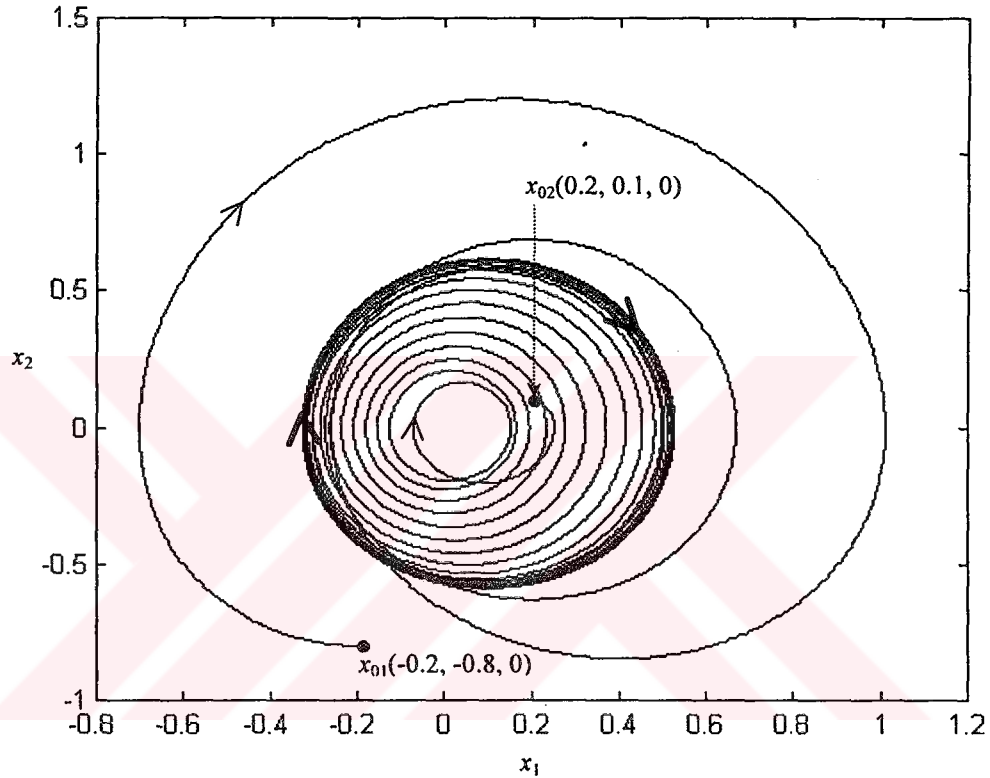
Loeb kriterine göre Q noktasındaki limit çevriminin kararlı olabilmesi için denklem (2.43) veya denklem (2.44)'ün sağlanması gerekir. Şekil 2.14'e bakıldığında B 'nin artırımı ile elde edilen yön, $-1/N_1(B)$ 'nin değişimi yönü olmak üzere pozitif reel eksen ile $-1/N_1(B)$ arasındaki açı, yani denklem (2.44)'deki $\angle \eta$, 180° 'ye eşit olduğu görülmektedir. Denklem (2.44)'deki $\angle \xi$ ise Şekil 2.14'de ω 'nın artırımı ile elde edilen yön, $G(j\omega)$ 'nin değişim yönü olmak üzere, $G(j\omega)$ 'nin Q noktasında doğrusallaştırılmış halinin reel eksen ile yapmış olduğu açıdır. $\angle \xi$ değeri, Q ile $G(j\omega)$ değişimi üzerinde ve Q noktasına çok yakın olan ikinci bir nokta arasındaki doğrunun pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açının bulunmasıyla yaklaşık olarak bulunabilir. Bu yapı kullanılarak Matlab ortamında $\angle \xi = 76.05^\circ$ olarak elde edilmiştir. Değerler yerine yazıldığında $0 < \angle \eta - \angle \xi < 180$, $0 < 103.95 < 180$ olarak denklem (2.44) sağlanır. Bu durumda Q noktası kararlı bir denge noktasıdır. Ayrıca Örnek 2.2'de Nyquist kriteri kullanılarak Şekil 2.9'da bulunan Q noktasının tanımladığı limit çevriminin kararlılığı incelenmişti. Şekil 2.9 için yapılan değerlendirmenin aynısı Şekil 2.14 için de geçerlidir. Bu da Loeb kriteriyle yapılan kararlılık analiziyle örtüşmektedir. Bu sonucun doğruluğunu görebilmek için sistemin simülasyon sonuçlarına bakmak gerekir. Simülasyonda bir osilasyon gözlenmiş ve Şekil 2.15'te $y_0(t)$ 'nin zamana göre değişiminden bir kesit verilmiştir.



Şekil 2.15 $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7'deki kapalı çevrimli sistemin çıkışının, $y_0(t)=x_1$, geçici rejiminin elimine edilerek sürekli durumdaki değişimi

Şekil 2.15’de sürekli durumdan bir kesit verilen osilasyonda görüldüğü gibi limit çevrimin sabit bileşeni, $A=0.99$, değişken bileşeni, $B=0.426$ ve periyodu, $T=4.443$ dür.

Bu sonuçlar $\dot{C}GGA\dot{I}$ metot ile elde edilen ve denklem (2.57)’de ifade edilen sonuca çok yakındır. Burada GAI metodun etkinliği net bir şekilde görülmektedir. Şekil 2.16’da durum değişkenlerinin iki farklı başlangıç şartı; $x_{01}(-0.2, -0.8, 0)$ ve $x_{02}(0.2, 0.1, 0)$ için durum uzay diyagramında limit çevrimi elde edilmiştir.



Şekil 2.16 $\alpha=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için Şekil 2.7’deki kapalı çevrimli sistemin durum değişkenlerinin iki farklı başlangıç şartı; $x_{01}(-0.2, -0.8, 0)$ ve $x_{02}(0.2, 0.1, 0)$ için limit çevriminin durum uzay diyagramındaki değişimi

Görüldüğü gibi GAI analiz metodu, Şekil 2.7’deki sistemlerin analizini yüksek bir doğrulukla yapabilmektedir. Yani, limit çevriminin varlığını, kararlılığını, genlik ve frekansını da yüksek bir doğrulukla tespit edebilmektedir. $\dot{C}GGA\dot{I}$ analiz metodu, Bölüm 3’te Lur’e tipi olarak adlandırılan geri beslemeli sistemlerin kaotik davranış gösterecek sistem parametrelerinin tahmin edilmesinde de bir araç olarak kullanılacaktır.

3.GERİ BESLEMELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE KAOTİK DAVRANIŞLARIN TAHMİN EDİLMESİ

Geri beslemeli doğrusal olmayan sistemlerde kaos ilk tespit edildiğinde istenmeyen davranışlar olarak nitelendirilmiştir. Bu nedenle kaotik davranış gösteren geri beslemeli doğrusal olmayan kontrol sistemlerinin parametreleri değiştirilerek kaotik davranış olma olasılığı tamamen yok edilir ve sistem bu şekilde dizayn edilirdi. Ancak çok basit geri beslemeli sistemlerde bile kaotik davranışın olabileceğinin ortaya çıkmasıyla [11] artık kaotik davranışın hangi sistem parametrelerinde oluşabileceği çok önemlidir [4].

Genesio ve Tesi, doğrusal olmayan geri beslemeli sistemlerde kaotik davranışın olduğu sistem parametrelerini veren önemli bir metot geliştirmişlerdir [2,3]. Bu metot bir çok pratik sistemde uygulanmış ve şimdilik bu konudaki en önemli metottur. Bu bölümde Genesio ve Tesi'nin geliştirdiği bu metot verilecek ve geri beslemeli doğrusal olmayan kontrol sistemlerinde etkinliği bir pratik problemle gösterilecektir.

3.1 Genesio-Tesi Metodu

Geri beslemeli sistemlerin çoğu denklem (2.12) ile tanımlanan ve Şekil 2.7'de gösterilen Lur'e formundaki sistemlerdir [3]. Bu sistemlerde oluşabilecek limit çevrimi osilasyonların genliği ve frekansını *GAI* analiz ile tespit etmek istenilirse, denklem (2.12) aşağıdaki şekle dönüşür;

$$y(t) + \frac{p(s)}{q(s)} f_3(y(t)) = 0 \quad (3.1)$$

Burada, $p(s)/q(s)$ Şekil 2.7'deki $G(s)$, doğrusal alt sistemine ve $f_3(y(t))$ Şekil 2.7'deki $n(\bullet)$ doğrusal olmayan alt sistemine karşılık gelmektedir. Bu durumda denklem (3.1),

$$y(t) + G(s)n(y(t)) = 0 \quad (3.2)$$

şekline dönüşür.

Genesio - Tesi Varsayımı:

“Bir geri beslemeli Lur'e tipi sistemde limit çevrimi ve denge noktası uygun filtreleme etkisi ile belirli kararlılık karakteristiklerinde kendileri aralarında etkileşime girdikleri zaman sistem kaotik davranış gösterir.” [2]

tarafından içine alınması limit çevriminin oluşması için gerekli değildir ve bu nokta *ayrı denge noktası* olarak isimlendirilir.

2) Kararlılık Karakteristikleri:

Ayrı denge noktası ile limit çevriminin etkileşimi sonucunda oluşması beklenen kaotik davranışın yörüngesi, limit çevrimin yörüngesine çok yakındır. Bu yüzden limit çevriminin kararlı olması gerekir. Buna ek olarak meydana gelmesi beklenen kaotik davranışın, sürekli durum kaotik davranışının devam etmesi için ayrı denge noktasının kararsız olması gerekir. Daha kısa bir şekilde ifade edilecek olursa limit çevrimi, $y_0(t)$; kararlı ve $y=E$ 'deki denge noktası kararsız olmalıdır.

3) Filtreleme Etkisi:

Filtreleme etkisi limit çevriminin oluşmasını sağlama almak için bir araç olduğu Bölüm 2'de anlatılmıştı. Bu yüzden göz önünde bulundurulmuş sistemde uygun filtreleme etkisinin olması gerekmektedir. Yalnız, kaotik davranışın oluşması için denklem (2.19)'un, limit çevrimin garantili bir şekilde oluşması için gerekli olan yüksek filtreleme etkisinden daha az bir filtreleme etkisini(orta düzeyde) sağlaması istenir.

Kaosla ilgili buradaki ana düşünce, böyle bir davranışın temel mekanizmasının çok sayıda gürültülü limit çevrimlerin var olduğudur. Bu davranış limit çevrimin var olması için gerekli şartlar gerçekleştiğinde ve kararsız ayrı bir denge noktası var olduğunda meydana gelir. Kaotik davranışın meydana gelebilmesi için limit çevrimi ile denge noktası arasında bir etkileşimin olması ve tamamlayıcı kararlılık karakteristikleri ile yardımcı mekanizma olarak uygun filtreleme etkisinin oluşturulması gerekir.

Göz önünde bulundurulmuş şartların çoğu direkt olarak sistem parametrelerini içermekte ve tamamen basit şekilde sonuçlandırılan ilişkiler arasında birbirine dönüştürülebilmektedir. Buda Genesio-Tesi varsayımının etkinliğini ortaya koymaktadır. Bahsedilen varsayımlar içerisinde yalnız filtreleme etkisi nitel gibi gözükmemektedir ve uygun bir parametre kombinasyonu ile değiştirilebilir. Böylece kaotik davranışın yaklaşık yeri ve varlığı tahmin edilebilir.

Önerilen varsayım özetlenecek olursa, kaotik davranışın varlığı için gerekli temel şartlar aşağıdaki gibidir.

- 1) Bir limit çevrimi var olmalı; $y=y_0(t)$.
- 2) Ayrı bir denge noktası var olmalı; $y=E$.

- 3) Denge noktası ve limit çevrimin kararlılık özellikleri; $y_0(t)$ kararlı, $y=E$ 'deki denge noktası kararsız olmalı.
- 4) Denge noktası ile limit çevrimin arasında bir etkileşim olmalı; $y_0(t)=E$, bazı t değerleri için.
- 5) Sistemin uygun filtreleme etkisine sahip olmalı.

Önerilen varsayımın uygulama yöntemi, öncelikle denklem (2.32) ve (2.33)'ün çözümüyle limit çevrimini karakterize eden A , B ve ω değerleri bulunarak yapılabilir. Bu 1.şarta karşılık gelmektedir. 2.şartta ise denklem (3.2)'den sistemin denge noktaları tespit edilir ve ayrı bir denge noktasının varlığı veya yokluğu incelenir.

3.şart olarak sistem çözümlerinin kararlılık özelliklerinin kontrolü yapılmalıdır. Denge noktası için, $y=E$ 'de doğrusallaştırılmış sistemin kararlılığı kolay bir şekilde klasik yöntemlerden biriyle yapılabilir. Bu yöntemlerden biride Bölüm 2'de anlatılan Nyquist kararlılık kriteridir. Nyquist kararlılık kriteri sistemin açık çevrim transfer fonksiyonundan faydalanmaktadır. Bunun için $n(y)$ doğrusal olmayan elemanın, $y=E$ 'deki eğimi; o nokta ve civarı için $n(y)$ 'nin doğrusal eş değeri bir kazanç katsayısı olacaktır. Böylece Şekil 2.7'deki

doğrusal olmayan geri beslemeli sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu; $\left. \frac{\partial n}{\partial y} \right|_{y=E} G(j\omega) = -1$

şeklinde olur ve bu eşitlikten $G(j\omega) = -1 / \left. \frac{\partial n}{\partial y} \right|_{y=E}$ eşitliği elde edilir. $G(j\omega) = -1 / \left. \frac{\partial n}{\partial y} \right|_{y=E}$

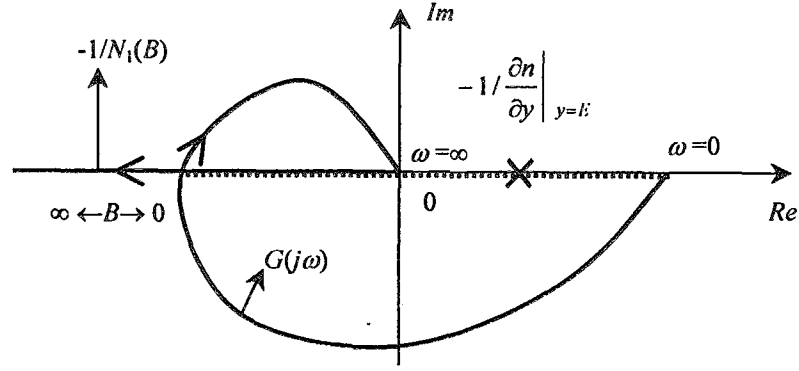
eşitliği; Bölüm 2'de anlatılan Nyquist kararlılık kriterinde referans nokta olarak alınan $-1+j0$

noktasının, $-1 / \left. \frac{\partial n}{\partial y} \right|_{y=E}$ noktası olduğu anlamına gelir ve kararlılık analizi kompleks düzlem

üzerindeki bu noktaya göre yapılır. Limit çevriminin kararlılığını tespit etmek için yine Bölüm 2'de anlatılan Loeb kriteri kullanılabilir. Şekil 3.2'de kararlı doğrusal alt sistem, $G(j\omega)$ için

doğrusallaştırılmış sistemde $y=E$ 'deki denge noktasının kararsız olması için $-1 / \left. \frac{\partial n}{\partial y} \right|_{y=E}$ 'nin

olması gereken yeri kesikli çizgiyle ve kararlı bir limit çevrimi için $-1/N_1(B)$ 'nin değişim yönü gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Kararlı bir limit çevrimi için $G(j\omega)$ ve $-1/N_1(B)$ 'nin, değişim yönleri sırasıyla ω ve B 'nin artırılmasıyla elde edilen yönler olmak üzere kompleks düzlemdeki değişimi ve $y=E$ 'deki denge noktasının kararsız olması için doğrusallaştırılmış sistemde, $-1/\frac{\partial n}{\partial y}\bigg|_{y=E}$ noktasının bulunması gereken ve kesikli çizgilerle gösterilen bölge

Ana şart olarak tabir edilebilecek 4.şart ise etkileşim olarak adlandırılan varsayımdır. Etkileşimin gerçekleşebilmesi için denklem (3.3)'te verilen eşitsizliğin sağlanması gerekir.

$$B \geq |E - A| \quad (3.3)$$

Son olarak 5.şart; sistemde uygun filtreleme etkisinin olması gerekir. Denklem (2.19)'daki eşitsizlik gerçek bir limit çevrimin var olması için gereklidir. Denklem (2.19)'un etkinlik derecesi azaltılarak sistem kaotik davranış gösterecek şartlara getirilebilir. Bu da sistem parametrelerini uygun şekilde değiştirilmesi ile sağlanır.

Örnek 3.1:

Örnek 2.3'te [3] verilen sistemin kaotik davranış göstereceği sistem parametreleri tespit edilmek istensin. Örnek 2.3'te verilen sistem, doğrusal kısmı $G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}$, $a, b, c > 0$ ve doğrusal olmayan kısmı $n(y) = -y^2$ olan Lur'e tipi bir sistemdi.

Sistemde kaotik davranışın beklenebilmesi için aşağıdaki soruların hepsine "evet" cevabının verilmesi gerekir.

- Sistemde *limit çevrimi* var mı?
- Sistemde limit çevriminin içine aldığı denge noktası dışında *ayrı bir denge noktası* var mı?
- Sistemde limit çevrimi varsa *kararlı* mı? Ayır denge noktası varsa *kararsız* mı?

- Aynı denge noktası ile limit çevrimin bazı sistem parametreleri için belirli t değerlerinde *etkileşime* giriyorlar mı?
- Sistemde uygun *filtreleme* etkisi sağlanabiliyor mu?

Sistemde limit çevriminin;

$$c > ab \quad (3.4)$$

şartında var olduğu ve bu şartlar altında sabit bileşen, A ;

$$A = \frac{1}{2}(c - ab) \quad (3.5)$$

değişken bileşeni, B ;

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(c - ab)(c + ab)} \quad (3.6)$$

ve frekansı, ω ;

$$\omega = \sqrt{b} \quad (3.7)$$

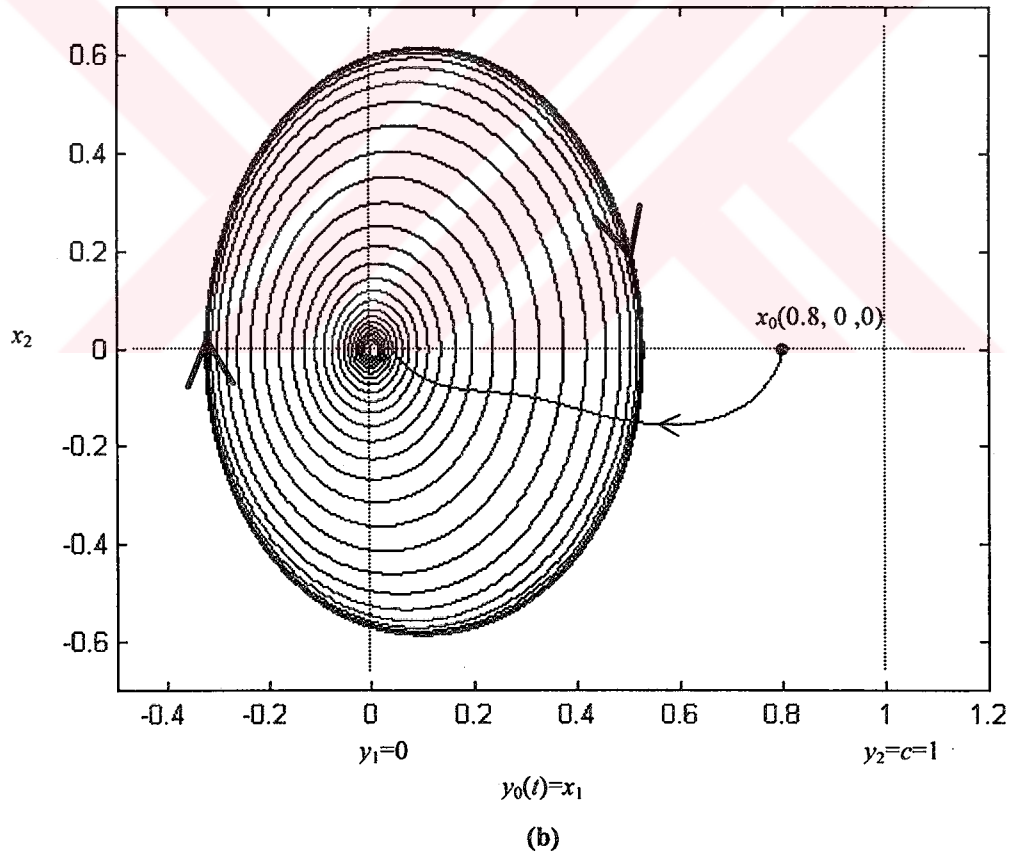
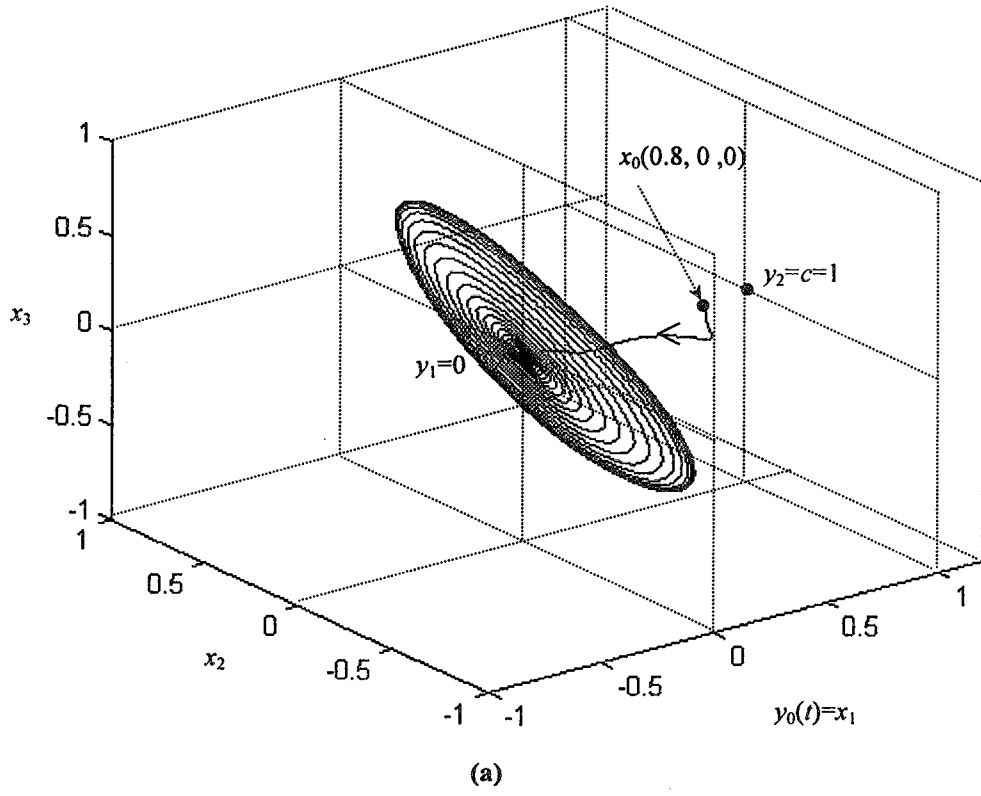
olarak Örnek 2.3'te elde edilmişti. Örnek 2.3'de aynı zamanda denklem (3.4)'ü sağlayacak şekilde sistem parametreleri seçilerek var olan limit çevriminin kararlı olduğu gösterilmişti.

Denklem (3.2)'den sistemin denge noktaları bulunabilir.

$$y + G(0)n(y) = 0 \quad (3.8)$$

$$y + \frac{1}{c}(-y^2) = 0 \Rightarrow y\left(1 - \frac{y}{c}\right) = 0 \Rightarrow y_1 = 0; y_2 = c \quad (3.9)$$

görüldüğü gibi sistemin, $y=0$ ve $y=c$ olmak üzere iki tane farklı denge noktası var. Denklem (3.4) sağlanacak şekilde, $\alpha=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ alınarak sistemin, Şekil 3.3(a)'da x_1 - x_2 - x_3 durum değişkenlerine göre, Şekil 3.3(b)'de ise x_1 - x_2 durum değişkenlerine göre durum uzay diyagramı elde edilmiştir. Şekil 3.3(a) ve (b)'ye bakıldığında limit çevriminin, $y=0$ 'daki denge noktasını içine aldığı ama $y=c$ 'deki denge noktasını ise içine almadığı görülecektir. Bu durumda $y=c$ 'deki denge noktası ayrı bir denge noktasıdır.



