

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE BU ÇÖZÜMLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI

DOKTORA TEZİ
Asif YOKUŞ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

TEMMUZ-2011

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE BU ÇÖZÜMLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI

DOKTORA TEZİ
Asif YOKUŞ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.06.2011

TEMMUZ-2011

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE BU ÇÖZÜMLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI

DOKTORA TEZİ
Asif YOKUŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29.06.2011
Tezin Savunulduğu Tarih:14.07.2011

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü.)
Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU (K.Ü.)
Prof. Dr. Nacdet ÇATALBAŞ (F.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN (F.Ü.)

TEMMUZ-2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Doğan KAYA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince kendilerini ihmal ettiğim oğlum kızım ve eşime hoşgörülerinden dolayı teşekkür ederim.

Asif YOKUŞ
ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
ŞEKİLLER VE TABLOLAR LİSTESİ.....	VI
SEMBOLLER	VII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanımlar.....	9
1.2 Dengeleme Terimi.....	10
1.3 İntegrallenebilirlik.....	10
1.4 Varyasyonel Türev	11
1.5 Korunum Kanunları.....	12
1.6 Euler-Lagrange operatörü	13
1.7 Doğruluk teoremi	14
1.8 Mathematica Programlama Dil	15
2. BOUSSINESQ KLEİN-GORDON VE LİOUVILLE DENKLEMLERİ.....	16
3. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR.....	19
3.1 Analitik Metotların Literatür Taraması.....	20
3.2 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım metodu	22
3.3 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım metodu ile ilgili bir uygulama.....	24
4. KORUNUM KANUNLARI İLE AKI-YOĞUNLUK DENKLEMLERİ.....	29
4.1 Altıncı Mertebeden Boussinesq Denkleminin Korunum Kanunları.....	30
5. $\left(\frac{1}{G'}\right)$ - AÇILIM METODU	35
6. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ve $\left(\frac{1}{G'}\right)$ -AÇILIM METOTLARI İLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI	59
7. SONUÇ	63
8. KAYNAKLAR	65
9. ÖZ GEÇMİŞ	76

ÖZET

Bu çalışma altı bölüm halinde oluşturulmuştur.

Birinci bölümde korunum kanunları ile ilgili temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, içeriğinde u_{tt} terimi bulunan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ailesi incelenmiştir. Bu denklem ailesi içerisinde çok önemli bir yere sahip olan Boussinesq Denklemine yer verdik.

Üçüncü bölümde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan bazı metotların tarihsel olarak analizi yapılmıştır. Bu metotların hepsi göz önüne alınan denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle dengeleme terimini bulma esasına dayanır. Bu yüzden bu metotlar sadece lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir. Ayrıca, bu metotlar bir kısmi diferansiyel denklemi bir dönüşün yardımı ile adi diferansiyel denkleme dönüştürür. Böylece çözüme daha kolay ulaşılabilir.

Dördüncü bölümde, literatürde var olan bazı denklemlerin korunum kanunları yardımı ile elde edilmiş olan akı yoğunluk denklemleri üzerinde duruldu. Özellikle altıncı mertebeden Boussinesq Denkleminin akı yoğunluk denklemleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, yeni bir açılım metodunun analizi yapıldı ve bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve denklem sistemine uygulamaları verildi.

Altıncı bölümde, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile elde edilen çözümler ile $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile elde edilen çözümler grafiksel olarak karşılaştırılmıştır.

Yedinci bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalga çözümleri, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metot, $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metot,

Korunum Kanunları, Boussinesq denklemi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem

SUMMARY

Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations and Comparison of Their Solutions

This study is constructed in seven chapters.

In chapter one, some fundamental definitions are given about conservation of laws.

In chapter two, nonlinear partial differential equations family that includes the term of u_{tt} are investigated. We analyzed the Boussinesq equation that has an importance place in this family equation.

In chapter three, it is made a historical analyze of some methods to obtain analytic solutions of nonlinear partial differential equations. All of these methods are based on finding balance term with balancing of the highest order linear and nonlinear term. So, these methods can be only applied to nonlinear partial differential equation. Moreover, these methods convert a nonlinear partial differential equation to an ordinary differential equation. Therefore, solution can be obtained easily.

In chapter four, we studied the flux-density equations that obtained with the aid of conservation of laws of some equations in literature. Especially we obtained the flux-density equations of sixth ordered Boussinesq equation.

In chapter five, it is made analyze of a new expansion method and given its applications some nonlinear partial differential equations and some systems. We compared the graphics of solutions which are obtained from $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and $\left(\frac{1}{G'}\right)$ -expansion method.

In chapter six, it is made a generalized assessment by supporting results which are obtained in this study.

Keywords: Solitary wave solutions, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method, $\left(\frac{1}{G'}\right)$ -expansion method, conservation laws, Boussinesq equation, Nonlinear Partial Differential Equation

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 Bir dalga ve özellikleri	2
Şekil 1.2 Sarmal yay üzerinde enine ilerleyen dalga	3
Şekil 1.3 Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga	3
Şekil 1.4 Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi	4
Şekil 1.5 Bir solitary dalga.....	6
Şekil 2.1 Boussinesq denkleminin dalga modelleri	16
Şekil 3.1 (3.11) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	27
Şekil 3.2 (3.13) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	28
Şekil 5.1 (5.11) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	38
Şekil 5.2 (5.13) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	39
Şekil 5.3 (5.15) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	40
Şekil 5.4 (5.17) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	41
Şekil 5.5 (5.24) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	43
Şekil 5.6 (5.32) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	45
Şekil 5.7 (5.37) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	48
Şekil 5.8 (5.39) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	49
Şekil 5.9 (5.41) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	50
Şekil 5.10 (5.43) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	51
Şekil 6.1 (3.11) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	61
Şekil 6.2 (3.37) ile verilen çözümde özel değerleri için yürüyen dalga	62

TABLolar LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Boussinesq denkleminin akı ve yoğunluk denklemler	29
Tablo 2. sine-Gordon denkleminin akı ve yoğunluk denklemler	30
Tablo 3. Altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin akı ve yoğunluk denklemler...	32

SİMGELER LİSTESİ

M	: Dengeleme terimi
$L_{u^j(x)}$	: Euler- Lagrange Operatör
ρ	: Akışkanın Yoğunluğu
J	: Akı
D_x	: x değişkenine göre türev
D_y	: y değişkenine göre türev
$u(x, t)$	: Çözüm fonksiyonu
$v(x, t)$	: Çözüm fonksiyonu
A	: İntegral sabiti
λ	: sabit sayı
β	: sabit sayı
μ	: sabit sayı
a_i	: sabit sayı $i=1,2,3,\dots$
V	: Hız sabiti
c	: İntegral sabiti
M_i	: u ve v çözümfonksiyonlarının farklı kuvvetlerinin
B	: Elemanları M_i olan küme
R	: Tek değişkenli ağırlıklar toplamı (Rank)
C	:Türevlerin tek terimlerinin kümesi
D_t	: Toplam türev operatörü

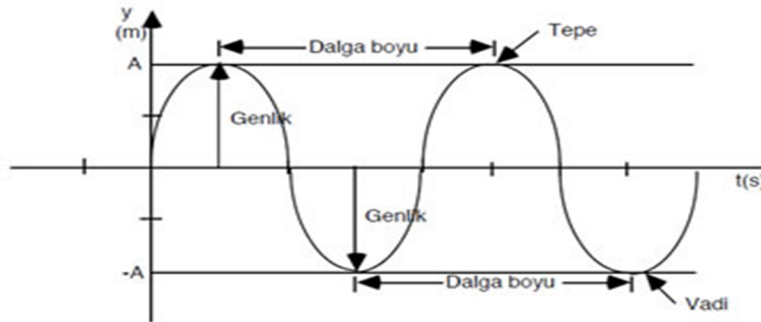
1.GİRİŞ

Bu bölümde önce diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonlarına karşılık gelen dalga hakkında genel bilgi verilmiş daha sonra ise çalışmamızın temel konularını teşkil eden “Diferansiyel Denklemler, Dengeleme Terimi, İntegrallenebilirlik, Varyasyonel Türev, Korunum Kanunları, Euler-Lagrange Operatörü, Doğruluk Teoremi, Mathematica Programlama Dili” hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Bir müzik aletinden çıkan nağmeler, deprem esnasında yeryüzündeki hareketler ve bu hareketlenme ile okyanuslarda meydana gelen büyük su dalgaları (tsunami), yüksek ve alçak basıncın meydana getirdiği rüzgârların etki alanında bulunan tüm elastiki özelliğe sahip maddelerin hareketi; radyo, televizyon ve cep telefonları gibi hayatımızı kolaylaştıran elektronik cihazların doğasında bulunan elektromanyetik dalgalar, insanlar ve diğer canlılar ile iletişim kurmak için var olan ses dalgaları gibi içinde bulunduğumuz dünyada yaşantımızı etkileyen ve yaşamımıza yön veren birçok fiziksel olay, dalga (solitary dalga) kavramı ile açıklanır. Bu nedenle dalga kavramı, bilim dünyasında çok geniş bir ilgi yelpazesine sahiptir. Yukarıda bahsedilen fiziksel olayların tamamının matematiksel modellemesi diferansiyel denklemler ile açıklanabilir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri, modellemesi yapılan olayların fiziksel özellikleri hakkında insanoğluna çok büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi, artan bir fonksiyonun özelliklerine sahiptir. Bu ilgi sonucunda diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmede kullanılan birçok teknik ve metot geliştirilmiştir. Bu metotların bir kısmı tam çözüm elde etmekte olup bir kısmı da sayısal çözüm elde etmektedir.

Dalga kavramı oldukça soyut bir kavram olarak karşımıza çıkar. Elastik bir cisim üzerine bırakılan enerji elastik cisimde bir hareketlenme meydana getirir. Bu harekete dalga ismi verilmektedir. Bu hareketlilik elastik cismin hareketiymiş gibi görünür ama bu olay elastik cismin üzerine bırakılan enerjinin taşınmasıdır. Örneğin durgun bir su yüzeyinin üzerinde yüzen bir cisim olsun. Bu ortamda belli frekanslar ile dalga oluşturursak yüzen cisim yukarı aşağı doğru salınım hareketi yapar. Cismin konumunda hiçbir değişiklik olmaz. Bu da bize ortamın hareket etmediğini, en önemlisi dalgaların enerjiyi taşıdığını gösterir. Dalganın enerji taşıma özelliği prensibinden yararlanarak büyük okyanuslarda dalga türbinleri ile elektrik enerjisi elde edilmiştir.

Bir okyanusta veya bir denizdeki dalgaları hiç seyrettiniz mi? Su yukarı ve aşağı doğru hareket ederken, dalgalar ileri doğru yol alır. Her bir dalga bir noktadan geçerken, su yukarı ve aşağı doğru hareket eder. Dalga boşlukta ve madde içinde yayılabilen ritmik bir olaydır. Bir ip ile oluşturulan dalga, bir tepe ve bir vadiye sahiptir. Tepeye *karın*, vadiye ise *çukur* adı verilir (Şekil 1.1). Her dalga belli bir dalga boyuna sahiptir. Bir karından bir karına olan toplam mesafeye bir *dalga boyu* adı verilir. Bir çukurdan, diğerine olan mesafede dalga boyu ile aynıdır.

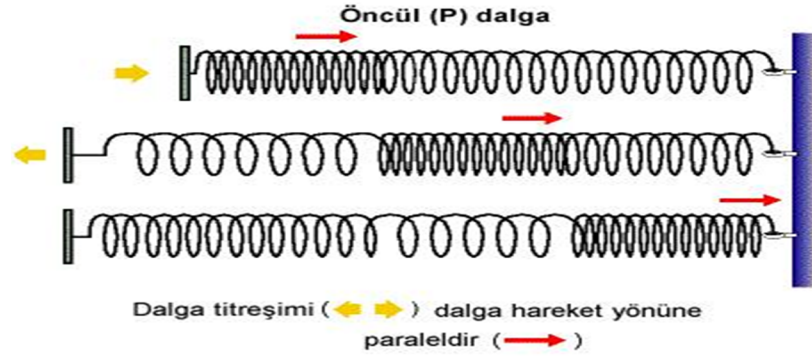


Şekil 1.1 Bir dalga ve özellikleri

Genlik, bir dalganın normal konumundan yükselme ve alçalma mesafesidir. Uzanımın en büyük ve en küçük olduğu konumlar diye de tarif edilebilir. Genlik, dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına, dalganın meydana geldiği ortama ve ortamın derinliğine bağlıdır. Dalganın enerjisi artarken genliği de artar. Örneğin, bir havuza küçük bir taş yerine, büyük bir kaya parçası atarsanız meydana gelen dalga büyük olur. Bu durumda genlik artar. Su veya bir ip ile teşkil edilen dalgalara enine dalgalar denir. Enine bir dalgada, madde dalganın yayılma yönüne dik bir yönde titreşir. Bir su dalgasında, dalga su boyunca ilerler. Su molekülleri aşağı yukarı titreşirler.

Su yüzeyine bakılırken aslında su dalgası olarak adlandırılan olay, su yüzeyinin yeni bir düzene geçmesi olarak tarif edilebilir. Bir cisim veya ortamdaki sarsıntıya karşılık gelen olay *dalga* olarak adlandırılabilir. Su dalgası gözlemlendiği zaman, su yüzeyinin yeniden düzenlendiği görülebilir. Okyanusta oluşan dalgalar bilim insanlarının ilgisini çekmiş ve bu insanoğlunun yararına nasıl kullanılabilir, düşüncesi hasıl olmuştur. Bu düşünceden hareket ile dalgalardan elektrik enerjisi üretilebileceği düşüncesine ulaşan bilim insanları, dalga jeneratörleri yardımı ile dalganın taşımış olduğu enerjiyi elektrik enerjisine dönüştürmüşlerdir. Oluşturulan bu sistemde ortamın taşıdığı enerji elektrik enerjisine dönüştürülmektedir. Buradan şu sonucu elde edebiliriz: Enerjinin taşınabilmesi

için mutlaka enerjiyi taşıyacak bir ortamın olması gerekir. Atmosferdeki gazlar olmasa rüzgâr, su olmasa dalga da olmayacaktır. Şekil 1.2 de olduğu gibi sarmal yay olmasa, üzerinde ilerleyen bir dalga olmayacaktır. Bu da bize gösterir ki dalganın oluşması için mutlaka bir ortama ihtiyaç vardır.



Şekil 1.2 Sarmal yay üzerinde enine ilerleyen dalga

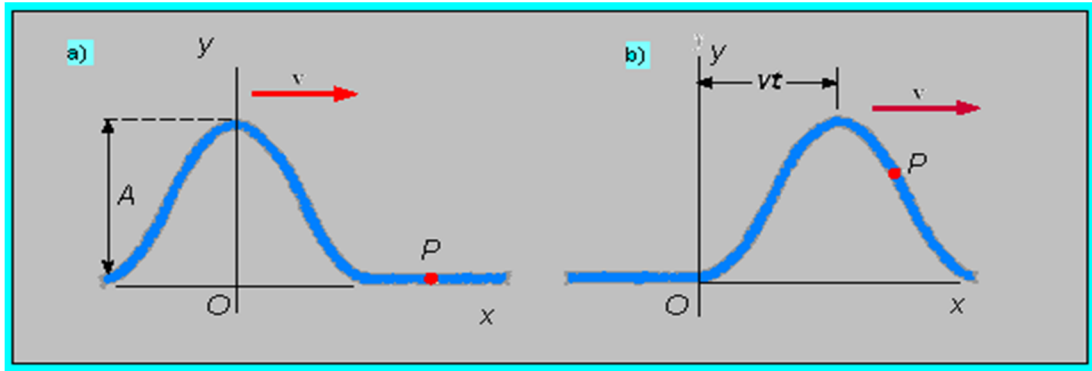
Örneğin uzay boşluğunda, sesin yayılması ve iletilmesi olanaksızdır. Çünkü ses ile oluşan enerjiyi taşıyacak bir ortam yoktur. Ses dalgalarının hava içerisinde bir noktadan diğer bir noktaya ilerlemesi basınç değişimi nedeni ile olur. Basınç değişimi ile meydana gelen enerji atmosfer ortamında iletilir. Enerjinin gücüne göre etki sahası içerisinde bulunan herkes sesi duyar. Bu da “*Dalga bir ortam boyunca yayılır.*” tezini doğrular. Bir ortama ihtiyaç duymadan yayılabilen dalgalar ise elektromanyetik dalgalarıdır.

Doğadaki olayların çoğu periyodiktir ve periyodik dalgaların frekansı, sarsıntının kendini tekrarlama hızıdır. Her dalga içinde bulunduğu ortamın özelliklerine bağlı olarak özel bir hızla ilerler ya da yayılır. Örneğin, ses dalgaları havada 20°C de 344 m/s hız ile yayılır, hâlbuki katıların çoğunda 344 m/s den daha büyük hızla yayılmaktadır. Elektromanyetik dalgalar ise boşlukta $3 \times 10^8\text{ m/s}$ büyüklüğünde bir hız ile yayılır.



Şekil 1.3 Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga

Dalga hareketini göstermenin bir yolu *Şekil 1.3* de görüldüğü gibi; gerilmiş ve bir ucu bir yere sabitlenmiş uzun bir ipin diğer ucunu ani olarak hareket ettirmektir. Bu hareket ipe bir enerji kazandıracaktır. Bu enerji sayesinde tek bir dalga atması meydana gelir ve bu dalga atması belli bir hız ile sağa doğru hareket eder. Bu tip sarsıntıya *ilerleyen dalga* denir. Dalga atması ip boyunca ilerlerken sarsılan ipin her parçası dalga hareketine dik doğrultuda basit harmonik hareket yapar. Ortamın sarsılan parçacıkları, dalga hızına dik olarak hareket ettiğinde, bu tip ilerleyen dalgaya *enine dalga* denir. Dalgaların başka bir tipine ise *boyuna dalgalar* denir. Bu tip dalgalarda ortam parçacıkları, dalganın hareket doğrultusuna paralel bir doğrultuda yer değiştirme yapar.



Şekil 1.4 Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi (a) $t = 0$ da atmanın ifadesi (b) t süre sonra şekil değişmez ve yer değiştirme $f(x - vt)$ ile verilir

Şekil 1.4 de görüldüğü gibi gerilmiş bir ipin üzerinde sabit v hızı ile sağa doğru ilerleyen bir dalga göz önüne alındığında, atma x eksenı boyunca hareket eder ve ipin enine yer değiştirmesi y koordinatı ile ölçülür. Şekil 1.4(a) da $t = 0$ anında atmanın konumu ve şekli gösterilmektedir. Bu anda, atmanın şekli ne olursa olsun $y = f(x)$ ifadesi ile temsil edilir. Maksimum yer değiştirme $A = y_m$, dalganın genliği adını alır. Dalga atmasının hızı v olduğundan; $t = 0$ anından herhangi bir t zamanına kadar sağa doğru vt uzunluğunda yol alır (Şekil 1.4(b)).

Dalga atmasının şekli zamanla değişmez ise, orijini O da olan durgun bir referans sisteminde ölçülen yer değiştirme, bütün zamanlar için y ile temsil edilir. Yani, $y = f(x - vt)$ olur. Benzer şekilde, dalga atması sola doğru ilerler ise, yer değiştirme $y = f(x + vt)$ şeklinde yazılır. Bazen dalga fonksiyonu adı verilen y yer değiştirmesi x

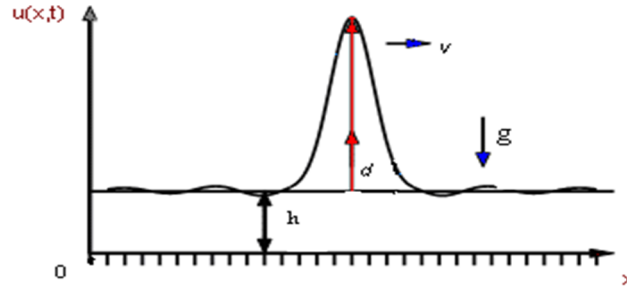
ve t gibi iki değişkene bağlıdır. Bu nedenle çoğu kez $y(x, t)$ şeklinde yazılır ve “ y , x ile t nin fonksiyonu” şeklinde okunur [1].

Bir kısmi diferansiyel denklemde bulunan bağımlı u değişkeninin fiziksel bir niceliğe karşılık geldiği bilinmektedir. Bu neden ile u bağımlı değişkeninin özelliklerini veya üretimini çalışmak oldukça önemlidir. Bu durum, dalga denklemlerinin analitik olarak özölmesi için metotların çalışılmasına yol açmıştır. Bizim bu çalışmamızın temel amacı, hareket eden dalga özömlerini bulmaktır.

