

**FUZZY SAYI DİZİLERİNİN β . DERECE DEN
DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Yüksel EROL
(152121101)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET**

Mayıs - 2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN β . DERECE DEN
DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yüksel EROL
(152121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Mayıs 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Haziran 2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü)

: Doç.Dr. Muhammed ÇINAR (M.Ş.Ü)

Mayıs-2018

ÖNSÖZ

"Fuzzy Sayı Dizilerinin β . Dereceden Deferred İstatistiksel Yakınsaklığı" başlıklı yüksek lisans çalışmasının hazırlanması sürecinde ilgi ve desteklerinden yararlandığım, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET ve karşılaştığım problemlerin çözümünde desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Hıfı ALTINOK'a teşekkürlerimi sunarım.

Yüksel EROL

Elazığ-2018



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. DERECELİ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	3
3. FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ	10
3.1 Fuzzy Kümeler	10
3.2 Fuzzy Sayı Dizileri	12
4. DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE DEFERRED CESÀRO YAKINSAKLIK	15
5. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN β . DERECEDEN DEFERRED İSTATİS- TİKSEL YAKINSAKLIĞI VE β . DERECEDEN KUVVETLİ r -DEFERRED CESÀRO TOPLANABİLİRLİĞİ	22
6. SONUÇLAR	32
7. KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	36

ÖZET

Fuzzy Sayı Dizilerinin β . Dereceden Deferred İstatistiksel Yakınsaklığı

"Fuzzy Sayı Dizilerinin β . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı" başlıklı çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, yapılan çalışma hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, istatistiksel yakınsaklığın tarihçesinden üçüncü bölümde ise fuzzy sayı dizilerinin tarihçesinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, deferred istatistiksel yakınsaklık ve deferred Cesàro yakınsaklıktan bahsedilmiştir. Beşinci bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $\beta \in (0, 1]$ reel sayısı için fuzzy sayı dizilerinin β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaklığı ve β . dereceden deferred kuvvetli r -Cesàro yakınsaklığı tanımlanmış, β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık ve β . dereceden deferred kuvvetli r -Cesàro yakınsaklık arasında birkaç bağıntı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Sayı Dizisi, Deferred İstatistiksel Yakınsaklık, Deferred Cesàro Toplanabilme.

SUMMARY

On Deferred Statistical Convergence of Order β of Sequences of Fuzzy Numbers

This study consists of the five chapters which has been titled as "On Deferred Statistical Convergence of Order β of Sequences of Fuzzy Numbers". We give some informations about the historical development of statistical convergence in the chapter 2 and give some informations about the historical development of fuzzy numbers in the chapter 3. In the chapter 4, we give the concepts of deferred statistical convergence and strong deferred r -Cesàro summability for sequences of real numbers. In the fifth chapter which is original, we introduce the concepts of deferred statistical convergence of order β and strong deferred r -Cesàro summability of order β for sequences of fuzzy numbers and give some relations between deferred statistical convergence sequences of order β and strong deferred r -Cesàro summable sequences of order β for $\beta \in (0, 1]$.

Key Words: Fuzzy Number Sequences, Deferred Statistical Convergence, Deferred Cesàro Summability.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1 β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak, ancak yakınsak olmayan fuzzy sayı dizisi	23
Şekil 2 γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsak, fakat β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak olmayan fuzzy sayı dizisi	25
Şekil 3 $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ için β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak, ancak β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi	29



SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada aşağıdaki sembolleri sık sık kullanacağız.

$\delta_d^\beta(E)$	β . dereceden deferred yoğun küme
$S_d^\beta(F)$	β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerin kümesi
$W_d^\beta[r]$	β . dereceden kuvvetli deferred r –Cesàro yakınsak fuzzy sayı dizilerin kümesi



1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık Toplanabilme Teorisinde önemli araştırma alanlarından birisidir. İstatistiksel yakınsaklık çeşitli zamanlarda ortaya çıkmış olsa da bu kavramdan ilk olarak Zygmund [1] bahsetmektedir. Bu kavrama ilişkin ilk bilgiler Fast [2] ve Steinhaus [3] tarafından verildi. Toplanabilme metodu olarak bu kavram Schoenberg [4] tarafından çalışıldı. Bilindiği gibi dizilerin Cesàro yakınsaklığı literatürde istatistiksel yakınsaklıktan bağımsız olarak incelenmiş ve

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlan ve aritmetik ortalama matrisi olarak da bilinen $A = (a_{nk})$ matrisi yardımıyla tanımlanan bir toplanabilme metodu olup, yakınsak olmayan en az bir diziyi yakınsak bir diziye dönüştürür. Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklığın temel özelliklerini incelemiş ve sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesàro toplanabilir olduğunu göstermiştir. Daha sonra sırasıyla Salat [5], Fridy [6], Connor [7], Fridy ve Orhan [8] istatistiksel yakınsaklığın toplanabilme ile ilişkisini incelemişler ve istatistiksel yakınsaklığın birkaç özelliğini vermişlerdir. Örneğin Salat [5] reel istatistiksel yakınsak dizilerin kümesinin bir lineer uzay olduğunu ifade etmiş ve reel değerli sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin uzayının, tüm reel değerli diziler uzayının kapalı bir altuzayını göstererek hiçbir yerde yoğun küme olmadığını ispatlamıştır. Connor [7] sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olduğunu göstermiş, Fridy [6] ise istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanımlayarak istatistiksel yakınsak diziler ile istatistiksel Cauchy dizileri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Fridy ve Orhan [8] bir lacunary dizisini kullanarak istatistiksel yakınsaklık kavramının lacunary istatistiksel yakınsaklığa genelleştirmiş ve Freedman ve arkadaşları [9] tarafından tanımlanan kuvvetli lacunary toplanabilir diziler ile arasındaki ilişkileri vermişlerdir. Son zamanlarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın genelleştirmeleri literatürde Bhunia ve arkadaşları [10], Çakallı [11], Caserta ve arkadaşları [12], Et ve Şengül ([13],[14]) gibi birçok yazar tarafından çalışılmıştır.

Reel sayı dizisi kavramından daha genel olan Fuzzy (bulanık) sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramı son zamanlarda çalışılan popüler konulardan birisidir.

Fuzzy küme ve Fuzzy sayısı kavramı klasik küme ve reel sayı kavramından daha geneldir ve günlük hayatı ifade bakımından daha isabetlidir. Klasik küme

$$f_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ ise} \\ 0, & x \notin E \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan karakteristik fonksiyonu yardımıyla ifade edilirken bu işlem Fuzzy küme teorisinde üyelik fonksiyonu adı verilen bir fonksiyon yardımıyla ifade edilebilir. İlgili nesnelerden oluşan ve boş olmayan X evrensel tanım kümesi üzerinde bir E fuzzy kümesi

$$\mu_E(x) : E \rightarrow [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Esas fikir bir elemanın bir kümeye kısmi üyeliğine olanak sağlamasıdır. Eğer üyelik derecesi olarak adlandırılan üyelik fonksiyonunun değeri 1 ise x elemanı kümeye tamamen aittir, üyelik derecesi $\mu \in (0, 1)$ olacak şekilde bir μ sayısı ise x kümenin kısmi üyesidir, üyelik derecesi 0 ise x kümeye ait değildir. Fuzzy küme ve ilgili işlemler 1965 yılında Lotfi A. Zadeh [15] tarafından yayımlanan bir makalede çalışılmış ve daha sonraki yıllarda bu kavram ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır [16 – 22].

Fuzzy sayı dizisi kavramı 1986 yılında Matloka [23] tarafından tanımlandı ve bazı temel özellikleri incelendi, yakınsak ve sınırlı fuzzy sayı dizileri ile ilgili birkaç bağıntı Nanda [19] tarafından verildi. Fuzzy sayı dizilerinin yakınsaklığı 1995 yılında Nuray ve Savaş [24] tarafından fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığına genelleştirildi, Kwon [25] fuzzy sayı dizilerinin p -Cesàro convergence yakınsaklığını tanımlayarak istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntıları inceledi. Daha sonra konuya ilişkin birçok çalışma Altınok v.d. ([26],[27]), Aytar ve Pehlivan [28], Mursaleen v.d. ([29],[30]), Savaş [31] ve diğer birçok yazar tarafından çalışıldı.