Şekil 3.3 Örnek 3.1'deki sistem, denklem (3.4) sağlanacak şekilde, $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ alınarak sistemin elde edilmiş (a) x_1 - x_2 - x_3 durum değişkenine göre, (b) x_1 - x_2 durum değişkenine göre, durum uzay diyagramı ve sisteme ait $y_1=0$ ve $y_2=c=1$ denge noktaları

Şekil 3.3(a)'da x_1 - x_2 - x_3 durum değişkenlerine göre elde edilen durum uzay diyagramında üç boyutlu olarak limit çevrimi ve başlangıç şartından sürekli duruma kadar olan sistem yörüngesi görülmektedir. Sürekli duruma kadar sistemin izlediği yörünge Şekil 3.3(a)'da olduğu gibi limit çevrimini kesmemektedir. Şekil 3.3(b)'de daha açık bir şekilde ayrı denge noktasını tespit etmek için x_1 - x_2 durum değişkenlerine göre elde edilen durum uzay diyagramında başlangıç şartından sürekli duruma kadar izlenen yörünge ile limit çevrimi birbirini kesiyor görülmektedir. Fakat, böyle bir durumun olmaması gerekir. Bunun sebebi; Şekil 3.3(b)'de elde edilen durum uzay diyagramının, Şekil 3.3(a)'da elde edilen üç boyutlu durum uzay diyagramının x_1 - x_2 düzlemine iz düşümü olması sebebiyle kesişme varmış gibi görünmesindendir.

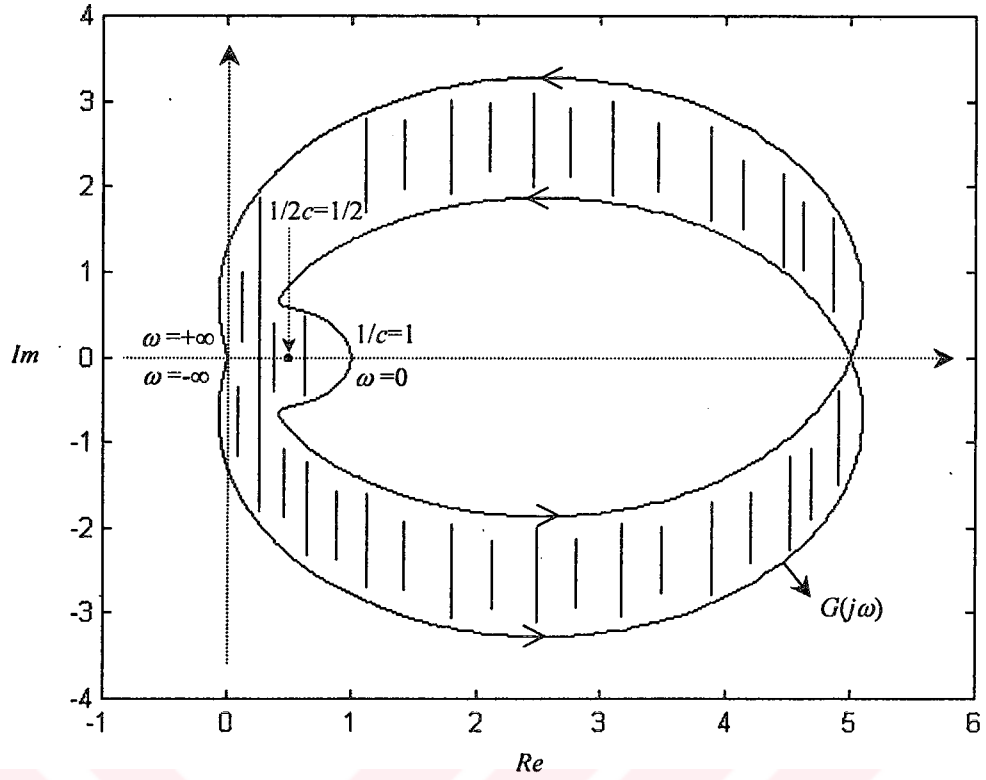
$y=c$ 'deki denge noktasının kararlılığı doğrusal olmayan elemanın, $y=c$ noktası için doğrusallaştırılmış eş değeri yardımıyla Nyquist kararlılık kriteri uygulanarak incelenebilir.

Bunun için $-1/\frac{\partial n}{\partial y}\bigg|_{y=c}$ 'nin kompleks düzlemdeki yerine, denklem (3.4) sağlanmak koşulu ile

$G(j\omega)$ 'nın değişimiyle birlikte bakılmalıdır. $G(j\omega)$ 'nın denklem (3.4)'ü sağlayan sistem parametreleri için iki tane kutbu sağ yarı s -düzleminde vardır. Örnek 2.2'de verilen sistem parametreleri için $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$, $G(j\omega)$ 'nın $s_1=0.044+j1.428$, $s_2=0.044-j1.428$ ve $s_3=-0.489$ olmak üzere üç tane kutbu vardır. Bunlardan s_1 ve s_2 sağ yarı s -düzleminde vardır. Bu durumda Nyquist kararlılık kriterine göre $P=2$ olur.

$-1/\frac{\partial n}{\partial y}\bigg|_{y=c}$ 'nin kompleks düzlemde hangi noktaya karşılık geldiği bulunmak istenirse,

$\frac{1}{2y}\bigg|_{y=c}=\frac{1}{2c}$ sonucu elde edilir. Şekil 3.4'de $G(j\omega)$ 'nın $a=0.4$, $b=2$ ve $c=1$ için elde edilmiş polar diyagramı ve $-1/2c=1/2$ 'nin yeri gösterilmektedir.



Şekil 3.4 $G(j\omega) = 1/((j\omega)^3 + 0.4(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1)$ 'nin polar diyagramı ve kompleks düzlemde $-1/\frac{\partial(-y^2)}{\partial y}\bigg|_{y=c=1}$ 'nin yeri

Şekil 3.4'te görüldüğü gibi $1/2c=1/2$ 'nin bulunduğu nokta taralı bölge içerisinde kalan kısımdadır. Taralı kısım da $G(j\omega)$ tarafından saat yönünün tersi yönünde bir defa çevrelenmiştir. Bu durumda $N=-1$ olur. Nyquist kararlılık kriterine göre açık çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemindeki sıfır sayısı, $Z=P+N=2-1=1$ dir. Bu sonuç aynı zamanda kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemindeki kutup sayısıdır. Bu da $y=c$ noktasının kararsız bir denge noktası olduğunu göstermektedir.

$y=c$ 'deki denge noktası ile limit çevriminin belirli t değerlerinde bir etkileşime girebilmesi için denklem (3.3)'ün sağlanması gerekir. Denklem (3.5)'ten A değeri ve denklem (3.6)'dan B değeri, denklem (3.3)'te yerine yazılırsa;

$$\sqrt{\frac{1}{2}(c-ab)(c+ab)} \geq \left| c - \frac{1}{2}(c-ab) \right| \quad (3.10)$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}(c-ab)(c+ab)} \right)^2 \geq \left(c - \frac{1}{2}(c-ab) \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(c-ab)(c+ab) \geq \left(\frac{1}{2} \right)^2 (c+ab)^2 \Rightarrow$$

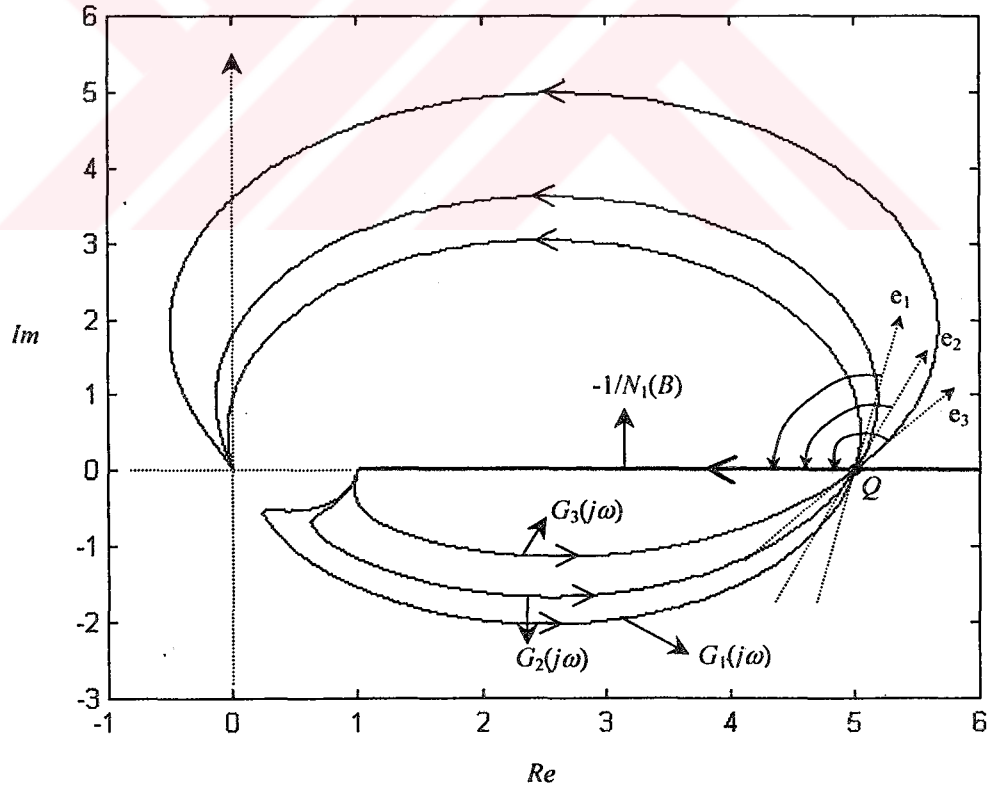
$$2(c - ab) \geq c + ab \Rightarrow 2c - 2ab \geq c + ab$$

$$c \geq 3ab$$

$$(3.11)$$

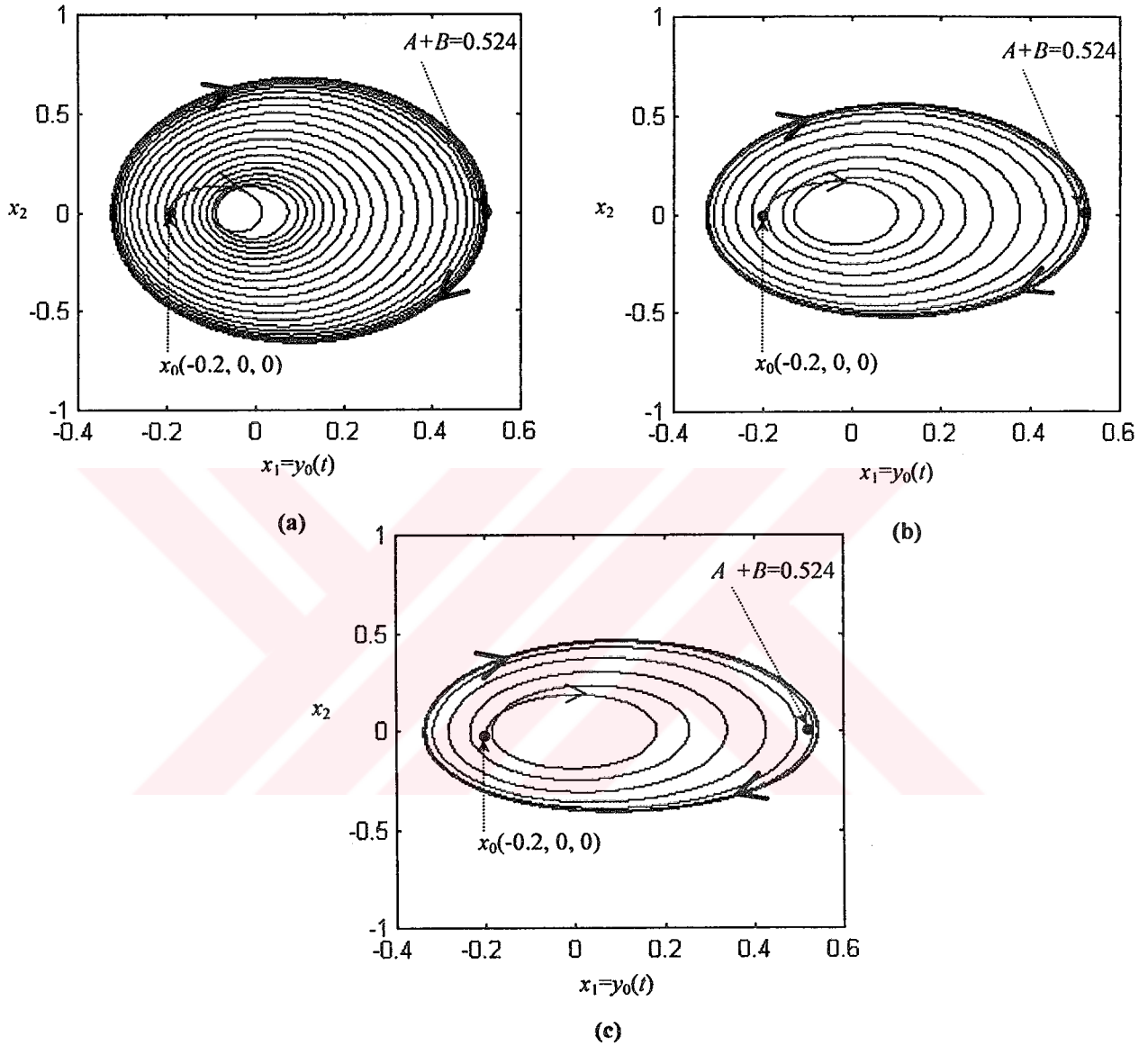
şartı sağlandığında bir etkileşim söz konusu olur.

Kaotik davranışın oluşması için istenen uygun filtreleme etkisi, büyük bir doğrulukla limit çevriminin GAI ile hesaplanabilmesi için gerekli olan yüksek filtreleme etkisinden daha düşük bir filtreleme etkisinin sağlanması ile oluşur. GAI ile hesaplanan limit çevriminin doğruluğu kompleks düzlemde $G(j\omega)$ ile $-1/N_1(B)$ 'nin birbirlerini kesme açısıyla ilişkilendirilebilir. $G(j\omega)$ ile $-1/N_1(B)$ 'nin birbirlerini kesme açısı 90° 'ye ne kadar yaklaşırsa, GAI ile tespit edilen limit çevrimi, gerçekte görülen limit çevrimine o oranda yakın demektir [12]. Yani $G(j\omega)$ ile $-1/N_1(B)$ arasındaki açı 90° 'ye ne kadar yaklaşırsa limit çevriminin yüksek bir doğrulukla hesaplanması için gerekli olan yüksek filtreleme etkisi o kadar iyi sağlanıyor demektir. Şekil 3.5'te, denklem (3.4) sağlanacak şekilde, $ab=0.8$ ve $c=1$ değerlerinde sabit tutulmak koşulu ile $a=0.32$, $b=2.5$ için $G_1(j\omega)$, $a=0.5$, $b=1.6$ için $G_2(j\omega)$ ve $a=0.8$, $b=1$ için $G_3(j\omega)$ olarak elde edilmiş Nyquist diyagramları ve $-1/N_1(B)$ 'nin değişimi verilmiştir.



Şekil 3.5 $G(j\omega) = 1/((j\omega)^3 + a(j\omega)^2 + b(j\omega) + c)$ olmak üzere, $a=0.32$, $b=2.5$, $c=1$ için $G_1(j\omega)$, $a=0.5$, $b=1.6$, $c=1$ için $G_2(j\omega)$, $a=0.8$, $b=1$, $c=1$ için $G_3(j\omega)$ olarak Nyquist diyagramı ve $-1/N_1(B)$ 'nin değişimi

Şekil 3.5'te görüldüğü gibi denklem (3.4) sağlanacak şekilde b veya a arttıkça filtreleme etkisi artmaktadır. Şekil 3.6'da durum uzay diyagramında, $\alpha=0.32$, $b=2.5$, $c=1$ için (a)'da, $\alpha=0.5$, $b=1.6$, $c=1$ için (b)'de ve $\alpha=0.8$, $b=1$, $c=1$ için (c)'de gösterilen ve Matlab/Simülink ortamında elde edilmiş limit çevrimleri verilmiştir.

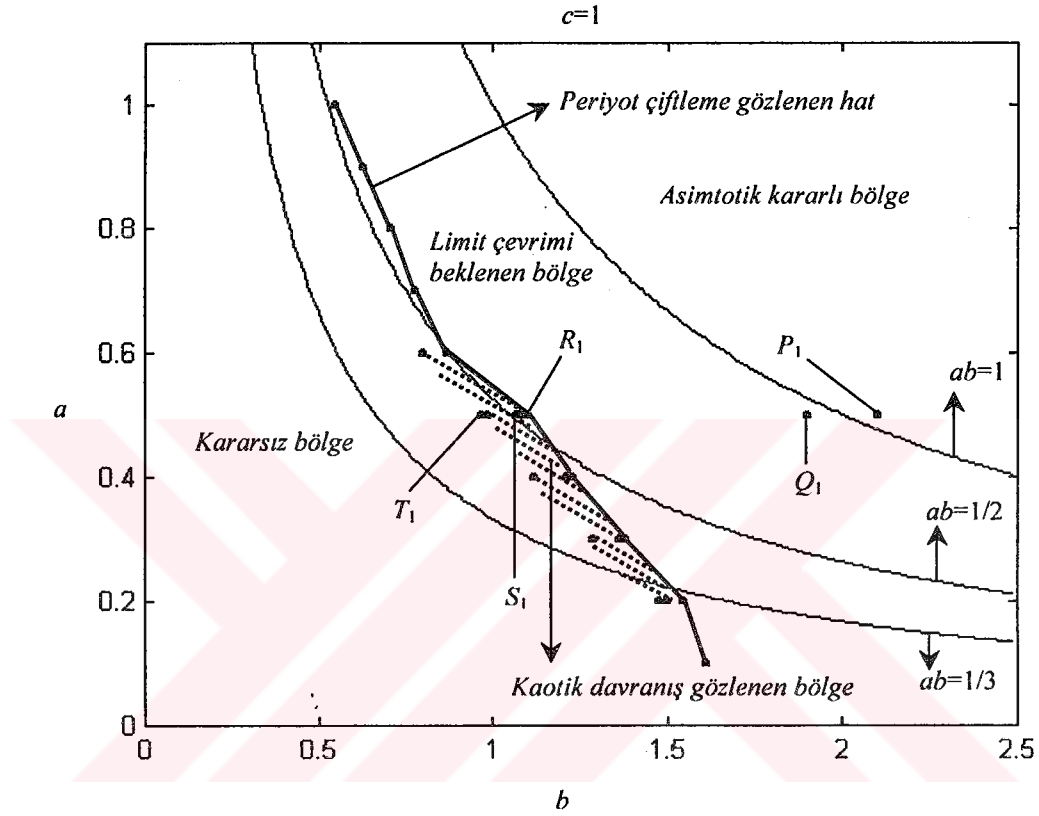


Şekil 3.6 Örnek 3.1'deki sistemin, (a) $\alpha=0.32$, $b=2.5$, $c=1$ için, (b) $\alpha=0.5$, $b=1.6$, $c=1$ için ve (c) $\alpha=0.8$, $b=1$, $c=1$ için elde edilmiş durum uzay diyagramı

Şekil 3.6'da görüldüğü gibi sistemde görülen limit çevrimi, filtreleme etkisinin azalması ile GAI yardımıyla denklem (3.5)'den $A=0.1$ ve denklem (3.6)'dan $B=0.424$ olarak hesaplanan limit çevrimi değerinden uzaklaşır. Şekil 3.6'da gösterilen üç farklı durum için GAI ile hesaplanan A ve B 'ye göre $A+B=0.524$ değerine eşittir ve x_1 ekseninde gösterilmiştir. Bu

aynı zamanda sistem çıkışı olan $y_0(t)$ 'ye eşittir. Böylece $G(j\omega)$ doğrusal alt sistemi filtreleme etkisi sağlayabilmektedir.

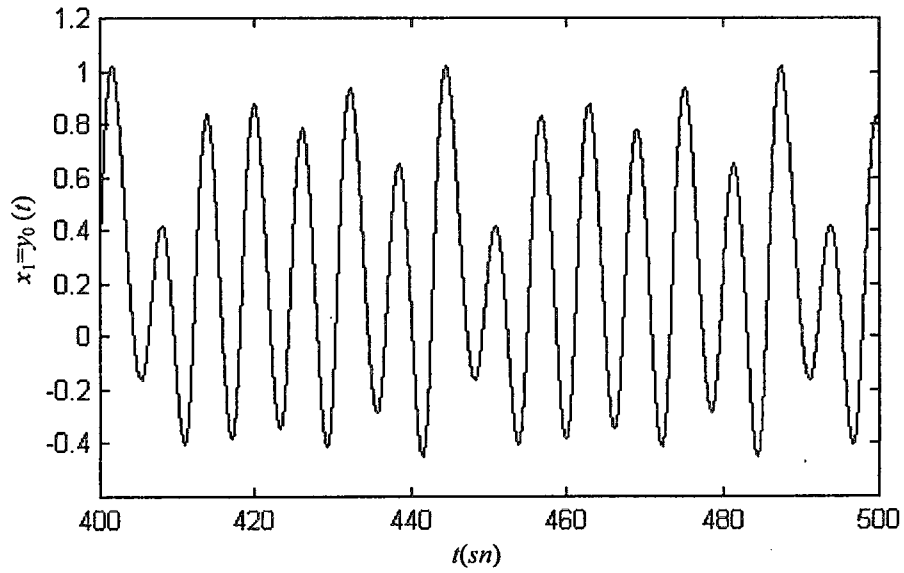
Sonuç olarak bu sistemde, önerilen varsayım gereği kaotik davranış gerçekleşir. Kaotik davranış beklenen bölgeyi tanımlayan eşitsizliğin yalnız denklem (3.11) olduğu daha önce belirtilmişti. $c=1$ alınarak Örnek 3.1'deki sistemin simülasyon sonuçlarına göre ve denklem (3.4) ve (3.11)'den faydalanılarak Genesio-Tesi sonuçları Şekil 3.7 elde edilmiştir.



Şekil 3.7 Örnek 3.1'in $c=1$ için b - a düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve gözlemlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi

Şekil 3.6'de kararlı limit çevrimi, kaotik davranış ve kararsız davranış beklenen sistem parametreleri b - a düzleminde bölgesel olarak gösterilmiştir. Dikkat edilirse, sistem orta seviyeli filtreleme etkisine sahip olduğu durumda kaotik davranış meydana gelmekte, filtreleme etkisi orta seviyenin altına düşünce sistem kararsızlaşmakta ve yüksek filtreleme etkisinde ise limit çevrimi davranış göstermektedir. Ayrıca Şekil 3.8'de S_1 noktasına ait parametrelerde sistemin çıkışının zamana göre değişimi verilmiştir.