İlerleme, arpışma esnasında hiçbir şekilde fiziksel özelliklerini değiştirmeyen dalgalara *solitary dalgalar* denir. Solitary dalgalar ilk olarak John Scott Russell tarafından 1834 yılında gözlemlenmiştir. Russell, Edinburg-Glasgow kanalında dalganın yapısında herhangi bir değişiklik olmaksızın yavaş bir şekilde hareket eden suyun çıkışını gözlemlemiştir. “Harika dalga aktarımı” olarak adlandırdığı bu su çıkışını Russell şu şekilde anlatmaktadır: “Ben ift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kütlesinin botun uç kısmının etrafında biriktiğini gördüm. Daha sonra bu su kütlesi arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu yuvarlanmış su kütlesinin hızının azalmadan ve formunu değiştirmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu at sırtında takip ettim. Ona yetiştiğim zaman saatte yaklaşık 8–9 mil hızla ilerlediğini gördüm. Onu 1–2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834’ün Ağustos ayında Translasyon Dalgası olarak adlandırdığım ilk görüşümü tanıtma şansım oldu” [2]. Dikkate değer bu keşif solitary dalgalar hakkında daha geniş ve daha detaylı bilgilere ulaşmak için fiziksel laboratuvar deneylere yönelen ünlü matematikçi John Scott Russell uygulama alanında bir çığır açmıştır. Russell, deneysel olarak

$$v = \sqrt{g(h + d)}$$

şeklinde hızın yer çekimi, su derinliği ve dalganın genliği ile arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmıştır. Burada *şekil 1.5’* te göröldüğü gibi v solitary dalganın hızı, d su yüzeyi üzerinde dalganın genliği, h sonlu bir derinliği ve g yerçekimi ivmesini göstermektedir. Solitary dalgalar bundan dolayı yerçekimi dalgaları olarak da adlandırılır.



Şekil 1.5 Bir solitary dalga

1844 yılında John Scott Russell tarafından yapılan deneyler ve gözlemlerin detaylı bir şekilde incelenerek rapor edilmesi ile solitary dalgalarla ilgili yeni çalışmaların ve deneylerin kapısı aralanmış olur. Başlangıçta John Scott Russell'ın çalışmaları birçok bilim insanı tarafından tartışma konusu olmuştur. Tutulan bu raporların bazı çelişkiler taşımış olduğu iddia edilmiş olsa da 1870 yılında Boussinesq ve Rayleigh tarafından yapılan teorik çalışma ile Korteweg ve de Vries tarafından 1895 yılında yayınlanan makale John Scott Russell'ın çalışmalarının doğru olduğu gösterilmiştir. 1895 yılında Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries, KdV denklemi olarak bilinen ve solitary dalgaların varlığında sığ su yüzeyinin yüksekliğini modellemek için lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemini türetmişlerdir. Ortaya atılan bu KdV denklemi birçok bilim insanının çalışma sahası olmuş ve bu çalışmalar karanlıkta kalan birçok fiziksel olayın aydınlanmasına vesile olmuştur. En basit bir biçimde tanımlanan KdV denklemi

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada uu_x terimi non-lineerliği ve u_{xxx} terimi ise lineer dağılımı temsil eder. KdV denklemi fizik ve mühendisliğin pek çok dalında zayıf bir şekilde lineer olmayan uzun dalgaların tarifi için bir paradigma olarak yaygın bir şekilde bilinir. Bu denklem pek çok sıvı akışı durumu için uygun bir model olarak kullanılır. Burada; $u(x,t)$ dalga genliğini tanımlayan uygun alan değişkenini, t zamanı, x ise dalganın yayılım yönündeki uzay koordinatını göstermektedir. (1.1) ile verilen KdV denkleminin

$$u(x,t) = d \operatorname{sech}^2(\delta(x - vt)), V = 2d = 4\delta^2 \quad (1.2)$$

şeklinde solitary dalga çözümlerinin ailesi tarafından formüle edilir. (1.2) ile verilen analitik çözümde, δ dalga sayısını, V dalganın hızını, d dalganın genliğini göstermektedir.

Solitary dalgalar 1960 yıllarına kadar gereken ilgiyi görmemiştir. Ancak 1965 yılında Zabusky ve Kruskal [3] solitary dalgaların birbirleriyle etkileşimini ele alarak yaptıkları çalışmalarda önemli veriler ortaya koymuşlardır. Zabusky ve Kruskal, KdV denklemi için yaptıkları sayısal çalışmalar ve bu denklemin integrallenebileceğini göstermeleri ile solitary dalgalara olan ilgiyi tekrar arttırmışlardır. Aynı yıl içerisinde Zabusky ve Kruskal, solitary dalgaların birbirleriyle etkileşim içinde olduğunu keşfetmişlerdir. Bunlara ilaveten, doğal yapısını muhafaza eden bu dalgaların bu etkileşimden ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Kimliklerini koruyan ve karakterlerini küçük parçalarına aktarabilen solitary dalgaların keşfi, Zabusky ve Kruskal'ı bu tip solitary dalgalara solitonlar demek için cesaretlendirmiştir. Bu bilim adamları, solitonlar kavramının doğuşuna damgalarını vurmuşlardır. Aynı zamanda Schrödinger denklemi gibi lineer olmayan dalga denklemleri ile birlikte soliton çözümler bu alanda yapılan çalışmalarda önemli bir rol oynamıştır. Solitonlar ve integrallenebilir sistemlerin modern teorisi matematiğin büyük bir alanı olma yolunda ilerlemektedir. Ayrıca soliton teorisi [4,5] pek çok fiziksel alanda da uygulama sahasına sahiptir.

Diğer taraftan, bir soliton aşağıdaki özellikleri taşıyan bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olarak tanımlanabilir.

- i) Çözüm, sürekli bir dalga formunda olmalıdır.
- ii) Çözüm sınırlandırılır, yani; KdV denkleminde elde edilen solitonlar gibi çözüm üstel olarak sıfıra doğru bozular veya Sine-Gordon denkleminde verilen solitonlar gibi çözüm sonsuzda bir sabite yakınsar.
- iii) Soliton, karakterini koruyan diğer solitonlar ile iç etkileşim içinde bulunur.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Diğer bir ifade ile bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca, KdV denkleminin başka denklemler için tek dalga çözümü $\sec h^2$ fonksiyonu olmayabilir fakat $\sec h$ veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir.

Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Hirota [6] bilinear forma indirgeyerek evulasyon denklemlerinin N -soliton çözümlerini oluşturmuştur. Bilinear formülasyon Hirota tarafından ortaya atılmış ve bu formülasyon lineer olmayan denklemlerin çalışılmasında önemli açılımlar sağlamıştır. Nimmo ve

Freeman [7], N -soliton çözümlerinin formülasyonuna alternatif olarak N -fonksiyonların Wronskian determinantına giriş yapmışlardır.

Bugün solitonlar çoğu yerde kullanılmaktadır. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin herhangi bir değişikliğe uğramadan ve büyüklüğü bozulmadan hedefe ulaşması önemlidir. Normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Bu lineer dalgalar etrafa yayılabilir ve sinyalleri zayıflayabilir. Oysa solitonlar sıradan dalgalara göre genişliklerini değiştirmeden sabit tutabilmektedirler. Soliton dalgalar ile 10.000 km' ye kadar özellikleri değişmeden başarıyla sinyal iletilebilmektedir. Bununla birlikte çarpıştıklarında birbirlerinden etkilenmemekte ve sinyaller optik fiberler boyunca her iki yönde iletilebilmektedir. Sinyaller, gideceği yere orijinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir. Bunlara, deneylerdeki ilerlemeler, lineer olmayan sistemlerin bilgisayar simülasyonundaki olağanüstü başarılar ve hamilton sistemleri üzerine yapılandırılmış metotlarla, ters spektral dönüşümlerin de kullanıldığı yeni matematiksel analitik araçlar öncülük etmiştir. Olayların tam olarak anlaşılabilmesi için teorik bilgisayar ve deneysel bilim arasındaki sinerji, yeni araştırmaları beraberinde getirecektir. Böylelikle elektromanyetik dalgaları otomatik olarak yineleyen aletlere ihtiyaç kalmayacaktır.

Doğal sistemler üzerindeki araştırmalar genelde, sıvı dinamiğinde yapılan denemelerden, materyal bilimi ve sıvıların kimyasal aktivitelerinden türevlenen tek kısımlı Kısmi Diferansiyel Denklemler ile başlamıştır. Bunların çoğu lineer olmayan dalga çözümleri veya soliton çözümleri olarak bilinir. Bu sınırlı bilgiler daha sonraları sayısal simülasyonlarla genişletilmiştir. Modeller; dağılma, ilerleme terimleri veya başlangıçta ihmal edilen etkilerin de katılması ile daha da zenginleştirilmiştir.

1. 1. Temel Tanımlar

Bilimin hemen her dalında çözümü istenen problemlerin özelliklerini taşıyan bir matematiksel model kurulması gerekebilir. Bu tür bir model çoğunlukla bilinmeyen fonksiyon ya da fonksiyonlarla bağımsız değişkenleri ve bu fonksiyonların türevini içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar, bu tür denklemlere *diferansiyel denklem* denir. Genellikle uygulamalı bilim dallarının ortaya koyduğu diferansiyel denklemlerle birlikte bazı şartla da doğal olarak ortaya çıkar. Bu nedenle belli şartlar ile birlikte verilen diferansiyel denklemler, uygulamalı bilim dallarında önemli bir yere sahiptir.

Diferansiyel denklemlerin elde edilişleri üç kısımda toplanabilir:

Problem cebirsel özelliklerle verilebilir. Örneğin, içinde birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit içeren cebirsel bir denklem, düzlemde bir eğri ailesi oluşturur. Böyle bir eğri ailesinin öğelerinin bazı ortak özelliklerini bu keyfi sabitlerin verilen cebirsel denklem ve onun türevleri arasında yok edilmesi ile elde edildiği bilinmektedir. Bu yok etme işleminin sonunda bir diferansiyel denklem elde edilebilmektedir.

Geometrik özellikleri ile problemi tanımlayıp bu özelliklere uyan bir eğrinin bulunması da bize bir diferansiyel denklem verir. Bilindiği gibi bir eğrinin bir noktadaki teğetinin eğimi o noktadaki türevin değeri ile verilmektedir.

Uygulamalı bilim dallarında ise problemin bir matematiksel modeli elde edilerek olaya veya sisteme karşılık gelen diferansiyel denklem oluşturulabilir.

Bugüne kadar birçok bilim adamı fiziksel olayları modelleyerek birçok diferansiyel denklem oluşturmuşlardır. Modelleme yapılırken olayın fiziksel özellikleri ve birçok fiziksel kanunlar göz önüne alınmaktadır. Literatürde diferansiyel denklemlerin korunum kanunları adı altında fiziksel özellikleri incelenmektedir. Elde edilen matematiksel modelin çözümleri için birçok metot geliştirilmiş

1. Değişkenlerine ayırma metodu,
2. D' Alembert Metodu,
3. Riemann Metodu,

gibi klasik metotlar ve diğer özel metotlar kullanılarak çözüm fonksiyonları elde edilebilir.

Elde edilen model denklemin ve bu modelin çözümlerinin, modele uygun olup olmadığını Hadamard kuralı ile iyi durumlu (well-posed) veya kötü durumlu (ill-posed) olduğunu test etmek mümkündür. Modeli oluşturan kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki

- Bir çözüm mevcut ise o çözüm tektir.
- Başlangıç ve sınır şartlarının uygun sınırlamalar altında bir çözümü vardır,
- Kararlıdır,

şartlarını sağlıyorsa modele iyi durumludur, aksi taktirde kötü durumludur denir. Başlangıç veya sınır şartlarında çok küçük bir değişme yapıldığında çözümde çok büyük değişiklikler olmuyorsa sisteme kararlıdır, yani; çözüm sürekli olarak başlangıç ve sınır şartlarına bağlıdır denir [8].

Diferansiyel denklemler lineer olup olmadıklarına göre de sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklem bağımlı değişkenin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük dereceden kuvvetlerini içeriyorsa veya bağımlı değişkenin ve türevlerinin çarpımını

içeriyorsa bu diferansiyel denkleme *lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir*.

1. 2. Dengeleme Terimi

$\frac{G'}{G}$ -Açılım Metodunda kullanılan dengeleme terimi hakkında kısa bir bilgi verelim.

Dengeleme terimi, toplam şeklinde verilen çözüm fonksiyonu üst sınırını temsil etmektedir. Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim arasında elde edilen sabit bir sayıdır. Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden

lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s$ ile verilsin. Burada p, q, r ve s birer sabit sayı ve m dengeleme terimi olmak üzere $m + q = mp + s(m + r)$ eşitliği yazılabilir.

1. 3. İntegrallenebilirlik

İntegrallenebilirlik kavramı ilk olarak Fuchs tarafından ortaya atılmış olup bir çok bilim insanı bu kavram hakkında çalışmalar yapmıştır [9]. Bu çalışmalar neticesinde İntegrallenebilirliğin en önemli özelliklerinden biri de, denklem sisteminin davranışları hakkında genel bir bilgi verdiği saptanmıştır. Ayrıca lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem, lineer denklem sistemine indirgenebilir. Bu lineer denklem sistemi integre edilebilir özelliklere sahiptir. Bu lineer denklemlerin genel çözümlerinin bir integral gösterimi vardır. Eğer uygun sayıda integraller elde edilirse bu durumda integrallenebilirlik tam integrallenebilirlik olarak adlandırılır.

İntegrallenebilirlik, dinamik sistemi genel olarak anlamak için daha fazla önsezi gücü ve nicel bilgi elde etme işinde başarı ile kullanılabilen matematiksel bir özellik olarak düşünülebilir. İntegrallenebilirlik, dinamik sistemlerde çok yaygın bir şekilde kullanılan matematiksel terimdir. Ancak bu terimi kullananlar arasında bile bu terimin tanımı hakkında ortak bir görüş yoktur. Dinamik sistemlerde daha yaygın olarak kullanılmasına rağmen fiziksel olayların modellenmesinde ve integral denklemlerde de kullanılmaktadır. Biz bu çalışmada diferansiyel denklemlerin korunum kanunlarını oluştururken diferansiyel denklemlerin integrallenebilirliği ile ilgileneceğiz. İntegrallenebilirlik kavramı ile

çözülebilirlik kavramı bazı yönleri ile ilişkisi olsa da birbirinden farklı kavramlardır. Matematikçilerin ilgilendikleri en önemli husus verilen denklemin integrallenebilir olup olmadığıdır. Bu husus ise denklemi ele alan kişinin kabiliyetine, şansa ve sayısal hesaplara bağlıdır. Çünkü bir denklem sisteminde integrallenebilirlik hakkında bir tanımlama yoktur.

Matematikte klasik dinamik sistemlerinin zamana bağlı davranışları lineer olmayan diferansiyel denklemler ile temsil edilirler. Lineer olmayan bu diferansiyel denklemler; bağımlı değişkenlere, dış kuvvetlere ve sistemin enerjisine bağlı olarak, çözümün düzenli yörüngelerin yanı sıra düzensiz yörüngeler de ortaya çıkarırlar. Dinamik sistemlerin düzgün ve düzgün olmayan yörüngelerin belirlenmesi ve bu yörüngeleri incelenmeye yarayacak iyi tanımlı analitik tekniklerin bulunması birçok bilim insanının araştırma sahası olmuştur. Lineer olmayan dinamik sistemlerde verilen sistemin hareketinin ne zaman düzgün olduğunu bulmak önemli bir problemdir.

Bu safhada integrallenebilirliğin ne olduğu ve onun ne zaman bulunabileceği soruları doğal olarak ortaya çıkar. İntegrallenebilirlik kavramı bazı bakımlardan, iyi tanımlı olmadığından, hangi şartlar altında ne zaman tam integrallenebilirliği hakkında bir şey söyleyemeyiz. Ayrıca integrallenebilirlik hallerini ortaya çıkaracak iyi tanımlı bir ölçütün yokluğu nedeni ile ne zaman düzensiz hareket alana geçerek integrallenemez olduğu hakkında bir şeyler söylemek çok daha zordur.

1. 4. Varyasyonel Türev

Varyasyon hesabının uygulaması temel olarak, içerisinde bilinmeyen fonksiyon bulunan ifadelerin maksimum ve minimum değerlerinin belirlenmesinden ibarettir. Burada diferansiyel hesabın ilkeleri göz önüne alınarak bilinmeyen fonksiyonun bulunmasında Euler-Lagrange operatörü kullanılacaktır. Literatürde varyasyonel türev Euler-Lagrange operatörü olarak da adlandırılmaktadır.

Diferansiyel hesabın önemli bir problemi $y = f(x)$ fonksiyonuna (a,b) aralığındaki maksimum ve minimum değerini veren x değerini aramaktır. Eğer bu aralıkta $y = f(x)$ fonksiyonu sürekli bir türeve sahipse (a,b) aralığındaki bir x_0 noktasında bu fonksiyonun maksimum ya da minimum değere sahip olmasının *gerek şartı* $\frac{dy}{dx} = 0$, olmasıdır. $y = f(x)$ fonksiyonun bu aralıkta maksimum (ya da minimum) değere sahip olmasının *yeter şartı* ise bu noktada

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} < 0,$$

olmasıdır. Eğer iki bağımsız değişken ihtiva eden $z = f(x, y)$ yüzey fonksiyonu, $\Re$ bölgesinde $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri tanımlı ve sürekli ise, bu bölgedeki (x_0, y_0) noktasında yerel maksimum ve minimum noktasına sahip olabilmesi için gerek şart aynı anda

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ ve } \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

olmasıdır.

1.5. Korunum Kanunları

Dalgalar doğanın birçok yerinde gözlemlenmiş olup bunları atmosfer, okyanus, plazma ve birçok canlı organizmaların sinir sistemlerinde vs. şeklinde sıralayabiliriz. Ayrıca modern iletişimde önemli bir rol oynamaya başlayan dalgalar, özellikle uzun mesafeli sinyallerin iletilmesinde doğasını koruyarak uygun taşıyıcılar olarak karşımıza çıkar. Literatürde bu taşınım değişmezleri; kütle, momentum ve enerji korunumu olmak üzere üç şekilde ele alınmaktadır. Kısmi Diferansiyel Denklem sistemlerinin korunum kanunlarının bir sonsuz dizinin varlığı, tam integrallenebilir olduğu fikrini ortaya atmıştır. Aslında Burgers denklemi gibi direkt integrallenebilen sistemler mevcuttur ancak sonlu sayıda korunum kanunlarına sahiptir [10]. Ancak “İntegrallenebilirlik” terimi sistemlerin oluşturulmasında bazı zorlukların var olduğunu gösteriyor. İntegrallenebilir sistemler bir manada tam çözülebilir ve başlangıç şartları için düzenli çözümler gösterir. Tersine integrallenemezlik terimi genel olarak sistemin tam çözümünün olmadığı durumları için alınır ve bu da çözümün başlangıç koşullarının hassasiyetinden dolayı düzensiz davranışlar gösterir. Ancak çözüm metodu karmaşıktır. Birçok fiziksel problem lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile modellenmiş olmasına rağmen birçok dönüşüm metodu problemi çözmek için yetersizdir [10]. Fiziksel bir problemin matematiksel modellemesi yapılırken korunum kanunları ve bazı değişmezler göz önüne alınarak yapılmaktadır. Korunum kanunları yoğunluk-akı dengesi tartışmalarının kapısını aralar. Ayrıca korunum kanunları çözümlerin hem nicel hem de nitel özelliklerinin çalışılması için yararlı ve basit bir metottur.

Korunum kanunlarının hesaplanmasında en önemli araçlardan biri Euler Operatörüdür. Bu operatör Euler Lagrange operatörü veya varyasyonel türev olarak bilinir. Euler Lagrange operatörünün birçok kullanım alanı mevcut olup aynı zamanda korunum kanunlarının doğrulanmasında önemli bir rol üstlenmektedir. Daha sonra tanıtılacak olan doğruluk teoremi içinde önemli bir araçtır. Doğruluk teoreminin temel taşı Euler Lagrange operatörü aynı zamanda bu teoremi doğrulamak için bir yöntem sağlar.

Genel olarak fiziksel olayların matematiksel modellenmesi yapılırken, ρ yoğunluğu ve J akıyı temsil etmek üzere

$$\rho_t + J_x = 0, \quad (1.3)$$

şeklinde akı-yoğunluk dengesi olarak bilinmektedir. Kısmi diferansiyel denklemlerin korunum kanunları araştırılırken (1.3) ile verilen yoğunluk-akı denklemi temel taşı oluşturmaktadır. İncelenen kısmi diferansiyel denklem integrallenebilir olduğu zaman denklemi (1.3) ile verilen denklem biçiminde yazabiliriz.

Ayrıca lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümleri elde edildikten sonra yoğunluğun korunum kanunlarını sağladığını görmek için t sabit zaman için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx = \text{sabit} \quad (1.4)$$

olması yeterli olacaktır [11].