Bu çalışmada Küçükaslan and Yılmaztürk ([32],[33]) tarafından tanımlanan reel sayı dizilerinin deferred istatistiksel yakınsaklığı ve deferred r -Cesàro toplanabilme kavramları, $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere fuzzy sayı dizilerine genelleştirilecektir.

2. DERECELİ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Reel veya karmaşık değerli ıraksak bir dizinin farklı şekillerde yakınsama sorunu 19. yüzyılın başlarına kadar uzanır. Farklı pek çok yakınsama metodu tanımlanmış (Aritmetik Ortalama, Cesàro, Nörlund, Ağırlıklı Ortalama, Abel vs.) ve matematiğin birçok dalına uygulanmıştır. Hemen hemen tüm yakınsaklık türleri cebirsel ve topolojik bir yapı içermektedir. Bununla birlikte genel bir metrik uzayda yakınsaklık fikri cebirsel bir yapıdan bağımsızdır. Bu yakınsaklık türleri bilinen yakınsaklık kavramını genelleştiren daha genel yakınsaklık türleridir. İstatistiksel yakınsaklık bu kavramlardan birisidir. İstatistiksel yakınsaklık fikri doğal sayıların yoğunluğu kavramına dayanır. Bu kavram literatürde çeşitli isimler altında farklı zamanlarda ortaya çıkmıştır. Zygmund [1] Varşova da basılan bir notta istatistiksel yakınsaklık fikrinden bahsetmiştir, ancak istatistiksel yakınsaklık tanımını Fast [2] ve Steinhaus tarafından verilmiştir. Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklığı bir toplanbilme metodu olarak yorumladı. İstatistiksel yakınsaklık Buck [34] tarafından tanımlanan yoğunluğa bağlı yakınsaklığın bir örneği olarak ortaya çıkmaktadır. $\mathbb{N}$ doğal sayıların kümesini gösterebiliriz, E kümesi de $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesi olsun. $E(m, n)$ ile $[m, n] \cap \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısını gösterelim. E nin üst ve alt doğal yoğunluğu sırasıyla

$$\bar{\delta}(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{E(1, n)}{n}$$

ve

$$\underline{\delta}(E) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{E(1, n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\bar{\delta}(E) = \underline{\delta}(E)$ ise E kümesi doğal yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\delta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(1, n)}{n}$$

olarak tanımlanır. Örneğin n sayısına eşit ya da n sayısından daha küçük olan doğal sayıların kümesini $E(n)$ ile gösterelim, örneğin $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ ise $E(1) = 0, E(2) = 1, E(6) = 3, E(7) = 3, E(15/2) = 3, \dots$ dir. Gerçekten $n \geq 0$ ise $E(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dir. $\delta(E) = 0$ ise E kümesine sıfır yoğunluğa sahiptir denir. $K = \{n \in \mathbb{N} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise reel (kompleks) sayıların bir $x = (x_k)$ dizisi ξ reel (kompleks) sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. İstatistiksel yakınsak dizilerin

kümesini S ile göstereceğiz. Eğer bir dizi ξ sayısına istatistiksel yakınsak ise $S - \lim x = \xi$ veya $x_k \rightarrow \xi(S)$ olarak yazacağız. $\xi = 0$ olması durumunda S yerine S_0 yazacağız. Örneğin $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 2 & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

olarak tanımlarsak

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup $S - \lim x = 0$ bulunur.

Sonlu kümeler sıfır doğal yoğunluğa sahip olacağından bilinen anlamda yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, gerçekten $x_k \rightarrow \xi$ olsun, bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $|x_k - \xi| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buna göre $k \leq k_0$ için $|x_k - \xi| \geq \varepsilon$ olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$$

dır. Bunun tersi doğru değildir, yani istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olması gerekmez, gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^3 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 1, & k \neq m^3 \end{cases}$$

dizisi istatistiksel yakınsak fakat yakınsak değildir.

Sınırlı bir dizinin istatistiksel yakınsak olması gerekmez, gerçekten

$$x = (2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots)$$

dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir. İstatistiksel yakınsak bir dizinin de sınırlı olması gerekmez. Bunun için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım, bu dizi istatistiksel yakınsak, ancak sınırlı değildir. Bilindiği gibi sınırlı diziler uzayı

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Tüm sabit diziler hem sınırlı hem de istatistiksel yakınsaktır. Buna göre S ile ℓ_∞ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır ancak birbirlerini kapsamazlar.

$x = (x_k)$ reel (kompleks) sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \xi$$

olacak şekilde bir ξ sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi ξ sayısına Cesàro toplanabilir denir.

Cesàro toplanabilme fikri istatistiksel yakınsaklıktan bağımsız olarak çalışıldı. Fast [2] ve Schoenberg [4] istatistiksel yakınsak ve sınırlı bir dizinin Cesàro toplanabilir olduğunu gösterdiler. Sonraki yıllarda Salat [5] reel istatistiksel yakınsak diziler ile ilgili birkaç özellik ispatladı. Fridy [6] ve Connor [7] istatistiksel yakınsaklık ile ilgili temel birkaç temel özelliği incelyerek toplanabilme açısından inceledi. Bu çalışmalardan sonra istatistiksel yakınsaklıkla ilgili birçok çalışmanın literatüre kazandırıldığını görüyoruz. Bu iki çalışmadan önemli olduğuna inandığımız iki teoremi aşağıda ispatsız olarak veriyoruz. Bu teoremleri ifade etmeden önce iki tanım verelim.

Tanım 2.1 p pozitif reel bir sayı ve $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \xi|^p = 0$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir ξ sayısı mevcut ise x dizisi ξ reel (kompleks) sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir denir. Bu durumda $w_p - \lim x = \xi$ yazılır. Kuvvetli p -Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi w_p ile gösterilecektir, yani

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \xi|^p = 0, \text{ en az bir } \xi \in \mathbb{C} \text{ için} \right\}$$

dir.

Tanım 2.2 Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım, $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_s| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $s = s(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_s| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.3 [7] $0 < p < \infty$ ve $x = (x_k)$ reel (kompleks) sayıların bir dizisi olsun. Bu taktirde

i) Bir dizi ξ sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak ise ξ sayısına istatistiksel yakınsaktır.

ii) x sınırlı bir dizi ve ξ sayısına istatistiksel yakınsak ise bu dizi ξ sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır

Teorem 2.4 [6] $x = (x_k)$ reel (kompleks) sayıların bir dizisi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,
- ii) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii) $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

Dereceli istatistiksel yakınsaklık fikri Gadjiev ve Orhan [35] tarafından verildi. Bhunia ve arkadaşları [10] dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili birkaç özellik ispatladılar. Dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili literatürdeki çalışmaların Çolak ([36],[37]) tarafından verilen " α . dereceden istatistiksel yakınsaklık" ve " λ -istatistiksel yakınsaklık" başlıklı çalışmadan sonra arttığını görüyoruz. Daha sonra Çolak ve Bektaş [38], Et ve Şengül ([13],[14]) dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramlarını çalıştılar. Konunun güncelliğini koruduğu ve son zamanlarda birçok yazar tarafından çalışıldığı gözlenmektedir. Şimdi Çolak [36] tarafından verilen dereceli yoğunluk ve dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili temel bazı kavramları verelim.