Şekil 3.9(a), (b), (c), (d) ve (e)'de sırasıyla, Şekil 3.7'de belirtilen P_1 , Q_1 , R_1 , S_1 ve T_1 noktalarına karşılık gelen sistem parametrelerindeki, sistemin simülasyonu sonucunda elde edilen durum uzay diyagramları verilmiştir. Bu sonuçlar da Şekil 3.7'yi doğrulamaktadır. Denklem (3.11) ile ifade edilen eşitsizlik kaotik davranış beklenecek bölgenin tespiti için ana



Şekil 3.8 Şekil 3.7'deki $S_1(1.07, 0.5)$ noktasına karşılık gelen parametrelerde Örnek 3.1'deki sistemin çıkışının zamana göre değişiminden bir kesit

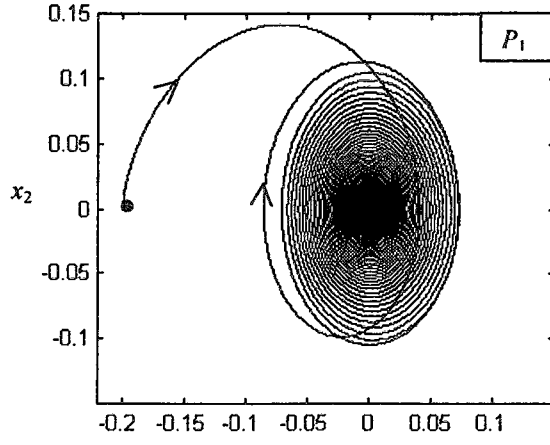
şart olmasına rağmen Şekil 3.7'de görüldüğü gibi $c \geq 2ab$, bu sistem için kaotik davranış beklenecek bölgenin belirlenmesinde yaklaşık olarak temel şart olmaktadır. Bu farklılığın sebebi limit çevrimini karakterize eden bileşenlerin GAI metodu ile hesaplanan değerlerinin, sistemin gerçek davranışı ile tam olarak örtüşmemesinden kaynaklanmaktadır. Bu durumda denklem (3.3), bu sistem için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$B \geq \eta |c - A| \quad (3.12)$$

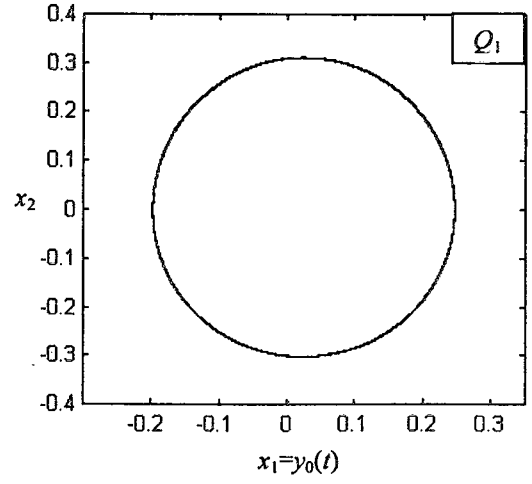
Denklem (3.12) açık bir şekilde limit çevrimi ve denge noktası arasındaki etkileşimin farklı bir şekilde olması gerektiğini göstermektedir. A , denklem (3.5)'den ve B , denklem (3.6)'dan, denklem (3.12)'de yerine yazılırsa;

$$c \geq \left(\frac{\eta^2 + 2}{2 - \eta^2} \right) ab \quad (3.13)$$

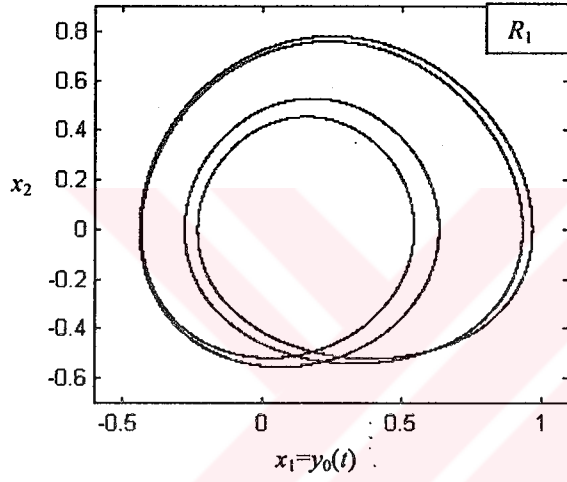
sonucu elde edilir. Burada $\left(\frac{\eta^2 + 2}{2 - \eta^2} \right) = 2$ olabilmesi için $\eta \cong 0.8$ olmalıdır. Görüldüğü gibi η değeri bire yakın bir değerdir.



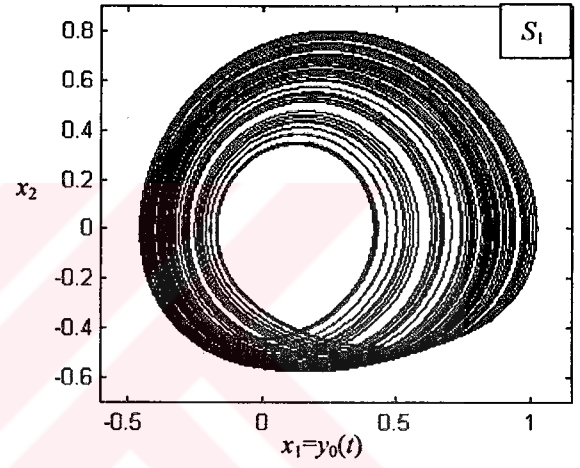
(a)



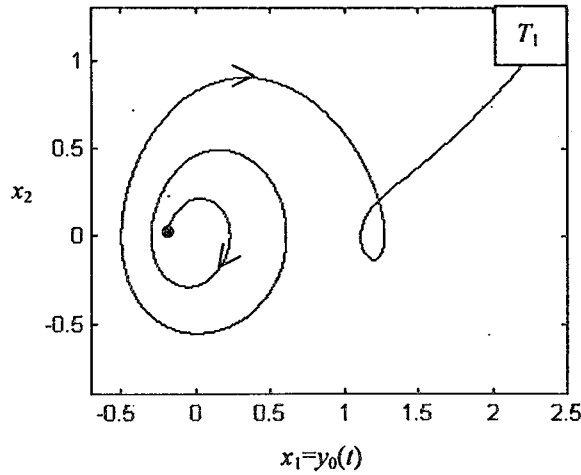
(b)



(c)



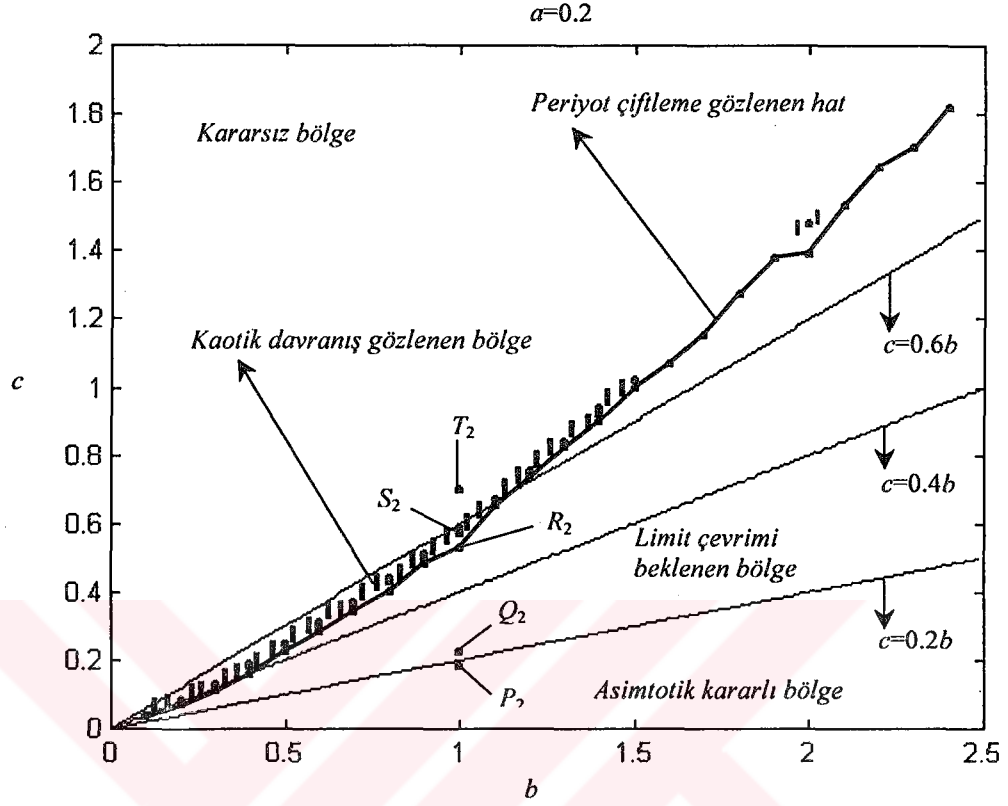
(d)



(e)

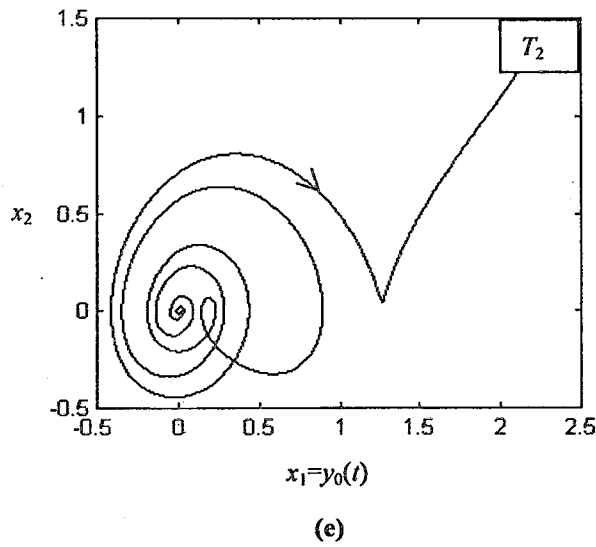
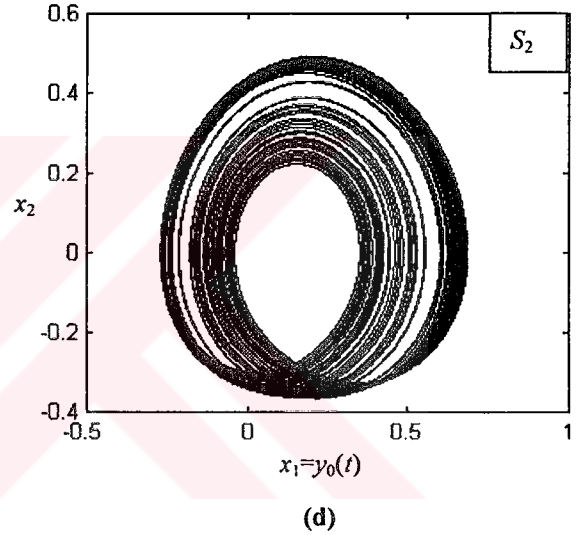
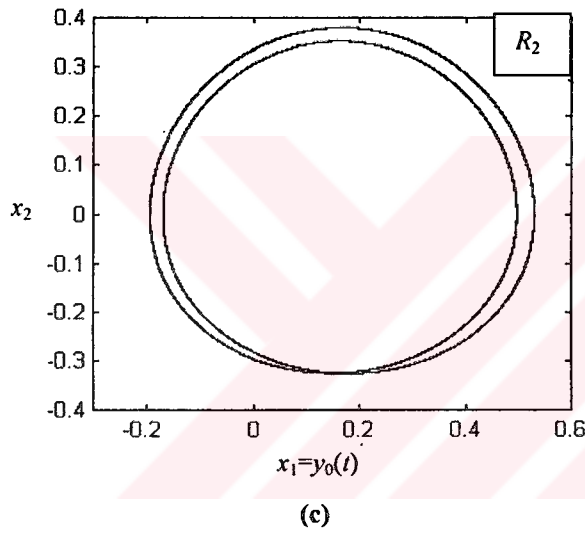
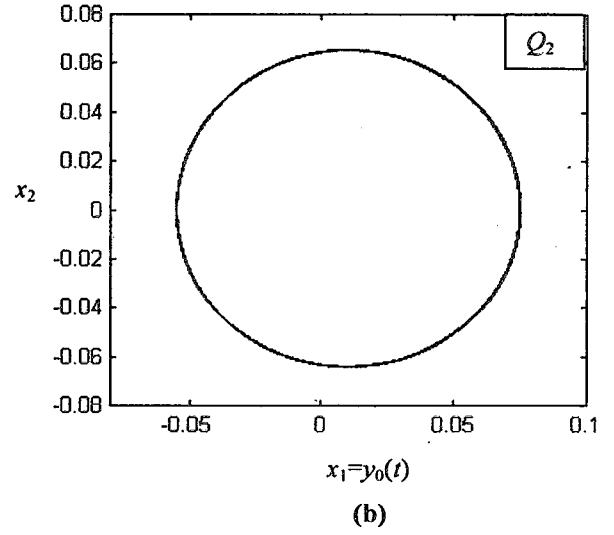
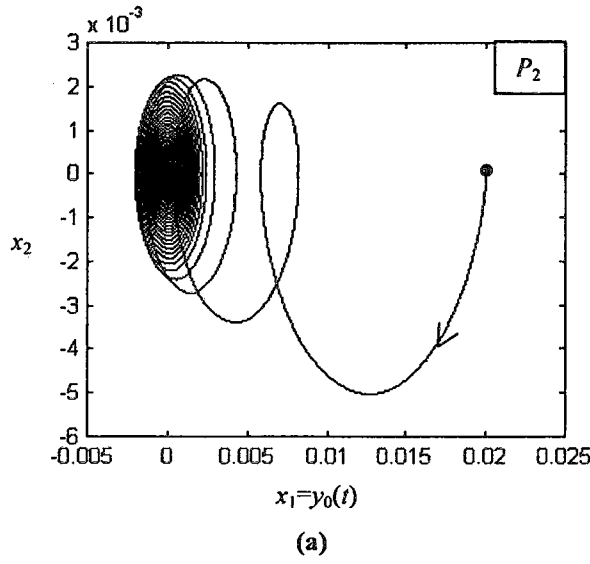
Şekil 3.9 Şekil 3.7'deki (a) Asimtotik kararlı bölgeden $P_1(2.1, 0.5)$ noktasına (b) Limit çevrim davranış beklenen bölgeden $Q_1(1.9, 0.5)$ noktasına (c) Periyot çiftleme görülen hat üzerinden $R_1(1.1, 0.5)$ noktasına (d) Kaotik davranış gözlenen bölgeden $S_1(1.07, 0.5)$ noktasına (e) Kararsız davranış beklenen bölgeden $T_1(0.95, 0.5)$ noktasına karşılık gelen sistem parametrelerinde, $x_0(-0.2, 0, 0)$ başlangıç şartı için sistemin durum uzay diyagramları

Benzer şekilde $a=0.2$ için b - c düzleminde kaotik davranış gözlenecek sistem parametreleri bölgesel olarak Şekil 3.10'da gösterilmektedir.

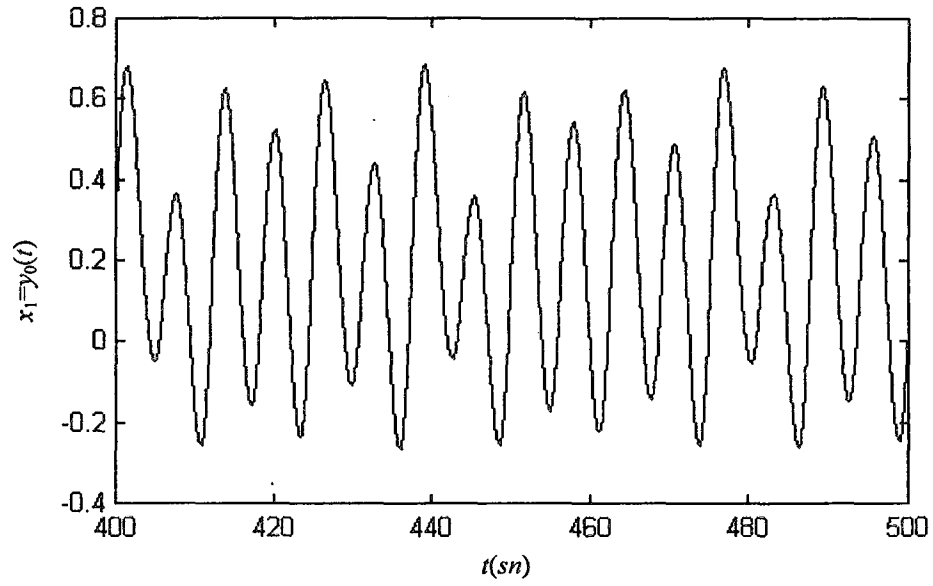


Şekil 3.10 Örnek 3.1'in $a=1$ için b - c düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve gözlemlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi

Görüldüğü gibi Şekil 3.10 elde edilirken kararlı bir limit çevriminin gerçekleşebilmesi için denklem (3.3)'den, $c \geq 0.2b$ eşitsizliği ve kaotik davranışın gerçekleşmesinde ana şart olan denklem (3.11)'den, $c \geq 0.6b$ eşitsizliğinden faydalanılmıştır. Fakat; Şekil 3.7'de ana şartın $c \geq 2ab$ olduğu görülmüştü. Bu şartın Şekil 3.10'da, $c = 0.4b$ doğrusuyla yaklaşık olarak sağlandığı görülmektedir. Şekil 3.10'da verilen P_2 , Q_2 , R_2 , S_2 ve T_2 noktalarına ait sistem parametrelerinde elde edilen durum uzay diyagramları sırasıyla Şekil 3.11(a), (b), (c), (d) ve (e)'de verilmiştir. Ayrıca Şekil 3.12'de, Şekil 3.10'da gösterilen S_2 noktasına ait sistem parametrelerinde, sistemin zamana göre değişiminden bir kesit verilmiştir.



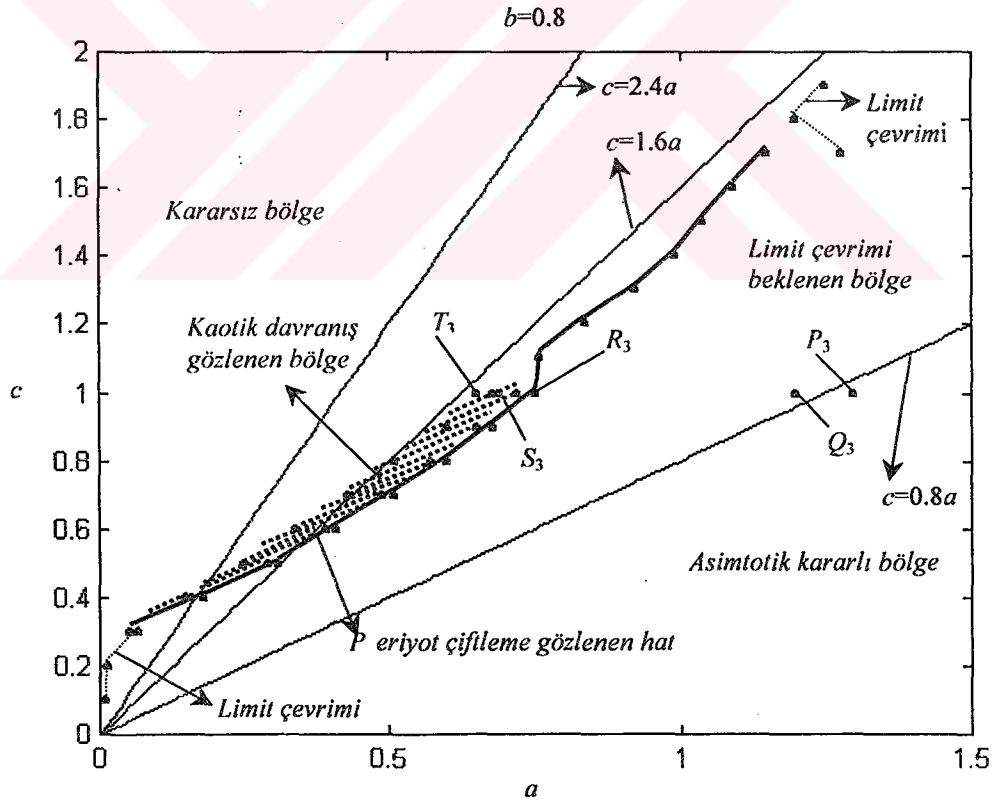
Şekil 3.11 Şekil 3.10'daki (a) Asimtotik kararlı bölgeden $P_2(1, 0.18)$ noktasına (b) Limit çevrim davranış beklenen bölgeden $Q_2(1, 0.22)$ noktasına (c) Periyot çiftleme görülen hat üzerinden $R_2(1.0.53)$ noktasına (d) Kaotik davranış gözlenen bölgeden $S_2(1, 0.58)$ noktasına (e) Kararsız davranış beklenen bölgeden $T_2(1, 0.7)$ noktasına karşılık gelen sistem parametrelerinde, $x_0(0.02, 0, 0)$ başlangıç şartı için sistemin durum uzay diyagramları



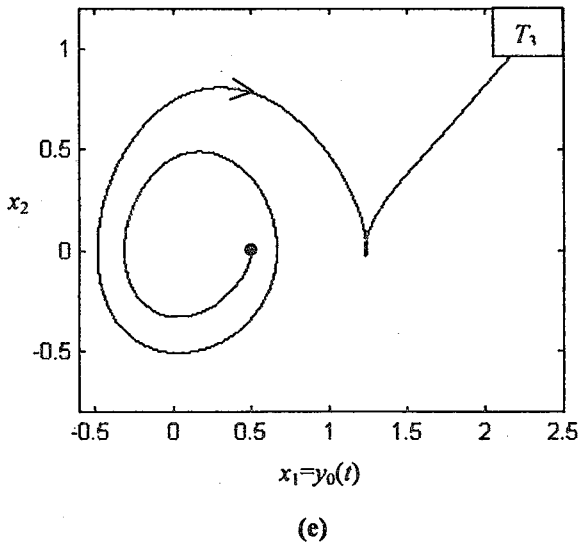
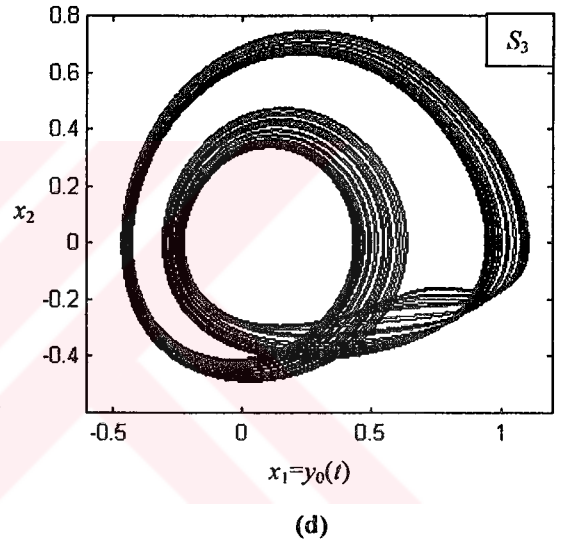
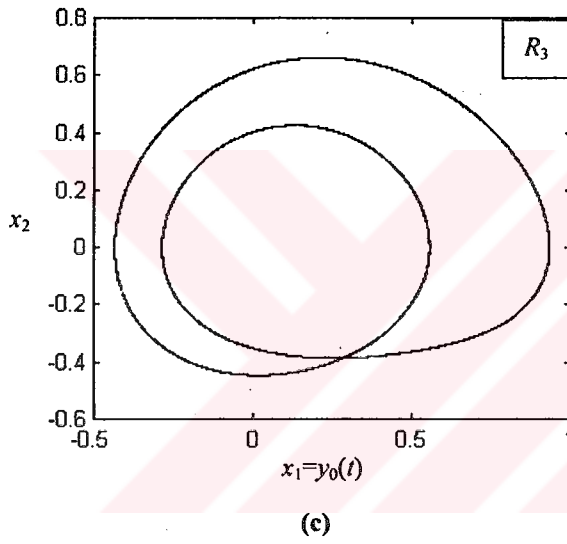
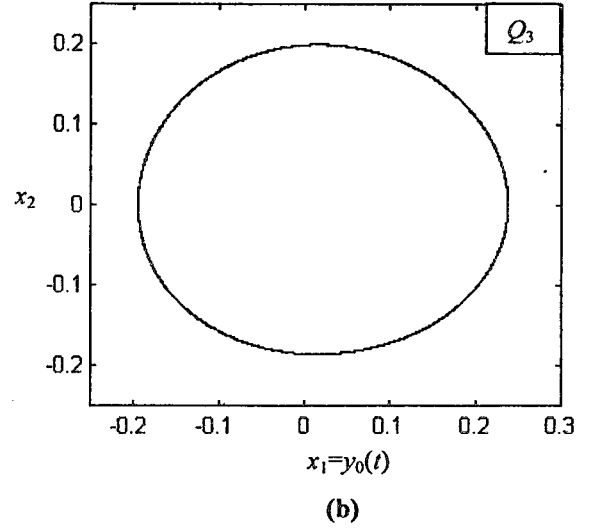
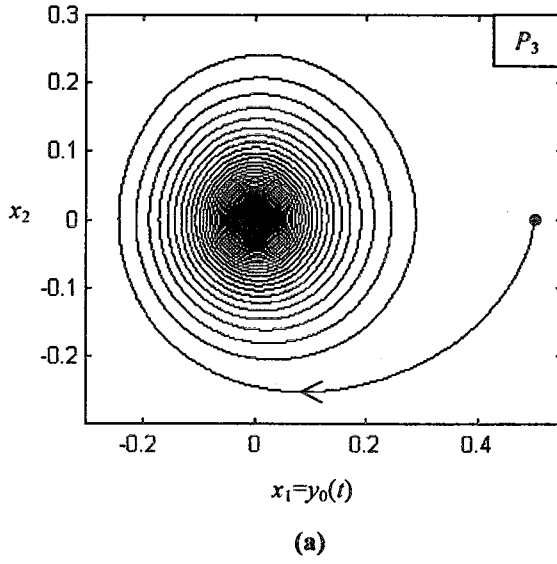
Şekil 3.12 Şekil 3.10'daki $S_2(1, 0.58)$ noktasına karşılık gelen parametrelerde Örnek 3.1'deki sistemin çıkışının zamana göre değişiminden bir kesit

Şekil 3.12'de de görüldüğü gibi sistemin çıkışındaki işaret periyodik olmayan bir değişimdir. Bu değişim S_2 noktasında sistemin kaotik davranışa sahip olduğunu göstermektedir.