1. 6. Euler Lagrange Operatörü

$f = f(x, u, u_x, \dots)$ şeklinde verilen ifade diferansiyel fonksiyonu temsil etmek üzere

$$L_{u(x)} f = \left(L_{u^1(x)} f, L_{u^2(x)} f, \dots, L_{u^N(x)} f \right) \quad (1.5)$$

ile verilen operatör Euler Lagrange operatörü olarak bilinmektedir. Burada $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, olmak üzere (1.5) ile verilen eşitlikte

$$L_{u^j(x)} f = \sum_{k_1=0}^{M_1^j} \dots \sum_{k_n=0}^{M_n^j} (-D_{x^1})^{k_1} \dots (-D_{x^n})^{k_n} \frac{\partial f}{\partial u_{k_1 x^1 \dots k_n x^n}^j}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

biçiminde verilebilir. Uygulamada korunum kanunları sadece bir iki ve üç boyutlular için yapılmaktadır. Euler operatörü $f = f(x, u^{(M)}(x))$ olmak üzere

$$L_{u^j(x)} f = \sum_{k_1=0}^{M_1^j} (-D_x)^{k_1} \frac{\partial f}{\partial u_{k_1}^j}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u^j} - D_x \frac{\partial f}{\partial u_x^j} + D_x^2 \frac{\partial f}{\partial u_{2x}^j} - D_x^3 \frac{\partial f}{\partial u_{3x}^j} + \dots + (-D_x)^{M_1^j} \frac{\partial f}{\partial u_{M_1^j x}^j}, \quad (1.6)$$

$j=1,2,\dots,N$ verilebilir. (1.6) ile verilen Euler operatörü tek boyutlu durum için kullanılmaktadır. Ayrıca iki boyutlu durum için

$$L_{u^j(x,y)} f = \sum_{k_1=0}^{M_1^j} \sum_{k_2=0}^{M_2^j} (-D_x)^{k_1} (-D_y)^{k_2} \frac{\partial f}{\partial u_{k_1 k_2}^j}, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (1.7)$$

üç boyutlu durum için

$$L_{u^j(x,y,z)} f = \sum_{k_1=0}^{M_1^j} \sum_{k_2=0}^{M_2^j} \sum_{k_3=0}^{M_3^j} (-D_x)^{k_1} (-D_y)^{k_2} (-D_z)^{k_3} \frac{\partial f}{\partial u_{k_1 k_2 k_3}^j}, \quad j=1,2,\dots,N. \quad (1.8)$$

şeklinde yazılabilir [12].

Korunum kanunları ışığı altında diferansiyel denklemin integrallenebilir olup olmadığı önemli bir mevzudur. Ayrıca akı yoğunluk denklemleri elde edilirken çok karmaşık işlemler ile karşılaşmaktadır. Bu yoğun işlem karmaşıklığını ortadan kaldırmak için sembolik programlama diline ihtiyaç vardır. Ayrıca diferansiyel bir ifadenin integrallenebilir yani tam olması aşağıda tanımlanacak olan teorem ile belirlenir. Bu teorem korunum kanunlarının hesaplama anahtarıdır. Bu teorem sayesinde verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin yoğunluk ve akının matematiksel modeli elde edilecektir.

1. 7. Teorem (Doğruluk teoremi):

$f = f(x, u^{(M)}(x))$ şeklinde verilen diferansiyel fonksiyonun tam olabilmesi için gerek ve yeter şart $L_{u(x)} f = 0$ olmasıdır.

Bu çalışmamızda doğruluk teoreminin ispatından çok, diferansiyel fonksiyonun tam olabilmesi durumu incelendiğinden teoremin ispatı verilmemiştir. Ancak [11] referansında geniş bir şekilde yer verilmiştir. Korunum kanunlarının temel taşı olan bu teorem yardımı ile diferansiyel denklemin integrallenebilir olup olmadığı hakkında bilgi verecektir. Ayrıca doğruluk teoremi korunum kanunlarında yoğunluk denkleminin katsayılarının belirlenmesinde kullanılacaktır. Bu katsayılar belirlenirken elde edilen enerji denklemi Euler-Lagrange operatörü uygulandığında elde edilen polinomsal denklemin sıfıra

eşitlenmesi ile elde edilir.

1. 8. Mathematica Programlama Dili

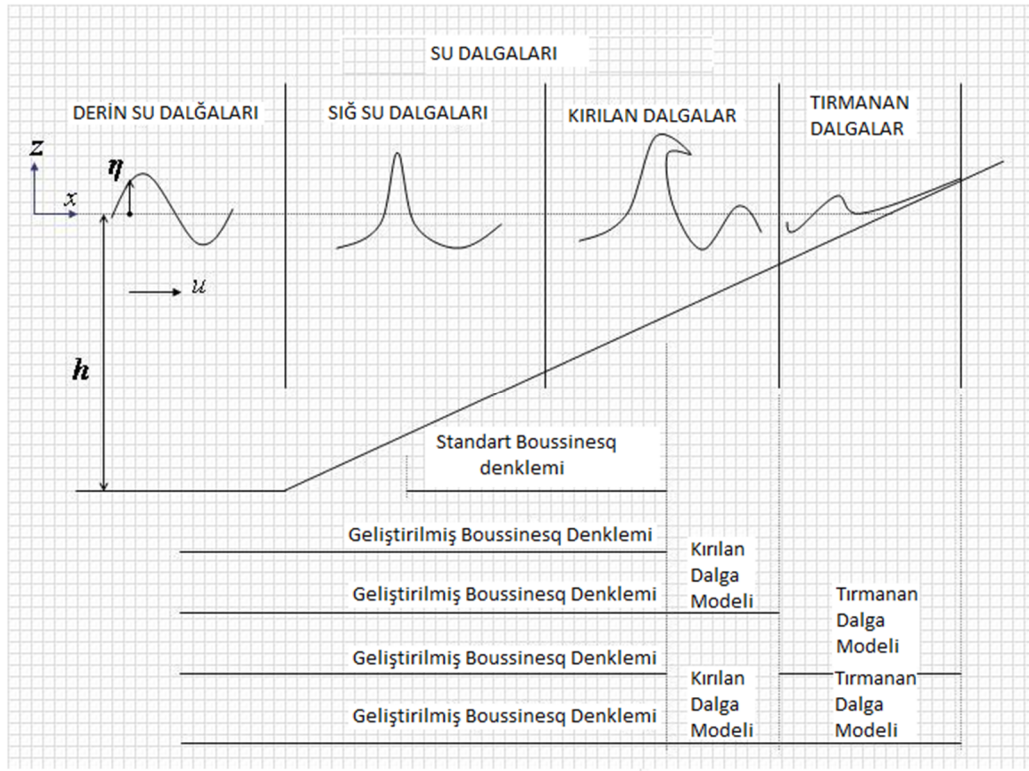
Özellikle uygulamacıların yakından takip ettiği, vazgeçilmez araçlardan biri de bilgisayar teknolojisi ve yazılım programlarıdır. Gelişen teknoloji ile birlikte bilgisayar alanında yazılım ile ilgili çok büyük gelişmeler olmuştur. Yazılım programları bilime çok büyük katkı sağlamaktadır. Matlab, Maple ve Mathematica sembolik programlama dillerinden en popüler olanlarıdır. Bu sembolik programlama dilleri arasında Maple ve Mathematica kullanım yaygınlığı ve kolaylığı açısından diğerlerine göre daha avantajlıdır. İlk olarak 2.0 versiyonu ile piyasaya sürülmüş Mathematica programlama dili gelişen teknolojiye paralel olarak yeni versiyonları ile günümüzde popülerliğini sürdürmektedir. Şu anda 8.0 versiyonu ile bilim insanlarına katkı sağlamaktadır. Yeni versiyonlar üzerinde de çalışmalar devam etmektedir. Eski versiyon ile yeni versiyon arasında bir çok farklılıklar olduğu gibi programın çalışma hızı da farklılıklar göstermektedir. Programın performansı yazılım kuralları ve bilgisayarın işlemcisinin niteliğine bağlıdır.

Bu çalışmamızda gerek korunum kanunlarının akı yoğunluk denklemlerini elde ederken gerekse lineer olmayan denklemlerin çözümü ve grafiklerin çiziminde Mathematica 8.0 programlama dilini ve Intel Core i5 işlemcisine sahip bir bilgisayar kullanılmıştır.

2. BOUSSINESQ, KLEİN-GORDON VE LİOUVILLE DENKLEMLERİ

Bu bölümde içeriğinde u_{tt} terimini bulunduran lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ailesi hakkında genel bilgi verilmiştir.

Su dalgalarının okyanustan kıyıya doğru yayılımı insanoğluna bazı zamanlar mutluluk bazı zamanlar ise felaket getiren bir doğa olayıdır. Su dalgalarının yayılmasının fiziksel tartışması devam etmekte olan bir araştırma konusudur. Dalga yayılımını konu edinen matematiksel modeller arasında Boussinesq denklemi özellikle sığ sularda rastgele ve lineer olmayan su dalgalarının yayılımını yüksek doğrulukta tahmin etmekle bilinir. Son zamanlarda daha derin sularda, suların lineer dağılım ilişkileri ile ilgili uygulamadan kaynaklanan problemler Boussinesq denklemi kullanılarak, kısmen çözülmüştür.



Şekil 2.1. Boussinesq denkleminin dalga modelleri

Birçok bilimsel uygulama ve fiziksel olaylara ışık tutan ve içeriğinde ikinci mertebeden kısmi türev olan u_{tt} terimini bulunduran lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ailesi içerisinde Boussinesq, Klein Gordon ve Liouville denklemleri bulunmaktadır. Soliton teorisinde önemli bir konuma sahip olan bu tür denklem ailesinin

genel biçimi

$$u_{tt} - u_{xx} + P(u) = 0, \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1) ile verilen denklemde doğrusal olmayan terim $P(u)$, ifadelerlerini

$$P(u) = \begin{cases} -3(u^2)_{xx} + \lambda u_{xxxx}, \\ -3(u^2)_{xx} + \lambda u_{xxtt}, \\ u - u^2, \\ e^{\mp u}, \\ e^{\mp u} + e^{-2u}, \\ \sin u, \\ \sinh u, \end{cases} \quad (2.2)$$

şekilde verebiliriz. Burada (2.2) ile verilenlerden özel olarak $P(u) = -3(u^2)_{xx} + \lambda u_{xxxx}$, seçilirse lineer olmayan dördüncü mertebeden Boussinesq denklemini

$$u_{tt} - u_{xx} + -3(u^2)_{xx} + \lambda u_{xxxx} = 0, \quad (2.3)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.3) ile verilen Boussinesq denklemi, klasik sığ su dalgaları için çok sık bir şekilde kullanılmaktadır. Tam integrallenebilir denklemlerin ortak özelliklerinden biri korunum kanunlarının sonsuz sayıda yazılabileceğidir. Boussinesq denklemi tam integrallenebilir olduğundan sonsuz sayıda korunum kanunları yazılabilecektir. Burada $\lambda = -1$, olması durumunda kötü durumlu Boussinesq denklemi, $\lambda = 1$, olması durumunda ise iyi durumlu Boussinesq denklemi olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca (2.2) ile verilen ifadelerden $P(u) = -3(u^2)_{xx} + \lambda u_{xxtt}$, alınması durumunda

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} + \lambda u_{xxtt} = 0, \quad (2.4)$$

şeklindedir. (2.4) ile verilen denklem ise literatürde genelleştirilmiş Boussinesq denklemi olarak bilinmektedir. Benzer şekilde λ sabitinin aldığı durumuna göre iyi ve kötü durumlu olarak adlandırılabilir. Daripa çalışmasında [13] altıncı mertebeden Boussinesq denklemini

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{4x} - \kappa^2 u_{6x} = 0, \quad (2.5)$$

şeklinde ele almıştır. (2.5) ile verilen denklemde özel olarak $\kappa = 0$, alınırsa klasik Boussinesq denklemi elde edilecektir. Eğer (2.2) ile verilen ifadede $P(u) = u - u^2$, olarak alırsak

$$u_{tt} - u_{xx} + u - u^2 = 0, \quad (2.6)$$

şeklinde denklem elde ederiz. (2.6) ile verilen denklemde literatürde lineer olmayan Klein Gordon denklemi olarak bilinmektedir. (2.2) ile verilen ifadede $P(u) = e^{\mp u}$, olarak alınması durumunda

$$u_{tt} - u_{xx} + e^{\mp u} = 0, \quad (2.7)$$

olur. (2.7) ile verilen denklem ise iyi bir şekilde bilinen Liouville denklemi olarak bilinmektedir. (2.2) ile verilen ifadede $P(u) = \sin u$, alınması durumunda ise

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (2.8)$$

yazılır. (2.8) ile verilen denklemde sine-Gordon denklemi Sukardi'nin çalışmasında tanımlanır[14]. Biz bu çalışmada Boussinesq denkleminin literatürde var olan korunum kanunları hakkında kısa bir bilgi sunacağız. Ancak bizim bu çalışmada şu ana kadar korunum kanunları çalışılmamış olan altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin korunum kanunlarını inceleyeceğiz. Ayrıca yeni geliştirmiş olduğumuz açılım metodu ile aynı denklemin analitik çözümünü ve bu çözümün de korunum kanunlarını sağladığını göstereceğiz.

3. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR

Lineer olmayan denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerini bulmak için bazı metotlar son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılmakta olup bu metotlar genişletilerek ve geliştirilerek farklı düşünceler, yorumlar, çözüm yolları ve çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Bu gelişmeler literatüre birçok yeni kazanımlar sağlamıştır. Literatürde var olan çalışmalar, birçok araştırmacıya ilham kaynağı olmuştur ve bundan sonra da olmaya devam edecektir. Bilgisayar teknolojisinin yoğun bir şekilde kullanılmadığı dönemlerde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerini bulmak için çok karmaşık ve sıkıcı cebirsel hesaplamalar araştırmacıların işini zorlaştırmıştır. Son yıllarda teknoloji ile birlikte gelişen bilgisayar ve bilgisayar programları araştırmacılara büyük kolaylıklar sağlamıştır. Özellikle matematik alanında, çok sık bir şekilde kullanılan Maple veya Mathematica gibi sembolik programlama dilleri kullanılarak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümlerini elde etmek, giderek ilgi çekici hale gelmiştir. Bilgisayar teknolojisi ile işlem karmaşıklığı daha basit hale getirilmiştir. Günümüzde özellikle Mathematica programı kullanılarak bazı metotların paket programları oluşturularak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler bilgisayar ortamında kısa zamanda ve daha az işlem ile çözülmektedir. Bu gelişmelerden sonra bilim dünyası daha farklı okyanuslara yelken açacaktır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, mühendislik, kimya, biyoloji, mekanik, tıp, astronomi, uzay bilimleri ve fizikte ortaya çıkan birçok karmaşık olayın matematiksel modelleridir. Bu fiziksel modellerin yapısını ve mekanizmasını daha iyi anlamak, fizikçilere ve mühendislere yardımcı olmak veya fiziksel problemlere ve uygulamalarına daha fazla ve sağlıklı bilgi elde etmek için birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bu metotlar ile elde edilen analitik çözümler *soliton* teorisinde [4] büyük bir öneme sahiptir. Bu metotlar, işleyiş sürecinde bazı avantaj ve dezavantajlara sahiptir. Bu nedenle ele alınan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem yapısı, uygulanacak metoda uygun olmalıdır. Çünkü bazı metotlar bazı kısıtlı denklemlere uygulanabilir.

Bu bölümde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bazı analitik metotların literatür taraması verilecektir.

3.1. Analitik Metotların Literatür Taraması

Fiziksel olayların matematiksel modellemesi olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri, birçok fiziksel olaya ışık tutmuştur. Ayrıca bu çözümler o denklemin yapısı, karakteri ve mekanizması hakkında bilgi verir. Elde edilen bu bilgiler birçok fiziksel olaydaki belirsizlikleri ortadan kaldırdığından bu analitik çözümler büyük bir öneme sahiptir. Özellikle kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri ve periyodik dalga çözümlerine olan ilgi son zamanlarda artmıştır. Bu tip çözümleri elde etmek için birkaç klasik metot vardır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünü elde etmek için genel bir metot yoktur. Bu da bize lineer olmayan denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin elde edilmesinde birçok zorlukların varlığını işaret eder. Birçok metot kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulmak için oluşturulmuştur. Bulunan bu metotlardan çoğu zaman sayısal çözümler elde edilir. Bunlara ilaveten, dönüşüm metotları bazen bir lineer olmayan denklemi bir adi diferansiyel denkleme veya bir adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürmek için kullanılır. Bu dönüşüm metotları [15-24], kısmi diferansiyel denklemlerin analitik solitary dalga çözümlerinin bulunmasında kullanılan ve Wang tarafından literatüre kazandırılan Homojen Balans Metodu'dur [25]. Daha sonraları Fan [28] bu metodu esas alarak, Homojen Balans Metodunun iki yeni uygulaması olan kısmi diferansiyel denklemler için Bäcklund Dönüşümü Metodu ve kısmi diferansiyel denklemler için Benzerlik İndirgeme Metodu'nu kullanarak bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini buldu.

Bu metotlardan önce kullanılan ve klasik metot diyebileceğimiz dönüşüm metotlarını aşağıdaki gibi sıralayabiliriz. Hirota'nın bağımlı değişken metodu [29], Bäcklund dönüşümü [7,30], genelleştirilmiş Miura dönüşümü [31], ters saçılma metodu [17], darboux dönüşümü [26], painleve açılım metodu [27], homojen balans metodu [28], benzerlik indirgeme metodu [29], sine-cosine metodu [22]. Pek çok lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin hareket eden dalga çözümleri *tanh* fonksiyon terimleri ile ifade edilebilir [23,24]. Tanh fonksiyon terimleri orijinal olarak 1990 ve 1991 yıllarında kullanıldı [25,32]. 1992 yılında ilk olarak Malfliet [33] tarafından *tanh metot* formülize edilmiş olup bu metot, ısı yayılımı, difüzyon reaksiyonu, plazma fiziği, türbülans teorisi, okyanus dinamiği ve biyofizik gibi doğa olaylarını tanımlayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için önemli bir rol oynar. 1996 yılında Parkes ve Duffy [34], Malfliet tarafından sunulan *tanh metot* üzerine *otomatik tanh fonksiyon*

metodunu geliştirmişlerdir. Malfliet tarafından 1992 yılında sunulan *tanh* metot her ne kadar diğerk analitik metotlardan daha açık ve doğrudan çözüme ulaşmayı sağlıyor olsa da el ile yapılan işlemlerin sıkıcılığı ve işlem karmaşıklığı metodun sadece çözümlü *tanh* formunda olan denklemlere uygulanabilmesi bu metodun bir açmazı olarak görülebilir. 1996 yılında Parkes ve Duffy *tanh* metot ile birlikte el ile yapılan cebirsel işlemlerin sıkıcılığını ve hesaplamadaki zorluğunu ortadan kaldırmak için Mathematica bilgisayar programını kullanarak *otomatik tanh fonksiyon metodu* geliştirmişlerdir. Örneğinin metot gereğı bulunması gereken M dengeleme teriminin negatif olması durumunda yapılacak işlemler hem zor hem de zaman alacağından otomatik *tanh* fonksiyon metodu bu açıdan büyük kolaylık sağlamıştır. 2000 yılında Fan [35] *tanh* metot ve otomatik *tanh* metot üzerine çalışarak *genişletilmiş tanh fonksiyon metodu* sunulmuştur. 2002 yılında Elwakil ve arkadaşları [36] *değıştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metodunu* literatüre kazandırmışlardır. Elwakil ve arkadaşları bu çalışma ile diğerk *tanh* metotlar ile elde edilemeyen yeni tam çözümler elde etmişlerdir. Ayrıca bu metot ile elde edilen çözümler singüler çözüm ve blow-up davranışı gösterir. Zhang ve arkadaşları [37] çalışmalarında değıştirilmiş genişletilmiş *tanh* fonksiyon metodunu kullanarak Konopelchenko–Dubrovsky denklemin periyodik dalga çözümlerini elde etmiştir. 2003 yılında Zheng ve arkadaşları [38] yukarıda açıkladığımız sırasıyla *tanh* metot, *genişletilmiş tanh fonksiyon metot* ve *değıştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot* üzerine çalışarak bu metotlar ile elde edilen çözümleri de kapsayan daha genel çözümler ile birlikte bu metotlar ile elde edilemeyen yeni çözümler bularak *genelleştirilmiş genişletilmiş tanh metodunu* sunmuşlardır. 2004 yılında Chen ve Zhang [39], kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini elde etmek için yukarıda bahsedilen *tanh* metotlarında kullanılan Riccati diferansiyel denklemlerinden farklı olarak

$$\frac{dF}{d\xi} = A + BF + CF^2,$$

şeklinde bir diferansiyel denklemleri alarak *geliştirilmiş tanh fonksiyon metodunu* sunmuşlardır. Bu metot yardımı ile El-Wakil ve arkadaşları [40] çalışmalarında lineer olmayan fiziksel bir model için periyodik dalga çözümleri elde etmişlerdir.

Yukarıda bahsedilen ve kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini ve periyodik dalga çözümlerini veren *tanh* metotlarının yanı sıra eliptik fonksiyonların yardımı ile kısmi diferansiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerini veren metotlar da vardır. Bu metotlar sırası ile 2001 yılında *Jakobi eliptik fonksiyon metot*

[41], 2003 yılında *değiştirilmiş Jakobi eliptik fonksiyon metot* [42] ve 2004 yılında *genelleştirilmiş Jakobi eliptik fonksiyon metot* [43] olmak üzere bilim adamları tarafından literatüre kazandırılmıştır. Jakobi eliptik fonksiyon metodu Chen ve Zhang [44] tarafından sunulmuştur. Daha sonra *Weierstrass Jakobi eliptik fonksiyon açılım metot* [45] literatüre kazandırılarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir. Wang ve arkadaşları [46] tarafından sunulan $\frac{G'}{G}$ *açılım metodu* gibi metotlar lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bilimsel çalışmalarına büyük katkılar sağlamıştır. Bu metot üzerine çalışan Guo ve Zhou [47] tarafından *genişletilmiş $\frac{G'}{G}$ açılım metot* ve arkasından Lü ve arkadaşları [48] tarafından *genelleştirilmiş $\frac{G'}{G}$ açılım metot* literatüre kazandırılmıştır. Bu çalışmada vereceğimiz $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metoduna ilham kaynağı olan $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodun ana hatları üzerinde durmakta yarar vardır.