Tanım 2.5 Bir E kümesinin β -yoğunluğu, $|\{k \leq n : k \in E\}|$ ifadesi E kümesinin n doğal sayısından büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta_\beta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

eşitliği ile tanımlanır (limit sonlu ya da sonsuz olabilir). Bu limitin sonlu olması durumunda E kümesi β -yoğunluğa sahiptir denir. Eğer bu limitin değeri sıfır ise E kümesi sıfır β -yoğunluğa sahiptir denir. Bu tanım $\beta = 1$ için doğal yoğunluk kavramı ile aynıdır. $E \subseteq \mathbb{N}$ herhangi bir küme olmak üzere $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için $\delta_\gamma(E) \leq \delta_\beta(E)$ olduğu açıktır. Sıfır β -yoğunluklu küme tanımından hareketle β . dereceden istatistiksel yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.6 $x = (x_k) \in w$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |y_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir ξ kompleks sayısı varsa $y = (y_k)$ dizisi ξ ye β . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. $y = (y_k)$ dizisinin ξ sayısına β . dereceden istatistiksel yakınsak olması halinde $S^\beta - \lim y_k = \xi$ yazarız. β . dereceden istatistiksel yakınsaklık her $\beta \in (0, 1]$ sayısına bir istatistiksel yakınsaklık karşılık getireceğinden istatistiksel yakınsaklığı derecelendirmektedir. β . dereceden istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi S^β ile $\xi = 0$ olması durumunda ise S_0^β gösterilecektir. β . dereceden istatistiksel yakınsaklık $\beta = 1$ için bilinen anlamda istatistiksel yakınsaklık ile aynı olur. $\beta > 1$ olması durumunda β . dereceden istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı olmayabilir. Gerçekten

$$y_k = \begin{cases} 2, & k = 2n \\ 0, & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitliği ile verilen bir y dizisini tanımlayalım. $\beta > 1$ olması durumunda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |y_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\beta} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |y_k - (-1)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\beta} = 0$$

olacağından y dizisi hem 1 ve -1 sayılarına β . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Kompleks (reel) terimli bütün dizilerinin kümesi w nın $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve c bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$cx = (cx_k)$$

işlemleri ile bir lineer uzay olduğunu, w nin her alt kümesinin de bu işlemler altında kapalı olması durumunda bir lineer uzay olduğunu biliyoruz. S^β nın yukarıdaki işlemler altında kapalı olduğunu kolayca gösterebiliriz. Buna göre S^β bir lineer uzaydır.

Yakınsak her dizinin β . dereceden istatistiksel yakınsak ancak tersinin doğru olmadığını söyleyebiliriz. Gerçekten

$$y = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, \dots)$$

olarak alınır

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |y_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\beta} (2\sqrt{n} + 1)$$

olacağından $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için y dizisi 0 sayısına β . dereceden istatistiksel yakınsaktır, ancak bu dizi yakınsak değildir.

Aşağıdaki teorem $\beta, \gamma \in (0, 1]$ sayıları $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olmak üzere β . dereceden istatistiksel yakınsaklık ile γ . dereceden istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntıyı verir.

Teorem 2.7 $\beta, \gamma \in (0, 1]$ sayıları $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun β . dereceden istatistiksel yakınsak her sayı dizisi γ . dereceden istatistiksel yakınsak, fakat tersi doğru değildir.

Gerçekten $\beta, \gamma \in (0, 1]$ sayıları $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{n^\gamma} |\{k \leq n : |y_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |y_k - \xi| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlandığından β . dereceden istatistiksel yakınsak her sayı dizisi γ . dereceden istatistiksel yakınsaktır, fakat

$$y_k = \begin{cases} 3, & k = n^3 \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.1)$$

dizisi göz önüne alınır $\frac{1}{3} < \gamma \leq 1$ için $S^\gamma - \lim x_k = 0$, ancak $0 < \beta < \frac{1}{3}$ $x \notin S^\beta$ olduğu görülür.

İstatistiksel yakınsak diziler ile kuvvetli p -Cesàro toplanabilir diziler arasındaki ilişki birçok çalışmada incelenmiştir. β . dereceden istatistiksel yakınsak diziler ile β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir arasında öncekilere benzer bir bağıntı vermek mümkündür. Bu bağıntıyı vermeden önce β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir diziler uzayı w_p^β yı aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 2.8 $p, \beta \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |y_k - \xi|^p = 0$$

olacak şekilde bir ξ kompleks sayısı varsa, y dizisi β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir denir. β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik, $\beta = 1$ için, kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı w_p^β ile gösterilir.

Teorem 2.9 $\beta, \gamma \in (0, 1]$ sayıları $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir her sayı dizisi γ . dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.9 un tersi $y = (y_k)$ dizisi sınırlı olsa bile sağlanmaz, yani sınırlı ve β . dereceden istatistiksel yakınsak bir dizinin γ . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olması gerekmez.

Bu konuya ilişkin son bağıntımız β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir diziler ile γ . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir diziler arasında olacaktır.

Teorem 2.10 β, γ sayıları $0 < \beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir her sayı dizisi γ . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir, ancak tersi doğru değildir.

İspat. β, γ sayıları $0 < \beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı $p \in \mathbb{R}^+$ için

$$\frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^n |y_k - \xi|^p \leq \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |y_k - \xi|^p$$

olduğundan β . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir her sayı dizisi γ . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir, ancak (2.1) de tanımlanan dizi göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^n |y_k - 0|^p \leq \frac{2\sqrt[3]{n}}{n^\gamma} = \frac{2}{n^{\gamma-\frac{1}{3}}} \rightarrow 0$$

olup $\gamma \in (\frac{1}{3}, 1]$ için $y \in w_p^\gamma$, ancak $\gamma \in (0, \frac{1}{3})$ için

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |y_k - 0|^p \geq \frac{2\sqrt[3]{n} - 1}{n^\beta} \rightarrow \infty$$

olduğundan $x \notin w_p^\beta$ dir.

3. FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ

3.1 Fuzzy Kümeler

Fuzzy (Bulanık) küme üyelik derecelerine göre sınıflandırılan nesnelerin topluluğu olarak gözümlüne alınabilir. Üyelik dereceleri üyelik fonksiyonu olarak tanımlayacağımız bir fonksiyon yardımıyla yapılabilir. Klasik küme teorisinde; "1" ile üye olma, "0" ile de üye olmama ifade edilir ve X kümesinin herhangi bir E altkütmesi için üye olma ve üye olmama

$$f_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ ise} \\ 0, & x \notin E \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan karakteristik fonksiyonu yardımıyla yapılırken, bu işlem Fuzzy teorisinde üyelik fonksiyonu adı verilen ve

$$\mu_E : E \rightarrow [0, 1]$$

olarak tanımlanan fonksiyonu yardımıyla yapılabilir. Buna göre X kümesinin herhangi bir E altkütmesi klasik küme teorisinde

$$E = \{x \in X : f_E(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlanırken, bulanık küme teorisinde

$$E = \{x \in X : X_E(x) \in (0, 1]\}$$

olarak ifade edilir. $X_E(x)$ aldığı değeri E fuzzy kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. 1 sayısına en yakın olan değer E kümesindeki en yüksek üyelik derecesi göstermektedir. E kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 iken, bulanık küme teorisinde bu değer 0 ve 1 arasındaki tüm sayılar olmaktadır. Buna göre $X_E(x) = 1$ en yüksek üyelik derecesini $X_E(x) = 0$ ise üye olmamayı ifade etmektedir. Çok sayıda üyelik fonksiyonu tanımlanmıştır, ancak en çok kullanılan üyelik fonksiyonları *üçgen*, *yamuk*, *çanğrısı*, *Gaussian*, *sigmoidal*, *S* ve *II* üyelik fonksiyonlarıdır. Üyelik fonksiyonun tipine göre fuzzy sayısını isimlendiririz, örneğin üçgen fuzzy sayısından bahsediyorsak üyelik tipi üçgen olan fuzzy sayısından bahsediyoruz demektir. Bir fuzzy sayı kümesinin yüksekliği üyelik derecesi en büyük olan değerdir. Bu kavram normal fuzzy kümesi tanımını vermektedir. Eğer bir fuzzy

küme için yüksekliği 1 olacak şekilde bir nokta varsa bu fuzzy kümeye *normal fuzzy* küme denir. Buna göre E fuzzy kümesinin normal olması için $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X$ olmasıdır. Örneğin

$$X(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{5}, & x \in [\frac{5}{2}, 5] \text{ ise} \\ \frac{-2x+15}{5}, & x \in [5, \frac{15}{7}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fuzzy kümesi $x = 5$ için 1 değerini aldığından normaldir.