Son olarak sabit $b=0.8$ alınarak a - c düzleminde kaotik bölge tespit edilmek istenirse, benzer işlem yapılarak Şekil 3.13 elde edilir.

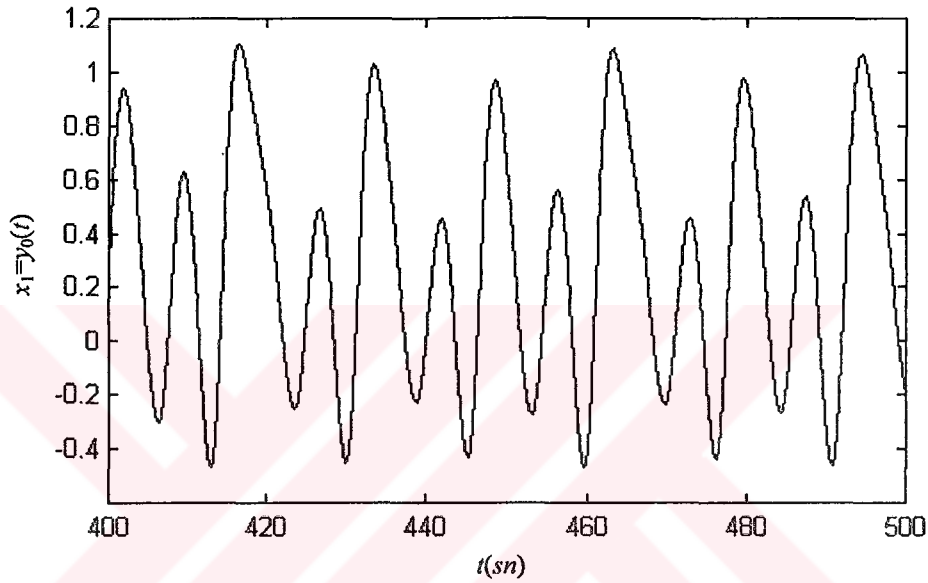


Şekil 3.13 Örnek 3.1'in $b=0.8$ için a - c düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve gözlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi



Şekil 3.14 Şekil 3.13'teki (a) Asimtotik kararlı bölgeden $P_3(1.3, 1)$ noktasına (b) Limit çevrim davranış beklenen bölgeden $Q_3(1.2, 1)$ noktasına (c) Periyot çiftleme görülen hat üzerinden $R_3(0.75, 1)$ noktasına (d) Kaotik davranış gözlenen bölgeden $S_3(0.69)$ noktasına (e) Kararsız davranış beklenen bölgeden $T_3(0.65, 1)$ noktasına karşılık gelen sistem parametrelerinde, $x_0(0.5, 0, 0)$ başlangıç şartı için sistemin durum uzay diyagramları

Şekil 3.13'te görüldüğü gibi yaklaşık olarak $c \geq 2ab$ ana şartına göre yapılan kaotik davranış tahmini, kaotik davranış gözlenen bölgeyi hemen hemen içine almıştır. Şekil 3.13'te verilen P_3 , Q_3 , R_3 , S_3 ve T_3 noktalarına ait sistem parametrelerinde elde edilen durum uzay diyagramları sırasıyla Şekil 3.14(a), (b), (c), (d) ve (e)'de verilmiştir. Şekil 3.13'te görüldüğü gibi sabit b değerinde a parametresinin değişimi yoluyla uygun filtreleme etkisi sağlanarak kaotik davranışın oluşması sağlanmıştır. Şekil 3.15'te ise Şekil 3.13'te gösterilen S_3 noktasına ait sistem parametrelerinde sistemin çıkışının zamana göre değişimi verilmiştir ve bu noktada çıkışın kaotik bir davranış gösterdiği görülmektedir.



Şekil 3.15 Şekil 3.13'deki $S_3(0.69, 1)$ noktasına karşılık gelen parametrelerde Örnek 3.1'deki sistemin çıkışının zamana göre değişiminden bir kesit

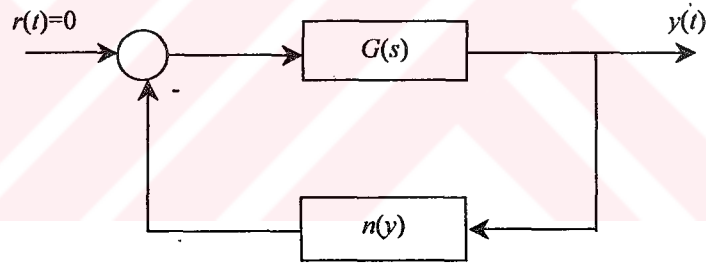
Sonuç olarak metot yaklaşık bir doğrulukla kaotik davranış beklenen sistem parametrelerinin tahmin edilmesinde etkin bir araçtır. Daha açık bir şekilde ifade edilmek istenirse metot kaotik davranışın oluşabileceği sistem parametrelerinin değişimini sonsuz bir uzaydan sonlu bir bölgeye indirgemektedir ve metoda göre kaotik davranışın beklendiği bölge, sistemin kaotik davranış gösterdiği bölgeye çok yakındır. Bölüm 4'te bu metot benzer sistemlere uygulanacaktır.

4. UYGULAMA

Bu bölümde geri beslemeli sistemlerde kaotik davranışın tahmin edilmesiyle ilgili iki örnek verilecektir. Birinci örnekte, doğrusal kısmı üçüncü dereceden , doğrusal olmayan kısmı endüstride oldukça fazla karşılaşılan kübik türünde [11,13,14] olan geri beslemeli bir sistem incelenecektir. Sistem parametrelerine bağlı olarak kaotik davranış beklenen bölgeler Bölüm 3'te verilen metot kullanılarak belirlenecek ve simülasyon sonuçları ile karşılaştırılacaktır. İkinci örnekte ise PI kontrolörle kontrol edilen, ikinci dereceden bir doğrusal sistem ve karesel tipte doğrusal olmayan bir elemandan oluşmuş geri beslemeli bir kontrol sistemi incelenecektir. Kaotik davranışın bekleneceği PI parametreleri bölgesel olarak saptanarak simülasyon sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

Örnek 4.1:

Şekil 4.1'de verilen doğrusal olmayan geri beslemeli sistemin [2] kaotik davranış göstereceği sistem parametrelerini Bölüm 3'te anlatılan yöntemle tespit edilsin.



Şekil 4.1 Doğrusal olmayan geri beslemeli sistem

Şekil 4.1'de verilen sistemde $G(s)$ denklem (4.1)'de ve $n(y)$ denklem (4.2)'deki gibidir.

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + as^2 + bs + c}, \quad a, b, c > 0 \quad (4.1)$$

$$n(y) = y^3 - dy \quad (4.2)$$

Sistemde kaotik bir davranış gözlenip gözlenemeyeceğinin anlaşılması için Bölüm 3'te anlatılan varsayım gereği öncelikle bir limit çevriminin varlığı sorgulanmalıdır. Bunun için

ÇGGAİ analiz metodu kullanılacaktır. $n(y)$ 'nin ÇGGAİ 'ni elde edilmek istenirse, denklem (2.34)'de f_3 yerine denklem (4.2)'deki ifade yazılırsa;

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) d\omega t \quad (4.3)$$

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (A + B \sin \omega t)^3 d\omega t - d \int_{-\pi}^{\pi} (A + B \sin \omega t) d\omega t \right)$$

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \left(A^3 \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\omega t \right) + 3A^2 B \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega t d\omega t \right) + 3AB^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \omega t d\omega t \right) + B^3 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \omega t d\omega t \right) - \right.$$

$$\left. dA \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\omega t \right) - dB \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega t d\omega t \right) \right)$$

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \left(A^3 (\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + 3A^2 B (-\cos \omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + 3AB^2 \left(\frac{1}{2} (\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4} (\sin 2\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + \right.$$

$$\left. B^3 \left((-\cos \omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{-\cos^3 \omega t}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) - dA (\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - dB (-\cos \omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$N_0(A, B) = \frac{1}{2\pi A} \left(A^3 (2\pi) + 3A^2 B (0) + 3AB^2 \left(\frac{1}{2} (2\pi) - \frac{1}{4} (0) \right) + B^3 ((0) - (0)) - dA (2\pi) - dB (0) \right)$$

$$N_0(A, B) = A^2 + \frac{3}{2} B^2 - d \quad (4.4)$$

elde edilir. Denklem (2.35)'de f_3 yerine denklem (4.2) kullanılarak tekrar yazılırsa;

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t + j \int_{-\pi}^{\pi} n(A + B \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t \right) \quad (4.5)$$

denklem (4.5) elde edilir. Denklem (4.2)'de verilen doğrusalsızlık tek-simetrik yapıda olduğu için çıkışında kosinüslü terim içermez. Başka bir deyişle $N_1(A, B)$ 'nin kompleks kısmı sıfırdır. Bu durumda denklem (4.5)'den denklem (4.6) elde edilir.

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (A + B \sin \omega t)^3 \sin \omega t d\omega t - d \int_{-\pi}^{\pi} (A + B \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t \right)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left(A^3 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega t d\omega t \right) + 3A^2 B \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \omega t d\omega t \right) + 3AB^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \omega t d\omega t \right) + \right.$$

$$\left. B^3 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \omega t d\omega t \right) - dA \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin \omega t d\omega t \right) - dB \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \omega t d\omega t \right) \right)$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left(A^3 (-\cos \omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + 3A^2 B \left(\frac{1}{2}(\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}(\sin 2\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + 3AB^2 ((-\cos \omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \right.$$

$$\left. \left(\frac{-\cos^3 \omega t}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + B^3 \left(\frac{1}{2}(\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}(\sin 2\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{8}(\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{16}(\sin 4\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) -$$

$$dA(-\cos \omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - dB \left(\frac{1}{2}(\omega t) - \frac{1}{4}(\sin 2\omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right))$$

$$N_1(A, B) = \frac{1}{\pi B} \left(A^3(0) + 3A^2 B \left(\frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{4}(0) \right) + 3AB^2 ((0) - (0)) + B^3 \left(\frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{4}(0) - \frac{1}{8}(2\pi) + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{16}(0) \right) - dA(0) - dB \left(\frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{4}(0) \right))$$

$$N_1(A, B) = 3A^2 + \frac{3}{4}B^2 - d \quad (4.6)$$

Limit çevriminin tespiti için denklem (4.1) ve (4.4), denklem (2.32)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\left(\frac{1}{c} \right) \left(A^2 + \frac{3}{2}B^2 - d \right) = -1 \quad (4.7)$$

$$A^2 + \frac{3}{2}B^2 = d - c \quad (4.8)$$

Denklem (4.1) ve (4.6), denklem (2.33)'te yerine yazılırsa, denklem (4.9) elde edilir.

$$\left(\frac{(c - a\omega^2) - j(b\omega - \omega^3)}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^2 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) \left(3A^2 + \frac{3}{4}B^2 - d \right) = -1 \quad (4.9)$$

Denklem (4.9)'un imajiner kısmı “ 0 ” 'a eşittir.

$$\left(\frac{b\omega - \omega^3}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^2 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{b} \quad (4.10)$$

Denklem (4.10) ile limit çevriminin frekansı bulunur. $\omega = \sqrt{b}$ için denklem (4.8)'den A çekilip denklem (4.9)'da yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{c - ab} \right) \left(3d - 3c - \frac{9}{2}B^2 + \frac{3}{4}B^2 - d \right) = -1 \quad (4.11)$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{15}(2d - 2c - ab)} \quad (4.12)$$

olarak limit çevriminin değişken bileşeni, B denklem (4.12)'deki gibi elde edilir. (4.12)'deki ifade denklem (4.8)'de yerine yazılırsa,

$$A = \pm \sqrt{\frac{1}{5}(2ab + d - c)} \quad (4.13)$$

Denklem (4.13)'teki gibi osilasyonun sabit bileşeni A elde edilir.

Sistemde limit çevriminin oluşabilmesi için denklem (4.10) ve (4.12)'nin pozitif olması gerekir. Bunun için

$$\frac{4}{15}(2d - 2c - ab) > 0$$

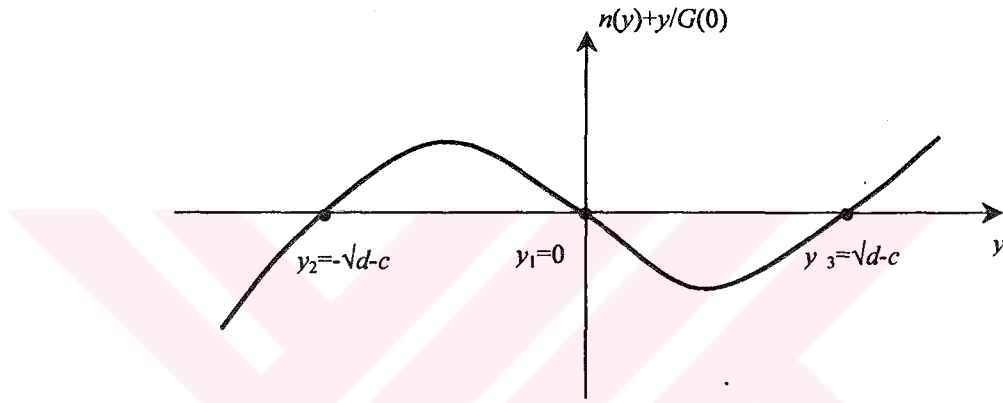
$$d > c + \frac{ab}{2} > 0 \quad (4.14)$$

şartının sağlanması gerekir. Denklem (4.14) ile tanımlanan şartlarda sistemde bir limit çevrimi vardır.

Kaotik davranışın varlığının tespiti için sistemin denge noktaları araştırılmalıdır. Bunun için denklem (3.2)'nin bu örnek için çözülmesi gerekir.

$$y + G(0)(y^3 - dy) = 0 \Rightarrow y \left(1 + \left(\frac{1}{c} \right) (y^2 - d) \right) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_{2,3} = \pm \sqrt{d - c} \quad (4.15)$$

sonuçları elde edilir. Doğrusal olmayan elemanın değişimi ve sistemin denge noktaları Şekil 4.2'de verilmiştir.



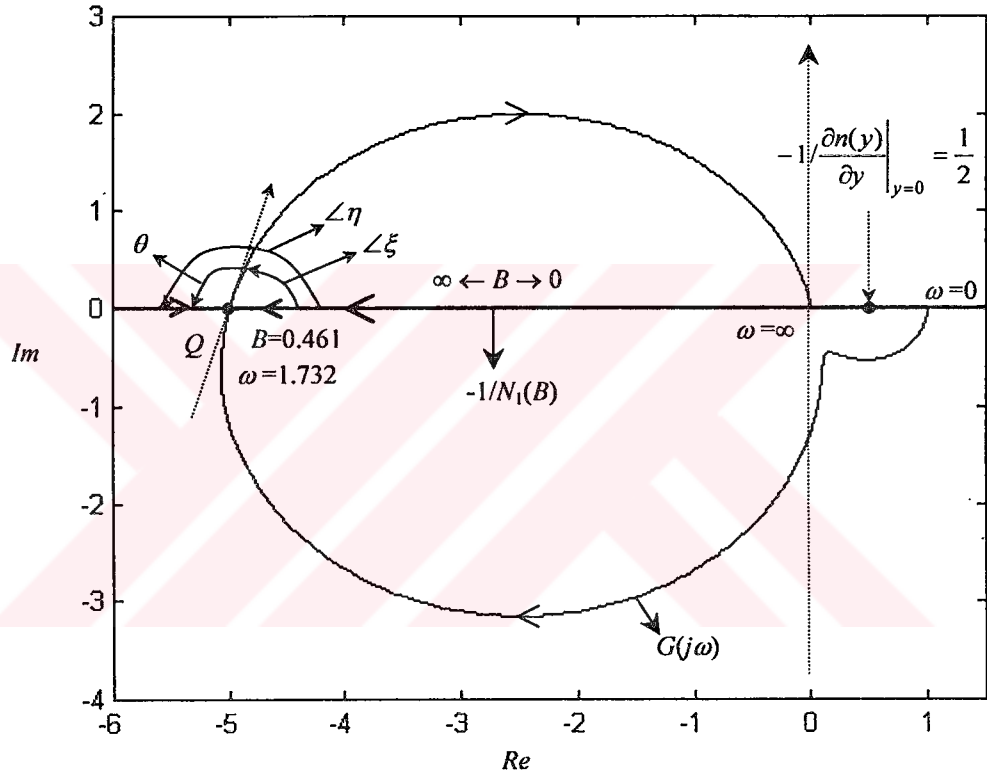
Şekil 4.2 $y + (1/c)(y^3 - dy) = 0$ ifadesinin değişimi ve denge noktaları

Limit çevrim şartı olan $a, b, c > 0$ ve denklem (4.14) sağlanacak şekilde $a=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ alınarak limit çevriminin frekansı, denklem (4.10)'dan $\omega = 1.732 \text{ rad/sn}$, değişken bileşeni denklem (4.12)'den, $B=0.461$ ve denklem (4.13)'den sabit bileşeni, $A = \pm 0.824$ olarak bulunur. Üçüncü aşama olarak hesaplanan bu limit çevriminin kararlılığı Loeb kriteri kullanılarak incelenebilir. Loeb kriterini uygulayabilmek için $N_1(A, B)$ 'nin, $N_1(A(B), B)$ şekline dönüştürülmesi gerekir. Bunun için denklem (4.8)'den A çekilip denklem (4.6)'da yerine konursa $N_1(A(B), B)$ elde edilir. Böylece denklem (4.6), denklem (4.16)'şekline dönüşür.

$$N_1(B) = 2(2) - 3(1) - \frac{15}{4} B^2$$

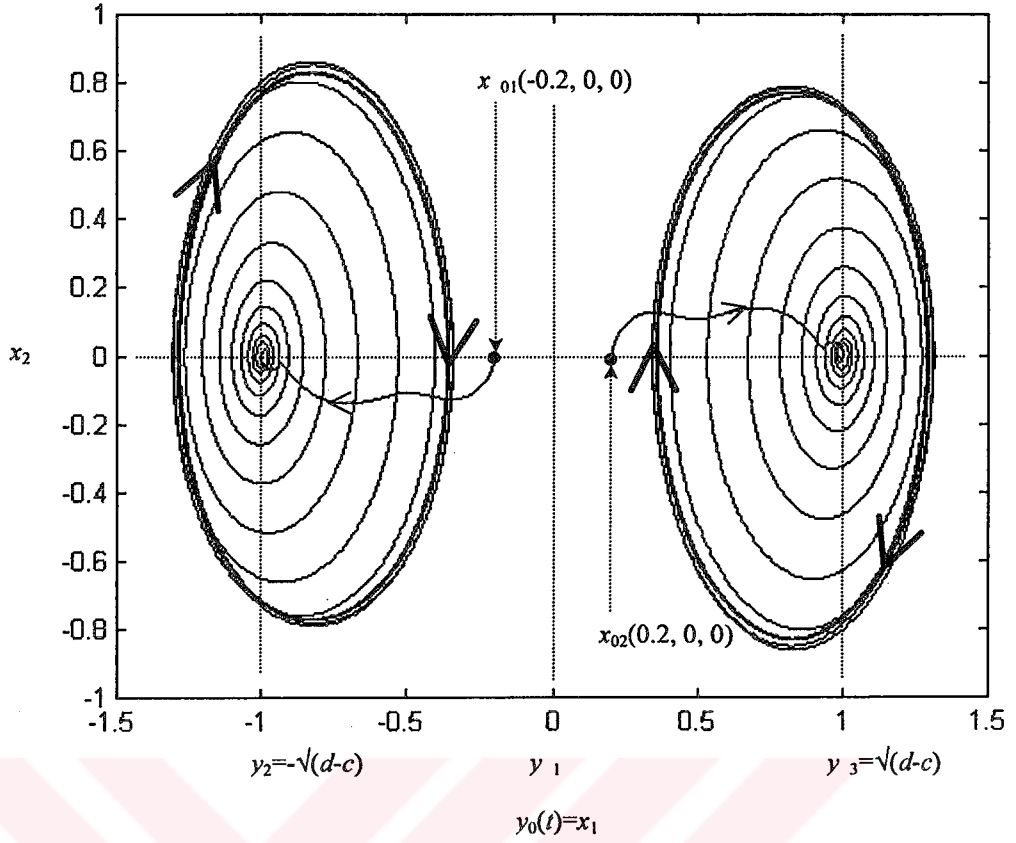
$$N_1(B) = 1 - \frac{15}{4} B^2 \quad (4.16)$$

Şekil 4.3'te $\alpha=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ için $G(j\omega)$ ve $-1/N_1(B)$ 'nin değişimi polar diyagramda verilmiştir. Bu iki değişim $\omega=0$ durumu dışında $Q(\omega,B)=(1.732, 0.461)$ noktasında kesişmektedir. Şekil 4.3'te de görüldüğü gibi $-1/N_1(B)$ 'nin Q noktasındaki pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı $\angle\eta=180^\circ$ dir. $G(j\omega)$ 'nin Q noktasındaki teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı ise $\angle\xi \cong 75.468^\circ$ olarak Matlab ortamında hesaplanmıştır. Loeb kriterine göre Q noktasındaki limit çevriminin kararlı olabilmesi için denklem (2.44)'ü sağlaması gerekir. Yani, $\theta = \angle\eta - \angle\xi = 180^\circ - 75.468^\circ = 104.532^\circ$ 'nin $0 < \theta < \pi$ olması gerekir. Seçilen parametrelere göre bu değişim sağlandığı için Q noktasında beklenen limit çevrimi kararlıdır.



Şekil 4.3 Polar diyagramda, $G(j\omega) = 1/((j\omega)^3 + 0.4(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1)$ 'nin ile $-1/N_1(B) = 4/(15B^2 - 4)$ 'ün değişimi ve $-1/\left.\frac{\partial(y^3 - dy)}{\partial y}\right|_{y=0}$ 'nin yeri

$\alpha=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ için iki farklı başlangıç şartında sistemin simülasyonu sonucunda elde edilen durum uzay diyagramları Şekil 4.4'te verilmiştir.