3.2. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım metodu

İlk olarak Wang ve arkadaşları [46] tarafından sunulan metodun ana hatlarını açıklamak için öncelikle x ve t değişkenlerine bağlı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi genel halini

$$Q(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

şeklinde ele alalım. Burada $u = u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon $\xi = x - Vt$ olmak üzere $u(x, t) = u(\xi) = u$ şeklinde ele alabiliriz. Burada V bir sabittir. (3.1) ile verilen kısmi diferansiyel denklemi $\xi = x - Vt$ dönüşümü altında

$$Q'(u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (3.2)$$

adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.2) ile verilen denklemin çözümü

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i, \quad (3.3)$$

olarak verilebilir. (3.3) ile verilen çözümde $G = G(\xi)$ olacak şekilde

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (3.4)$$

lineer ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin çözümüdür. Burada $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, \lambda$ ve μ sabitlerdir. m ise homojen balans metoduna göre (3.2) ile verilen denklemin en yüksek mertebe ile lineer olmayan terimin mertebesi ile elde edilen dengeleme terimidir. (3.3) ile verilen denklemin bazı türevleri

$$\begin{aligned} u^2 &= a_m^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{2m} + \dots, \\ u' &= -m a_m \left(\frac{G'}{G} \right)^{m+1} + \dots, \\ u'' &= m(m+1) a_m \left(\frac{G'}{G} \right)^{m+2} + \dots, \\ u''' &= -m(m+1)(m+2) a_m \left(\frac{G'}{G} \right)^{m+3} + \dots, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde hesaplanabilir. Hesaplanan bu değerler göz önüne alınarak dengeleme terimini kolaca bulabiliriz. Ayrıca (3.5) ile verilmiş türev değerleri (3.2) ile verilen denklemde yerlerine yazdığımızda $\left(\frac{G'}{G} \right)$ ye bağlı polinomsal ve homojen bir

denklem elde edilir. Bu elde edilen cebirsel denklemde $\left(\frac{G'}{G} \right)^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi, teknoloji ile birlikte gelişen bilgisayar ve programları yardımı ile çözülür. Elde edilen çözümler (3.3) ile verilen çözüm denkleminde yerlerine yazılırsa (3.1) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin yürüyen dalga çözümleri elde edilmiş olur.

Bu metot, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan yeni ve kullanışlı bir metottur. Bu metot kullanılarak birçok bilim adamı tarafından literatüre uygulamalar kazandırılmıştır. Biz bu çalışmada bu metodun işleyişi aynı fakat çözüm fonksiyonları farklı olan yeni bir açılım geliştirdik. Bu açılımı geliştirirken birçok açılım üzerinde çalışmalar

yaptık. Ancak elde edilen çözümlerin $\frac{G'}{G}$ açılım metodu ile elde edilen çözümlerin birer türevleri olduğunu gördük. Bu aşamadan sonra yeni bir açılım üzerinde çalışmalar yoğunlaştı ve çalışmalar sonucunda işlevi aynı ancak çözümleri farklı olan yeni bir açılım metodu oluşturduk. Bu yeni teknik kullanılarak $\frac{G'}{G}$ Açılım Metodunda elde edilen çözümlerden farklı, çözümler elde edilmiştir. Bu açılım metodu, sonraki bölümde de geniş bir şekilde incelenecek ve elde edilen çözümler $\frac{G'}{G}$ Açılım Metodunda elde edilen çözümler ile karşılaştırılacaktır.

3.3 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım metodu ile ilgili uygulama

Altıncı mertebeden Boussinesq denklemi [49]

$$u_{tt} - u_{xx} - (15uu_{4x} + 30u_xu_{3x} + 15(u_{2x})^2 + 45u^2u_{2x} + 90uu_x^2 + u_{6x}) = 0. \quad (3.6)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.6) ile verilen altıncı mertebeden Boussinesq denkleminde $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x - Vt$, dönüşümü uygulandığında

$$(V^2 - 1)U'' - (15UU^{(4)} + 30U'U''' + 15(U'')^2 + 45U^2U'' + 90U(U')^2 + U^{(6)}) = 0, \quad (3.7)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. (3.7) ile verilen denklemde lineer olmayan UU^4 terimi ile lineer olan $U^{(6)}$ terimleri göz önüne alınarak homojen balans metoduna göre $m=2$ olduğu kolayca hesaplanabilir. Hesaplan bu dengeleme terimi (3.3) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa (3.6) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G}\right) + a_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2, \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir. (3.8) ile verilen çözüm fonksiyonu (3.6) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $a_0, a_1, a_2, \mu, c, \lambda$ ve V sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : & -a_1\lambda\mu - 45a_0^2a_1\lambda\mu + a_1V^2\lambda\mu - 15a_0a_1\lambda^3\mu - a_1\lambda^5\mu - 90a_0a_1^2\mu^2 - \\
& 2a_2\mu^2 - 90a_0^2a_2\mu^2 + 2a_2V^2\mu^2 - 120a_0a_1\lambda\mu^2 - 45a_1^2\lambda^2\mu^2 - \\
& 210a_0a_2\lambda^2\mu^2 - 52a_1\lambda^3\mu^2 - 62a_2\lambda^4\mu^2 - 60a_1^2\mu^3 - 240a_0a_2\mu^3 - \\
& 136a_1\lambda\mu^3 - 240a_1a_2\lambda\mu^3 - 584a_2\lambda^2\mu^3 - 272a_2\mu^4 - 60a_2^2\mu^4 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : & -a_1\lambda^2 - 45a_0^2a_1\lambda^2 + a_1V^2\lambda^2 - 15a_0a_1\lambda^4 - a_1\lambda^6 - 2a_1\mu - 90a_0^2a_1\mu + 2a_1V^2\mu - \\
& 270a_0a_1^2\lambda\mu - 6a_2\lambda\mu - 270a_0^2a_2\lambda\mu + 6a_2V^2\lambda\mu - 330a_0a_1\lambda^2\mu - 105a_1^2\lambda^3\mu - \\
& 450a_0a_2\lambda^3\mu - 114a_1\lambda^4\mu - 126a_2\lambda^5\mu - 240a_0a_1\mu^2 - 90a_1^3\mu^2 - 540a_0a_1a_2\mu^2 - \\
& 480a_1^2\lambda\mu^2 - 1800a_0a_2\lambda\mu^2 - 720a_1\lambda^2\mu^2 - 1110a_1a_2\lambda^2\mu^2 - 2352a_2\lambda^3\mu^2 - \\
& 272a_1\mu^3 - 960a_1a_2\mu^3 - 3696a_2\lambda\mu^3 - 720a_2^2\lambda\mu^3 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : & 3a_1\lambda - 135a_0^2a_1\lambda + 3a_1V^2\lambda - 180a_0a_1^2\lambda^2 - 4a_2\lambda^2 - 180a_0^2a_2\lambda^2 + 4a_2V^2\lambda^2 - \\
& 225a_0a_1\lambda^3 - 60a_1^2\lambda^4 - 240a_0a_2\lambda^4 - 63a_1\lambda^5 - 64a_2\lambda^6 - 360a_1^2a_0\mu - 8a_2\mu - \\
& 360a_0^2a_2\mu + 8a_2V^2\mu - 900a_0a_1\lambda\mu - 225a_1^3\lambda\mu - 1350a_0a_1a_2\lambda\mu - 960a_1^2\lambda^2\mu - \\
& 3480a_0a_2\lambda^2\mu - 1176a_1\lambda^3\mu - 1545a_1a_2\lambda^3\mu - 3096a_2\lambda^4\mu - 600a_1^2\mu^2 - \\
& 2040a_0a_2\mu^2 - 540a_1^2a_2\mu^2 - 540a_0a_2^2\mu^2 - 1848a_1\lambda\mu^2 - 5520a_1a_2\lambda\mu^2 - \\
& 13320a_2\lambda^2\mu^2 - 2190a_2^2\lambda^2\mu^2 - 3968a_2\mu^3 - 1680a_2^2\mu^3 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : & -2a_1 - 90a_0^2a_1 + 2a_1V^2 - 450a_0a_1^2\lambda - 10a_2\lambda - 450a_0^2a_2\lambda + \\
& 10a_2V^2\lambda - 750a_0a_1\lambda^2 - 135a_1^3\lambda^2 - 810a_0a_1a_2\lambda^2 - 555a_1^2\lambda^3 - \\
& 1950a_0a_2\lambda^3 - 602a_1\lambda^4 - 675a_1a_2\lambda^4 - 1330a_2\lambda^5 - 600a_0a_1\mu - \\
& 270a_1^3\mu - 1620a_0a_1a_2\mu - 1980a_1^2\lambda\mu - 6600a_0a_2\lambda\mu - \\
& 1260a_1^2a_2\lambda\mu - 1260a_0a_2^2\lambda\mu - 3584a_1\lambda^2\mu - 9210a_1a_2\lambda^2\mu - \\
& 17920a_2\lambda^3\mu - 2490a_2^2\lambda^3\mu - 1232a_1\mu^2 - 5160a_1a_2\mu^2 - \\
& 900a_1a_2^2\mu^2 - 22960a_2\lambda\mu^2 - 8280a_2^2\lambda\mu^2 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : & -270a_1^2a_0 - 6a_2 - 270a_0^2a_2 + 6a_2V^2 - 900a_0a_1\lambda - 315a_1^3\lambda -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1890a_0a_1a_2\lambda - 1515a_1^2\lambda^2 - 4950a_0a_2\lambda^2 - 720a_1^2a_2\lambda^2 - \\
& 720a_2^2a_0\lambda^2 - 2100a_1\lambda^3 - 4695a_1a_2\lambda^3 - 8106a_2\lambda^4 - 960a_2^2\lambda^4 - \\
& 1140a_1^2\mu - 3600a_0a_2\mu - 1440a_1^2a_2\mu - 1440a_0a_2^2\mu - 4200a_1\lambda\mu - \\
& 15420a_1a_2\lambda\mu - 2025a_1a_2^2\lambda\mu - 40152a_2\lambda^2\mu - 12480a_2^2\lambda^2\mu - \\
& 12096a_2\mu^2 - 6720a_2^2\mu^2 - 450a_2^3\mu^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'}{G}\right)^5 : & -360a_0a_1 - 180a_1^3 - 1080a_0a_1a_2 - 1620a_1^2\lambda - 5040a_0a_2\lambda - \\
& 1620a_1^2a_2\lambda - 1620a_0a_2^2\lambda - 3360a_1\lambda^2 - 10920a_1a_2\lambda^2 - 1125a_1a_2^2\lambda^2 - \\
& 21840a_2\lambda^3 - 5910a_2^2\lambda^3 - 1680a_1\mu - 7800a_1a_2\mu - 2250a_1a_2^2\mu - \\
& 38640a_2\lambda\mu - 18840a_2^2\lambda\mu - 990a_2^3\lambda\mu = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'}{G}\right)^6 : & -600a_1^2 - 1800a_0a_2 - 900a_2a_1^2 - 900a_0a_2^2 - 2520a_1\lambda - 10500a_1a_2\lambda - \\
& 2475a_1a_2^2\lambda - 29400a_2\lambda^2 - 12690a_2^2\lambda^2 - 540a_2^3\lambda^2 - 13440a_2\mu - \\
& 8880a_2^2\mu - 1080a_2^3\mu = 0,
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^7 : -720a_1 - 3600a_1a_2 - 1350a_1a_2^2 - 19440a_2\lambda - 11520a_2^2\lambda - 1170a_2^3\lambda = 0,$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^8 : -5040a_2 - 3780a_2^2 - 630a_2^3 = 0, \quad (3.9)$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (3.9) ile verilen denklem sistemi Mathematica paket programı yardımı ile çözülürse;

1. Durum

$$a_1 = -2\lambda, a_2 = -2, \quad V = \mp \sqrt{1 + 45a_0^2 + 15a_0\lambda^2 + \lambda^4 120a_0\mu + 22\lambda^2\mu + 76\mu^2}, \quad (3.10)$$

şeklinde çözüm elde edilir. Elde edilen (3.10) çözümleri (3.8) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa ve

$$\xi = x + \left(\mp \sqrt{1 + 45a_0^2 + 15a_0\lambda^2 + \lambda^4 120a_0\mu + 22\lambda^2\mu + 76\mu^2} \right) t,$$

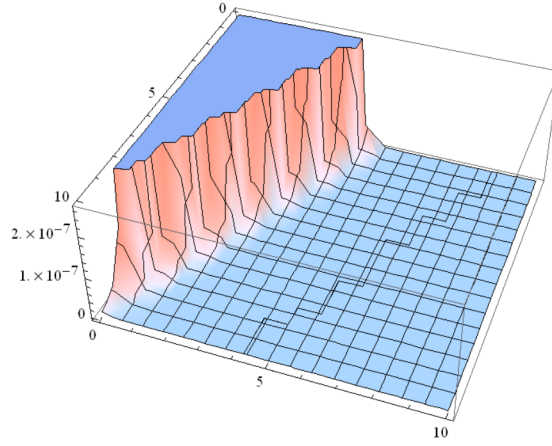
olmak üzere (3.6) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin analitik

çözümü

$$U_1(\xi) = a_0 - 2\lambda \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{-A_1 + A_2 e^{\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}}{A_1 + A_2 e^{\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}} \right) \right) -$$

$$2 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{-A_1 + A_2 e^{\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}}{A_1 + A_2 e^{\xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}} \right) \right)^2 \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen (3.11) ile verilen analitik çözümde sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafiği çizebiliriz.



Şekil 3.1 (3.11) ile verilen analitik çözümde $A_1 = 1$, $\lambda = 1.5$, $\mu = -0.5$, $A_2 = 1.2$, $a_0 = 1$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

2. Durum

$$a_0 = \frac{1}{3}(-\lambda^2 - 8\mu), \quad a_1 = -4\lambda, \quad a_2 = -4, \quad V = \mp \sqrt{1 + \lambda^4 - 8\lambda^2\mu + 16\mu^2}, \quad (3.12)$$

çözümü elde edilir. Elde edilen (3.12) çözümleri (3.8) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa ve

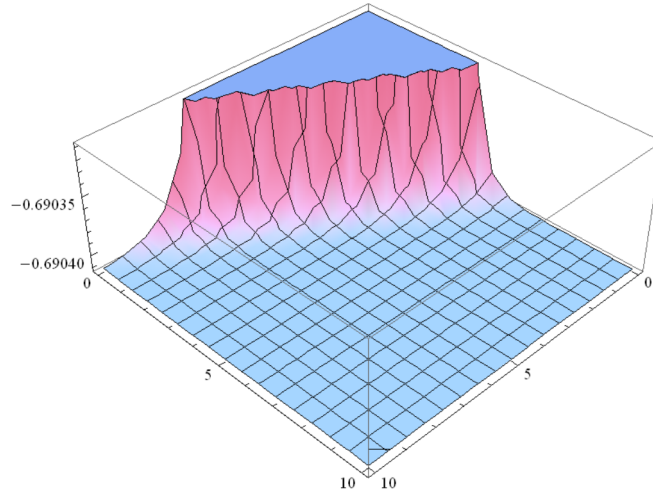
$$\xi = x - \left(\mp \sqrt{1 + \lambda^4 - 8\lambda^2\mu + 16\mu^2} \right) t,$$

olmak üzere

$$U_2(\xi) = \frac{1}{3}(-\lambda^2 - 8\mu) - 4\lambda \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{-A_1 + A_2 e^{\xi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}}{A_1 + A_2 e^{\xi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}} \right) \right) -$$

$$4 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{-A_1 + A_2 e^{\xi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}}{A_1 + A_2 e^{\xi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}} \right) \right)^2. \quad (3.13)$$

analitik çözümü yazılabilir. Elde edilen (3.13) ile verilen analitik çözümde sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafiği çizebiliriz.



Şekil 3.2 (3.13) ile verilen analitik çözümde $A_1 = 0.27$, $\lambda = 1.1$, $\mu = -0.21$, $A_2 = 1.2$, $a_0 = 1.21$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

4. KORUNUM KANUNLARI İLE AKI-YOĞUNLUK DENKLEMLERİ

Biz bu çalışmamızda ikinci dereceden kısmi türev olan u_{tt} terimini bulunduran lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin ailesinden olan Boussinesq denkleminin literatürde var olan çalışmalarına yer verecek ve henüz korunum kanunları incelenmemiş olan altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin korunum kanunlarını inceleyeceğiz.

Lineer ya da lineer olmayan diferansiyel denklemlerin korunum kanunları üç klasik korunuma sahiptir. Bunlar kütlenin korunumu, momentumun korunumu ve enerjinin korunumudur. Ancak bazı diferansiyel denklemler sonsuz korunum özelliğine sahiptir. Buna en güzel örnek KdV denklemdir. Korunum kanunları denklem sisteminin ve çözümlerin davranışları hakkında genel bir bilgi verdiğinden birçok bilim adamı bu konu hakkında birçok araştırma yapmıştır. Korunum kanunları matematiksel modelleme yaparken çok büyük öneme sahip olduğundan günümüzde de bilimsel çalışmalarda popülerliğini korumaktadır.

Son zamanlarda Hereman, ve arkadaşları [11] dördüncü mertebeden Boussinesq denkleminin korunum kanunlarını incelemişlerdir. Bu çalışmalarında

$$u_{tt} - u_{xx} + 3u_x^2 + 3uu_{xx} + \alpha u_{xxxx} = 0, \quad (4.1)$$

denklemi ele almışlardır. (4.1) ile verilen denklemi bir denklem sistemine dönüştürmüş simetri grup özellikleri kullanılarak

ρ (yogunluk)		J (akı)	
$\rho^{(1)}$	u	$J^{(1)}$	v
$\rho^{(2)}$	v	$J^{(2)}$	$\beta u - \frac{3}{2}u^2 + \alpha u_{xx}$
$\rho^{(3)}$	uv	$J^{(3)}$	$\frac{1}{2}\beta u^2 - u^3 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\alpha u_x^2 - \alpha uu_{xx}$
$\rho^{(4)}$	$\beta u^2 - u^3 + v^2 + \alpha u_x^2$	$J^{(4)}$	$2\beta uv - 3u^2v + 2\alpha u_x v_x - 2\alpha u_{xx}v$

Tablo 1. Boussinesq denkleminin akı ve yoğunluk denklemler

şeklinde (4.1) ile verilen denklemin akı ve yoğunluklarının denklemlerini vermişlerdir. Yine aynı çalışmada

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u, \quad (4.2)$$

olarak verilen sine-Gordon denkleminin ise

ρ (yoğunluk)		J (akı)	
$\rho^{(1)}$	$2\alpha \cos u + v^2 + u_x^2$	$J^{(1)}$	$2vu_x$
$\rho^{(2)}$	vu_x	$J^{(2)}$	$-\alpha \cos u + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u_x^2$

Tablo 2. sine-Gordon denkleminin akı ve yoğunluk denklemler

(4.2) ile verilen kısmi diferansiyel denkleminin akı ve yoğunluk denklemleri verilmiştir.

Şu ana kadar korunum kanunları belirlenmemiş altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin korunum kanunları ışığı altında akı ve yoğunluk dengesinin matematiksel denklemlerini elde edelim.

4.1 Altıncı Mertebeden Boussinesq denkleminin Korunum kanunları

(3.6) ile verilen altıncı mertebeden Boussinesq denklem (3.1) ile verilen akı-yoğunluk denge denklemi göz önüne alınarak korunum kanunlarını incelemek için (3.6) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini

$$u_t + v_x = 0,$$

$$v_t - u_x - 45u^2u_x - 15u_xu_{2x} - 15uu_{3x} - u_{5x} = 0, \quad (4.3)$$

denklem sistemi şeklinde yazılabilir. Bir kısmi diferansiyel denklemin yoğunluğu u, v ve u bağımlı değişkeninin türevleri ve v bağımlı değişkeninin türevlerine bağlıdır. x ve t bağımsız değişkenlere bağlı değildir. (4.3) ile verilen denklem sisteminde u bağımlı değişkeninin ağırlığını polinom olarak inşa ederek korunum kanunlarını sağladığını görebiliriz. Burada u çözüm fonksiyonu x bağımsız değişkeninin iki kez türevine, $\frac{\partial}{\partial t}$ ise x

in dört kez türevine karşılık gelmektedir. Bu ifadeyi $u \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ şeklinde ifade

edebiliriz. Ayrıca negatif olmayan ya da rasyonel olarak kabul edilen w ağırlığı, ifade

etmek üzere $w\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\right) = i$, $i = 1, 2, 3, \dots$ şeklinde tanımlanırsa

$$w(u) = w\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = 2, \quad w\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1,$$

yazılabilir. Tek değişkenli terimlerin toplam ağırlığı, denklemin yoğunluk denkleminin elde edilmesinde önemli bir rol üslenir. Ayrıca (4.3) ile verilen lineer olmayan altıncı mertebeden Boussinesq denklemi için simetri grup özellikler kullanılarak

$$w\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + w(v) = w(\beta) + 3 = 3w(u) + 1,$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$w(u) = w\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = 2, \quad w(\beta) = 4, \quad w\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 4, \quad w(v) = 3,$$

seçebiliriz. Tek değişkenli ağırlıkların toplamı 7 olduğu kolay bir şekilde görülmektedir.