Bir E fuzzy kümesinin α -seviye veya α -kesim kümesi, üyelikleri α dan az olmayan üyelerinden oluşur, yani

$$E^\alpha = \{x \in \chi : X_E(x) \geq \alpha\}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $\{x \in \mathbb{R} : X_A(x) > 0\}$ kümesi 0 -seviye kümesi olarak tanımlanır. İki fuzzy sayısının toplamı ve farkı seviye kümeleri cinsinden tanımlanabilir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, tüm fuzzy sayılarının kümesi $L(\mathbb{R})$ de gömülebilirdir. Buna göre $\tilde{u} \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısı $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 1, & x = u \text{ ise} \\ 0, & x \neq u \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bir $\tilde{u} \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısı aralıklar cinsinden $\tilde{u} = [r, r]$ şeklinde ifade edilebilir.

$L(\mathbb{R})$ kümesinde üzerinde $U, V \in L(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(U, V) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H(U^\alpha, V^\alpha)$$

şeklinde bir metrik (uzaklık) tanımlamak mümkündür, burada d_H

$$d_H(U^\alpha, V^\alpha) = \max(|\underline{U}^\alpha - \underline{V}^\alpha|, |\overline{U}^\alpha - \overline{V}^\alpha|)$$

olarak tanımlanan Hausdorff metriği olup $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ bir tam metrik uzaydır.

3.2 Fuzzy Sayı Dizileri

Fuzzy sayı dizisi kavramı 1986 yılında Matloka [23] tarafından tanımlandı ve bazı temel özellikleri incelendi. Bir fuzzy sayı dizisi doğal sayılar kümesinden tüm fuzzy sayıları kümesi $L(\mathbb{R})$ ye tanımlanan bir fonksiyondur. Bu durumda her bir k pozitif tamsayısına bir $U(k)$ fuzzy sayısı karşılık gelir (uygunluk açısından $U(k)$ yerine U_k yazacağız). Nanda ([19]) yakınsak ve sınırlı dizi kavramlarını aşağıdaki şekilde verdi.

Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n > n_0$ olduğunda $d(U_k, U_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise (U_k) dizisi U_0 sayısına yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} U_k = U_0$ yazılır. Limitin mevcut olmaması durumunda diziye ıraksaktır denir. Her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $L_1 \leq U_k \leq L_2$ olacak şekilde L_1 ve L_2 fuzzy sayıları mevcut ise $U = (U_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir. $c(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ ile sırasıyla yakınsak ve sınırlı tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz.

Örnek 3.2.1

$$U_i(x) = \begin{cases} \frac{i}{i+2}x + \frac{2-2i}{i+2}, & x \in [\frac{2i-2}{i}, 3] \text{ ise} \\ -\frac{i}{i+2}x + \frac{4i+2}{i+2}, & x \in [3, \frac{4i+2}{i}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlana $U = (U_i)$ dizisi

$$U_0(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x + 4, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fuzzy sayısına yakınsaktır.

Skalar sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı Nuray ve Savaş ([24]) tarafından fuzzy sayı dizilerine aşağıdaki şekilde genelleştirildi.

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{i \leq n : d(U_i, U_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcut olacak şekilde U_0 fuzzy sayısı mevcut ise $U = (U_i)$ fuzzy sayı dizisi U_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Yakınsak bir fuzzy sayı dizisinin istatistiksel yakınsak ancak tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte ifade edilmiştir.

Örnek 3.2.2 $U = (U_i)$ fuzzy sayı dizisi

$$U_i(x) = \begin{cases} 2x - (2i - 1), & x \in [i - \frac{1}{2}, i] \text{ ise} \\ -2x + (2i + 1), & x \in [i, i + \frac{1}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = n^3 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ i \neq n^3 \text{ ise} \end{matrix}$$

olarak tanımlansın, bu dizi

$$U_0(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in [1, \frac{3}{2}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

sayısına istatistiksel yakınsaktır, ancak yakınsak değildir.

Fuzzy sayı dizlerinin kuvvetli p -Cesàro toplanabilmesi Kwon [25] tarafından aşağıdaki gibi tanımlandı.

p herhangi pozitif bir reel sayı ve $U = (U_i)$ herhangi bir fuzzy sayı dizisi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [d(U_i, U_0)]^p = 0$$

limiti sağlanacak şekilde bir U_0 fuzzy sayısı varsa $U = (U_i)$ fuzzy sayı dizisi U_0 fuzzy sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır denir. Aşağıda kuvvetli p -Cesàro yakınsak bir fuzzy sayı dizisi örneği verilmiştir.

Örnek 3.2.3 $U = (U_i)$ fuzzy sayı dizisi

$$U_i(x) = \begin{cases} ix + 1, & x \in [-\frac{1}{i}, 0] \text{ ise} \\ -ix + 1, & x \in [0, \frac{1}{i}] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{matrix}$$

olarak tanımlanırsa bu dizinin α -seviye kümesi

$$[U_i]^\alpha = \begin{cases} [\frac{\alpha-1}{i}, \frac{1-\alpha}{i}], & i = n^2 \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $p = 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [d(U_i, U_0)]^p = 0$$

dir. (U_i) fuzzy sayı dizisinin $\bar{0}$ fuzzy sayısına kuvvetli p –Cesàro toplanabilir olduğu anlaşılır.



4. DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE DEFERRED CESÀRO YAKINSAKLIK

Skalar dizilerin deferred Cesàro ortalamaları 1932 yılında Agnew [39] tarafından tanımlandı. Agnew [39] $p = \{p(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ve $q = \{q(n) : n \in \mathbb{N}\}$ dizileri

$$p(n) < q(n) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty \quad (4.1)$$

özelliklerini sağlayan non-negatif diziler olmak üzere reel veya kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisinin deferred Cesàro ortalamasını

$$(D_{p,q}, x)_n = \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

olarak tanımlamış ve bu metodun regülerlik özelliğini sağladığını göstermiştir.

Son zamanlarda Küçükaslan ve Yılmaztürk ([32],[33]) skalar dizilerin deferred yoğunluğu ve deferred istatistiksel yakınsaklığı kavramlarını tanımladı, bir dizinin kuvvetli deferred Cesàro ortalaması ile deferred istatistiksel yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi incelediler.

Bu bölümde Küçükaslan ve Yılmaztürk ([32],[33]) tarafından verilen skalar dizilerin deferred istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli deferred Cesàro yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi verceğiz.

$x = (x_k)$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $p = \{p(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ve $q = \{q(n) : n \in \mathbb{N}\}$ dizileri (4.1) deki şartları sağlayan non-negatif diziler olsun. $K, \mathbb{N}$ nin bir alt kümesi olsun ve $\{k : p(n) < k \leq q(n), k \in K\}$ kümesini $K_{p,q}(n)$ ile gösterelim. K nin deferred yoğunluğu

$$\delta_{p,q}(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))} |K_{p,q}(n)|$$

şeklinde tanımlanır. Kolayca gösterilebilir ki

$$(i) \text{ Eğer } K \subseteq M \text{ ise } \delta_{p,q}(K) \leq \delta_{p,q}(M),$$

(ii) $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ ise deferred yoğunluk K nin doğal yoğunluğu ile aynı olur.