Şekil 4.4 $\alpha=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ için Örnek 4.1'deki sistemin x_{01} ve x_{02} başlangıç şartı için durum uzay diyagramı ve sisteme ait $y_1=0$, $y_2=-\sqrt{d-c}$ ve $y_3=\sqrt{d-c}$ denge noktaları

Şekil 4.4'ten Q noktasındaki limit çevriminin kararlı olduğu görülmektedir. Ayrıca $x_{01}(-0.2, 0, 0)$ başlangıç şartında limit çevrimi $y_2=-\sqrt{d-c}=-1$ 'deki denge noktasını içine almakta ve $x_{02}(0.2, 0, 0)$ başlangıç şartında ise limit çevrimi $y_3=\sqrt{d-c}=1$ 'deki denge noktasını içine almaktadır. Bu sonuca göre $y_1=0$ 'daki denge noktası ayrı denge noktasıdır. Bölüm 3'te anlatılan kaos varsayımına göre bu sistemin kaotik davranış gösterebilmesi için bu denge noktasının kararsız bir denge noktası olması gerekir. Bölüm 3'te anlatıldığı şekilde bu noktanın kararlılığı Nyquist kararlılık kriteri ile incelenecek olursa, $n(y)$ 'nin $y=0$ 'daki denge noktası için doğrusallaştırılmış eş değeri yardımı ile kompleks düzlemde $-1/\frac{\partial n(y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{2}$ elde edilir. Bu nokta Nyquist kararlılık kriterinde kullanılan referans noktası olan $-1+j0$ 'a karşılık gelir. Bunun için $G(j\omega)$ değişiminin bu noktayı çevreleme sayısına bakılmalıdır. Bu nokta $G(j\omega)$ değişimi tarafından saat yönünde 1 defa çevrelenmiştir ve $N=1$ dir.

Doğrusal alt sistem denklem (4.14)'ü sağlamak koşulu ile $\alpha=0.4$, $b=3$, $c=1$ ve $d=2$ olarak sistem parametreleri seçildiğinde doğrusal alt sistem $G(s)$ 'in $s_{1,2} = -0.0321 \mp j1.7255$ ve $s_3 = -0.3357$ olmak üzere tüm kökleri sol yarı s -düzleminindedir ve $P=0$ dir.

Nyquist kararlılık kriterine göre kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemindeki kutup sayısı açık çevrimli sistemin sıfırları olan $Z = P + N = 0 + 1 = 1$ 'e eşittir. Bunun anlamı kapalı çevrimli sistem, $n(y)$ 'nin $y=0$ noktasındaki eşdeğerine göre 1 kutbunun sağ yarı s -düzleminde olması sebebiyle kararsızdır. Bu sonuç aynı zamanda $y=0$ denge noktasının kararsız bir denge noktası olduğu anlamına gelir.

Sistem yörüngesi ile $y=0$ 'daki denge noktası arasında bir etkileşimin olabilmesi için denklem (3.3)'ün sağlanması gerekir. Bu sistemde $E=0$ olduğundan, denklem (4.17)'den denklem (4.18) elde edilir.

$$B \geq |A| \quad (4.17)$$

$$\left(\sqrt{\frac{4}{15}(2d - 2c - ab)} \right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{1}{5}(2ab + d - c)} \right)^2$$

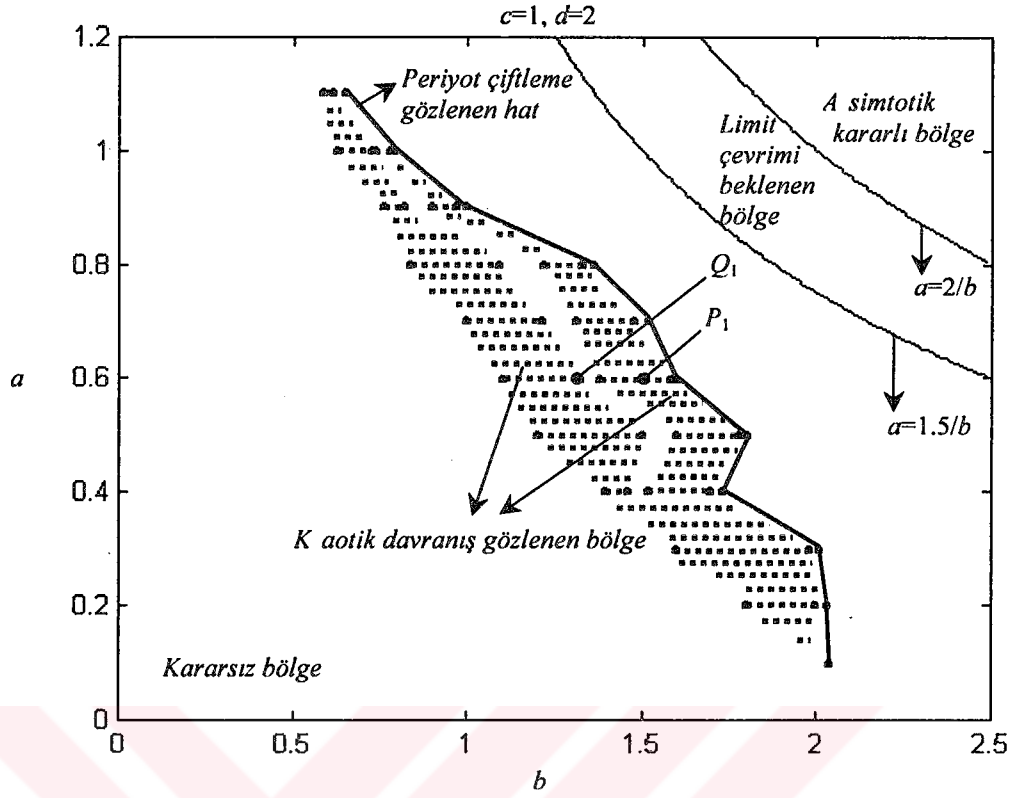
$$\frac{4}{15}(2d - 2c - ab) \geq \frac{1}{5}(2ab + d - c)$$

$$d \geq 2ab - c \quad (4.18)$$

Eşitlik (4.18)'i sağlayan sistem parametrelerinde sistem kaotik davranış gösterebilir. Burada bulunan sonucun bir tahmini sonuç olduğu her zaman gözden uzak tutulmamalıdır. Bununla beraber ileri seviyede başka bir metot kullanılmadan böyle basit bir teknik ile de kaotik davranışın varlığının belirlenmesi önemlidir.

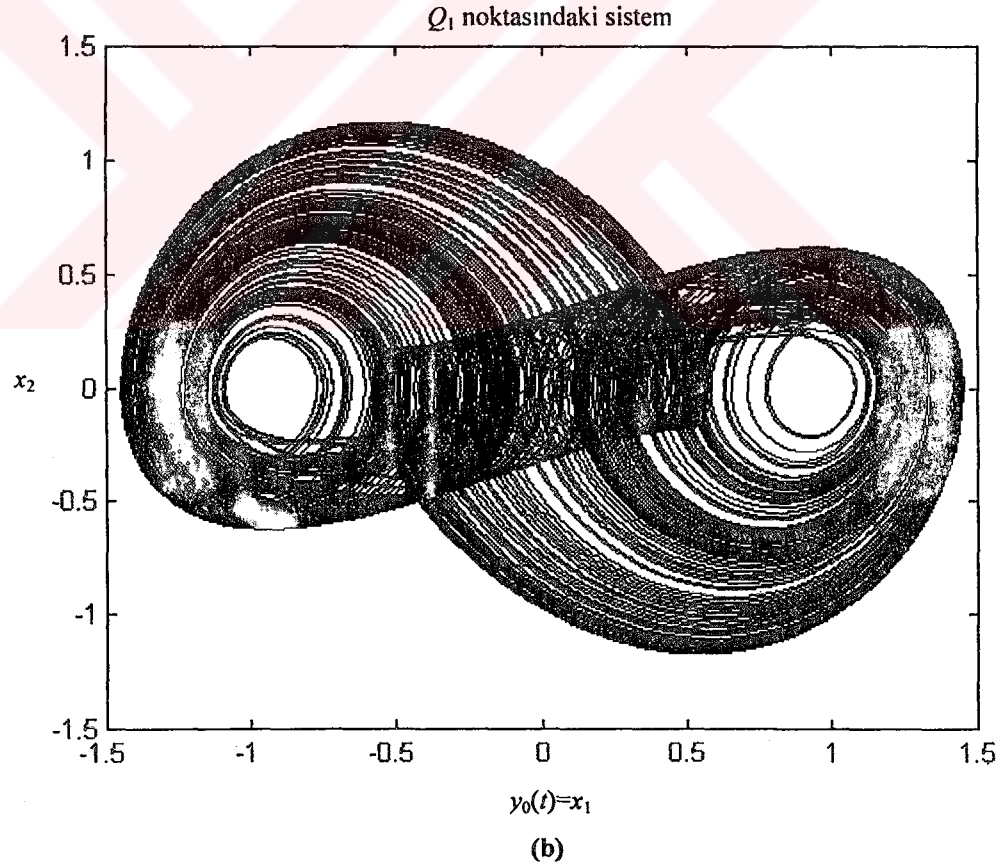
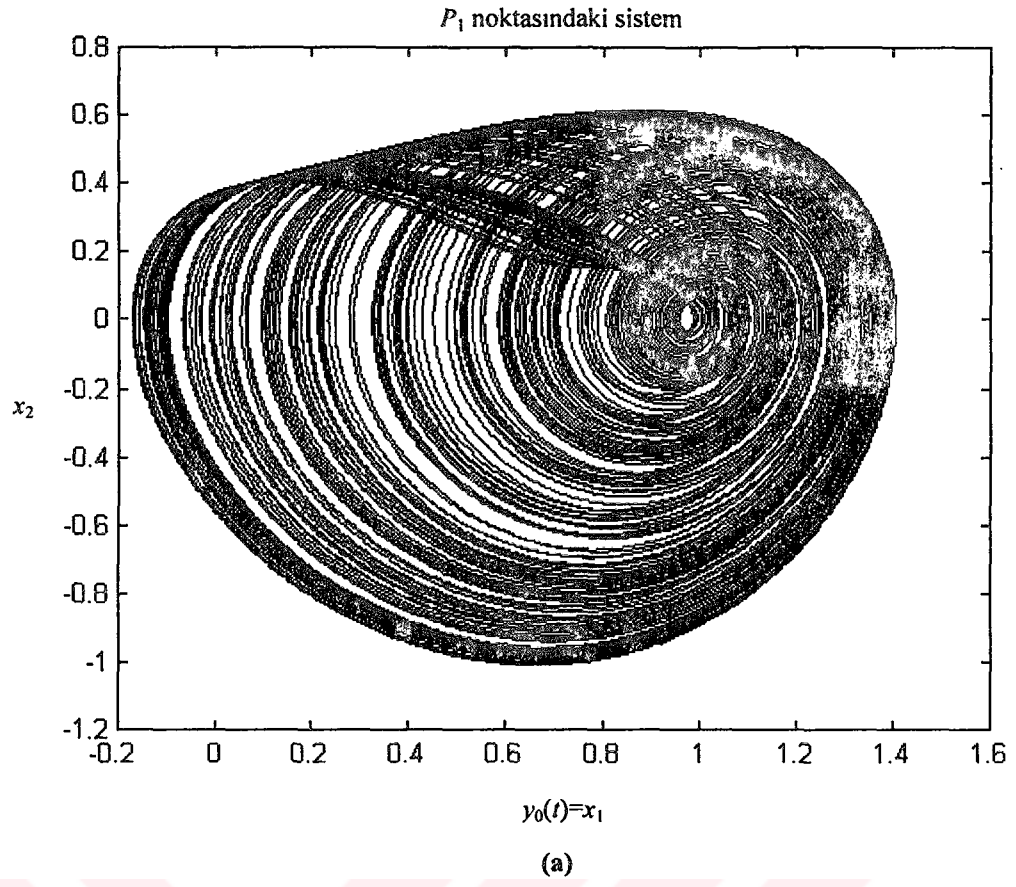
Son şart olarak sistemin uygun filtreleme etkisine sahip olması gerekir. $G(s)$ doğrusal alt sistemi Örnek 3.1'deki ile aynı olduğundan sistemde uygun filtreleme etkisi sağlanabilir.

Şekil 4.5'te $c=1$ ve $d=2$ sabit alınarak ve yukarıda verilen kaotik davranışın oluşma şartları göz önünde bulundurularak, Şekil 4.1'deki sistemin simülasyonu sonuçları gösterilmiştir. Şekil 4.5'de, kaotik davranışların beklenildiği gibi yukarıdaki şartları sağlayan sistem parametrelerinde gözlemlenmiştir. Şekil 4.5 her ne kadar sabit $c-d$ ve değişken $a-b$ sistem parametreleri için elde edilmiş ise de farklı parametreler için de elde edilebilir.

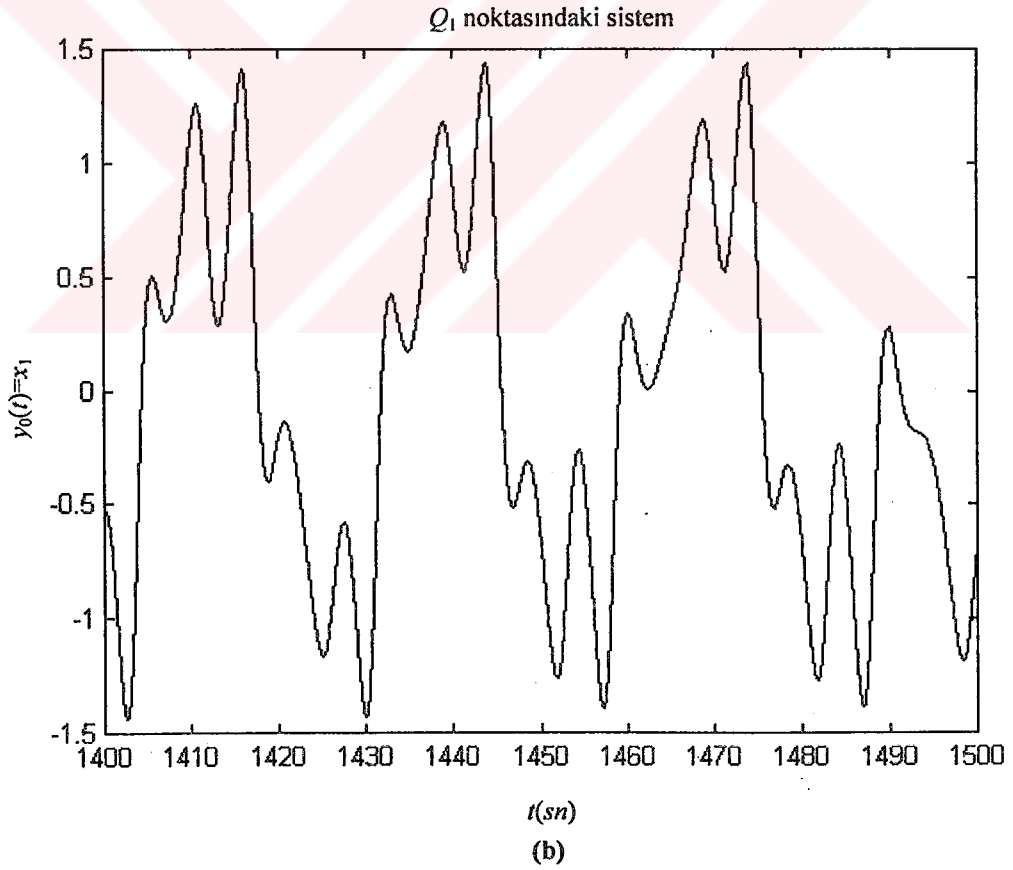
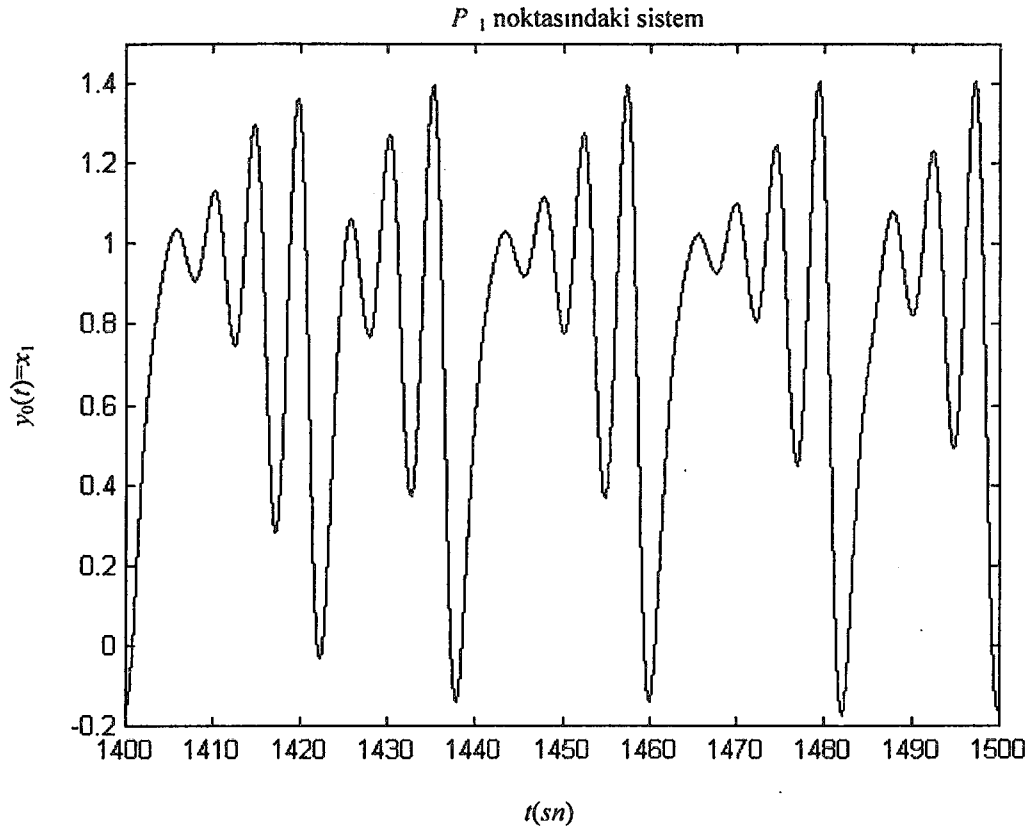


Şekil 4.5 Şekil 4.1'deki sistemin $c=1$ ve $d=2$ için b - a düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve gözlemlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi

Şekil 4.5'te $a \leq 1.5/b$ ile tanımlanan bölge kaotik davranışın oluşması için ana şart olan ayrı denge noktası ile limit çevriminin etkileşim halinde olduğu bölgedir. Bu bölgede uygun filtreleme etkisi altında kaotik davranış beklenmektedir. Şekil 4.5'te görüldüğü gibi $a \leq 1.5/b$ ile tanımlanan bölgede kaotik davranış gözlenmektedir. P_1 ve Q_1 noktalarındaki sistem parametrelerinde elde edilen durum uzay diyagramları sırasıyla Şekil 4.6(a) ve (b)'de gösterilmiştir. Ayrıca bu noktalara ait sistem parametrelerindeki sistemin zaman cevabından bir kesit sırasıyla Şekil 4.7(a) ve (b)'de gösterilmiştir.

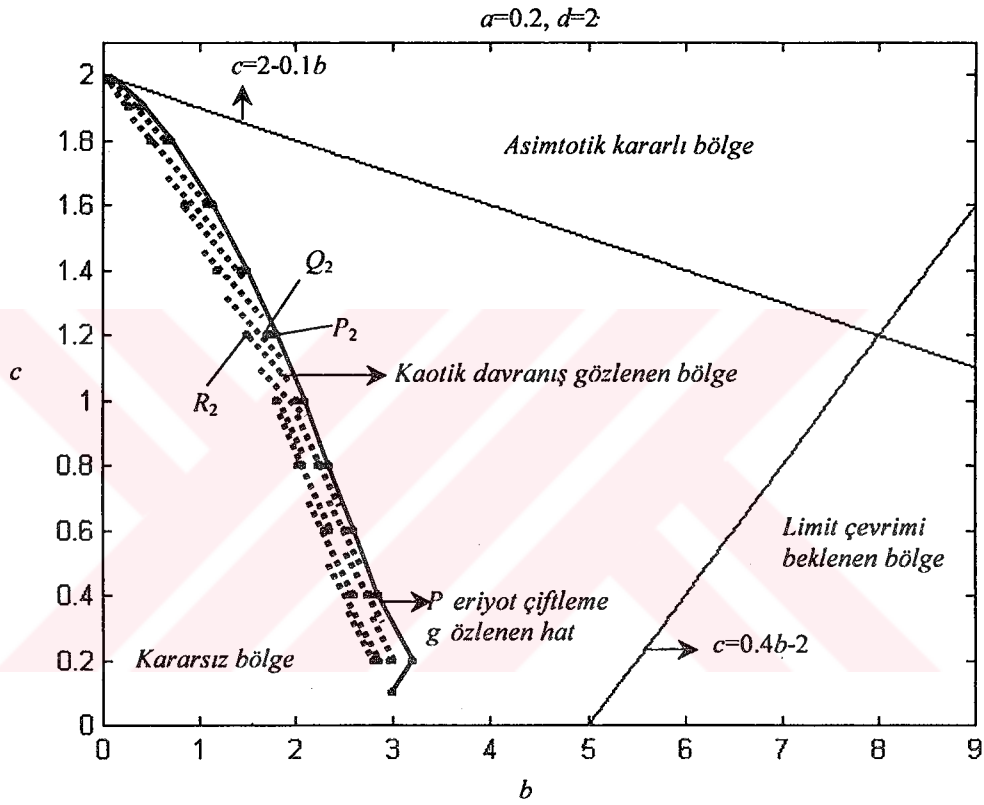


Şekil 4.6 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$ için Şekil 4.5'teki (a) $P_1(1.5, 0.6)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı (b) $Q_1(1.3, 0.6)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı

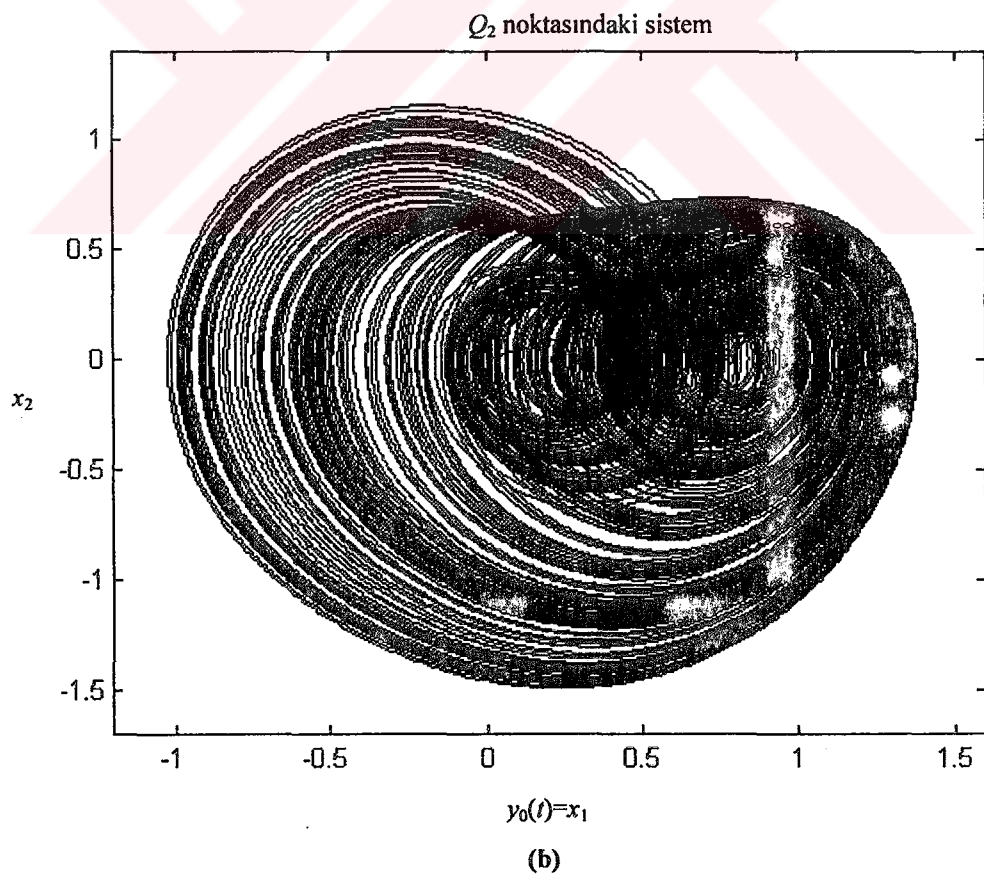
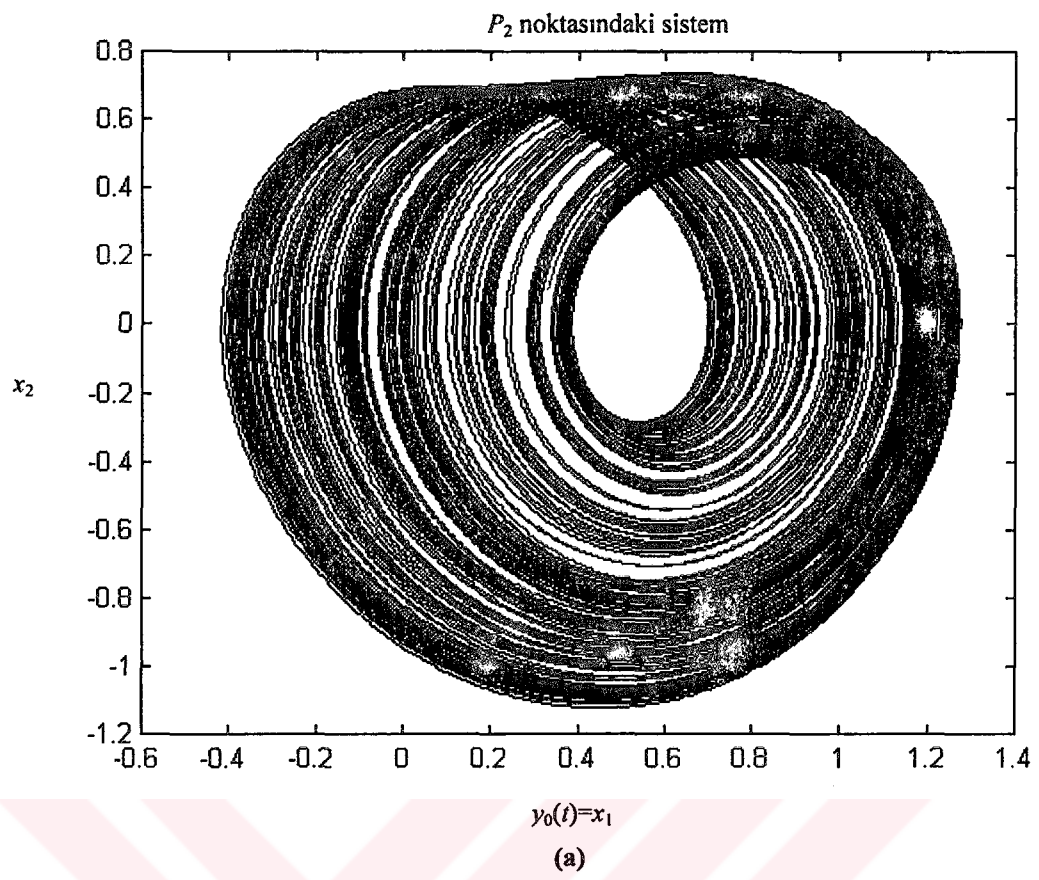


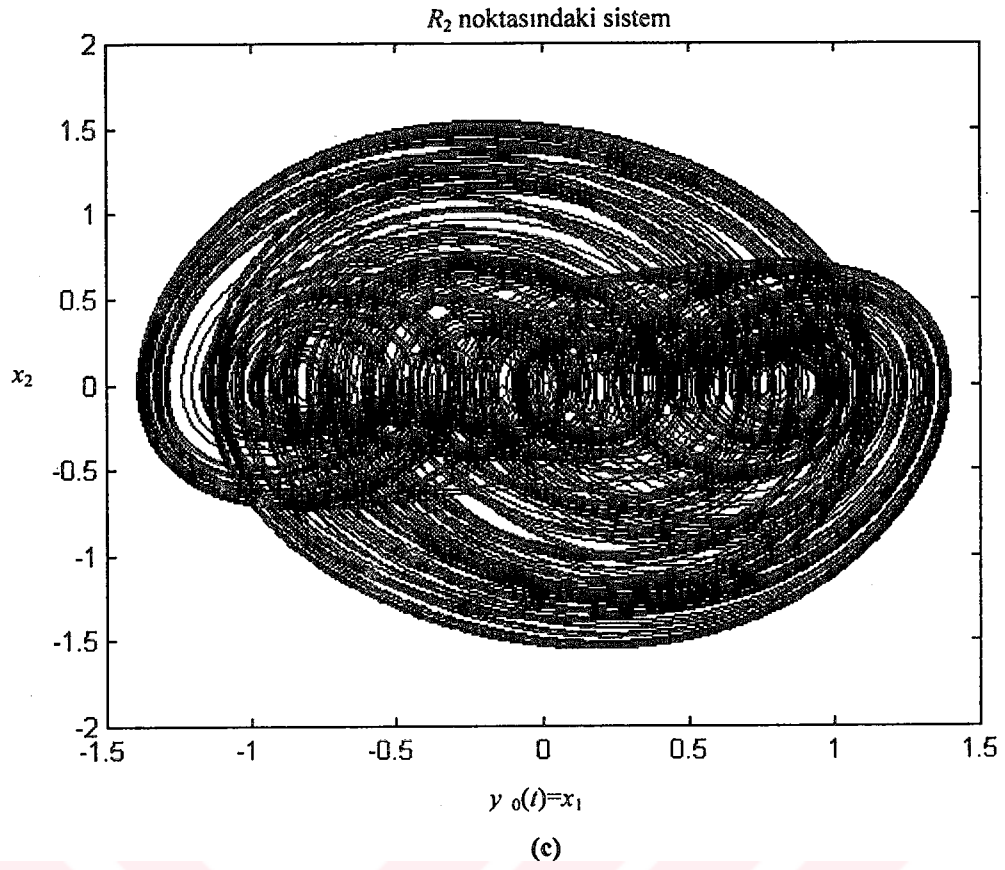
Şekil 4.7 Örnek 4.1’de verilen sistemin $x_0(2*10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $c=1$ ve $d=2$ için Şekil 4.5’teki (a) $P_1(1.5, 0.6)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit (b) $Q_1(1.3, 0.6)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit

Benzer şekilde $\alpha=0.2$ ve $d=2$ için b - c düzleminde kaotik bölge tahmini yapıp, simülasyon sonucunda kaotik davranış gözlenen bölgeler tespit edilmek istenecek olursa, limit çevrim şartı olan denklem (4.14), $c < 2 - 0.1b$ ve kaotik davranışın oluşması için ayrı denge noktası ve limit çevrimi arasındaki etkileşimi ifade eden denklem (4.18), $d \geq 0.4b - 2$ şekline dönüşür ve bu değişimler ile simülasyon sonucu kaotik davranış gözlenen bölge, Şekil 4.8'de gösterilmiştir. Ayrıca Şekil 4.8'de P_2 , Q_2 , R_2 noktalarındaki sistem parametrelerinde sistemin durum uzay diyagramı sırasıyla Şekil 4.9(a), (b), (c)'de ve sistemin bu şartlardaki zaman cevabından bir kesit sırasıyla Şekil 4.10(a), (b), (c)'de verilmiştir.

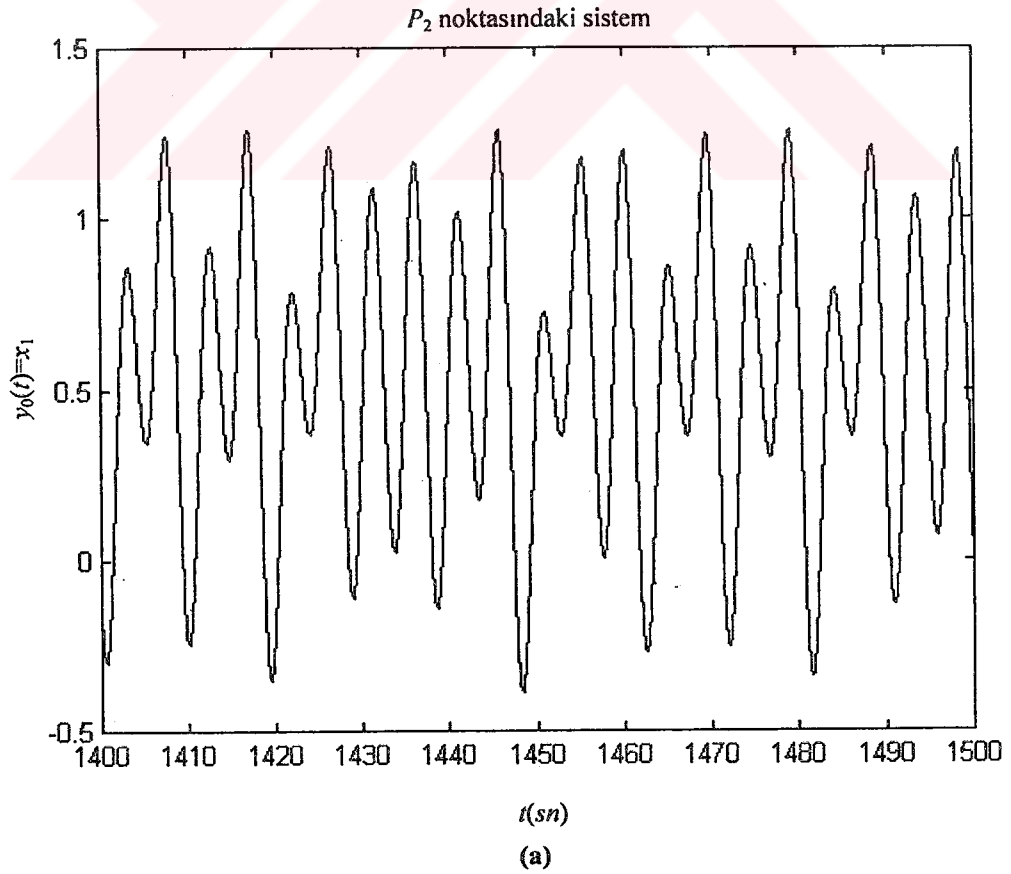


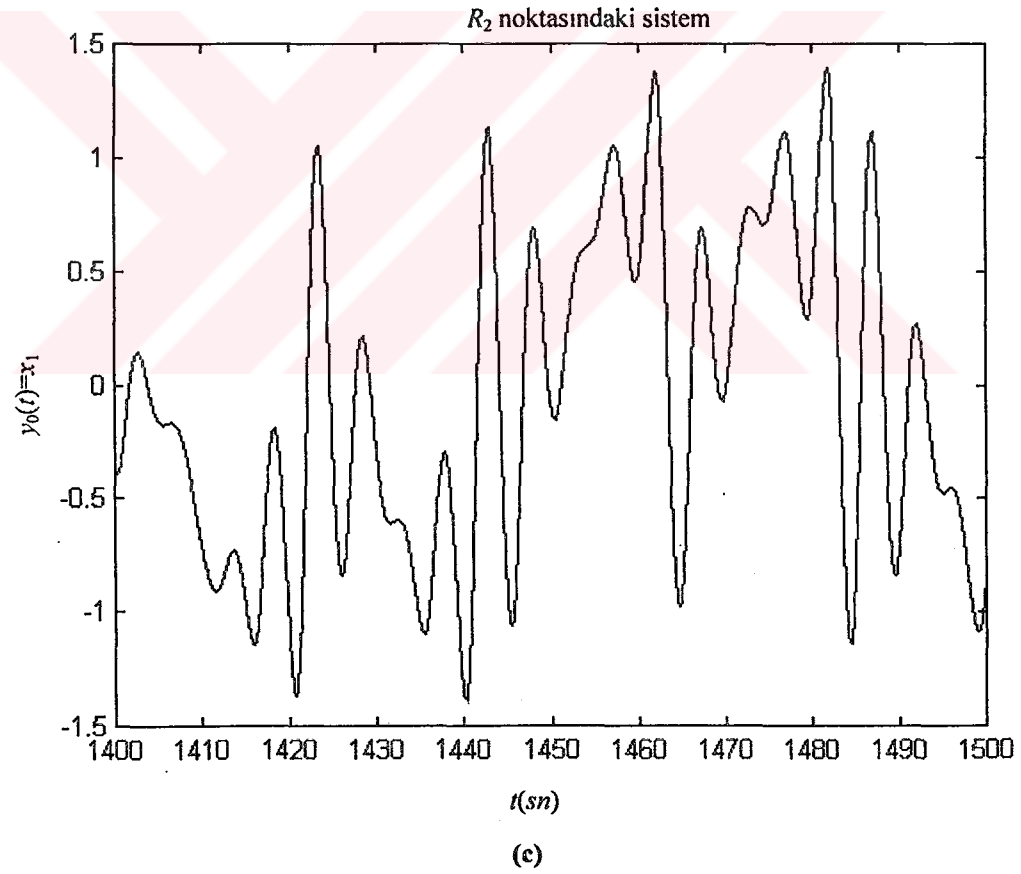
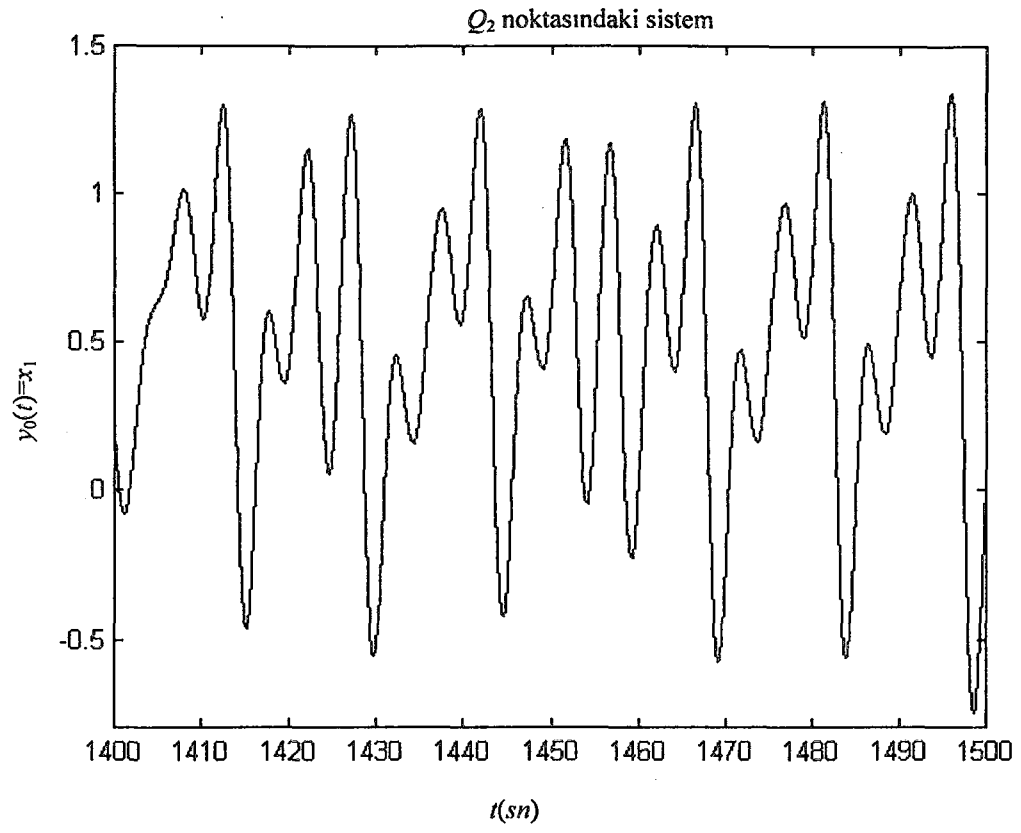
Şekil 4.8 Şekil 4.1'deki sistemin $\alpha=0.2$ ve $d=2$ için b - c düzleminde kaotik davranışın beklenildiği ve gözlemlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi





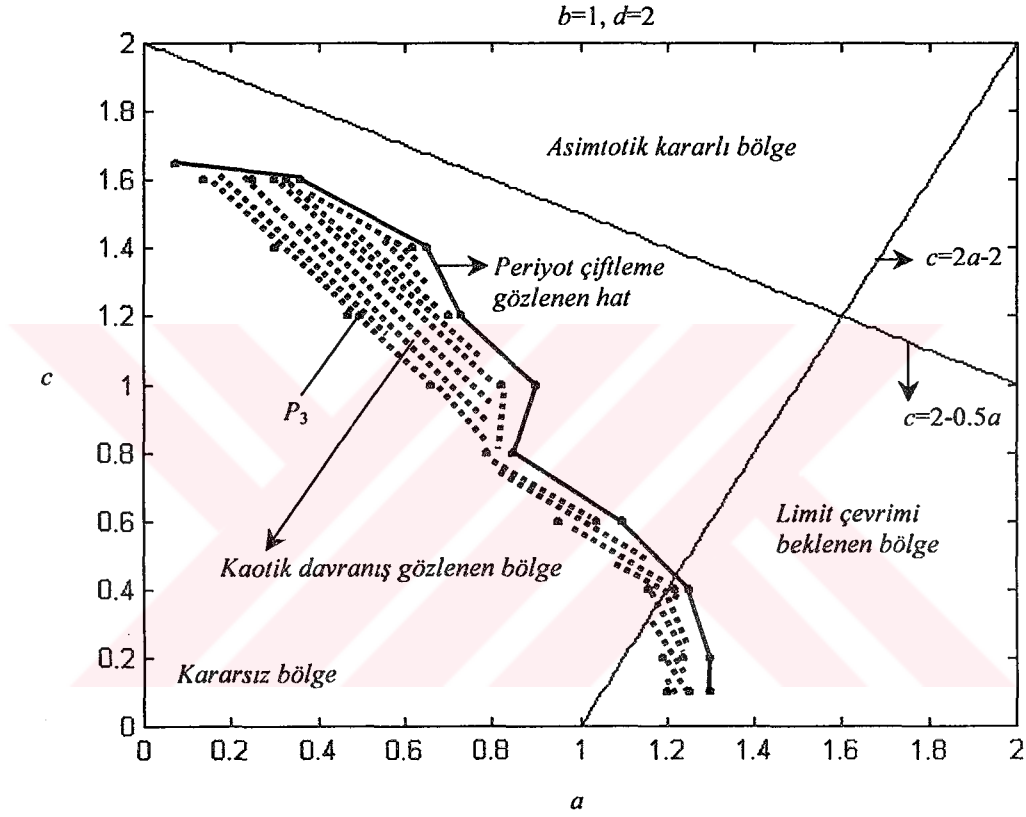
Şekil 4.9 Örnek 4.1’de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $\alpha=0.2$ ve $d=2$ için Şekil 4.8’deki (a) $P_2(1.7, 1.2)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı (b) $Q_2(1.56, 1.2)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı ve (c) $R_2(1.5, 1.2)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı



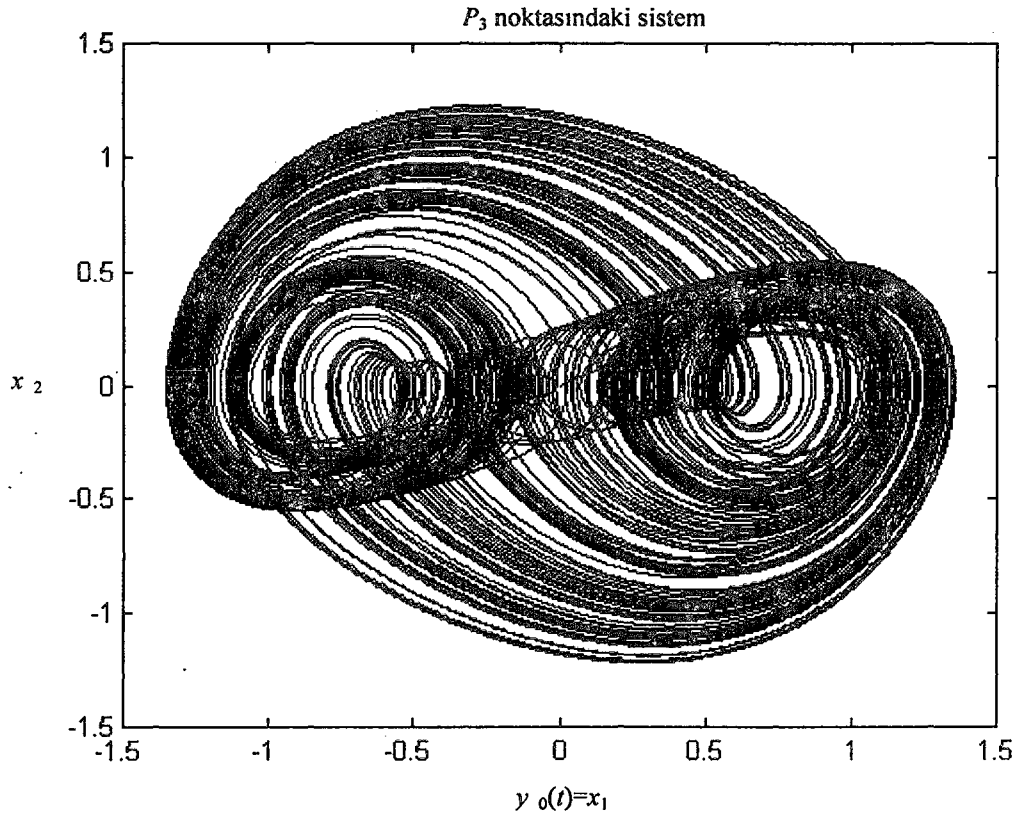


Şekil 4.10 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $a=0.2$ ve $d=2$ için Şekil 4.8'teki (a) $P_2(1.7, 1.2)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit (b) $Q_2(1.56, 1.2)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit ve (c) $R_2(1.5, 1.2)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit

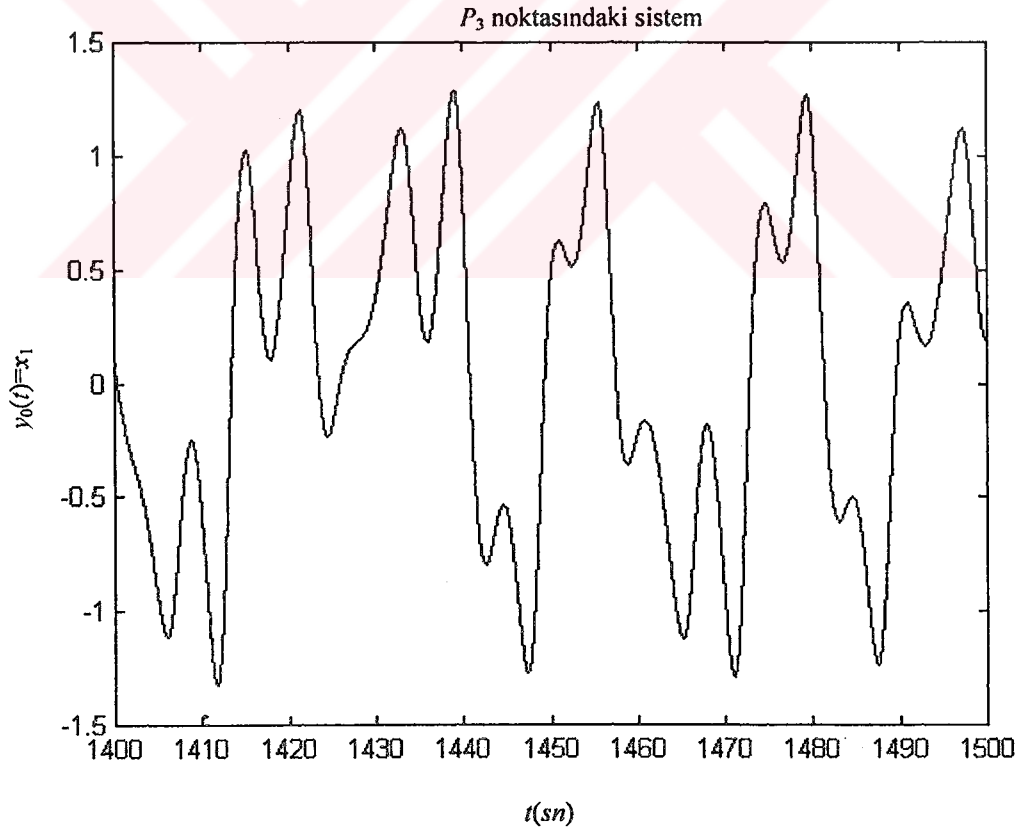
Son olarak Örnek 4.1’de $b=1$ ve $d=2$ için benzer şekilde a - c düzleminde kaotik bölge tahmini yapıp, simülasyon sonucunda kaotik davranış gözlenen bölgeler tespit edilmek istenecek olursa, limit çevrim şartı olan denklem (4.14), $c < 2 - 0.5a$ ve kaotik davranışın oluşması için ayrı denge noktası ve limit çevrimi arasındaki etkileşimi ifade eden ve kaotik davranışın oluşması ana şart olan denklem (4.18), $d \geq 2a - 2$ şekline dönüşür ve bu değişimler ile simülasyon sonucu kaotik davranış gözlenen bölge, Şekil 4.11’de gösterilmiştir. Şekil 4.11’de P_3 noktasındaki sistem parametrelerinde sistemin durum uzay diyagramı Şekil 4.12’de ve sistemin bu şartlardaki zaman cevabından bir kesit Şekil 4.13’te verilmiştir.