Bu ağırlıklar toplamını Rank olarak adlandırılır ve R ile gösterilir. (4.3) ile verilen denklem dikkate alınarak simetri gurup özellikleri göz önüne alınarak

$$(x, t, u, v, \beta) \rightarrow (\lambda^{-1}x, \lambda^4 t, \lambda^{-2}u, \lambda^3 v, \lambda^4 \beta),$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ ve β keyfi parametredir. Korunum kanunları u ve u nun türevleri cinsinden yazılabilir x ve t değişkenleri cinsinden yazılamaz. Bu durumda (4.3) ile verilen diferansiyel denklem sistemi için

ρ (yoğunluk)		J (akı)	
$\rho^{(1)}$	u	$J^{(1)}$	v
$\rho^{(2)}$	v	$J^{(2)}$	$u + 15u^3 - 15uu_{2x} - u_{4x}$
$\rho^{(3)}$	$v + u$	$J^{(3)}$	$u + 15u^3 - 15uu_{2x} - u_{4x} - v_x$
$\rho^{(4)}$	$v + u + v_x$	$J^{(4)}$	$-v + u + 15u^3 - 15uu_{2x} - u_{4x} + u_x$ $+ 45u^2u_x + 15u_xu_{2x} + 15uu_{3x} + u_{5x}$
$\rho^{(5)}$	u_t	$J^{(5)}$	$(-1 - 45u^2)u_x - 15u_xu_{xx} - 15uu_{3x} - u_{5x}$

Tablo 3. Altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin akı ve yoğunluk denklemler

akı ve yoğunluk denklemleri yazılabilir. Burada, ρ yoğunluğun korunumu, J akının korunumu temsil etmektedir. (4.3) ile verilen denklem sisteminin u bağımlı değişkeninin ağırlığını polinom olarak inşa ederek korunum kanunlarını sağladığını gösterelim.

1. ρ yoğunluğun korunumu temsil etmek üzere ρ , u ya bağlı polinom şeklindedir.

$$u \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ ve } w(u) = w\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = 2,$$

basit olarak bir B kümesi oluşturalım. B kümesinin elemanları $[M_i, Rank(M_i)]$ şeklinde olsun. Burada M_i değeri u ve v nin farklı kuvvetlerinin kombinasyonu olmak üzere

$$B = \{[u, 2], [u^2, 4], [v^2, 6], \dots\} \quad (4.4)$$

biçiminde yazabiliriz.

2. (4.4) ile verilen küme göz önüne alınarak ve $L_i = R - Rank(M_i)$, $i = 1, 2, 3$ olacak

şekilde L kümesini $L = [4, 2, 3, \dots]$ şeklinde düzenleyebiliriz.

3. u, u^2, v ve v^2 fonksiyonlarının sırası ile x değişkenine bağlı 4., 2., 3., 0. mertebeden türevleri ise

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = u_{4x}, \quad \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 2uu_{2x} + 2u_x^2, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = v_{xxx}, \quad \frac{\partial^0 v^2}{\partial x^0} = v^2, \quad (4.5)$$

elde edilebilir. (4.5) şeklinde elde edilen türevlerin tek terimlerinin kümesini $C = \{u_{4x}, u_x^2, uu_{2x}, v_{xxx}, v^2, \dots\}$ şeklinde yazabiliriz. Burada tek terimlerden aynı sınıfı temsil edenleri elimine etmek önemli bir adımdır. $u_{mx}u_{nx} = (u_{kx}^2)'$ $k = \frac{m+n}{2}$, göz önüne alarak $\{u_{4x}, u_x^2, uu_{2x}, \dots\}$ aynı sınıfı temsil etmektedir. Bu durumda C kümesini $P = \{u^3, u_x^2, v, v_x^2\}$ şeklinde tekrar düzenlenebilir. P kümesinin elemanları lineer bağımlı olduğundan c_i sabit olmak üzere yoğunluğun korunumu polinomsal olarak

$$\rho = c_1 \beta u^3 + c_2 u_x^2 + c_3 v_x^2 + c_4 v, \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. (4.6) ile verilen yoğunluk denkleminin t bağımsız değişkenine göre türevi alınırsa

$$\rho_t = 3\beta c_1 u^2 u_t + c_4 v_t + 2c_2 u_x u_{xt} + 2c_3 v_x v_{tx}, \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir. (4.3) ile verilen denklem sisteminde

$$u_t = v_x, \quad u_{tx} = v_{xx} \quad \text{ve} \quad v_t = u_x + 45u^2 u_x + 15u_x u_{xx} + 15uu_{3x} + u_{5x} \quad (4.8)$$

göz önüne alınırsa ve (4.8) ile verilen ifadeler (4.7) ile verilen denklemde yerlerine yazacak olursak

$$\begin{aligned} E = & -3c_1 u^2 v_x + 2c_2 u_x v_{xx} + c_4 (u_x + 45u^2 u_x + 15u_x u_{xx} + 15uu_{3x} + u_{5x}) + \\ & 2c_3 (u_x + 45u^2 u_x + 15u_x u_{xx} + 15uu_{3x} + u_{5x}) \\ & (u_{xx} + (15uu_{4x} + 30u_x u_{3x} + 15(u_{2x})^2 + 45u^2 u_{2x} + 90uu_x^2 + u_{6x})), \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.3) ile verilen denklem sisteminin enerji denklemini elde etmiş oluruz. (4.9) ile verilen denklemde $c_i, (i=1,2,3,4,\dots)$ sabitlerinin hesaplanmasında önemli bir adımdır. Bu katsayıların hesaplanmasında birinci bölümde verilmiş olan varyasyonel türev için Euler operatörü önemli bir rol oynamaktadır. (1.5) ile verilen Euler operatörü

$$L_u = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \right) + D_x^2 \left(\frac{\partial}{\partial u_{2x}} \right) + \cdots + (-1)^n D_x^n \left(\frac{\partial}{\partial u_{nx}} \right)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada verilen denklem için n kolayca tespit edilir. (1.4) ile verilen eşitlik ve doğruluk teoremi göz önüne alınarak (4.3) ile verilen denklem sistemi için

$$L_u(E) = (L_{u(x)}(E), L_{v(x)}(E)) = (0, 0)$$

olarak yazılabilir [11]. Burada gerekli gruplandırma işlemleri yapıldıktan sonra

$$L_{u(x)}(E) = -2(3c_1\beta uv_x + c_2v_{xxx}) = 0, \quad L_{v(x)}(E) = 6c_1\beta uu_x + 2c_2u_{xxx} = 0$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Bu durumda $c_1 = c_2 = 0$, olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca geleneksel olarak $c_3 = c_4 = 1$, şeklinde yazılırsa (4.3) denkleminin yoğunlu denklemi

$$\rho = v_x^2 + v,$$

şeklinde elde edebiliriz.

Bir diferansiyel denklemin korunum kanunlarının hesaplama nedenlerini birkaç başlık altında toplayabiliriz. Bunlardan birinci olarak fiziksel büyüklüklerin korunum kanunlarıdır. Bu fiziksel büyüklükler momentum, kütle ve enerjinin korunumudur. Bu üç fiziksel büyüklüklerin korunum kanunlarını sağlamaması, matematiksel modelin fiziksel olaya uygun olmaması anlamına gelir. Bu çalışmada altıncı mertebeden Boussinesq denklemi, enerji korunum ilkelerini sağladığını gözlemledik. İkinci olarak incelediğimiz denklemin Tam integrallenebilir olduğunu söyleyebiliriz. Bu nedenle çok fazla işlem yoğunluğu olmadan bilinen integral kuralları ışığında ele alınan denklemin analitik çözümün elde edilebileceğini söyleyebiliriz. Son olarak kısmi diferansiyel denklemin hem nicel hem de nitel özelliklerinin incelenebilirliğini sağlar.

Korunum kanunları hesaplamalarında farklı metotlar mevcuttur. Bunlardan bazıları;

- Belirsiz katsayılar ile değişmez şartların lineer kombinasyonu ile yoğunluk bulunur,
- $D_t\rho$ toplam türev operatörü ile hesaplama,
- Euler Operatörü (varyasyonel türev) kullanarak belirsiz katsayıları hesaplama,
- Homotopy Operatörü kullanarak hesaplama,
- Lineer cebir ve varyasyonel hesap kullanılarak hesaplama,

şeklinde sıralanabilir.

Bu çalışmada, Euler operatör yardımı ile yoğunluk denklemini hesapladık. Altıncı mertebeden Boussinesq denklemi korunum kanunları incelenirken iki korunum kanunu elde ettik. Üçüncü korunum kanunu hesaplamalarında integrallenemeyen bir fonksiyon ile karşılaştık. Hereman, ve arkadaşları [11] dördüncü mertebeden Boussinesq denkleminin korunum kanunlarını incelerken denklemi bir sisteme dönüştürmüş ve sonra korunum kanunlarını incelemişlerdir. Bu çalışmadan esinlenerek altıncı mertebeden Boussinesq denklemi (4.1) şeklinde sistem haline dönüştürerek sonsuz sayıda korunum kanunlarının yazılabileceğini gözlemledik. Bu bölümde öncelikle denklemin korunum kanunları inceledik. Daha sonraki bölümde de yeni oluşturmuş olduğumuz açılım metodu ile incelemiş olduğumuz denklemin önce analitik çözümleri elde edileceğiz sonra da bu elde edilen çözümün korunum kanunları inceleyeceğiz. Burada bu korunum kanunları hesaplanırken işlem yoğunluğu fazla olduğu için sembolik programlama imkânlarına sahip çok basit kodlar yazılarak bu yoğunluğu kolayca halledebiliriz.

5. $\left(\frac{1}{G'}\right)$ -AÇILIM METODU

Bu bölümde $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metodundan esinlenerek oluşturmuş olduğumuz yeni açılım metodu ile ilgili genel bilgiler verilecektir. Ayrıca bu yeni açılım metodu ile içeriğinde u_{tt} bulunduran denklem ailelerinin bazılarının çözüm fonksiyonları araştırılmıştır. Elde edilen çözüm fonksiyonunun korunum kanunlarından yoğunluğun korunumu incelenmiştir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi genel halini (3.1) şeklinde ele alalım. Burada da $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metoduna benzer mantık ile $u = u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon $\xi = x - Vt$ olmak üzere $u(x, t) = u(\xi) = u$ şeklinde ele alabiliriz. Burada V bir sabittir. (3.1) şeklinde verilen kısmi diferansiyel denklemi $\xi = x - Vt$ dönüşümü altında (3.2) şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüşür. Ayrıca

$$G'' + \lambda G' + \mu = 0, \quad (5.1)$$

lineer ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin çözümü $G = G(\xi)$ olacak şekilde tanımlayacak olursak (3.2) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denklemin çözümünü

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{1}{G'}\right)^i, \quad (5.2)$$

yazabiliriz. Burada $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, \lambda$ ve μ sabitlerdir, m ise homojen balans metoduna göre (3.2) ile verilen adi denklemin en yüksek mertebeden terimi ile lineer olmayan terimin mertebesi ile elde edilen dengeleme terimidir. Ayrıca benzer şekilde (5.2) ile verilen çözüm fonksiyonlarının bazı türevlerini

$$\begin{aligned} u^2 &= a_m^2 \left(\frac{1}{G'}\right)^{2m} + \dots, \\ u' &= -m a_m \left(\frac{1}{G'}\right)^{m+1} + \dots, \\ u'' &= m(m+1) a_m \left(\frac{1}{G'}\right)^{m+2} + \dots, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$u''' = -m(m+1)(m+2)a_m \left(\frac{1}{G'} \right)^{m+3} + \dots,$$

⋮

olarak hesaplayabiliriz. Burada dengeleme terimi hesaplanırken (5.3) ile hesaplanan türev değerler göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Ayrıca (5.3) ile elde edilen türev değerler (5.2) ile verilen çözüm fonksiyonunda ilgili yerlere yazılır ve $\left(\frac{1}{G'} \right)$ ye bağlı

polinomsal ve homojen bir denklem elde edilir. Burada $\left(\frac{1}{G'} \right)^i, i = 0,1,2,\dots$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi, Mathematica paket program yardımı ile çözülür. Bu çözümler, (5.2) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılır ve (3.1) şeklinde verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin yürüyen dalga çözümleri elde edilmiş olur.

Bu metot, lineer olmayan diferansiyel denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan yeni ve kullanışlı bir metottur. Biz çalışmamızda bu açılım metodu ile birçok uygulama yaptık ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çoğuna kolayca uygulanabileceğini gördük.

Ayrıca (5.1) ile verilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümünü

$$G = G(\xi) = -\frac{\mu\xi}{\lambda} + c_1 e^{-\lambda\xi} + c_2 \quad (5.4)$$

alabiliriz. Burada c_1 ve c_2 birer sabittir. (5.4) ile verilen çözüm fonksiyonunun ξ değişkenine göre bir kez türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{G'} = \frac{1}{-\frac{\mu}{\lambda} - c_1 e^{-\lambda\xi}} \quad (5.5)$$

ifadesi alınır. (5.5) ile verilen cebirsel ifadede $c_1 = A$ olacak şekilde bu trigonometrik fonksiyona dönüştürecek olursak

$$\frac{1}{G'} = \frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(Cosh(\xi\lambda) - Sinh(\xi\lambda))}$$

şeklinde yazabiliriz.

Geliştirmiş olduğumuz bu yeni açılım metodu ile ilgili birkaç uygulama verelim. Öncelikle lineer olmayan **Klein-Gordon denklemi** [50] için çözüm fonksiyonu arayalım.

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \gamma^2 u - \beta u^3 = 0, \quad (5.6)$$

burada α, γ ve β pozitif sabitlerdir. (5.6) ile verilen Klein-Gordon denklemi $u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x - Vt$ dönüşümü uygulandığında

$$V^2 U'' - \alpha^2 U'' + \gamma^2 U - \beta U^3 = 0, \quad (5.7)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada (5.7) ile verilen denklemde lineer olmayan terim U^3 ile lineer olan U'' terimleri göz önüne alınarak dengeleme terimi $m=1$ kolayca bulunabilir. Bu durumda (5.7) ile verilen diferansiyel denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'} \right), \quad (5.8)$$

şeklinde yazılabilir. (5.8) ile verilen çözüm fonksiyonunun gerekli türevleri alınır ve (5.7) ile verilen diferansiyel denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $a_0, a_1, \lambda, \mu, \alpha, \gamma, \beta$ ve V sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{G'} \right)^0 : \quad & -a_0^3 \beta + a_0 \gamma^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^1 : \quad & -3a_0^2 a_1 \beta + a_1 \gamma^2 + a_1 V^2 \lambda^2 - a_1 \alpha^2 \lambda^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^2 : \quad & -3a_1^2 a_0 \beta + 3a_1 V^2 \lambda \mu - 3a_1 \alpha^2 \lambda \mu = 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^3 : \quad & -3a_1^3 \beta + 2a_1 V^2 \mu^2 - 2a_1 \alpha^2 \mu^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (5.9) ile verilen denklem sisteminin mathematica da çözümlerse

1. Durum

$$a_0 = -\frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}, \quad a_1 = -\frac{2\gamma\mu}{\lambda \sqrt{\beta}}, \quad V = -\frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{\lambda}, \quad (5.10)$$

şeklinde çözümler elde edilir. Bu elde edilen (5.10) şeklindeki çözümler (5.8) çözüm

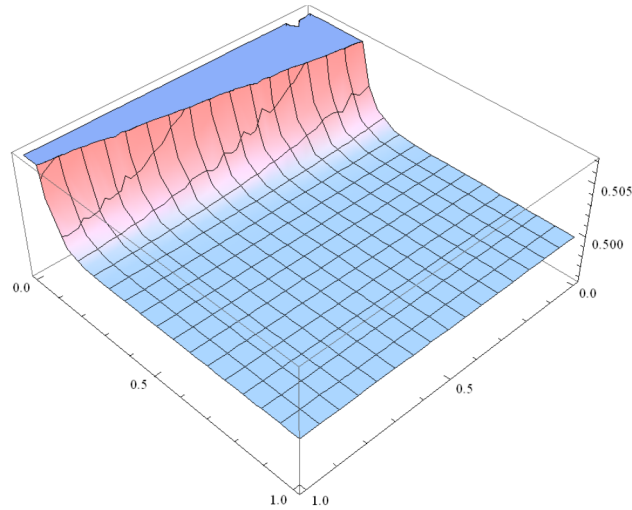
fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (5.6) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x + \left(\frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{\lambda} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_1(\xi) = -\frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} - \frac{2\gamma\mu}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{1}{-\mu + \lambda A(Cosh(\xi\lambda) - Sinh(\xi\lambda))} \right), \quad (5.11)$$

şeklinde yazılabilir. Bu elde edilen (5.11) ile verilen çözüm fonksiyonunda sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.1 (5.11) ile verilen analitik çözümde $A = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 3$, $\lambda = 4$, $\alpha = 6$, $\beta = 4$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

2. Durum

$$a_0 = -\frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}, \quad a_1 = -\frac{2\gamma\mu}{\lambda \sqrt{\beta}}, \quad V = \frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{\lambda}, \quad (5.12)$$

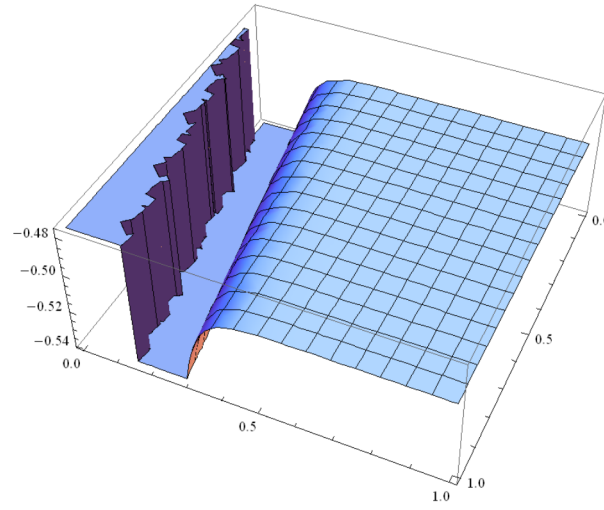
elde edilen (5.12) çözümleri, (5.8) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (5.6) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x - \left(\frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{\lambda} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_2(\xi) = -\frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} - \frac{2\gamma\mu}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{1}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right) \quad (5.13)$$

şeklinde yazılabilir. Bu elde edilen (5.13) ile verilen çözüm fonksiyonunda sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.2 (5.13) ile verilen analitik çözümde $A = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 3$, $\lambda = 4$, $\alpha = 6$, $\beta = 4$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

2. Durum

$$a_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}, \quad a_1 = \frac{2\gamma\mu}{\lambda \sqrt{\beta}}, \quad V = -\frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{\lambda} \quad (5.14)$$

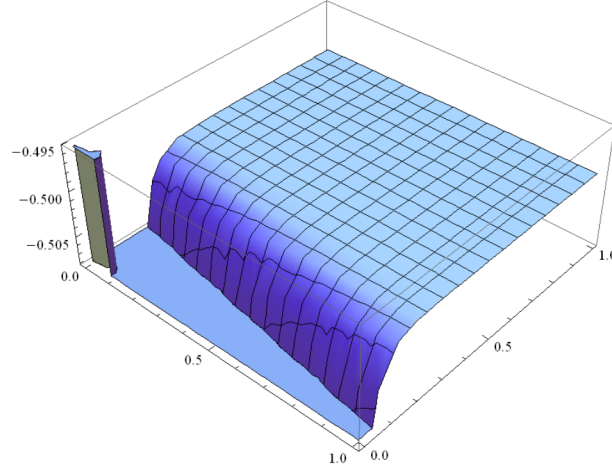
elde edilen (5.14) çözümleri (5.8) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (5.6) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x + \left(\frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{\lambda} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_3(\xi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} + \frac{2\gamma\mu}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{1}{-\mu + \lambda A(Cosh(\xi\lambda) - Sinh(\xi\lambda))} \right), \quad (5.15)$$

analitik çözümü elde edilir. Bu elde edilen (5.15) ile verilen çözüm fonksiyonunda sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.3 (5.15) ile verilen analitik çözümde $A = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 3$, $\lambda = 4$, $\alpha = 6$, $\beta = 4$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

3. Durum

$$a_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}, \quad a_1 = \frac{2\gamma\mu}{\lambda\sqrt{\beta}}, \quad V = \frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2\lambda^2}}{\lambda}, \quad (5.16)$$

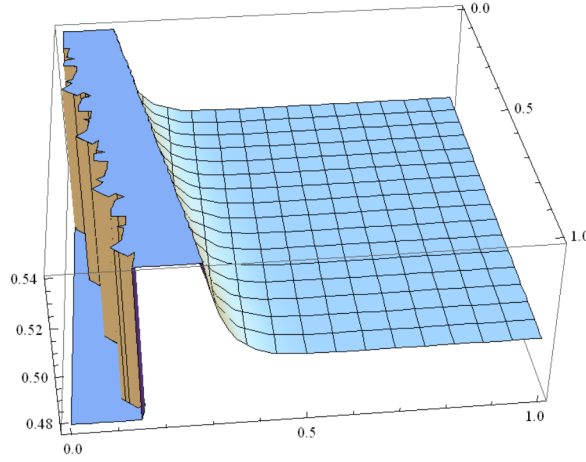
Elde edilen (5.16) çözümleri, (5.8) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (5.6) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü

$$\xi = x - \left(\frac{\sqrt{2\gamma^2 + \alpha^2\lambda^2}}{\lambda} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_4(\xi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta}} + \frac{2\gamma\mu}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{1}{-\mu + \lambda A(Cosh(\xi\lambda) - Sinh(\xi\lambda))} \right), \quad (5.17)$$

bulunur. Bu elde edilen (5.17) ile verilen çözüm fonksiyonunda sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.4 (5.17) ile verilen analitik çözümde $A = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 3$, $\lambda = 4$, $\alpha = 6$, $\beta = 4$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

İkinci uygulama olarak Whitham'ın [51] çalışmasında kullanmış olduğu dördüncü mertebeden Boussinesq denklemi için analitik çözüm fonksiyonunu araştıralım.