Tanım 4.1 [32] $\{p(n)$ ve $q(n)\}$ dizileri (4.1) deki bağıntıları sağlayan iki dizi olsun. $x = (x_k)$ reel veya kompleks (reel) terimli bir dizi olmak üzere eğer her $\epsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))} |\{p(n) < k \leq q(n) : |x_k - \xi| \geq \epsilon\}| = 0$$

eşitliği sağlanacak şekilde ξ sayısı varsa bir $x = (x_k)$ dizisi ξ sayısına deferred istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $DS_{p,q} - \lim x_k = \xi$ yazılır. Tüm deferred istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $DS_{p,q}$ ile gösterilir. Eğer $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ ise deferred istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık aynı olur. Yakınsak her dizinin deferred istatistiksel yakınsak olduğu, fakat tersinin sağlanmadığı kolayca gösterilebilir.

Tanım 4.2 [32] $\{p(n)$ ve $q(n)\}$ dizileri (4.1) deki bağıntıları sağlayan iki dizi ve $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_k - \xi| = 0$$

olacak şekilde ξ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine kuvvetli deferred Cesàro toplanabilir denir. Tüm kuvvetli deferred Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $D[p, q]$ ile gösterilir. Eğer $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ ise Kuvvetli deferred Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi ile Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi aynı olur.

Aşağıdaki teorem deferred istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli deferred Cesàro yakınsaklık arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 4.3 [32] Eğer $x_n \rightarrow \xi (D[p, q])$ ise $x_n \rightarrow \xi DS[p, q]$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $x_n \rightarrow \xi$ olsun. Keyfi bir $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_k - \xi| \\ = & \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k - \xi| \geq \epsilon}}^{q(n)} |x_k - \xi| + \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k - \xi| < \epsilon}}^{q(n)} |x_k - \xi| \\ \geq & \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k - \xi| \geq \epsilon}}^{q(n)} |x_k - \xi| \end{aligned}$$

$$\geq \varepsilon \frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu x dizisinin ξ sayısına deferred istatistiksel yakınsak olması demektir.

Teorem 4.3 ün tersi genelde doğru değildir. Bunun için $x = (x_k)$ dizisini $q(n)$ monoton artan bir dizi ve $m_0 \neq 0$ keyfi sabit bir doğal sayı olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} k^2, & \left\| \sqrt[2]{q(n)} \right\| - m_0 < k \leq \left\| \sqrt[2]{q(n)} \right\|, n = 1, 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Burada $\|.\|$ sembolü tamdeğeri göstermektedir. Eğer

$$0 < p(n) < \left\| \sqrt[2]{q(n)} \right\| - m_0,$$

eşitsizliğini sağlayan $p(n)$ dizisi için $D[p, q]$ metodunu göz önüne alırsak keyfi bir $\varepsilon > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{m_0}{q(n) - p(n)}$$

elde ederiz, yani $x_k \rightarrow 0$ ($DS[p, q]$) dir. Diğer yandan $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_k - 0| \geq \frac{m_0 \left(\left\| \sqrt[2]{q(n)} \right\| - m_0 \right)^2}{q(n) - p(n)} \rightarrow m_0$$

olup (x_k) dizisi sıfıra $D[p, q]$ yakınsak değildir.

Aşağıdaki teorem $x = (x_n)$ dizisinin sınırlı olması durumunda deferred istatistiksel yakınsak bir dizinin kuvvetli deferred Cesàro yakınsak olduğunu ifade eder.

Teorem 4.4 [32] Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x_n \rightarrow \xi$ ($DS[p, q]$) ise $x_n \rightarrow \xi$ ($D[p, q]$) dir.

İspat. Kabul edelim ki $x \in \ell_\infty$ ve $x_n \rightarrow \xi$ ($DS[p, q]$) olsun. Bu takdirde $\forall n$ için $|x_n - \xi| \leq M$ eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir M reel sayısı mevcuttur. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_k - \xi| &= \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k - \xi| \geq \varepsilon}}^{q(n)} |x_k - \xi| \\
&\quad + \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k - \xi| < \varepsilon}}^{q(n)} |x_k - \xi| \\
&\leq \frac{M}{q(n) - p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k - \xi| \geq \varepsilon}}^{q(n)} 1 + \frac{\varepsilon}{q(n) - p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k - \xi| < \varepsilon}}^{q(n)} 1 \\
&\leq M \frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{q(n) - p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| < \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. x dizisi deferred istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_k - \xi| = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremden $p(n)$ veya $q(n)$ dizileri üzerine bazı kısıtlamalar koyarak istatistiksel yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntı verilecektir.

Teorem 4.5 [32] Eğer $\left\{ \frac{p(n)}{q(n)-p(n)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlı ise $x_n \rightarrow \xi(S)$ olması halinde $x_n \rightarrow \xi(DS[p, q])$ dir.

İspat: Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = a$ dir. Bu özellik pozitif reel sayı dizilerinin iyi bilinen bir özelliğidir. Teoremin ispatında bu özellikten faydalanacağız. x dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k : k \leq n, |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yazabiliriz. $q(n)$ dizisi için (4.1) sağlandığından

$$\left\{ \frac{|\{k : k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}|}{q(n)} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$

dir. Bu nedenle

$$\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \subset \{k : k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$$

kapsaması ve

$$|\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k : k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \left(1 + \frac{p(n)}{q(n) - p(n)}\right) \cdot \frac{1}{q(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$x_k \rightarrow \xi(DS[p, q])$$

elde edilir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.5 in bir sonucudur.

Sonuç 4.6 $\{q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $q(n) < n$ olacak şekilde keyfi bir dizi ve $\left\{\frac{n}{q(n)-p(n)}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda $x_n \rightarrow \xi(S)$ olması $x_n \rightarrow \xi(DS[p, q])$ olmasını gerektirir.

Teorem 4.5 ve Sonuç 4.6 in tersi $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}$ dizisi sınırlı olsa bile doğru değildir. Bunun için $p(n) = 2n$ ve $q(n) = 4n$ alalım ve aşağıdaki gibi bir $x = (x_n)$ dizisi tanımlayalım

$$x_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise,} \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ çift ise,} \end{cases}.$$

Açıkça $x_n \rightarrow 0(DS[2n, 4n])$ dır. Fakat keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k : k \leq n, |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \neq 0$$

olur.

Tanım 4.7 [32] $p(n)$ ve $q(n)$ dizileri (4.1) şartına ilave olarak $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}$ dizisinin sınırlılık şartını sağlarsa bir $DS[p, q]$ metoduna uygun deferred metod denir.

İki uygun deferred istatistiksel yakınsaklığı metodu birbirlerini kapsamak zorunda değildir. Gerçekten $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} k+1, & n = 2k+1, \\ -k, & n = 2k, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $x_n \rightarrow 0$ ($DS[2n, 4n]$) ve $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$ ($DS[2n-1, 4n-1]$) olduğu görülür.

Teorem 4.8 [32] Her $n \in \mathbb{N}$ için $q(n) = n$ olsun. Bu takdirde $x_n \rightarrow \xi$ ($DS[p, n]$) olması için gerek ve yeter şart $x_n \rightarrow \xi$ (S) olmasıdır.

İspat: Farzedelim ki $x_n \rightarrow \xi$ ($DS[p, n]$) olsun. Agnew in [39] verdiği tekniği kullanalım. Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$p(n) = n^{(1)} > p(n^{(1)}) = n^{(2)} > p(n^{(2)}) = n^{(3)} > \dots,$$

yazabiliriz. Böylece $\{k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesini

$$\begin{aligned} \{k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} &= \{1 < k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \\ &= \{k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(1)} < k \leq n : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

olarak, $\{1 < k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesini

$$\begin{aligned} \{1 < k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} &= \{1 < k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \\ &= \{k \leq n^{(2)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(2)} < k \leq n^{(1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

olarak, $\{1 < k \leq n^{(2)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesini

$$\begin{aligned} \{1 < k \leq n^{(2)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} &= \{k \leq n^{(2)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \\ &= \{k \leq n^{(3)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(3)} < k \leq n^{(2)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Genel olarak $n^{(h)} \geq 1$ ve $n^{(h+1)} = 0$ olacak şekilde n 'e bağlı pozitif bir $h > 0$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} \{k \leq n^{(h-1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \\ = \{k \leq n^{(h)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(h)} < k \leq n^{(h-1)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \\ &= \sum_{m=0}^h \frac{n^{(m)} - n^{(m+1)}}{n} \frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} |\{n^{(m+1)} < k \leq n^{(m)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

bağıntısının sağlandığı görülür. Bu bağıntı

$$\left\{ \frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} |\{n^{(m+1)} < k \leq n^{(m)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

dizisinin ξ sayısına istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

Şimdi $n^{(0)} = n$ olmak üzere

$$b_{n,m} = \begin{cases} \frac{n^{(m)} - n^{(m+1)}}{n}, & m = 0, 1, 2, \dots, h, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

matrisini gözönüne alalım. $(b_{n,m})$ matrisi Silverman-Toeplitz teoreminin şartlarını sağlar. Bu yüzden $n \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} |\{n^{(m+1)} < k \leq n^{(m)} : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) $q(n) = n$ dizisi (4.1) deki şartı sağladığı için teoremin tersi Teorem 4.5 in basit bir sonucudur.

5. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN β . DERECEDEN DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE β . DERECEDEN KUVVETLİ r -DEFERRED CESÀRO TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu bölümde $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere fuzzy sayı dizileri için β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık ve β . dereceden deferred r -Cesàro toplanabilme kavramlarını tanımlayacak ve bu kavramlara ilişkin bağıntıları inceleyeceğiz. Bu bölüm tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde aksi belirtilmedikçe $\{p(n)\}$ ve $\{q(n)\}$ dizileri (4.1) bağıntısını sağlayan iki dizi olarak göz önüne alınacaktır.

Bu kısma β . dereceden deferred yoğunluk kavramını vererek başlayalım.

Tanım 5.1 $\beta \in (0, 1]$ olsun, $E_d(n) = \{k : p(n) < k \leq q(n), k \in E\}$ olmak üzere doğal sayıların bir E altkümesinin β . dereceden deferred yoğunluğu $\delta_d^\beta(E)$

$$\delta_d^\beta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} |E_d(n)|$$

limitinin mevcut olması ile tanımlanır. $\beta = 1$ ve $q(n) = n, p(n) = 0$ olması durumunda β . dereceden deferred yoğunluk E kümesinin doğal yoğunluğuna indirgenir. $\mathbb{N}$ nin sonlu her altkümesinin β . dereceden deferred yoğunluğu sıfırdır ve $\delta_d^\beta(E) = 1 - \delta_d^\beta(E)$ eşitliği $0 < \beta < 1$ için genelde doğru değildir. Bu eşitlik sadece $\beta = 1$ ve $q(n) = n, p(n) = 0$ olması halinde sağlanır. Eğer bir dizi β . dereceden deferred yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir $P(k)$ özelliğini sağlıyorsa, bu dizi β ya göre hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.k(d_\beta)$ şeklinde gösterilir. Doğal sayıların herhangi bir E altkümesi ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için $\delta_d^\beta(E) \leq \delta_d^\gamma(E)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 5.2 $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} |\{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_d^\beta - \lim X_k = X_0$ yazılacaktır. β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi $S_d^\beta(F)$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.3 $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi, β ve r iki pozitif sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır denir. β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak tüm fuzzy sayı dizilerin kümesi $W_d^\beta[r]$ ile gösterilecektir.

Teorem 5.4 $\beta \in (0, 1]$ ise istatistiksel yakınsak her fuzzy sayı dizisi β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

İspat. Doğal sayılar kümesinin sonlu her altkümesinin β . dereceden deferred yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak her fuzzy sayı dizisi β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır. Tersini göstermek için $X = (X_k)$ dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} x - 5, & 5 \leq x \leq 6 \text{ ise} \\ -x + 7, & 6 \leq x \leq 7 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}, \quad k = n^3 \text{ ise}$$

$$0, \quad k \neq n^3 \text{ ise}$$

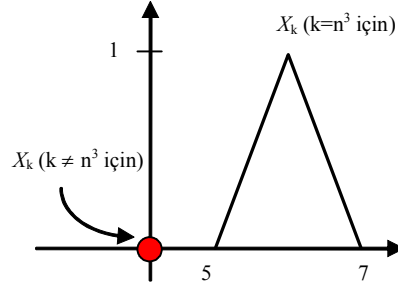
şeklinde tanımlayalım. X in α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha + 5, 7 - \alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\ [0, 0], & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}.$$

dir. Böylece

$$\frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} |\{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{\sqrt[3]{q(n)} - \sqrt[3]{p(n)} + 1}{(q(n) - p(n))^\beta}$$

yazabiliriz. Bu $X = (X_k)$ dizisinin $\beta > \frac{1}{3}$ için β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak olması demektir. Halbuki $X = (X_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Bu durum aşağıdaki grafikte ifade edilmiştir.



Şekil. 1: (X_k) β dereceden deferred istatistiksel yakınsak, Fakat istatistiksel yakınsak değildir.

β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık $\beta \in (0, 1]$ için iyi tanımlıdır, ancak $\beta > 1$ için genelde iyi tanımlı değildir. Bunun için $X = (X_k)$ dizisini

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x+5, & -5 \leq x \leq -4 \\ -x-3, & -4 \leq x \leq -3 \\ 0 & \text{diğer hallerde} \\ x-3, & 3 \leq x \leq 4 \\ -x+5, & 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{diğer hallerde} \end{array} \right\} : \begin{array}{l} X_0, k \text{ tek ise} \\ \\ \\ X'_0, k \text{ çift ise} \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. X in α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [\alpha-5, -3-\alpha] : & [X_0]^\alpha, k \text{ tek ise} \\ [\alpha+3, 5-\alpha] : & [X'_0]^\alpha, k \text{ çift ise} \end{array} \right.$$

olup $q(n) = 4n$, $p(n) = 3n$ için hem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^\beta} = 0$$

hem de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^\beta} = 0$$

dir. Fakat bu mümkün değildir.

Aşağıdaki teorem standart teknikler kullanılarak kolayca ispatlanabilir, bu yüzden bu teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 5.5 $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ fuzzy sayılarının iki dizisi olsun.

$\beta \in (0, 1]$ ise

(i) $S_d^\beta - \lim X_k = X$ ve $c \in \mathbb{R}$ olduğunda $S_d^\beta - \lim cX_k = cX$,

(ii) $S_d^\beta - \lim X_k = X$ ve $S_d^\beta - \lim Y_k = Y$ olduğunda $S_d^\beta - \lim (X_k + Y_k) = X + Y$,

β ve r herhangi iki pozitif sayı ise

(iii) $W_d^\beta [r] - \lim X_k = X$ ve $c \in \mathbb{R}$ olduğunda $W_d^\beta [r] - \lim cX_k = cX$,

(iv) $W_d^\beta [r] - \lim X_k = X$ ve $W_d^\beta [r] - \lim Y_k = Y$ olduğunda $W_d^\beta [r] - \lim (X_k + Y_k) = X + Y$.

dır.

Teorem 5.6 $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak her fuzzy sayı dizisi γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

İspat. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak olsun. Bu takdirde $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} |\{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} |\{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır. Tersini göstermek için $X = (X_k)$ dizisini

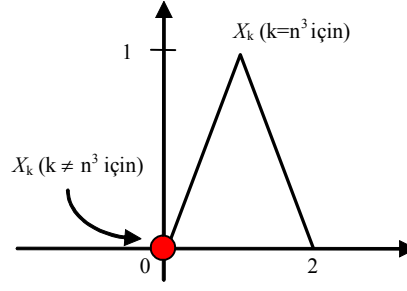
$$X_k(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -x + 2, & 1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}, \quad k = n^3 \text{ ise}$$

$$0, \quad k \neq n^3 \text{ ise}$$

şeklinde tanımlayalım. X in α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha, 2 - \alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\ [0, 0], & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Bu $X = (X_k)$ dizisinin $q(n) = 3n - 1$, $p(n) = 2n - 1$ olmak üzere $\gamma \in (\frac{1}{3}, 1]$ için γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsak olması demektir. Halbuki $X = (X_k)$ dizisi $q(n) = 3n - 1$, $p(n) = 2n - 1$ ve $\beta \in (0, \frac{1}{3}]$ için γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsak değildir. Bu durum aşağıdaki grafikte ifade edilmiştir.