Şekil 4.11 Şekil 4.1’deki sistemin $b=1$ ve $d=2$ için a - c düzleminde kaotik davranışın beklenildiği ve gözlemlendiği sistem parametrelerinin bölgesel gösterimi



Şekil 4.12 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $b=1$ ve $d=2$ için Şekil 4.11'deki $P_3(0.5, 1.2)$ noktasındaki sistem parametrelerindeki durum uzay diyagramı



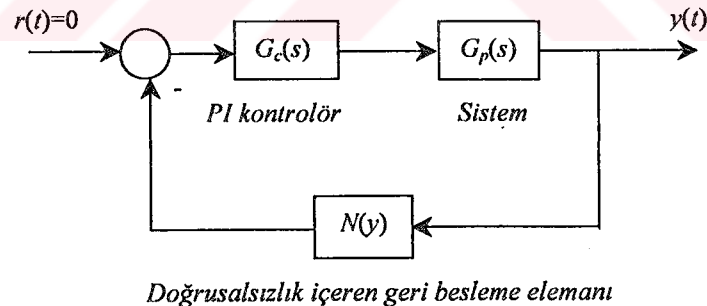
Şekil 4.13 Örnek 4.1'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-8}, 0, 0)$ başlangıç şartında $b=1$ ve $d=2$ için Şekil 4.11'deki $P_3(0.5, 1.2)$ noktasındaki sistemin zaman cevabından bir kesit

Bölüm 3'te anlatılan kaos varsayımı Örnek 4.1'e uygulandığında kaotik davranışın beklendiği bölgede veya çok yakınında kaos davranışı gözlenmiştir. Buda metodun etkinliğini göstermesi açısından önemlidir.

Örnek 4.2:

Bu bölümde Dr. UÇAR tarafından önerilen ve konvansiyonel kontrol sistemlerinde oldukça fazla karşılaşılan [15,16,17,18] Şekil 4.14'deki geri beslemeli kontrol sistemi incelenecektir. Şekil 4.14'de $G_p(s)$ ve $N(y)$ 'den oluşan endüstriyel sistem PI karakteristikli bir $G_c(s)$ kontrolör ile davranışı iyileştirilmek isteniyor. Özellikle $G_p(s)$ ve $N(y)$ 'den oluşan geri beslemeli sistemde hiçbir zaman kaotik davranış oluşmayacak şekilde seçilmiştir. Bu örnekle, burada düzenleyici olarak kullanılan PI kontrolörün eğer parametreleri uygun seçilmez ise sistem davranışının kötüleşeceği, hatta kaotik davranış göstereceği gerçeği ortaya çıkmıştır. Şekil 4.14'deki yapının dinamik davranışı Dr. UÇAR tarafından bilim çevrelerine yansıtılacağını göz önünde bulundurarak, burada Bölüm 3'teki metodun bu sistemlerde rahatlıkla uygulanabileceği gösterilmiştir.

Şekil 4.14'teki sistemde $G_c(s)$, denklem (4.19)'da verilen PI kontrolör, $a=0.26$, $b=1.4$, $c=1$ olmak üzere $G_p(s)$, denklem (4.20)'de verilen kontrol edilecek doğrusal sistem ve $N(y)$, denklem (4.21)'de verilen doğrusal olmayan eleman içeren geri beslemeli elemandır. Bu sistemin kaotik davranış göstereceği PI parametreleri Bölüm 3'te anlatılan metot kullanılarak tahmin edilsin .



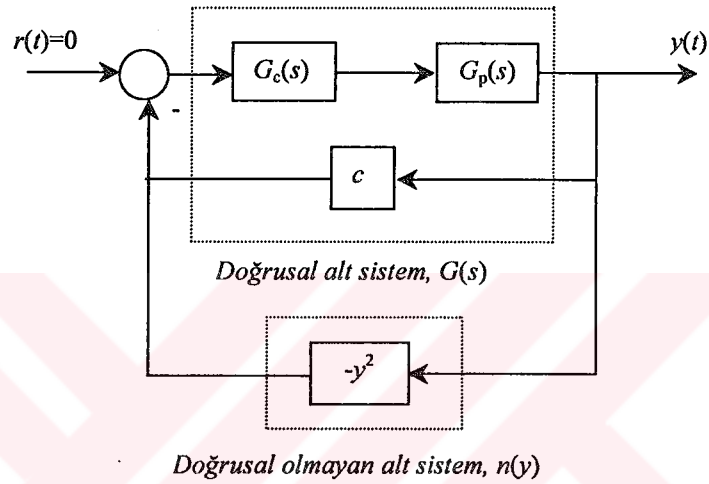
Şekil 4.14 PI kontrolörlü doğrusal olmayan geri beslemeli kontrol sistem

$$G_c(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right), \quad K, T_I > 0 \quad (4.19)$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}, \quad a, b > 0 \quad (4.20)$$

$$N(y) = cy - y^2, \quad c > 0 \quad (4.21)$$

Şekil 4.14'deki geri beslemeli kontrol sistemi, doğrusal ve doğrusal olmayan iki kısım haline çevrilmek istenirse Şekil 4.15 elde edilir.



Şekil 4.15 Şekil 4.14'deki geri beslemeli kontrol sisteminin, doğrusal ve doğrusal olmayan iki kısma ayrılmış hali

$G(s)$, doğrusal alt sistemi;

$$G(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \quad (4.22)$$

değerler denklem (4.22)'de yerine yazılırsa,

$$G(s) = \frac{K(s + \frac{1}{T_i})}{s^3 + as^2 + (b + cK)s + \frac{cK}{T_i}} \quad (4.23)$$

elde edilir. $s=j\omega$ için $G(j\omega)$ elde edilecek olursa,

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + \frac{1}{T_i})}{(j\omega)^3 + a(j\omega)^2 + (b + cK)j\omega + \frac{cK}{T_i}} \quad (4.24)$$

ifadesinden,

$$G(j\omega) = \frac{K(-\omega^4 + ((b + cK - \frac{a}{T_i})\omega^2 + \frac{cK}{T_i^2}) + jK((\frac{1}{T_i} - a)\omega^3 - \frac{b}{T_i}\omega))}{(\frac{cK}{T_i} - a\omega^2)^2 + ((b + cK)\omega - \omega^3)^2}$$

elde edilir.

Doğrusal olmayan alt sistem $n(y) = -y^2$ 'nin ÇGGAİ Bölüm 2'de denklem (2.47)'den

$$N_0(A, B) = -A - \frac{B^2}{2A} \quad \text{olarak ve denklem (2.49)'dan } N_1(A, B) = -2A \quad \text{olarak elde edilmiştir.}$$

Sistemde limit çevriminin olabilmesi için bu sisteme göre denklem (2.32) ve (2.33)'ün çözülmesi gerekir. Buna göre denklem (2.32),

$$\left(\frac{1}{c}\right)\left(-A - \frac{B^2}{2A}\right) = -1 \quad (4.26)$$

$$A + \frac{B^2}{2A} = c \quad (4.27)$$

şekline dönüşür. Denklem (2.33),

$$\left(\frac{K(-\omega^4 + (b + cK - \frac{a}{T_i})\omega^2 + \frac{cK}{T_i^2}) + jK((\frac{1}{T_i} - a)\omega^3 - \frac{b}{T_i}\omega)}{\left(\frac{cK}{T_i} - a\omega^2\right)^2 + ((b + cK)\omega - \omega^3)^2} \right) (-2A) = -1 \quad (4.28)$$

olur. Denklem (4.28)'in imajiner kısmı “0”a eşittir. Bu durumda,

$$\frac{\frac{K}{T_i}((1-aT_i)\omega^3 - b\omega)}{\left(\frac{cK}{T_i} - a\omega^2\right)^2 + ((b+cK)\omega - \omega^3)^2} = 0 \quad (4.29)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{b}{1-aT_i}} \quad (4.30)$$

sistemde limit çevriminin oluşabilmesi için $\omega > 0$ olduğundan,

$$\frac{b}{1-aT_i} > 0 \Rightarrow 1-aT_i > 0 \Rightarrow T_i < \frac{1}{a} \quad (4.31)$$

sonucu elde edilir. $G_p(s)$ sistem parametresi, $a=0.26$ için $T_i < 3.846$ şartı elde edilir. Denklem (2.28)'in reel kısmı ise “-1” e eşittir. Bu durumda,

$$\left(\frac{K(-\omega^4 + (b+cK - \frac{a}{T_i})\omega^2 + \frac{cK}{T_i^2})}{\left(\frac{cK}{T_i} - a\omega^2\right)^2 + ((b+cK)\omega - \omega^3)^2} \right) (-2A) = -1 \quad (4.32)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{cK}{T_i} - a\omega^2\right)^2 + ((b+cK)\omega - \omega^3)^2}{K(-\omega^4 + (b+cK - \frac{a}{T_i})\omega^2 + \frac{cK}{T_i^2})} \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{b}{1-aT_i}} \text{ için,}$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{cK}{T_i} - \frac{ab}{1-aT_i}\right)^2 + \frac{b}{1-aT_i} \left(b+cK - \frac{b}{1-aT_i}\right)^2}{K \left(\frac{-b^2}{(1-aT_i)^2} + \frac{ab}{T_i(1-aT_i)} + \frac{b(b+cK)}{1-aT_i} + \frac{cK}{T_i^2} \right)} \right) \quad (4.33)$$

olarak limit çevrimin sabit bileşeni, A elde edilir. Denklem (4.27)'den,

$$B = \sqrt{2cA - 2A^2}, \quad B > 0 \quad (4.34)$$

olarak ta limit çevriminin değişken bileşeni, B elde edilir. Bu durumda genlik şartı;

$$2cA - 2A^2 > 0 \Rightarrow 2A(c - A) > 0$$

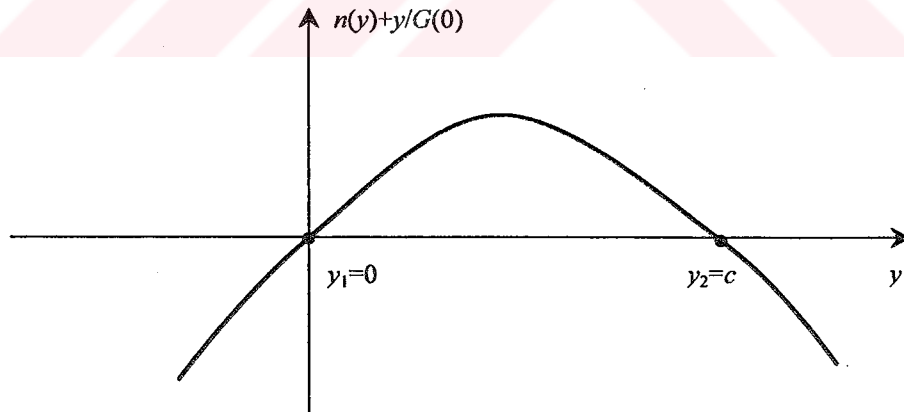
$$0 < A < c \quad (4.35)$$

olmalıdır. Örnek 4.2'de verildiği gibi $c=1$ alındığında limit çevriminin oluşması için gerekli olan genlik şartı $0 < A < 1$ şeklinde olur.

Sistemin denge noktaları tespit edilecek olursa, denklem (3.2)'de değerler yerine yazılarak çözüm elde edilir.

$$y + G(0)(-y^2) = 0 \Rightarrow y \left(1 - \frac{y}{c} \right) = 0 \quad (4.36)$$

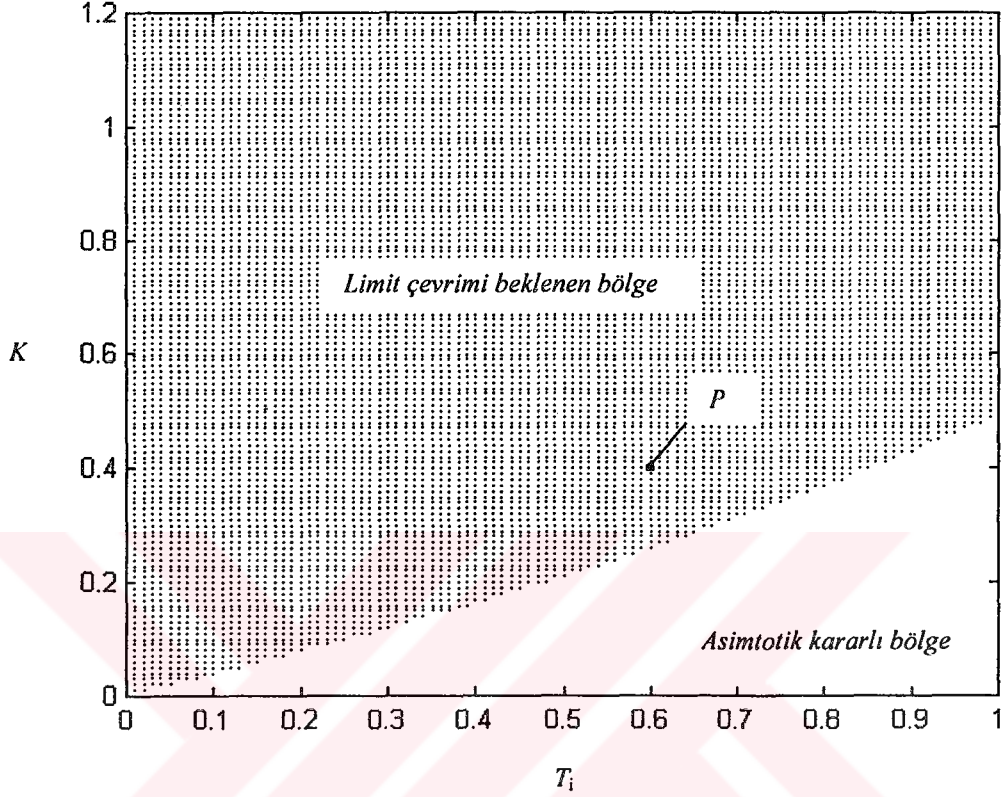
Denklem (4.36)'dan $y_1=0$ ve $y_2=c$ olarak sisteme ait iki denge noktası bulunur. Şekil 4.16'da $n(y)+y/G(0)$ fonksiyonunu sıfır yapan denge noktaları y ekseninde gösterilmiştir.



Şekil 4.16 $y+(1/c)(-y^2)=0$ ifadesinin değişimi ve denge noktaları

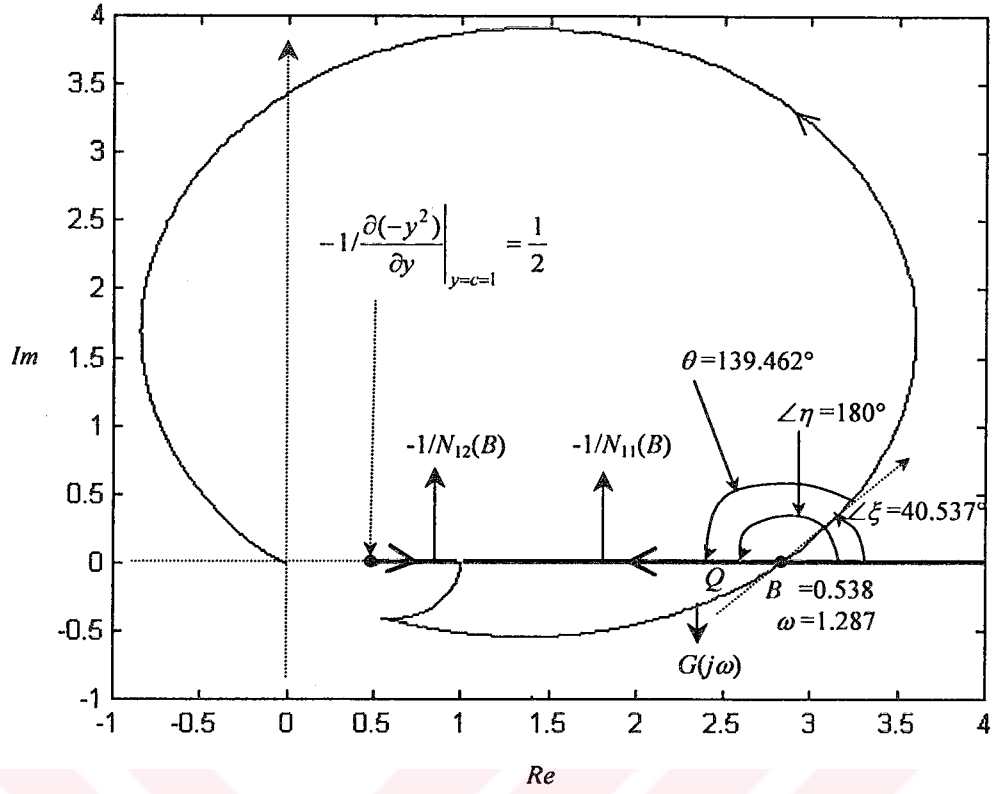
Limit çevrimi, sistemde denklem (4.30) ve (4.35) şartları sağlandığında vardır. Kaos varsayımı gereği bu limit çevriminin kararlı olması gerekir. Bunu incelemek için Örnek 4.1'de olduğu gibi Loeb kriteri uygulanacaktır. Kriteri uygulayabilmek için öncelikle limit çevrimin

var olduğu sistem parametrelerinin tespiti yapılacaktır. Şekil 4.17’de T_i - K düzleminde Örnek 4.2’de verilen a , b ve c değerleri için denklem (4.30) ve (4.35)’i sağlayan PI parametreleri bölgesel olarak gösterilmiştir.



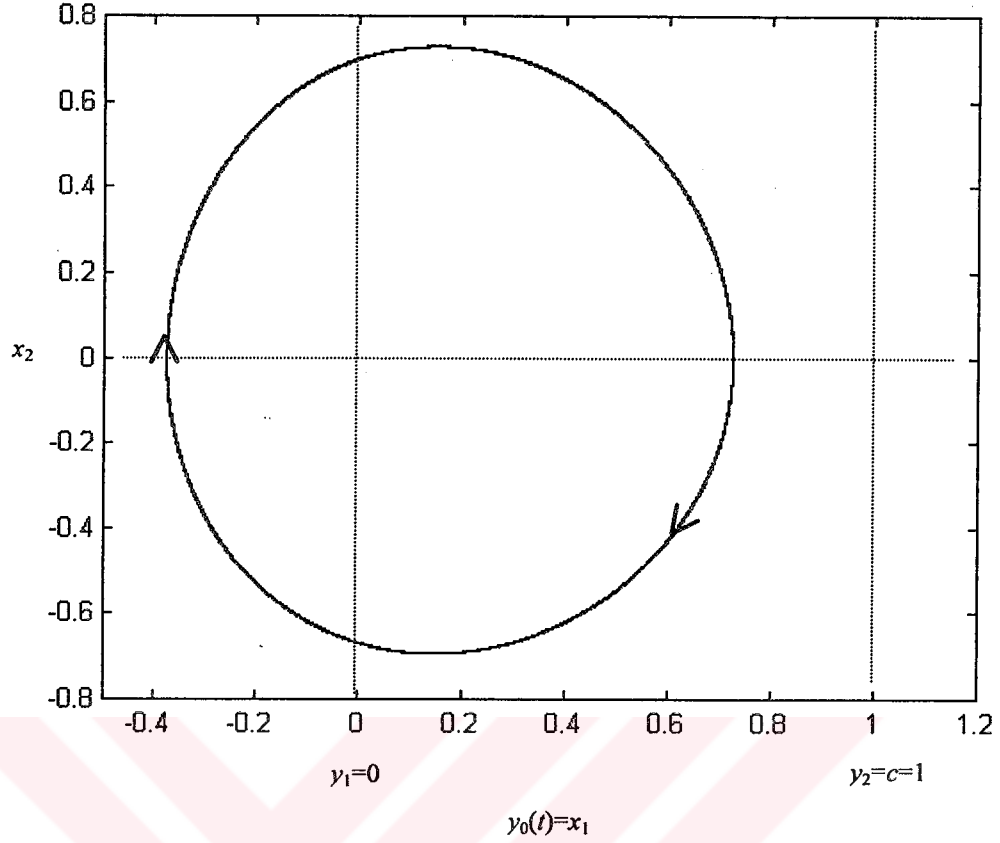
Şekil 4.17 Örnek 4.2’de verilen sistemin limit çevrim davranış göstereceği PI parametrelerinin bölgesel gösterimi.

Şekil 4.17’de $P(0.6, 0.4)$ noktasının belirlediği sistem parametrelerinde, sistemde limit çevrimi vardır ve bu osilasyonun frekansı denklem (4.30)’dan $\omega = 1.287 \text{ rad/sn}$, sabit bileşeni denklem (4.33)’den $A=0.176$ ve değişken bileşeni denklem (4.34)’den $B=0.538$ bulunur. Limit çevrimini karakterize eden bu değerler bulunduktan sonra Loeb kriterini uygulamak amacıyla $N_1(A,B)$ ifadesinin $N_1(B)$ şekline dönüştürülmesi gerekir. Bölüm 2’de $n(y) = -y^2$ için denklem (2.58)’de $N_{1(1,2)}(B) = -1 \pm \sqrt{1 - 2B^2}$ olarak elde edilmişti. Denklem (2.58)’deki ifade olan $-1/N_{1(1,2)}(B)$ ile $G(j\omega)$ ’nın değişimi Şekil 4.18’de gösterilmiştir.



Şekil 4.18 Kompleks düzlemde, $G(j\omega) = K(j\omega + 1/T_i) / ((j\omega)^3 + 0.26(j\omega)^2 + (1.4 + K)(j\omega) + K/T_i)$ nin ile $-1/N_{1(2)}(B) = 1/(1 \mp \sqrt{1 - 2B^2})$ 'nin değişimi ve $-1/\frac{\partial(-y^2)}{\partial y} \Big|_{y=c=1}$ 'nin yeri

Şekil 4.18'de verilen Q noktası, Şekil 4.17'deki P noktasına karşılık gelen sistem parametrelerinde ω , A ve B ile varlığı tespit edilen limit çevrimine karşılık gelmektedir. Loeb kriterine göre Şekil 4.18'deki Q noktasında limit çevriminin kararlı olabilmesi için $-1/N_{11}(B)$ değişiminin bu noktadan geçen teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açıdan, $G(j\omega)$ 'nin bu noktadan geçen teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açının farkının 180° 'den küçük olması gerekir. Şekil 4.18'de $-1/N_{11}(B)$ 'nin Q noktasında, pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı, $\angle\eta = 180^\circ$ dir. Benzer şekilde $G(j\omega)$ 'nin Q noktasındaki teğetin pozitif reel eksen ile yapmış olduğu açı, $\angle\xi \cong 40.537^\circ$ ve bu iki değer arasındaki fark, $\theta = 180^\circ - 40.537^\circ = 139.462^\circ < 180^\circ$ dir. Bu durumda Şekil 4.18'deki Q noktasının karakterize ettiği limit çevrimi kararlıdır. Şekil 4.19'da, Şekil 4.17'da gösterilen P noktasına karşılık gelen PI parametreleri için elde edilmiş sistemin durum uzay diyagramı verilmiştir.