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{4x} + 3(u^2)_{xx} = 0 \quad (5.18)$$

şeklinde verilen Boussinesq denklemi için $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x - Vt$, dönüşümü uygulandığında

$$(V^2 - 1)U'' + 6(U')^2 + 6UU'' - U^{(4)} = 0, \quad (5.19)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. Ayrıca (5.19) ile verilen denklemin bir kez integrali alınırsa

$$c + (V^2 - 1)U' + 6UU' - U''' = 0, \quad (5.20)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. (5.20) ile verilen diferansiyel denklemde lineer olmayan $6UU'$ terimi ile lineer olan U''' terimleri göz önüne alınarak dengeleme terimi $m=2$ olduğu kolayca hesaplanabilir. Hesaplanan bu değer (5.2) çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa (5.18) ile verilen denklemin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'} \right) + a_2 \left(\frac{1}{G'} \right)^2, \quad (5.21)$$

şeklinde yazılabilir. (5.21) ile verilen çözüm fonksiyonunun gerekli türevleri hesaplanıp

(5.20) ile verilen adi diferansiyel denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, $a_0, a_1, a_2, \mu, c, \lambda$ ve V sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{G'}\right)^0 : c &= 0 \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^1 : -a_1\lambda + 6a_0a_1\lambda + a_1V^2\lambda - a_1\lambda^3 &= 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^2 : 6a_1^2\lambda - 2a_2\lambda + 12a_0a_2\lambda + 2a_2V^2\lambda - 8a_2\lambda^3 - a_1\mu + 6a_0a_1\mu + a_1V^2\mu - 7a_1\lambda^2\mu &= 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^3 : 18a_1a_2\lambda + 6a_1^2\mu - 2a_2\mu + 12a_0a_2\mu + 2a_2V^2\mu - 38a_2\lambda^2\mu - 12a_1\lambda\mu^2 &= 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^4 : 12a_2^2\lambda + 18a_1a_2\mu - 54a_2\lambda\mu^2 - 6a_1\mu^3 &= 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^5 : 12a_2^2\mu - 24a_2\mu^3 &= 0,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (5.22) ile verilen denklem sistemi Mathematica paket programında çözülürse

$$a_1 = 2\lambda\mu, \quad a_2 = 2\mu^2, \quad V = -\sqrt{1 - 6a_0 + \lambda^2} \tag{5.23}$$

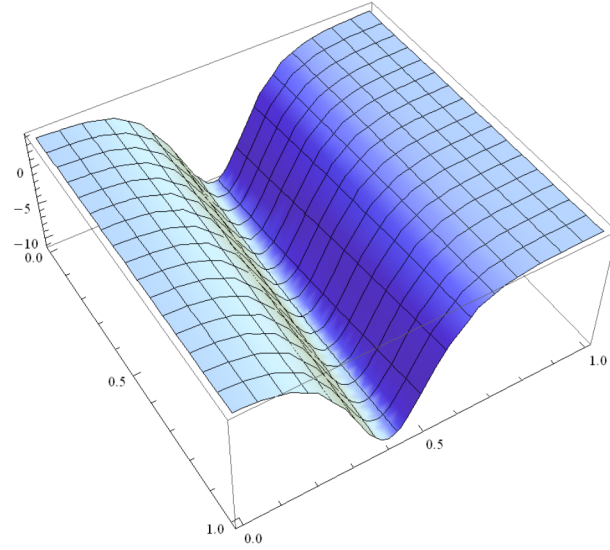
şeklinde çözümler elde edilir. Elde edilen (5.23) bu çözümleri (5.21) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (5.18) şeklinde verilen denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x + \left(-\sqrt{1 - 6a_0 + \lambda^2}\right)t,$$

olmak üzere

$$U(\xi) = a_0 + \frac{2\lambda^2\mu}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} + \frac{2\lambda\mu^2}{(-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda)))^2} \tag{5.24}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu elde edilen (5.24) ile verilen çözüm fonksiyonunda sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.5 (5.24) ile verilen analitik çözümde $A = 7.2$,
 $a_0 = 4.17$, $\mu = -0.04$, $\lambda = 5.52$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

Üçüncü uygulama olarak Genelleştirilmiş Boussinesq denklemini analitik çözümünü araştırılalım. Genel olarak Genelleştirilmiş Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + (f(u) + u_{xx})_{xx} = 0. \quad (5.25)$$

şeklindedir. Liu tarafından [52] özel olarak $f(u) = \frac{u^2}{2} + u$, alınarak

$$u_{tt} - (u_x)^2 + uu_{xx} + u_{4x} = 0. \quad (5.26)$$

şeklinde elde edilebilir. (5.26) ile verilen denklem $u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x - Vt$, dönüşümü uygulandığında

$$V^2 U'' + (U')^2 + UU'' + U^{(4)} = 0, \quad (5.27)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. Ayrıca (5.27) ile verilen denklemin bir kez integrali alınırsa

$$c + V^2 U' + UU' + U''' = 0, \quad (5.28)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada (5.28) ile verilen adi diferansiyel denklemde lineer olmayan UU' terimi ile lineer olan U''' terimleri göz önüne alınarak dengeleme terimi $m=2$ olduğu kolayca hesaplanabilir. Hesaplanan bu değer (5.2) çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa (5.26) ile verilen denklemin çözüm fonksiyonu

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'} \right) + a_2 \left(\frac{1}{G'} \right)^2, \quad (5.29)$$

şeklinde yazılabilir. (5.29) ile verilen çözüm fonksiyonunun gerekli türevleri alınır, (5.28) diferansiyel denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $a_0, a_1, a_2, \mu, c, \lambda$ ve V sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{G'} \right)^0 : \quad & c=0 \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^1 : \quad & a_0 a_1 \lambda + a_1 V^2 \lambda + a_1 \lambda^3 = 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^2 : \quad & a_1^2 \lambda + 2a_0 a_2 \lambda + 2a_2 V^2 \lambda + 8a_2 \lambda^3 + a_0 a_1 \mu + a_1 V^2 \mu + 7a_1 \lambda^2 \mu = 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^3 : \quad & 3a_1 a_2 \lambda + a_1^2 \mu + 2a_0 a_2 \mu + 2a_2 V^2 \mu + 38a_2 \lambda^2 \mu + 12a_1 \lambda \mu^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^4 : \quad & 2a_2^2 \lambda + 6a_1 a_2 \mu + 54a_2 \lambda \mu^2 + 6a_1 \mu^3 = 0, \\ \left(\frac{1}{G'} \right)^5 : \quad & 2a_2^2 \mu + 24a_2 \mu^3 = 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (5.30) ile verilen denklem sisteminin çözümüne göre

1. Durum

$$a_1 = -12\lambda\mu, \quad a_2 = -12\mu^2, \quad V = \mp \sqrt{-a_0 - \lambda^2} \quad (5.31)$$

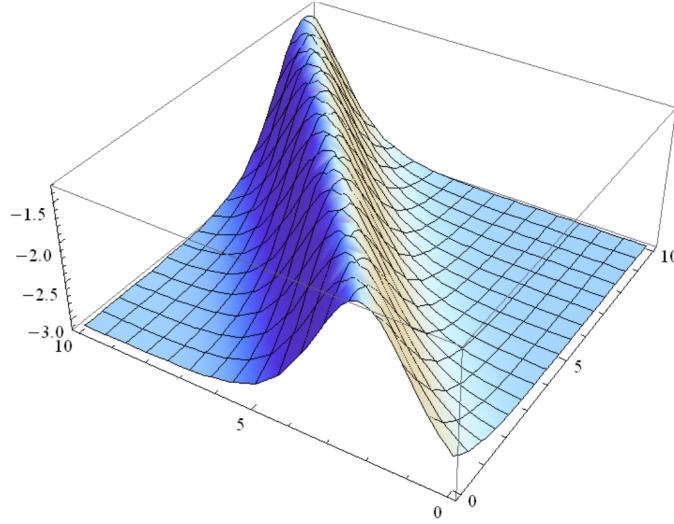
şeklinde çözümler elde edilir. Elde edilen (5.31) çözümleri (5.29) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (5.26) ile verilen denkleminin çözümü

$$\xi = x + \left(-\sqrt{-a_0 - \lambda^2} \right) t,$$

olmak üzere

$$U_1(\xi) = a_0 - \frac{12\lambda^2 \mu}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} - \frac{12\lambda\mu^2}{(-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda)))^2} \quad (5.32)$$

yazılabilir. Bu elde edilen (5.32) ile verilen analitik çözümde sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.6 (5.32) ile verilen analitik çözümde $A = 0.88$,
 $a_0 = -3.1$, $\mu = 10.5$, $\lambda = -0.77$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

Dördüncü olarak korunum kanunlarını incelediğimiz ve akı yoğunluk denklemlerini elde etmiş olduğumuz (3.6) ile verilen altıncı mertebeden **Boussinesq denkleminin** analitik çözümünü araştıralım.

(3.6) ile verilen altıncı mertebeden Boussinesq denklemine $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x - Vt$, dönüşümü uygulandığında

$$(V^2 - 1)U'' - (15UU^{(4)} + 30U'U''' + 15(U'')^2) + 45U^2U'' + 90U(U')^2 + U^{(6)} = 0, \quad (5.33)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemi elde edilir. Ayrıca (5.33) ile verilen diferansiyel denklemde lineer olmayan UU^4 terimi ile lineer olan $U^{(6)}$ terimleri göz önüne alınarak dengeleme terim $m=2$ olduğu kolayca bulunur. Bulunan bu değer (5.2) çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa (3.6) ile verilen denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'} \right) + a_2 \left(\frac{1}{G'} \right)^2, \quad (5.34)$$

şeklinde yazılabilir. (5.34) ile yazılan çözüm fonksiyonunun gerekli türevleri alınır, (5.33)

ile verilen diferansiyel denklemde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $a_0, a_1, a_2, \mu, c, \lambda$ ve V sabitler olmak üzere

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^1 : -a_1\lambda^2 - 45a_0^2a_1\lambda^2 + a_1V^2\lambda^2 - 15a_0a_1\lambda^4 - a_1\lambda^6 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^2 : -180a_0a_1^2\lambda^2 - 4a_2\lambda^2 - 180a_0^2a_2\lambda^2 + 4a_2V^2\lambda^2 - 60a_1^2\lambda^4 - 240a_0a_2\lambda^4 -$$

$$64a_2\lambda^6 - 3a_1\lambda\mu - 135a_0^2a_1\lambda\mu + 3a_1V^2\lambda\mu - 225a_0a_1\lambda^3\mu - 63a_1\lambda^5\mu = 0,$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^3 : -135a_1^3\lambda^2 - 810a_0a_1a_2\lambda^2 - 675a_1a_2\lambda^4 - 450a_0a_1^2\lambda\mu - 10a_2\lambda\mu -$$

$$450a_0^2a_2\lambda\mu + 10a_2V^2\lambda\mu - 555a_1^2\lambda^3\mu - 1950a_0a_2\lambda^3\mu - 1330a_2\lambda^5\mu - 2a_1\mu^2 -$$

$$-90a_0^2a_1\mu^2 + 2a_1V^2\mu^2 - 750a_0a_1\lambda^2\mu^2 - 602a_1\lambda^4\mu^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^4 : -720a_1^2a_2\lambda^2 - 720a_0a_2^2\lambda^2 - 960a_2^2\lambda^4 - 315a_1^3\lambda\mu - 1890a_0a_1a_2\lambda\mu -$$

$$4695a_1a_2\lambda^3\mu - 270a_0a_1^2\mu^2 - 6a_2\mu^2 - 270a_0^2a_2\mu^2 + 6a_2V^2\mu^2 - 1515a_1^2\lambda^2\mu^2 -$$

$$4950a_0a_2\lambda^2\mu^2 - 8106a_2\lambda^4\mu^2 - 900a_0a_1\lambda\mu^3 - 2100a_1\lambda^3\mu^3 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^5 : -1125a_1a_2^2\lambda^2 - 1620a_2a_1^2\lambda\mu - 1620a_0a_2^2\lambda\mu - 5910a_2^2\lambda^3\mu - 180a_1^3\mu^2 -$$

$$1080a_0a_1a_2\mu^2 - 10920a_1a_2\lambda^2\mu^2 - 1620a_1^2\lambda\mu^3 - 5040a_0a_2\lambda\mu^3 -$$

$$21840a_2\lambda^3\mu^3 - 360a_0a_1\mu^4 - 3360a_1\lambda^2\mu^4 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^6 : -540a_2^3\lambda^2 - 2475a_1a_2^2\lambda\mu - 900a_2a_1^2\mu^2 - 900a_2^2a_0\mu^2 - 12690a_2^2\lambda^2\mu^2 -$$

$$-10500a_1a_2\lambda\mu^3 - 600a_1^2\mu^4 - 1800a_0a_2\mu^4 - 29400a_2\lambda^2\mu^4 - 2520a_1\lambda\mu^5 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^7 : -1170a_2^3\lambda\mu - 1350a_1a_2^2\mu^2 - 11520a_2^2\lambda\mu^3 -$$

$$3600a_1a_2\mu^4 - 19440a_2\lambda\mu^5 - 720a_1\mu^6 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^7 : -630a_2^3\mu^2 - 3780a_2^2\mu^4 - 5040a_2\mu^6 = 0 \quad (5.35)$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (5.35) ile verilen denklem sistemi Mathematica yardımı ile çözülürse

1. Durum

$$a_0 = -\frac{\lambda^2}{3}, \quad a_1 = -4\lambda\mu, \quad a_2 = -4\mu^2, \quad V = -\sqrt{1-\lambda^4} \quad (5.36)$$

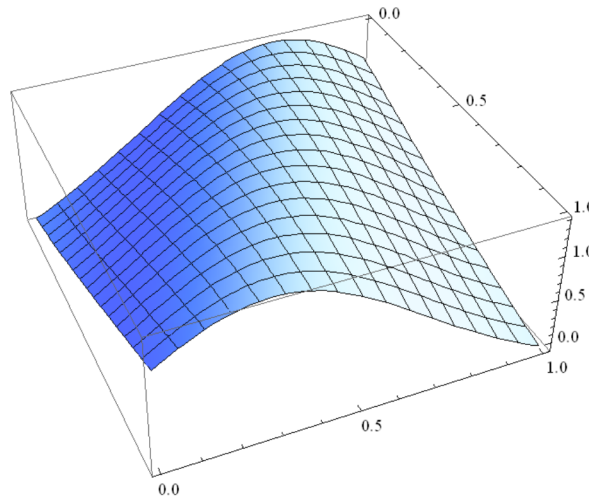
elde edilen (5.36) çözümleri, (5.34) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (3.6) ile verilen diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x + \left(\sqrt{1-\lambda^4}\right)t,$$

olmak üzere

$$U_1(\xi) = -\frac{\lambda^2}{3} - \frac{4\lambda^2\mu}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} - \frac{4\mu^2\lambda^2}{(-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda)))^2} \quad (5.37)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen (5.37) şeklindeki analitik çözümünde sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.7 (5.37) ile verilen analitik çözümde $A = 1.28$, $\mu = -0.7$, $\lambda = 1.44$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

2. Durum

$$a_1 = -2\lambda\mu, \quad a_2 = -2\mu^2, \quad V = \sqrt{1 + 45a_0^2 + 15a_0\lambda^2 + \lambda^4} \quad (5.38)$$

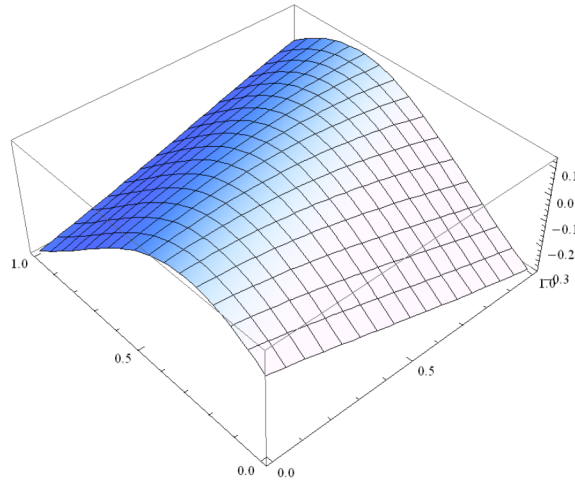
elde edilen (5.38) çözümleri, (5.34) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (3.6) ile verilen diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x - \left(\sqrt{1 + 45a_0^2 + 15a_0\lambda^2 + \lambda^4} \right) t,$$

olmak üzere

$$U_2(\xi) = a_0 - \frac{2\lambda^2\mu}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} - \frac{2\mu^2\lambda^2}{(-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda)))^2} \quad (5.39)$$

elde edilir. (5.39) şeklindeki analitik çözümde sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.8 (5.39) ile verilen analitik çözümde $A = 1.28$, $\mu = -0.7$, $\lambda = 1.44$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

3. Durum

$$a_0 = -\frac{\lambda^2}{3}, \quad a_1 = -4\lambda\mu, \quad a_2 = -4\mu^2, \quad V = \sqrt{1 - \lambda^4}, \quad (5.40)$$

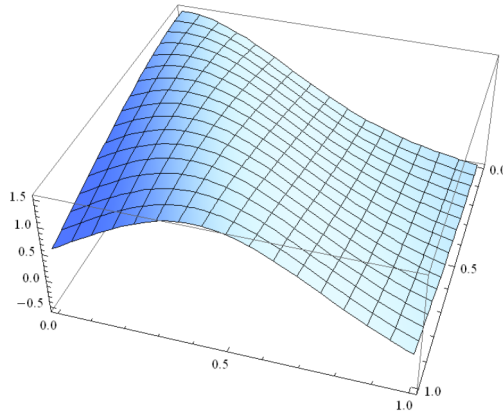
elde edilen (5.40) çözümleri (5.34) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (3.6) ile verilen diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x - \left(\sqrt{1 - \lambda^4}\right)t,$$

olmak üzere

$$U_3(\xi) = -\frac{\lambda^2}{3} - \frac{4\lambda^2\mu}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} - \frac{4\mu^2\lambda^2}{(-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda)))^2}. \quad (5.41)$$

şeklinde yazılabilir. Bu elde edilen (5.42) şeklindeki analitik çözümünde sabitlere özel değerler verilirse



Şekil 5.9 (5.41) ile verilen analitik çözümde $A = 0.58$, $\mu = -0.92$, $\lambda = 1.51$, değerleri için yürüyen dalga grafiği,

grafiği çizilebilir.

4. Durum

$$a_1 = -2\lambda\mu, \quad a_2 = -2\mu^2, \quad V = -\sqrt{1 + 45a_0^2 + 15a_0\lambda^2 + \lambda^4}. \quad (5.42)$$

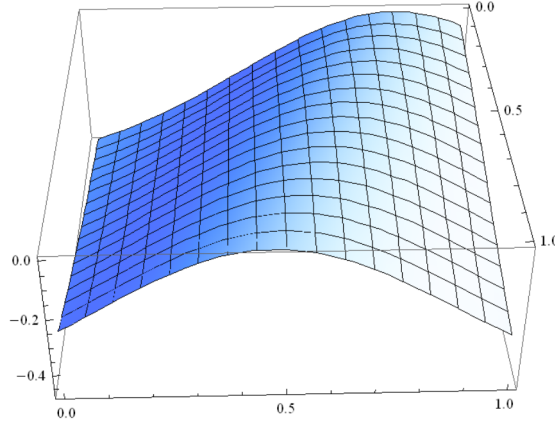
bu elde edilen (5.42) çözümleri (5.34) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılırsa (3.6) ile verilen diferansiyel denkleminin analitik çözümü

$$\xi = x + \left(\sqrt{1 + 45a_0^2 + 15a_0\lambda^2 + \lambda^4}\right)t,$$

olmak üzere

$$U_4(\xi) = a_0 - \frac{2\lambda^2\mu}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} - \frac{2\mu^2\lambda^2}{(-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda)))^2}. \quad (5.43)$$

şeklinde yazılabilir. Bu elde edilen (5.43) ile verilen analitik çözümde sabitlere özel değerler verilirse aşağıdaki grafik çizilebilir.



Şekil 5.10 (5.43) ile verilen analitik çözümde $A = 1.03$,
 $\mu = -0.08$, $\lambda = 1.12$, $a_0 = -0.63$ değerleri için yürüyen dalga grafiği,

Yukarıda verilen Şekil 5.1-10 ile verilen grafiklerin yürüyen dalga çözümleri olduğu görülmektedir. Elde edilen analitik çözümlerde mevcut olan sabitlere verilen özel değerler ile matematiksel modelin animasyonu bir sonraki bölümde incelenecektir.