Şekil 2: (X_k) γ dereceden deferred istatistiksel yakınsak,
Fakat β dereceden deferred istatistiksel yakınsak değildir

$\gamma = 1$ alırsak Teorem 5.6 dan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.7 $0 < \beta \leq 1$ olsun. β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak her fuzzy sayı dizisi deferred istatistiksel yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

Teorem 5.8 $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve r herhangi bir pozitif reel sayı olsun. β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak her fuzzy sayı dizisi γ . dereceden deferred kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

İspat. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak olsun. Bu takdirde $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r \\ & \leq \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi γ . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır. Tersini göstermek için $X = (X_k)$ dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ -x+3, & 1 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}, \quad k = n^2 \text{ ise}$$

$$0, \quad k \neq n^2 \text{ ise}$$

şeklinde tanımlayalım. X in α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha+1, 3-\alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [0, 0], & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}.$$

dir. Buradan $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, \bar{0})]^r &= \frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, \bar{0})]^r \\ &\leq \frac{\sqrt{q(n)} - \sqrt{p(n)} + 1}{(q(n) - p(n))^\gamma} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olup $X \in W_d^\gamma[r]$, fakat $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$\frac{\sqrt{q(n)} - \sqrt{p(n)} - 1}{(q(n) - p(n))^\beta} \leq \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, \bar{0})]^r \rightarrow \infty$$

olup $X \notin W_d^\beta[r]$ dir.

$\gamma = 1$ alırsak Teorem 5.8 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.9 $0 < \beta \leq 1$ olsun. β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak her fuzzy sayı dizisi kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir.

Teorem 5.10 $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve r herhangi bir pozitif reel sayı olsun. β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak her fuzzy sayı dizisi γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak olsun. Bu takdirde $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r &= \sum_{\substack{p(n)+1 \\ d(X_k, X_0) \geq \varepsilon}}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r + \sum_{\substack{p(n)+1 \\ d(X_k, X_0) < \varepsilon}}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r \\ &\geq \sum_{\substack{p(n)+1 \\ d(X_k, X_0) \geq \varepsilon}}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r \\ &\geq |\{p(n) < k \leq q(n) : [d(X_k, X_0)]^r \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^r \end{aligned}$$

yazabiliriz, buradan $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r \\ &\geq \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} |\{p(n) < k \leq q(n) : [d(X_k, X_0)]^r \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^r \\ &\geq \frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} |\{p(n) < k \leq q(n) : [d(X_k, X_0)]^r \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon^r \end{aligned}$$

olup $X = (X_k)$ dizisi γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

$X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi sınırlı olsa bile Teorem 5.10 un tersi genelde sağlanmaz, bunu göstermek için sınırlı ve β . dereceden deferred istatistiksel yakınsak olan ancak γ . dereceden deferred kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi bulmamız gerekir. Bunun için $n \in \mathbb{N}$ için $p(n) = 0$ ve $q(n) = n$ alalım ve $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\sqrt{k}-2\sqrt{k}\sqrt{k+1}x}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}, & \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq x \leq \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \text{ ise} \\ \frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}x-2\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}, & \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{array} \right\}, & k \neq m^3 \text{ ise} \\ & (m = 1, 2, 3, \dots) \\ \left\{ \begin{array}{ll} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ -x+3, & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{array} \right\}, & k = m^3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $X = (X_k)$ dizisi sınırlıdır ve X in α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{-\alpha(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})+2\sqrt{k}}{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}}, \frac{\alpha(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})+2\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \right], & k \neq m^3 \text{ ise} \\ [1+\alpha, 3-\alpha], & k = m^3 \text{ ise} \end{cases}$$

olup $\beta \in (\frac{1}{3}, 1]$ için β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır. Şimdi

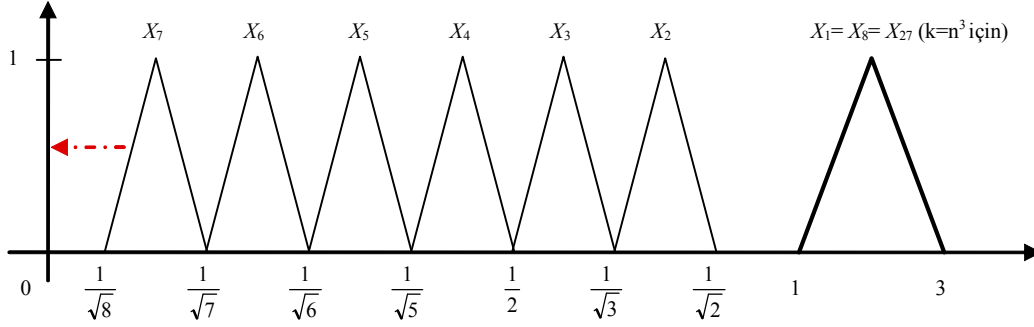
$H_n = \{p(n) < k \leq q(n) : k \neq m^3, m = 1, 2, 3, \dots\}$ diyelim. Her $n \geq 2$ için $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ eşitsizliğinin sağlandığını biliyoruz. $r = 1$ seçelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d([X_k]^\alpha, \bar{0})]^r &= \sum_{k=1}^n [d([X_k]^\alpha, \bar{0})] = \sum_{k \in H_n} [d([X_k]^\alpha, \bar{0})] + \sum_{k \notin H_n} [d([X_k]^\alpha, \bar{0})] \\ &= \sum_{k \in H_n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k \notin H_n} 3 > \sum_{k \in H_n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k \notin H_n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}. \end{aligned}$$

yazabiliriz, böylece $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d([X_k]^\alpha, \bar{0})]^r &= \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d([X_k]^\alpha, \bar{0})] \\ &> \frac{1}{n^\beta} \sqrt{n} = \frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$x \notin W_d^\beta[r]$ dir, yani $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ için $(X_k) \in S_d^\beta - W_d^\beta[r]$ $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ dir. Bu durum aşağıdaki grafikte ifade edilmiştir.



Şekil. 3: (X_k) γ dereceden deferred istatistiksel yakınsak, Fakat β dereceden kuvvetli r-Cesaro toplanabilir değildir.

Sonuç 5.11 $0 < \beta \leq 1$ ve r herhangi bir pozitif reel sayı olsun. β . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsak her fuzzy sayı dizisi deferred istatistiksel yakınsaktır, fakat $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi sınırlı olsa bile tersi doğru değildir.

Teorem 5.12 $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $\lim_n \frac{(q(n) - p(n))^\gamma}{n^\beta} > 0$ olsun. β . dereceden istatistiksel yakınsak her fuzzy sayı dizisi γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi β . dereceden istatistiksel yakınsak ve

$$\lim_n \frac{(q(n) - p(n))^\gamma}{n^\beta} > 0$$

olsun. her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supseteq \{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz, böylece $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ & \geq \frac{(q(n) - p(n))^\gamma}{n^\beta} \frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} |\{p(n) < k \leq q(n) : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin γ . dereceden deferred istatistiksel yakınsak olması demektir.

$\gamma = 1$ alırsak Teorem 5.12 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.13 $0 < \beta \leq 1$ olsun ve $\lim_n \frac{(q(n) - p(n))}{n^\beta} > 0$ olsun. β . dereceden istatistiksel yakınsak her fuzzy sayı dizisi deferred istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 5.14 $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $\left(\frac{p(n)}{q(n) - p(n)}\right)$ dizisi sınırlı olsun. β . dereceden kuvvetli r -Cesàro yakınsak her fuzzy sayı dizisi γ . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır.