Şekil 4.19 Örnek 4.2'deki sistemin Şekil 4.17'deki P noktasına karşılık gelen PI parametreleri için sistemin geçici durumu elimine edilerek elde edilen durum uzay diyagramı ve sisteme ait $y_1=0$ ve $y_2=c=1$ denge noktaları

Şekil 4.19'da görüldüğü gibi sistemde gerçekten kararlı bir limit çevrimi vardır ve limit çevrimi, $y=0$ 'daki denge noktasını içine almış olmasına rağmen $y=c=1$ 'deki denge noktasını içine almamıştır. Bu durumda $y=c=1$ 'deki denge noktası ayrı denge noktasıdır ve kararsız olması gerekir.

$y=1$ 'deki ayrı denge noktasının kararlılığı Nyquist kararlılık kriteri ile incelenebilir.

Şekil 4.18'de $n(y)$ 'nin $y=c=1$ 'de doğrusallaştırılmış halinin, $-1/\frac{\partial(-y^2)}{\partial y}\bigg|_{y=c=1} = \frac{1}{2}$, kompleks

düzlemdeki yeri gösterilmiştir. Bu nokta $G(j\omega)$ değişimi tarafından bir defa saat yönünün tersinde çevrelenmektedir, $N=-1$.

$G(s)$ 'in Şekil 4.17'deki P noktasına karşılık gelen sistem parametrelerinde açık çevrim kutup sayısı, $s_{1,2} = 0.015 \pm j1.354$ ve $s_3 = -0.362$ olmak üzere üç tanedir. Bunlardan iki tanesi sağ yarı s -düzleminde, $P=2$.

Nyquist kararlılık kriterine göre kapalı çevrimli sistemin sağ yarı s -düzlemindeki kutup sayısı, $P+N=2-1=1$ tanedir. Bu sonuca göre $y=c=1$ noktasındaki ayrı denge noktası kararsız bir denge noktasıdır.

Denklem (3.3)'te, ayrı denge noktası ve denklem (4.34) yerine yazılırsa,

$$B \geq |A - c| \quad (4.37)$$

$$\left(\sqrt{2cA - 2A^2}\right)^2 \geq (A - c)^2 \Rightarrow 2cA - 2A^2 \geq A^2 - 2cA + c^2$$

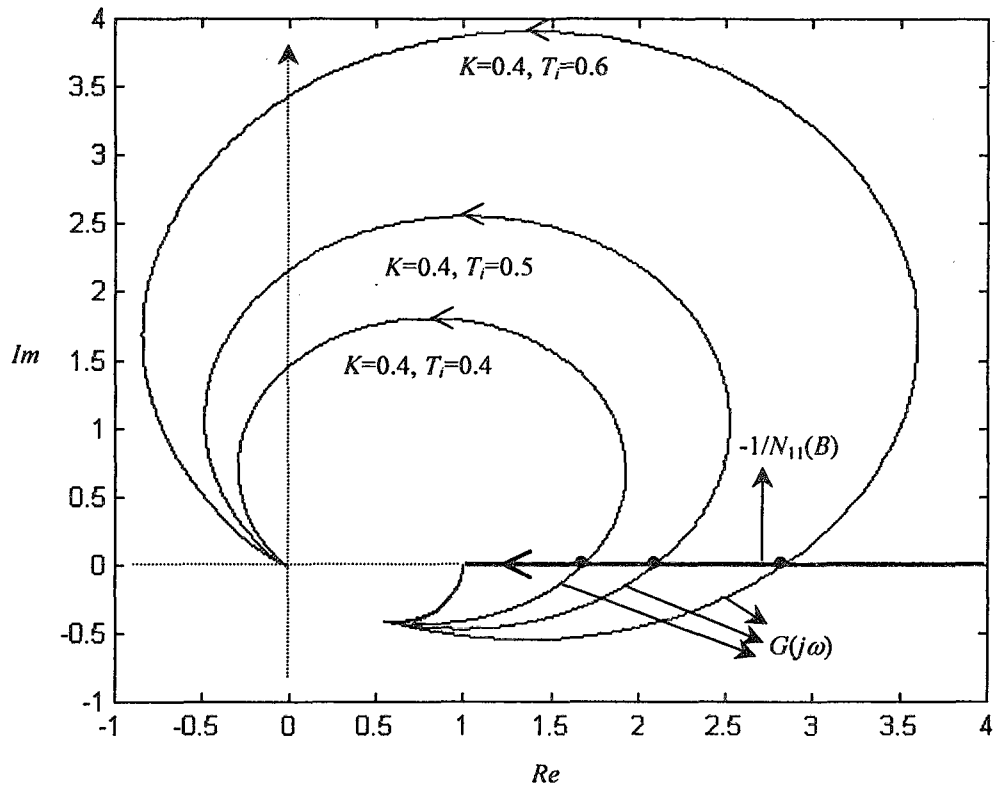
$$-3A^2 + 4cA - c^2 \geq 0 \quad (4.38)$$

sonucu elde edilir. Eşitsizlik (4.38)'i sağlayan A aralığı,

$$c/3 \leq A \leq c \quad (4.39)$$

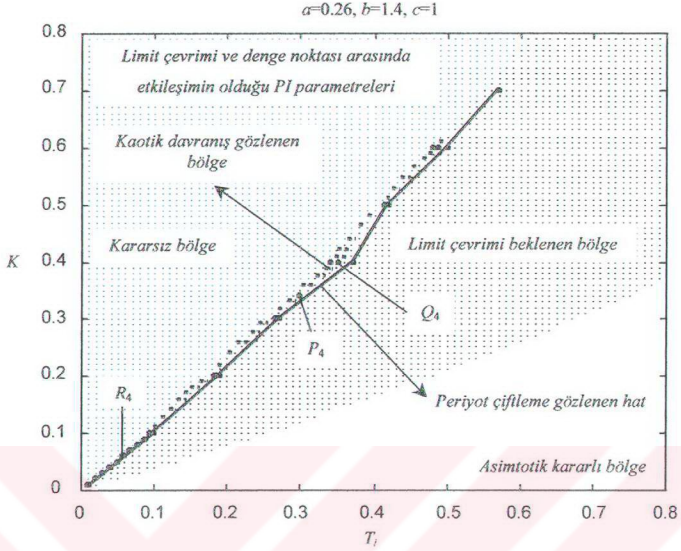
şeklindedir. $c=1$ için bu aralık $1/3 \leq A \leq 1$ dir.

Son olarak kaotik davranışın beklenebilmesi için sistemde uygun filtreleme etkisinin sağlanması gerekir. Bu şartlar altında, ayrı denge noktası ile limit çevriminin etkileşim halinde olduğu sistem parametrelerinde kaotik davranış beklenecektir. Şekil 4.20'de, denklem (4.35) sağlanacak şekilde $K=0.4$ sabit alınarak $T_i=0.4, 0.5$ ve 0.6 değerleri için denklem (4.23) ile ifade edilen ve Şekil 4.15'te verilen $G(s)$ doğrusal alt sisteminin polar diyagramları ile $-1/N_{11}(B) = 1/(1 - \sqrt{1 - 2B^2})$ ifadesinin değişimi gösterilmiştir. Bu iki değişimin kesiştiği noktalarda kararlı bir limit çevrimi vardır. Ayrıca iki kesişim arasındaki açı 90° 'ye ne kadar yaklaşırsa sistemdeki filtreleme etkisinin de o kadar arttığı Bölüm 2'de anlatılmıştı. Şekil 4.20'ye bakıldığında sabit K için T_i arttıkça $G(j\omega)$ ile $-1/N_{11}(B)$ 'nin kesişme açıları 90° 'den uzaklaşır. Buna göre T_i arttıkça filtreleme etkisi azalacaktır.



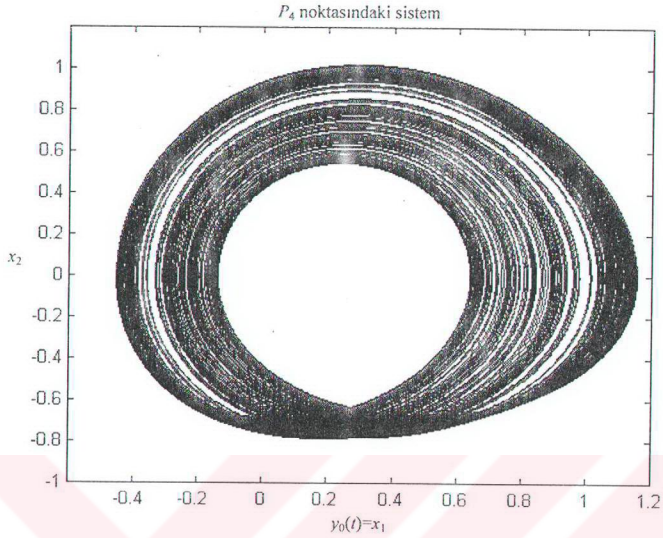
Şekil 4.20 Farklı T_i değerleri için $G(j\omega) = K(j\omega + 1/T_i) / ((j\omega)^3 + 0.26(j\omega)^2 + (1.4 + K)(j\omega) + K/T_i)$ ile $-1/N_{11}(B) = 1/(1 \mp \sqrt{1 - 2B^2})$ 'nin kompleks düzlemdeki değişimi

Böylece sistemde kaotik davranışın beklenmesi için tüm şartlar sağlanmıştır. Uygun filtreleme etkisi altında limit çevrimi ile ayrı denge noktası etkileşime girdiği zaman kaotik davranış beklenecektir. Şekil 4.21'de T_i - K düzleminde mavi noktalarla belirtilen bölge denklem (4.39)'u sağlayan limit çevrimi ile denge noktası arasında etkileşimin olduğu PI parametrelerini göstermektedir. Küçük siyah noktalar ise denklem (4.35)'i sağlayan, limit çevrimin beklendiği bölgeyi göstermektedir.

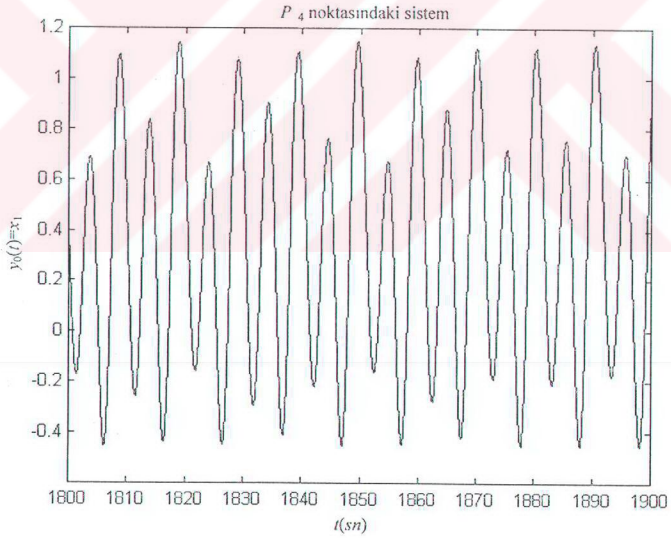


Şekil 4.21 Şekil 4.15'deki sistemin $a=0.26, b=1.4$ ve $c=1$ için PI parametreleri olan T_i - K düzleminde kaotik davranışın beklendiği ve gözlemlendiği parametrelerin bölgesel gösterimi

Şekil 4.21'de görüldüğü gibi limit çevrimi ile denge noktası arasında etkileşimin başladığı noktalarda kaotik davranış gözlenmiştir. Kaotik davranış gözlenen bölgeden P_4, Q_4 ve R_4 noktalarındaki PI parametrelerinde sistemin durum uzay diyagramı ve çıkışındaki işaretin zamana göre değişiminden bir kesit sırasıyla Şekil 4.22(a),(b), 4.23(a),(b) ve 4.24(a),(b)'de verilmiştir. Örnek 4.2'de verilen sistemdeki PI kontrolör yardımıyla sistem istenildiğinde kaotik bölgeye sokulup çıkartılabilir.

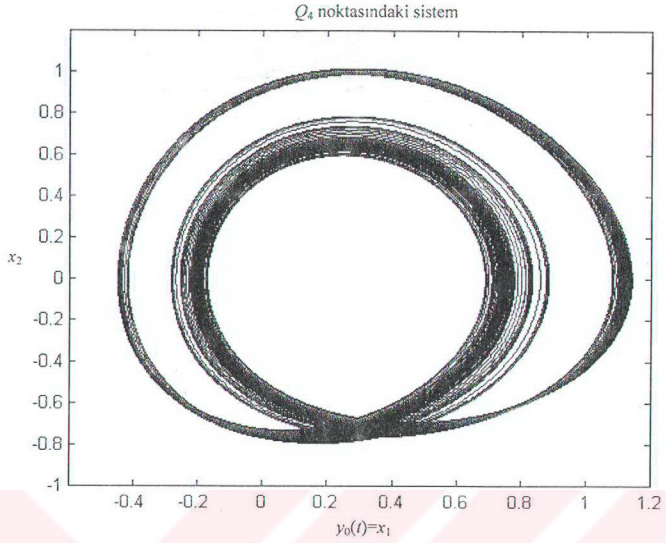


(a)

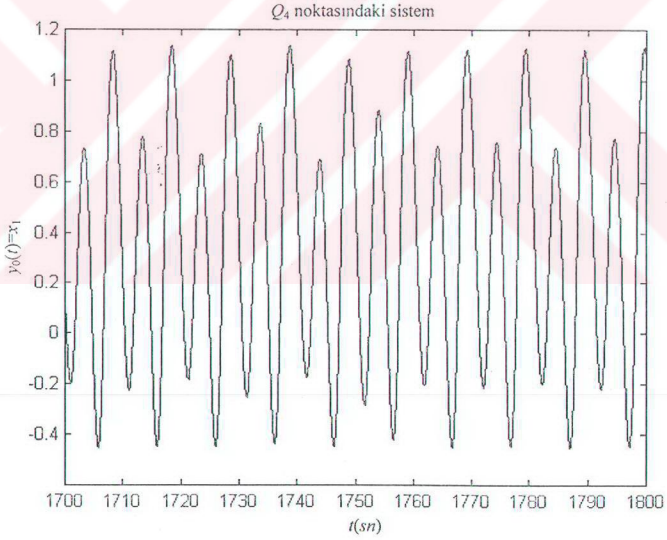


(b)

Şekil 4.22 Örnek 4.2'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-10}, 0, 0)$ başlangıç şartında Şekil 4.21'deki $P_4(0.3, 0.34)$ noktasındaki PI parametrelerindeki sistemin: (a) Durum uzay diyagramı (b) Zaman cevabından bir kesit

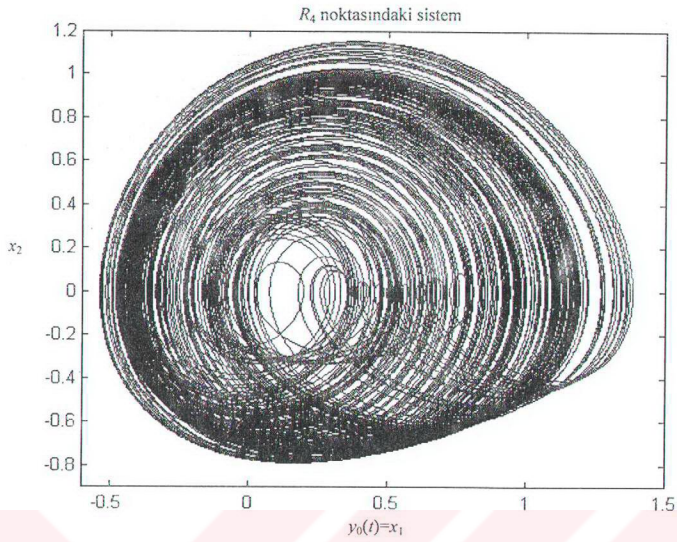


(a)

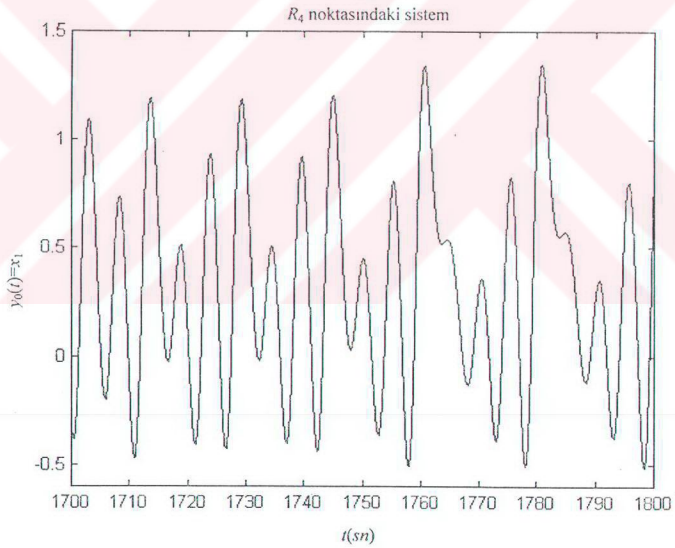


(b)

Şekil 4.23 Örnek 4.2'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-10}, 0, 0)$ başlangıç şartında Şekil 4.21'deki $Q_4(0.347, 0.4)$ noktasındaki PI parametrelerindeki sistemin: (a) Durum uzay diyagramı (b) Zaman cevabından bir kesit



(a)



(b)

Şekil 4.24 Örnek 4.2'de verilen sistemin $x_0(2 \cdot 10^{-10}, 0, 0)$ başlangıç şartında Şekil 4.21'deki $R_4(0.058, 0.06)$ noktasındaki PI parametrelerindeki sistemin: (a) Durum uzay diyagramı (b) Zaman cevabından bir kesit

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında doğrusal olmayan geri beslemeli sistemlerde oluşan ve limit çevrim olarak adlandırılan osilasyonların genliği ve frekansı ile kararlılığının tespit edilmesinde kullanılan *GAI* analizi anlatıldı. *GAI* analiz metodu kullanılarak örnek sistemler üzerinde, oluşacak osilasyonlar ile bu osilasyonların kararlılığı saptandı ve simülasyon sonuçlarıyla kıyaslandı. Elde edilen sonuçlara göre, *GAI* analiz metodu doğrusal olmayan geri beslemeli sistemlerde gözlenen limit çevriminin genliği ve frekansını kabul edilebilir bir doğrulukla ve kararlılığını da kesin olarak belirleyebilmektedir.

Bu tez çalışmasının esas amacı olan doğrusal olmayan sistemlerde kaotik davranışların tahmin edilmesi için geliştirilen ve Genesio-Tesi varsayımı olarak bilinen metod çalışıldı. Bunun için Genesio-Tesi tarafından verilen sistemler detaylı olarak incelendi ve bu varsayımın uygulanmasında yardımcı olarak *GAI* analiz metodu kullanıldı. Örnek sistemde elde edilen sonuçlar, Genesio-Tesi'nin elde ettiği sonuçlarla benzer sonuçlardı ve kaotik davranışın beklediği bölge, kaotik davranışın gözlemlendiği bölgeye çok yakın veya tamamen içinde olduğu görüldü. Ayrıca bu tez çalışmasında, *PI* kontrolörlü doğrusal olmayan geri beslemeli bir kontrol sistemine Genesio-Tesi varsayımı uygulanarak;

- Sürekli durum hatasını iyileştirmek için kullanılan bir *PI* tipi kontrolörün söz konusu sistemin davranışını etkileyerek nasıl kaotik davranış gösteren bir sisteme dönüştürüldüğü ortaya kondu.
- Kaotik davranışın bekleneyeceği *PI* kontrol parametrelerinden oluşmuş bir diyagram elde edildi. Böylece *PI* parametrelerine bağlı olarak sistemde kaotik davranışın gözlenmesi sağlanabilecektir.
- Genesio-Tesi varsayımının kontrol sistemleri için yardımcı ve etkin bir metod olabileceği vurgulandı.

Bu sonuçlara göre endüstride çok kullanılan *PI* tipi kontrolörün, uygulandığı sistemlerin kaotik davranış gösterme durumu söz konusudur. Çoğu kontrol sisteminde istenmeyen bir durum olan kaotik davranışın varlığı ile yeri bu açıdan önem kazanmaktadır ve bu durum göz ardı edilmemelidir. Ayrıca kaotik davranışın istendiği durumlarda da *PI* kontrolör yardımıyla sistemin bu tip davranış göstermesi sağlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Baker, G. L. and Gollub, J. P., 1990, Chaotic Dynamics an Introduction, Cambridge University Press.
2. Genesio, R. and Tesi, A., 1991, Chaos Prediction in Nonlinear Feedback Systems, IEE Proc. D Control Theory and Application, v. 138, pp.313-320.
3. Genesio, R. and Tesi, A., 1990, Harmonic Balance Methods for the Analysis of Chaotic Dynamics in Nonlinear Systems, DSI-RT33/90, University of Florence.
4. Slotine, J. J. E. and Li, W., 1991, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall Int. Inc..
5. Gibson, J. E., 1963, Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill International Student Edition.
6. Lewis, C. P., Uçar, A. and Bishop, S. R., 1997, An Approach to the Investigation of Robustness and Stability of Delay Feedback Control of Nonlinear Systems, Proc. 15th IMACS Word Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, (ed.Sydow,A), Wissenschaft and Verlag, Berlin, v. 5, pp. 263-268.
7. Çelik, V., 2002, Describing Function Metodu ile Nonlinear Sistemlerin Analizi, Yüksek Lisans Semineri, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
8. Uçar, A., 1999, Nonlinear Sistemler Ders Notu, Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü.
9. Genesio, R., Tesi, T. ve Villorosi, F., 1993, A Frequency Approach for Analyzing Controlling Chaos in Nonlinear Circuits, IEEE Trans.CAS, v. 40, pp. 819-827.
10. Cook, P. A., 1994, Nonlinear Dynamical Systems, Prentice-Hall, Int. Ed..
11. Uçar, A., 2002, A Prototype Model for Chaos Studies, Int. J. Engineering Science, v. 40, pp. 251-258.
12. Ogata, K., 1990, Modern Control Engineering, Prentice-Hall, Second Ed..
13. Strogatz, S. H., 1994, Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
14. Huang, A., Pivka, L., Wu, C.W. and Franz, M., 1997, Chua's Equation with Cubic Nonlinearity, IEEE Trans. CAS, v. 44, pp. 1011-1014.
15. Uçar, A. and Akbey, T., 2000, A Genetic Algorithm to Tune Conventional Control Parameters for Uncertain Systems, 16th IFAC Workshop on Distributed Computer Control Systems, Australia, pp. 81-87.
16. Unar, A., Murray-Smith, D. J. and Shah, S. F. A., 1996, Design and Tuning of Fixed Structure PID Controllers: A Survey. Technical Reports CSC-96016, Centre for Systems and Control, University of Glasgow.

17. Uçar, A. ve Akbey, T., 2000; PID Kontrolörle Kaotik (Düzensiz) Davranışların Kontrolü, TOK'2000 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, ss. 243-247.
18. Aström, K. J. and Hägglund, T., 1995, The International Society for Measurement and Control, Instrument Society of America.



ÖZGEÇMİŞ

1976-Elazığ doğumlu olan Vedat ÇELİK ilk, orta ve lise öğrenimini Elazığ'da tamamladı. 1993'te girdiği Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden 1997'de mezun oldu. 1998 yılı başında Fransa'da "Matematik Eğitimi" alanında lisans üstü eğitim almak üzere Milli Eğitim Bakanlığının resmi burslu öğrencisi olarak Ankara Fransız Kültür merkezinde Fransızca dil eğitimi aldı.1999'da Fransa'da, ENS-Cachan / Paris, "Bilimlerin ve Teknolojinin Yayılması ve Öğretimi" programında lisans üstü eğitimine başladı. 2000 yılı sonunda ailevi nedenlerden dolayı eğitimini bırakmak zorunda kaldı. 2001 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Ana Bilim dalında yüksek lisans yapma hakkı kazandı ve aynı yılın sonunda Fırat Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde araştırma görevliliğine başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.