Ayrıca altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin yeni açılım metodu ile elde edilen çözümlerden 1. durumdaki analitik çözümün korunum kanunları (1.4) ile verilen şartı göz önüne alacak olursak (4.3) ile verilen denklem sisteminin yoğunluğun korunumu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u \, dx = \frac{1}{3} \lambda \left(2 + \log \left(1 - \frac{\lambda e^{-t\lambda\sqrt{1+\lambda^4}}}{\mu} \right) - \log \left(1 - \frac{\mu e^{-t\lambda\sqrt{1+\lambda^4}}}{\lambda} \right) \right) \quad (5.44)$$

yazılır. Burada elde edilen (5.44) şeklinde verilen ifade sabit t değeri için bir reel sayı olduğu görülmektedir. Bu da bize gösterir ki geliştirmiş olduğumuz bu açılım metodu ile elde edilen analitik çözümlerin korunum kanunlarını sağlandığı ilgili çalışmanın [11] sonucu ile benzerdir. Sonuç olarak t zaman değişkeninin sabit değerleri için çözüm fonksiyonunun yürüyen dalga çözüm davranışı sergileyeceğini gösterir. Bu çalışmada yeni oluşturmuş olduğumuz açılım metodu ile elde edilen çözüm fonksiyonunun sabitler ve t değişkenlerinin farklı değerlere göre davranışları bir sonraki 5.2. Kesiminde incelenecektir.

Son olarak yeni açılım metodunu bir denklem sistemine uygulamaya çalışalım. Bu çalışmada Boussinesq denklemler ağırlıklı olarak ele alındığından şimdi **Boussinesq denklem sisteminin** [53] analitik çözümünü araştıralım.

$$u_t - g_x + uu_x + u_{xxt} = 0, \quad (5.45)$$

$$g_t - u_x g + g_x u + u_{xxx} = 0,$$

(5.45) ile verilen Boussinesq denklem sisteminde $u(x,t) = u(\xi)$, $g(x,t) = g(\xi)$ olmak üzere $\xi = x - Vt$, dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} -Vu' + g' + uu' - vu''' &= 0, \\ -Vg' + u'g + g'u + u''' &= 0, \end{aligned} \quad (5.46)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (5.46) ile verilen denklem sistemindeki ilk denklem bir kez integre edilirse,

$$\begin{aligned} c - Vu + g + \frac{1}{2}u^2 - vu'' &= 0, \\ -Vg' + u'g + g'u + u''' &= 0, \end{aligned} \quad (5.47)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada ilk denklemde u^2 ile u'' terimleri, ikinci denklemde ise $g'u$ ile u''' terimleri göz önüne alınarak dengeleme terimleri $M = 2$ ve $N = 2$, şeklinde elde edilir. Bu durumda (5.47) denklem sisteminin çözümleri

$$\begin{aligned} u(\xi) &= a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'} \right) + a_2 \left(\frac{1}{G'} \right)^2, \\ g(\xi) &= b_0 + b_1 \left(\frac{1}{G'} \right) + b_2 \left(\frac{1}{G'} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.48)$$

şeklinde yazılabilir. (5.48) şeklinde yazılan çözüm fonksiyonlarının gerekli türevleri alınır, (5.47) diferansiyel denklem sisteminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \lambda, \mu$ ve V sabitler olmak üzere

$$\left(\frac{1}{G'} \right)^0 : \frac{a_0^2}{2} + b_0 + c - a_0 V = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{G'}\right)^1 : \quad & a_0 a_1 + b_1 - a_1 V - a_1 V \lambda^2 = 0, \quad a_1 b_0 \lambda + a_0 b_1 \lambda - b_1 V \lambda + a_1 \lambda^3 = 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^2 : \quad & \frac{a_1^2}{2} + a_0 a_2 + b_2 - a_2 V - 4a_2 V \lambda^2 - 3a_1 V \lambda \mu = 0, \\
& 2a_2 b_0 \lambda + 2a_1 b_1 \lambda + 2a_0 b_2 \lambda - 2b_2 V \lambda + 8a_2 \lambda^3 + a_1 b_0 \mu + a_0 b_1 \mu - b_1 V \mu + 7a_1 \lambda^2 \mu = 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^3 : \quad & a_1 a_2 - 10a_2 V \lambda \mu - 2a_1 V \mu^2 = 0, \\
& 3a_2 b_1 \lambda + 3a_1 b_2 \lambda + 2a_2 b_0 \mu + 2a_1 b_1 \mu + 2a_0 b_2 \mu - 2b_2 V \mu + 38a_2 \lambda^2 \mu + 12a_1 \lambda \mu^2 = 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^4 : \quad & \frac{a_2^2}{2} - 6a_2 V \mu^2 = 0, \quad 4a_2 b_2 \lambda + 3a_2 b_1 \mu + 3a_1 b_2 \mu + 54a_2 \lambda \mu^2 + 6a_1 \mu^3 = 0, \\
\left(\frac{1}{G'}\right)^5 : \quad & 4a_2 b_2 \mu + 24a_2 \mu^3 = 0, \tag{5.49}
\end{aligned}$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. (5.49) ile verilen denklem sistemi Mathematica yardımı ile çözülürse

1. Durum

$$\begin{aligned}
a_0 = & \frac{1}{2592 \lambda^3 \mu^3} \left(-1296 \sqrt{2} \lambda^2 \mu^2 \sqrt{-\frac{2c \lambda^2 \mu^2}{-1 + \lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3 - 4c^2 + 3\lambda^4)} \mu^4}{-1 + \lambda^4}} \right) + \\
& 1728 \sqrt{2} c \lambda^2 \mu^2 \sqrt{-\frac{2c \lambda^2 \mu^2}{-1 + \lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3 - 4c^2 + 3\lambda^4)} \mu^4}{-1 + \lambda^4}} - \\
& 1296 \sqrt{2} \lambda^4 \mu^2 \sqrt{-\frac{2c \lambda^2 \mu^2}{-1 + \lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3 - 4c^2 + 3\lambda^4)} \mu^4}{-1 + \lambda^4}} - \\
& 432 \sqrt{2} \left(-\frac{2c \lambda^2 \mu^2}{-1 + \lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3 - 4c^2 + 3\lambda^4)} \mu^4}{-1 + \lambda^4} \right)^{\frac{3}{2}} + \\
& 432 \sqrt{2} \lambda^4 \left(-\frac{2c \lambda^2 \mu^2}{-1 + \lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3 - 4c^2 + 3\lambda^4)} \mu^4}{-1 + \lambda^4} \right)^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

$$a_1 = -6\sqrt{2}\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}},$$

$$a_2 = \frac{-6\mu\sqrt{2}}{\lambda}\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}},$$

$$b_0 = -\frac{1}{6\lambda^2\mu^2}\left(2c\lambda^2\mu^2 + 3\lambda^4\mu^2 - \sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4\right), \quad b_1 = -6\lambda\mu, \quad b_2 = -6\mu^2,$$

$$V = -\frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu}\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \quad (5.50)$$

çözümlerini yazabiliriz. Elde edilen (5.50) çözümleri (5.48) çözüm fonksiyonlarında yerlerine yazılırsa (5.46) şeklinde verilen denklem sisteminin analitik çözümleri

$$\xi = x + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu}\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_1(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))}\right) + a_2\left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))}\right)^2, \quad (5.51)$$

$$g_1(\xi) = b_0 - 6\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))}\right) - 6\mu^2\left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))}\right)^2.$$

yazılabilir.

2. Durum

$$a_0 = \frac{1}{2592\lambda^3\mu^3}\left(1296\sqrt{2}\lambda^2\mu^2\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} - \right.$$

$$\left. 1728\sqrt{2}c\lambda^2\mu^2\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& 1296\sqrt{2}\lambda^4\mu^2\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4}-\frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}+ \\
& 432\sqrt{2}\left(-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4}-\frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}\right)^{\frac{3}{2}}- \\
& 432\sqrt{2}\lambda^4\left(-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4}-\frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}\right)^{\frac{3}{2}}, \\
& a_1 = 6\sqrt{2}\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4}-\frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \\
& a_2 = \frac{6\mu\sqrt{2}}{\lambda}\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4}-\frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \\
& b_0 = -\frac{1}{6\lambda^2\mu^2}\left(2c\lambda^2\mu^2+3\lambda^4\mu^2-\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4\right), \quad b_1 = -6\lambda\mu, \quad b_2 = -6\mu^2, \\
& V = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu}\sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4}-\frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \tag{5.52}
\end{aligned}$$

şeklinde çözümleri yazabiliriz. Bu elde edilen (5.52) çözümleri (5.48) çözüm fonksiyonlarında yerlerine yazılırsa (5.46) şeklinde verilen denklem sisteminin analitik çözümleri

$$\xi = x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4}-\frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_2(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right) + a_2 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right)^2,$$

(5.53)

$$g_2(\xi) = b_0 - 6\lambda\mu \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right) - 6\mu^2 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right)^2.$$

şeklinde çözüm fonksiyonları yazılabilir.

3. Durum

$$\begin{aligned} a_0 = & \frac{1}{2592\lambda^3\mu^3} \left(-1296\sqrt{2}\lambda^2\mu^2 \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} - \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} \right) + \\ & 1728\sqrt{2}c\lambda^2\mu^2 \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} - \\ & 1296\sqrt{2}\lambda^4\mu^2 \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} - \\ & 432\sqrt{2} \left(-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4} \right)^{\frac{3}{2}} + \\ & 432\sqrt{2}\lambda^4 \left(-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4} \right)^{\frac{3}{2}}, \\ a_1 = & -6\sqrt{2} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \\ a_2 = & -\frac{6\mu\sqrt{2}}{\lambda} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \\ b_0 = & -\frac{1}{6\lambda^2\mu^2} \left(2c\lambda^2\mu^2 + 3\lambda^4\mu^2 + \sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4 \right), \quad b_1 = -6\lambda\mu, \quad b_2 = -6\mu^2, \\ V = & -\frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

biçimindeki çözümleri yazabiliriz. Elde edilen (5.54) çözümleri, (5.48) çözüm fonksiyonlarında yerlerine yazılırsa (5.46) şeklinde verilen denklem sisteminin analitik

çözümleri

$$\xi = x + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_3(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right) + a_2 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right)^2,$$

(5.55)

$$g_3(\xi) = b_0 - 6\lambda\mu \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right) - 6\mu^2 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right)^2.$$

yazılabilir

4. Durum

$$\begin{aligned} a_0 = & \frac{1}{2592\lambda^3\mu^3} \left(1296\sqrt{2}\lambda^2\mu^2 \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} \right) - \\ & 1728\sqrt{2}c\lambda^2\mu^2 \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} + \\ & 1296\sqrt{2}\lambda^4\mu^2 \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} + \\ & 432\sqrt{2} \left(-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4} \right)^{\frac{3}{2}} - \\ & 432\sqrt{2}\lambda^4 \left(-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4} \right)^{\frac{3}{2}}, \\ a_1 = & 6\sqrt{2} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{6\mu\sqrt{2}}{\lambda} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \\
b_0 &= -\frac{1}{6\lambda^2\mu^2} \left(2c\lambda^2\mu^2 + 3\lambda^4\mu^2 + \sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4 \right), \quad b_1 = -6\lambda\mu, \quad b_2 = -6\mu^2, \\
V &= \frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}}, \tag{5.56}
\end{aligned}$$

şeklinde çözümleri yazabiliriz. Elde edilen (5.56) çözümleri (5.48) çözüm fonksiyonlarında yerlerine yazılırsa (5.46) şeklinde verilen denklem sisteminin analitik çözümleri

$$\xi = x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}\lambda\mu} \sqrt{-\frac{2c\lambda^2\mu^2}{-1+\lambda^4} + \frac{\sqrt{-\lambda^4(-3-4c^2+3\lambda^4)}\mu^4}{-1+\lambda^4}} \right) t,$$

olmak üzere

$$u_4(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right) + a_2 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right)^2, \tag{5.57}$$

$$g_4(\xi) = b_0 - 6\lambda\mu \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right) - 6\mu^2 \left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda A(\cosh(\xi\lambda) - \sinh(\xi\lambda))} \right)^2.$$

elde edilir.

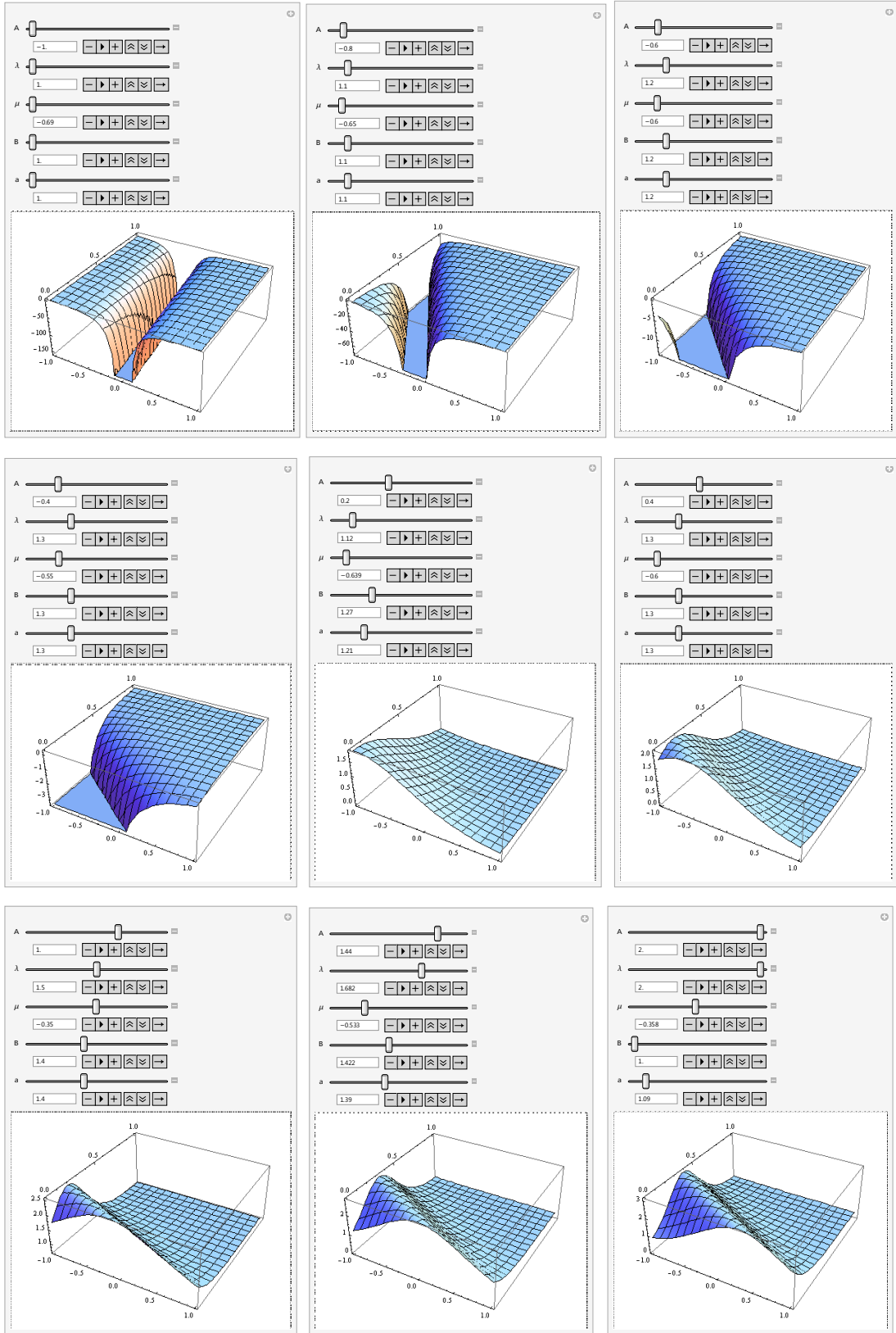
5. 2. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ve $\left(\frac{1}{G'}\right)$ - AÇILIM METOLARI İLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Öncelikle her iki açılımda da kullanılan (3.4) ve (5.1) ile verilen ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin farklı olması $G(\xi)$ çözüm fonksiyonunun da farklı olacağı açıktır. Dolayısıyla lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin her iki açılım metodu ile elde edilecek olan çözümlerin farklı olacağına işaret eder. Bu çalışmada bize ilham kaynağı olan $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile elde edilemeyen bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonlarını yeni açılım metodu ile elde edilmiştir. Bu da bize gösteriyor ki; $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile çözüm fonksiyonu elde edilemeyen diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonları, (3.4) ile verilen ikinci mertebeden lineer denklemin çözümü $G(\xi)$ olmak şartı ile $\left(\frac{G'}{G}\right)$ biçiminde çözüm fonksiyonuna sahip değildir. Özellikle bu çalışmada yer verdiğimiz (5.18) ile verilen dördüncü mertebeden Boussinesq denklemi ve (5.25) ile verilen genelleştirilmiş Boussinesq denklemleri $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile analitik çözümünün elde edilemeyeceğini ancak $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile analitik çözümlerin elde edilebileceğini gözlemledik. Buda yeni metodun bir önceki metoda göre avantajlı olduğunu gösterir.

Ayrıca $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile önceki bölümlerde yer verdiğimiz diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonu araştırılırken, elde edilen cebirsel denklem sistemi daha karmaşık olarak karşımıza çıkmaktadır. (3.4) ile verilen ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin karakteristiği olan $\lambda^2 - 4\mu$ ifadesi göz önüne alındığında $\lambda^2 - 4\mu < 0$ olması durumunda diferansiyel denklemin analitik kompleks çözümleri mevcut olacaktır. Çözüm fonksiyonunda bulunan sabitlere özel değerler verilerek farklı özelliklere sahip çözümleri reel düzlemdeki grafiksel davranışlarını gözlemleyebiliriz.

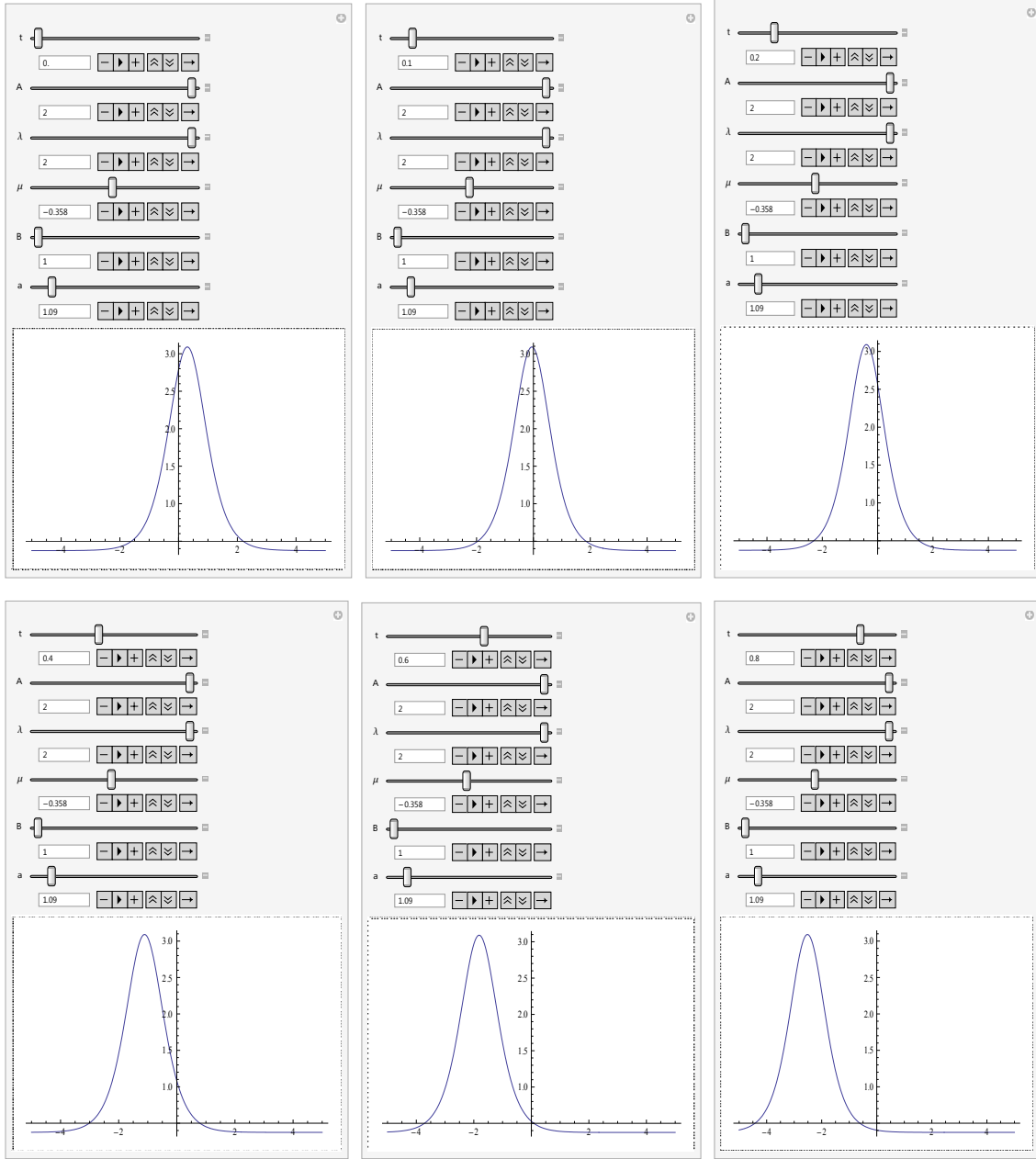
Ayrıca [48] ile verilen çalışmada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile elde edilen çözüm fonksiyonlarında sabitlere verilen özel değerler için farklı çözüm fonksiyonların varlığına yer verilmiştir.