İspat. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi β . dereceden kuvvetli r -Cesàro yakınsak ve $\left(\frac{p(n)}{q(n) - p(n)}\right)$ dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{p(n)}{q(n) - p(n)} \leq K$ olacak şekilde pozitif bir $K > 0$ sayısı vardır. Şimdi $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin β . dereceden kuvvetli r -Cesàro yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q(n) - p(n))^\gamma} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r \\ \leq & \frac{1}{(q(n) - p(n))^\beta} \left[\sum_{k=1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r + \sum_{k=1}^{p(n)} [d(X_k, X_0)]^r \right] \\ = & \frac{[p(n)]^\beta}{(q(n) - p(n))^\beta} \frac{1}{[p(n)]^\beta} \sum_{k=1}^{p(n)} [d(X_k, X_0)]^r + \left(\frac{q(n)}{q(n) - p(n)}\right)^\beta \frac{1}{[q(n)]^\beta} \sum_{k=1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r \\ = & K^\beta \frac{1}{[p(n)]^\beta} \sum_{k=1}^{p(n)} [d(X_k, X_0)]^r + (1 + K^\beta) \frac{1}{[q(n)]^\beta} \sum_{k=1}^{q(n)} [d(X_k, X_0)]^r. \end{aligned}$$

yazabiliriz. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi γ . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır.

$\gamma = 1$ alırsak Teorem 5.14 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.15 $0 < \beta \leq 1$ ve $\left(\frac{p(n)}{q(n) - p(n)}\right)$ dizisi sınırlı olsun. β . dereceden kuvvetli r -Cesàro yakınsak her fuzzy sayı dizisi kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır.

Aşağıdaki teoremde $\{p(n)\}$ ve $\{q(n)\}$ dizilerinin üzerindeki şartları değiştirerek Teorem 5.14 ile aynı teoremi veriyoruz.

Teorem 5.16 $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $\left(\frac{q(n) + p(n)}{q(n) - p(n)}\right)$ dizisi sınırlı olsun. β . dereceden kuvvetli r -Cesàro yakınsak her fuzzy sayı dizisi γ . dereceden kuvvetli deferred r -Cesàro yakınsaktır.

İspat. İspat Teorem 5.14 ve

$$\frac{q(n) + p(n)}{q(n) - p(n)} = \frac{(q(n) - p(n)) + 2p(n)}{q(n) - p(n)} = 1 + \frac{2p(n)}{q(n) - p(n)}$$

eşitliğinden elde edilir.



6. SONUÇLAR

Reel terimli bir $x = (x_k)$ dizisinin deferred Cesàro ortalaması Agnew [39] tarafından tanımlandı. Reel terimli bir $x = (x_k)$ dizisinin deferred istatistiksel yakınsaklığı ise Küçükaslan ve Yılmaztürk ([32],[33]) tarafından tanımlandı ve deferred Cesàro yakınsak diziler ile arasındaki ilişki verildi. Bu tezde $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere fuzzy sayı dizileri için β . dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık ve β . dereceden deferred r -Cesàro toplanabilme kavramlarını tanımlandık ve bu kavramlara ilişkin bağıntıları inceledik.



7. KAYNAKLAR

- [1] **Zygmund, A.** 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2] **Fast, H.** 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2 241-244.
- [3] **Steinhaus, H.** 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum 2, 73-74.
- [4] **Schoenberg, I. J.** 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly 66 361-375.
- [5] **Šalát, T.** 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30 139-150.
- [6] **Fridy, J. A.** 1985, On statistical convergence, Analysis 5 301-313.
- [7] **Connor, J. S.** 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, Analysis 8 47-63.
- [8] **Fridy, J. A. and Orhan, C.** 1993, Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math. 160, 43-51.
- [9] **Freedman, A. R., Sember J., Raphael, M.** 1978, Some Cesàro-type summability spaces, Proc. Lond. Math. Soc. 37, 508-520.
- [10] **Bhunia, S., Das, P. and Pal, S. K.** 2012, Restricting statistical convergence. Acta Math. Hungar. 134(1-2), 153–161.
- [11] **Çakallı, H.** 1996, On statistical convergence in topological groups, Pure Appl. Math. Sci. 43 27–31.
- [12] **Caserta, A.; Maio, GD. and Kočinac, LDR.** 2011, Statistical convergence in function spaces, Abstr. Appl. Anal. 11. Article ID420419.
- [13] **Et, M. and Şengül, H.** 2014, Some Cesàro-type summability spaces of order α and lacunary statistical convergence of order α , Filomat 28(8), 1593–1602.

- [14] **Şengül, H. and Et, M.** 2014, On lacunary statistical convergence of order α , Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 34(2), 473–482.
- [15] **Zadeh, L. A.** 1965, Fuzzy sets, Information and Control 8, 338-353.
- [16] **Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A.,** 1972, On fuzzy mapping and Control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.
- [17] **Diamond, P. and Kloeden, P.,** 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
- [18] **Dubois, D. and Prade, H.,** 1980, Fuzzy Sets Syst., Academic Press, New York.
- [19] **Nanda, S.,** 1989, On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 33, 123-126.
- [20] **Kaufmann, A. and Gupta, M.M.,** 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold.
- [21] **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.,** 1983, Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91, 552-558.
- [22] **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.,** 1986, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl., 114, 409-422.
- [23] **Matloka, M.** 1986, Sequences of fuzzy numbers, BUSEFAL 28 28-37.
- [24] **Nuray, F. and Savaş, E.,** 1995, Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3), 269-273.
- [25] **Kwon, J. S.,** 2000, On statistical and p –Cesàro convergence of fuzzy numbers, Korean J. Comput.&Appl. Math. 7 (1), 195-203.
- [26] **Altınok, H.; Altın, Y. and Işık, M.** 2012, Statistical Convergence and Strong p –Cesàro Summability of Order β in Sequences of Fuzzy Numbers, Iranian J. of Fuzzy Systems 9(2) , 65-75.
- [27] **Altınok, H.** 2014, Statistical convergence of order β for generalized difference sequences of fuzzy numbers, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 26 847–856.

- [28] **Aytar, S. and Pehlivan, S.** 2008, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and sequences of α -cuts. *International Journal of General Systems* 37.2 231-237.
- [29] **Mursaleen, M. and Başarır, M.,** 2003, On some new sequence spaces of fuzzy numbers, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **34** (9), 1351-1357.
- [30] **Mursaleen, M. and Mohiuddine, S. A.** 2009, On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space, *Jour. Comput. Appl. Math.*, 233(2) 142-149.
- [31] **Savas, E.** 2000, A note on sequence of fuzzy numbers, *Inform. Sci.* 124(1-4) 297-300.
- [32] **Küçükaslan, M. and Yilmaztürk M.** 2016, On deferred statistical convergence of sequences, *Kyungpook Math. J.* 56 (2016), 357-366.
- [33] **Yilmaztürk, M. , and Küçükaslan, M.** 2011, On strongly deferred Cesàro summability and deferred statistical convergence of the sequences, *Bitlis Eren Univ. J. Sci. and Technol.* 3, 22-25.
- [34] **Buck, R. C.** 1953, Generalized asymptotic density, *American J. Math.* 75(2) (1953), 335-346.
- [35] **Gadjiev, A. D. and Orhan, C.** Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain J. Math.* 32(1) (2002), 129-138.
- [36] **Çolak, R. ,** 2010, Statistical convergence of order α , *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121–129.
- [37] **Çolak, R.** 2011, On λ -statistical convergence, *Conference on Summability and Applications*, May 12-13, 2011, Istanbul Turkey.
- [38] **Çolak, R. and Bektaş, C. A.** 2011, λ -statistical convergence of order α . *Acta Math. Sci.* 31(3), 953-959.
- [39] **Agnew, R. P.** 1932, On deferred Cesàro Mean, *Comm. Ann. Math.*, 33(1932), 413-421.

- [40] **Maddox, I.J.**, 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [41] **Niven, I. , and Zuckerman, H. S.**, 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.



ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında İstanbul'da doğdum. 2007 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünü bitirdim. 2011 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2013 yılından itibaren Türk Telekom bünyesi altında çalışıyorum.