$\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile çözüm fonksiyonu araştırılırken elde edilen cebirsel denklem sistemini, diğer açılım metoduna göre daha basit olarak elde etmekteyiz. Bu elde etmiş olduğumuz denklem sistemi Mathematica yardımı ile çözümü yapılırken programın çalışma süresi daha kısadır. Örneğin (3.6) ile verilen altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin açılım metotları ile çözüm fonksiyonu araştırılırken elde edilen denklem sistemi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılımı için bir dakikadan (gerçek zamanda) fazla süreye gereksinim varken, $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılımı için bir dakikadan daha az bir süre yeterli olacaktır. Çünkü $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile elde edilen çözüm fonksiyonunda diğer açılıma göre daha az sabit bulundurmaktadır. Dolayısıyla bu çalışmamızda $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodunun işlem yoğunluğu bakımından daha avantajlı olduğunu gözlemledik. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile (3.6) ile verilen altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin analitik çözümlerinin grafikleri üzerinde yürüyen dalga çözümlerinin farklı davranışlarını gözlemleyebilmek için çözüm fonksiyonlarının grafiksel olarak davranışlarını inceleyelim.



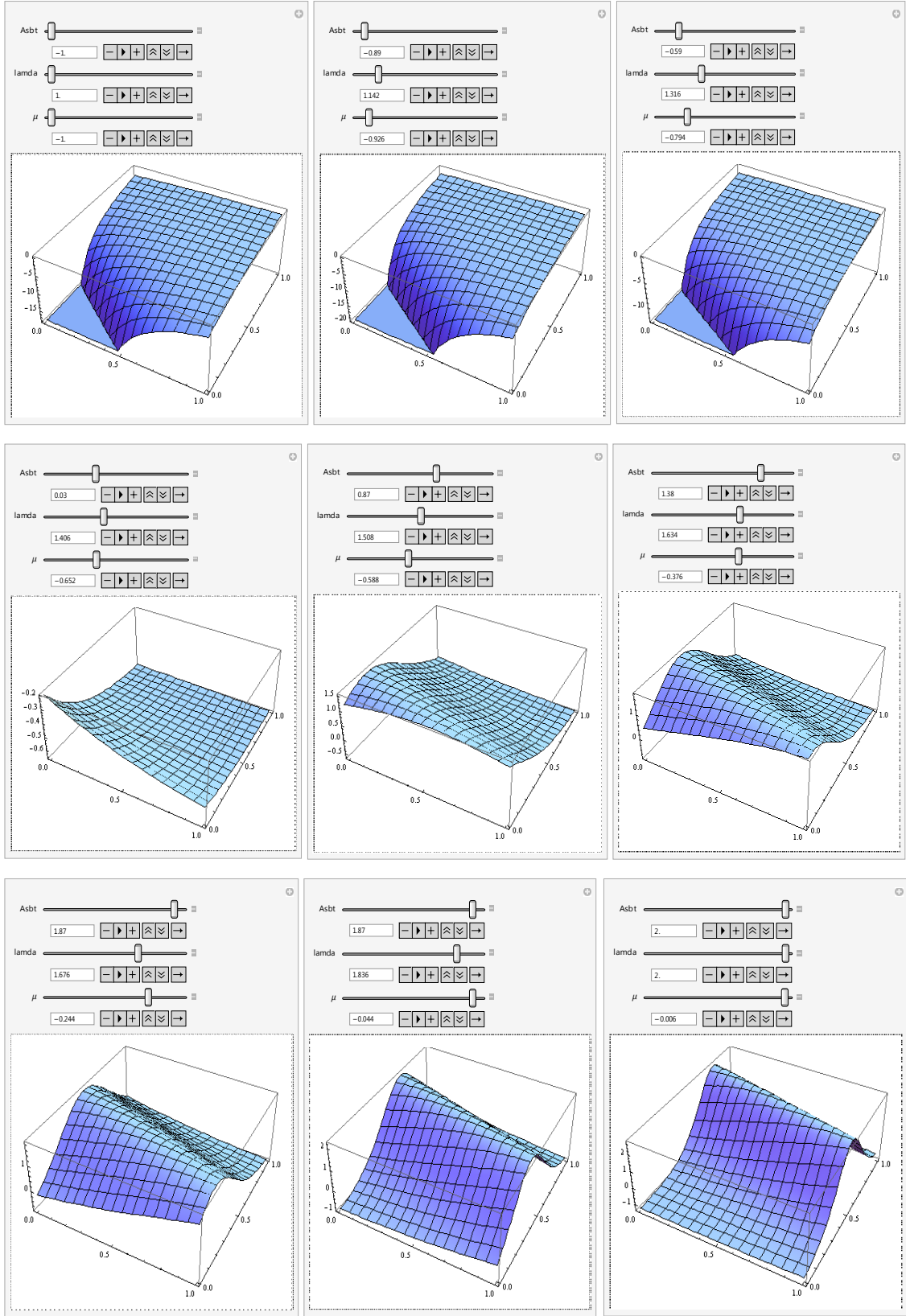
Şekil 6.1 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım metodu ile elde edilen (3.11) ile verilen analitik çözümleri

Şimdi ise şekil 6.1 ile verilen grafiklerden en son elde edilen grafik değerleri için t zaman değişimi için çözüm fonksiyonunun davranışlarını veren grafikleri inceleyelim.



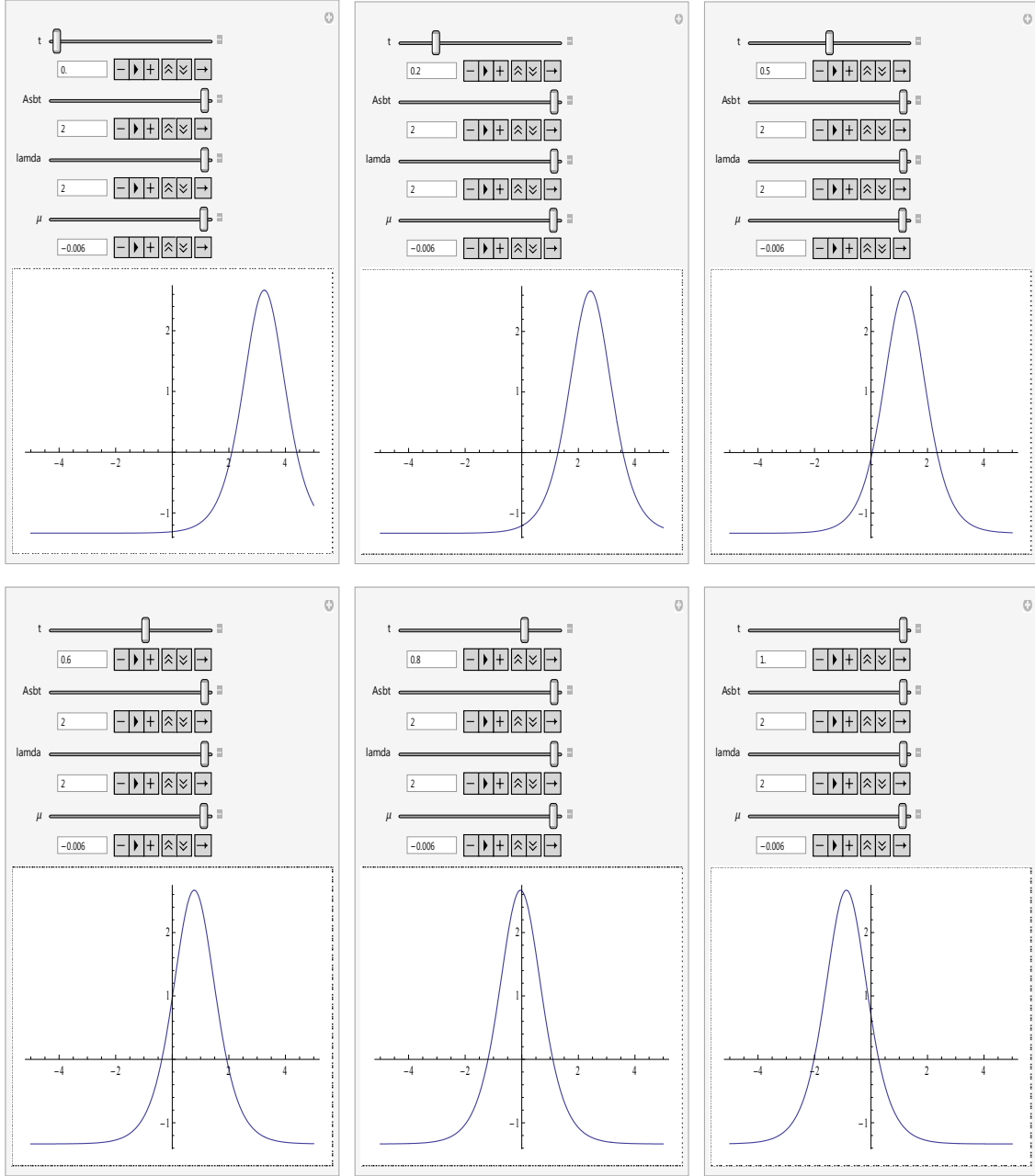
Şekil 6.2 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile elde edilen (3.11) ile verilen analitik çözümün t zaman değişkenine göre davranışları

Bu grafiklerde de görüldüğü gibi t zaman değişkenine göre elde edilen çözüm fonksiyonu yürüyen dalga davranışlarını sergilemektedir. Şimdi ise yeni açılım metodu ile altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin çözüm fonksiyonundaki sabitlerin durumuna göre davranışlarını inceleyelim.



Şekil 6.3 $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile elde edilen (5.37) ile verilen analitik çözümleri

Şekil 6.3 ile verilen grafiklerden en son elde edilen grafik değerleri için t zaman değişimi için çözüm fonksiyonunun davranışlarını veren grafikleri inceleyelim.



Şekil 6.4 $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile elde edilen (5.37) ile verilen analitik çözümün t zaman değişkenine göre davranışları

Bu grafiklerde de görüldüğü gibi t zaman değişkenine göre elde edilen çözüm fonksiyonu yürüyen dalga davranışlarını sergilemektedir. Altıncı mertebeden Boussinesq denkleminin yeni açılım metodu ile elde edilen çözüm fonksiyonunun Korunum kanunları incelenirken t zaman değişkeninin sabit olması durumunda çözüm fonksiyonunun yürüyen dalga davranışlarına sahip olduğu vurgulanmıştı.

6. SONUÇ

Uygulamalı bilimlerde doğada var olan fiziksel olayları modellemek, elde edilen bu matematiksel modellerin analitik çözümlerini elde etmek önemlidir. Ancak bütün bunlardan daha da önemlisi elde edilen analitik çözümlerin fiziksel davranışları hakkında bilgi sahibi olmaktır. Çünkü bu analitik çözümler, modellenen fiziksel olayların karakteri hakkında bilgi verir. Bu yüzden lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak fen ve mühendislik bilim alanlarında oldukça önemli bir yere sahiptir.

Uygulama alanında lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri geçmişte olduğu kadar günümüzde de bilim insanlarının ilgisini çekmektedir. Elde edilen dalga çözümleri, dalganın yapısı ve dalgaların birbirleri ile olan etkileşimleri gibi birçok konuda uygulama sahasında çalışan bilim insanlarına ilham kaynağı olmaktadır. Böyle bir ihtiyaçtan dolayı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini veren birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bu metotların çoğu sadece lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir. Çünkü bu metotların işleyişi “dengeleme terimi” olarak adlandırılan ve en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılmasına dayanır.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerini elde etmek için öncelikle denklem, belli dönüşüm altında tek değişkenli lineer adi diferansiyel denkleme getirilerek bu denklemin çözüm fonksiyonundan yararlanarak istenilen analitik çözüme gidilir. Bu metotların birbirlerinden farklı olan tek tarafı dönüşümde seçilen Riccati diferansiyel denkleminin ve dolayısıyla kullanılan çözüm fonksiyonunun farklı olmasıdır. Bunun yanında; bazı metotlarda Riccati diferansiyel denklemin yerine farklı adi diferansiyel denklemler alınarak çözüme ulaşılmıştır. Örneğin, $\frac{G'}{G}$ açılım metodunda Riccati diferansiyel denklemi yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı adi bir diferansiyel denklem kullanılmıştır. Bahsedilen metotların hepsi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini verir.

Bu çalışmanın beşinci bölümünde yer verdiğimiz dördüncü mertebeden Boussinesq denklemi ile genelleştirilmiş Boussinesq denklemlerinin $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metodu ile analitik

çözümünün elde edilemeyeceğini ancak $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile analitik çözümlerin elde edilebileceğini açıkça gördük. Bunun yanı sıra işlem yoğunluğu bakımından da yeni metodun bir önceki metoda göre avantajlı olduğunu gözlemledik. Bu metotlar, dengeleme terimini bulma esasına dayandığından dengeleme teriminin negatif olması durumunda ortaya çıkabilecek bazı güçlükler bu metotların bir çıkmazı olarak görülebilir. Ancak bu durum ile ilgili yapılan ve yapılmakta olan çalışmalar da vardır. Lineer olmayan denklemlerin analitik metotlar ile çözümü yapılırken denklemdeki lineer olmayan terimin sayısı ve lineer olmayanlığın kuvvetliliği çözüm esnasında bazı zorluklar çıkarabilir.

Bu çalışmada aynı zamanda altıncı mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin korunum kanunlarından enerjinin korunumu incelenmiştir. Bu inceleme yapılırken; simetri grup özelliklerini göz önüne alarak varyasyonel türev olarak bilinen Euler Lagrange operatörü yardımıyla altıncı mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin yoğunluk akı denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemin sonsuz sayıda korunum kanunlarına sahip olduğunu gösterebilmek için incelenen denklem literatürde var olan çalışmalar doğrultusunda bir sisteme dönüştürülmüştür. Aksi durumda sadece iki korunum kanunu elde edilecekti.

Denklemin korunum kanunları incelendikten sonra her iki açılım metodu ile analitik çözüm elde edildi. Altıncı mertebeden lineer olmayan Boussinesq denkleminin $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım metodu ile elde edilen çözümünde yoğunluğun korunumu sağladığını ve bu çözümlerin yürüyen dalga davranışlarını sergilediklerini hem korunum kanunları prensipleri ile hem de grafiksel olarak gösterdik. Akı yoğunluk arasında var olan denge hem fiziksel olayın modellenmesinde hem de çözüm fonksiyonunun elde edilmesinde göz ardı etmememiz gereken önemli bir husustur.

Günümüzde popülerliğini koruyan bu alandaki çalışmaların yoğunlaşarak devam edeceğini düşünmekteyiz. Bu çalışmanın devamında elde edilen çözüm fonksiyonların asimptotik davranışları ve laboratuvar şartlarındaki davranışları çalışılması ilginç olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Serway, R., Jewett, J.**, 2004. Physics for Scientists and Engineers, 6th Edition, Thomson, USA.
- [2] **Russell, J.S.**, 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.
- [3] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.
- [4] **Debnath L.**, 1997. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhauser, Boston, MA.
- [5] **Wazwaz, A.M.**, 2002. Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema, Rotterdam.
- [6] **Hirota, R.**, 1980. Direct methods in soliton theory, In Solitons (Bullogh, R.K. and Caudrey, P.J., eds). Springer, Berlin.
- [7] **Nimmo, J.J.C., Freeman, N.C.**, 1984. The use of Bäcklund transformations in obtaining N-soliton solutions in wronskian form, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **17**, 1415-1424.
- [8] **Guenther, R.B., Lee, W.J.**, 1988. Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equation, Prentice-Hall, Mineola, U.S.A.
- [9] **Bekir, A.**, 2005. Painleve Analysis, Exact Solutions and Symmetries of Nonlinear Equations, Ph. D. Thesis, Osmangazi University.
- [10] **Zakharov, V.E.** 1990. What is Integrability?, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] **Hereman, W., Adams, P.J., Eklund, H.L.**, 2008. Direct Methods and Symbolic Software for Conservation Laws of Nonlinear Equations, Nova Science Publishers, New York, U.S.A.
- [12] **Peter J.O.**, 1993. Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York, U.S.A.
- [13] **Daripa, P., Rajan, K., D.**, 2002. Analytical and Numerical Studies of a singularly perturbed Boussinesq equation, *Applied Mathematics and Computation*, **126**, 1-30.
- [14] **Sukardi, Y.**, 2006. Boussinesq Equation. [http:// boussinesq-equation.blogspot.com/](http://boussinesq-equation.blogspot.com/), 2006.

- [15] **Abourabia, A.M., El Horbaty, M.M.**, 2006. On solitary wave solutions for the two-dimensional nonlinear modified Kortweg–de Vries–Burger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 354-364.
- [16] **Bock, T.L., Kruskal, M.D.**, 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, **74**, 173-176.
- [17] **Drazin, P.G., Jhonson, R.S.**, 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
- [18] **Matveev, V.B., Salle, M.A.**, 1991. Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin.
- [19] **Cariello, F., Tabor, M.**, 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, **39**, 77-94.
- [20] **Fan, E.**, 2000. Two new applications of the homogeneous balance method, *Physics Letters A*, **265**, 353-357.
- [21] **Clarkson, P.A.**, 1989. New Similarity Solutions for the Modified Boussinesq Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 2355-2367.
- [22] **Chuntao, Y.**, 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, **224**, 77-84.
- [23] **Hereman, W., Korpel, A. and Banerjee, P.P.**, 1985. A general physical approach to solitary wave construction from linear solutions, *Wave Motion*, **7**, 283-289.
- [24] **Hereman, W., Takaoka, M.**, 1990. Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 4805-4822.
- [25] **Lan, H., Wang, K.**, 1990. Exact solutions for two nonlinear equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 3923-3928.
- [26] **Matveev, V.B., Salle, M.A.**, 1991. Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin.
- [27] **Cariello, F., Tabor, M.**, 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, **39**, 77-94.
- [28] **Fan, E.**, 2000. Two new applications of the homogeneous balance method, *Physics Letters A*, **265**, 353-357.
- [29] **Hu, X.B. and Ma, W.X.**, 2002. Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, *Physics Letters A*, **293**, 161-165.
- [30] **Shang, Y.**, 2007. Bäcklund transformation, Lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 1286-1297.

- [31] **Bock, T.L., Kruskal, M.D.**, 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, **74**, 173-176.
- [32] **Lou, S., Huang, G. and Ruan, H.**, 1991. Exact solitary waves in a convecting fluid, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24**, L587-L590.
- [33] **Malfliet, W.**, 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, **60**, 650-654.
- [34] **Parkes, E.J., Duffy, B.R.**, 1996. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Computer Physics Communications*, **98**, 288-300.
- [35] **Fan, E.**, 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, **277**, 212-218.
- [36] **Elwakil, S.A., El-labany, S.K., Zahran, M.A. and Sabry, R.**, 2002. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A*, **299**, 179-188.
- [37] **Xia T., Lü Z. and Zhang H.**, 2004. Symbolic computation and new families of exact soliton-like solutions of Konopelchenko–Dubrovsky equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 561-566.
- [38] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.**, 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Physics Letters A*, **311**, 145-157.
- [39] **Chen, H., Zhang, H.**, 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 71-76.
- [40] **El-Wakil S.A., Abdou M.A.**, 2008. New exact travelling wave solutions of two nonlinear physical models, *Nonlinear Analysis*, **68**, 235–245.
- [41] **Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q.**, 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.
- [42] **Shen S., Pan, Z.**, 2003. A note on the Jacobi elliptic function expansion method, *Physics Letters A*, **308**, 143-148.
- [43] **Chen, H.T., Hong-Qing, Z.**, 2004. New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 765-769.
- [44] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.**, 2004. Jacobi elliptic function rational expansion method with symbolic computation to construct new doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **59**, 529-536.

- [45] **Chen, Y., Yan, Z.**, 2006. The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 948-964.
- [46] **Wang, M., Li, X. and Zhang, J.**, 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, **372**, 417-423.
- [47] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.
- [48] **Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L.**, 2009. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3811-3816.
- [49] **Aslan, I., Öziş, T.**, 2009. On the validity and reliability of the (G'/G) -expansion method by using higher-order nonlinear equation, *Applied Mathematics and Computation*, **211**, 531-536.
- [50] **Wazwaz, A. M.**, 2005. The tanh and the sine-cosine methods for compact and noncompact solutions of the nonlinear Klein-Gordon equation, *Applied Mathematics and Computation*, **167**, 1179-1195.
- [51] **Whitham, G. B.**, 1974. Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- [52] **Liu, Y.**, 1995. Instability and Blow-up of Solutions to a Generalized Boussineq Equation, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **26**, 1527-1547.
- [53] **Xu, T., Li, J., Zhang, H.O., Zhang, Y.X., Yao, Z.Z., Tian, B.**, 2007. New Extension of The Tanh-Function Method and Application to The Whitham-Broer-Kaup Shallow Water Model With Symbolic Computation, *Physics Letters A*, **369**, 458-463.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 1990 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimime başladım. 1994 yılında mezun oldum. Aynı yıl Matematik öğretmeni olarak göreve başladım. 1998-2000 yılları arasında Fırat Üniversitesi Teknik Bilimler MYO bünyesinde bilgisayar programcılığı bölümünü bitirdim. 1999-2000 eğitim öğretim yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında tezli yüksek lisansa başladım ve 2002 yılında mezun oldum. 2003 yılı güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında doktora başladım. Evli iki çocuk babası.