

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

Hülya GÜN

Yüksek Lisans Tezi
Geometri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

TEMMUZ-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALILEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hülya GÜN
091121103

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Tezin Savunulduğu Tarih:

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)**
Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)**
Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ (İ.Ü)

TEMMUZ-2011

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkanlar sağlayan, çalışmamın her aşamasında yanımda olup her vesilede birikimini aktararak sürekli yardımda bulunan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e ve değerli bilgilerini ve birikimlerini esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper Osman Öğrenmiş' e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Hülya GÜN
ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER.....	2
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı	2
2.2. Öklid Uzayında Regle Yüzeyler	4
2.3. Galilean Uzayında Temel Kavramlar.....	6
2.4. Galilean Uzayında Regle Yüzeyler	10
3. G_3 , 3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN DRALLERİ	16
3.1. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında A-Tip Regle Yüzeyin Drali	18
3.2. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında B-Tip Regle Yüzeyin Drali.....	21
3.3. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında C-Tip Regle Yüzeyin Drali	25
4. UYGULAMALAR	29
5. SONUÇLAR	32
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	34

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Öklid ve Galilean uzayı ile ilgili temel kavramlar, Öklid uzayında regle yüzeyler ve Galilean uzayında regle yüzeyler verildi.

İkinci bölüm; çalışmanın orijinal kısmı olup bu bölümde Galilean uzayında tanımlanan üç tip regle yüzeyin teğet, aslinormal ve binormal doğrultusundaki dağılma parametreleri hesaplanarak bunların aralarındaki ilişkiler incelendi.

Üçüncü bölümde; örnekler verildi ve verilen örneklerin teğet, aslinormal ve binormal doğrultusundaki dağılma parametreleri hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Galilean Geometri, Regle Yüzey, Dağılma parametresi.

SUMMARY

Ruled Surfaces in Galilean Space

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter; basic concepts of Euclidean and Galilean geometry, ruled surfaces in Euclidean space and ruled surfaces in Galilean space were given.

In the second chapter; original works have been done. In this chapter distribution parameters of tangent, normal and binormal direction were calculated for ruled surface defined in Galilean space and relationships between them were research.

In the third chapter; examples were given and distribution parameters of tangent, normal and binormal direction for this examples were calculated.

Keywords: Galilean Geometry, Ruled Surface, Distribution Parameter.

SEMBOLLER LİSTESİ

ζ	: İç çarpım fonksiyonu
$\langle , \rangle$	: Öklid iç çarpımı
V	: İç çarpım uzayı
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzay
d	: Uzaklık fonksiyonu
φ	: Regle yüzey
G_3	: 3-boyutlu Galilean uzayı
B_6	: Galilean uzayının hareketler grubu
$g(,)$	: Galilean iç çarpımı
$\ \ $	: Galilean uzayında norm
$\wedge_G$	: Galilean uzayında vektörel çarpım
t	: Birim tanjant vektör
n	: Birim normal vektör
b	: Birim binormal vektör
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon

1.GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyler konusu bir çok makale ve kitapta incelendi [7,1]. Regle yüzeylerle ilgili olarak Ergüt[4], 3-boyutlu ve n-boyutlu regle yüzeyleri çalışmış ve n-boyutlu regle yüzeylerin eğriliklerini incelemiştir.

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayının geometrisi büyük ölçüde Röschel [11] tarafından geliştirilmiştir. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında regle yüzey kavramı Kamenarovic [7] tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada ilk bölümde temel kavramlar ifade edilip, ikinci bölümde Galilean uzayında üç tip regle yüzeyin teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri hesaplanmıştır ve bulunan bu draller arasındaki ilişkiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde ise, A, B ve C-tip regle yüzeylere örnekler verilerek bunların dralleri hesaplanmıştır.

2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı

2.1.1. Tanım: V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Eğer bir,

$$\zeta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise ζ ya V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu ve V ye de iç çarpım uzayı denir[6].

2.1.2. Tanım: 3-boyutlu reel standart Afin uzay, 3-boyutlu standart vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile eşlensin. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında bir,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımı $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ için

$$\langle , \rangle (X, Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı adı verilir. $\{\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\}$ iç çarpım uzayı ile eşlenen reel standart Afin uzay, 3-boyutlu Öklid uzay adını alır ve E^3 ile gösterilir[6].

2.1.3. Tanım: 3-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X ve bir afin koordinat sistemine göre X in koordinatları (x_1, x_2, x_3) olsun.

$$x_i : A \subseteq E^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3$$

fonksiyonuna A Öklid uzayının i -yinci koordinat fonksiyonu adı verilir[6].

2.1.4. Tanım: V bir 3-boyutlu reel vektör uzayı ve V üzerinde de Öklid iç çarpımı tanımlanmış olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir[6].

2.1.5. Tanım: 3-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleşen Öklid uzayı E^3 olsun. Bir,

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$ için $\mathbb{R}^3$ deki norm ile

$$d(X, Y) = \|\overline{XY}\| = \sqrt{\langle \overline{XY}, \overline{XY} \rangle}$$

şeklinde tanımlanır ve E^3 de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adını alır[6].

2.1.6. Tanım: $M \subset E^3$ eğrisi , (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ise

$$T'(s) = \kappa(s) N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s) N(s)$$

dir. Burada T birim tanjant vektör, N birim normal vektör, B birim binormal vektördür. κ ve τ ise , sırasıyla , eğrinin eğrilik ve torsiyonudur[6].

2.2. Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

2.2.1. Tanım: E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri,

$$r: I \rightarrow E^3$$

$$r \rightarrow r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$$

olsun. Her $t \in I$ için $r(t)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde,

$$l: \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$v \rightarrow l(v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t))$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $a_i(t) \in \mathbb{R}$, $r(t)$ noktasındaki doğrultman vektörün bileşenleridir.

l doğrusunun r eğrisi boyunca hareket etmesiyle elde edilen ve $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile belirtilen regle yüzey,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t))$$

şeklinde gösterilir.

Yani $M \subset E^3$ yüzeyi verildiğinde $\forall P \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $\forall P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir[5].

2.2.2. Tanım: Bir,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \vec{r}(t) + v \cdot \vec{a}(t)$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzey kapalıdır denir[3].

2.2.3. Tanım: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir ve $\langle \vec{a}, d\varphi \rangle = 0$ şeklinde bulunur[3].

2.2.4. Tanım: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir[9].

2.2.5. Tanım: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinde dayanak eğrisi boyunca boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir[3].

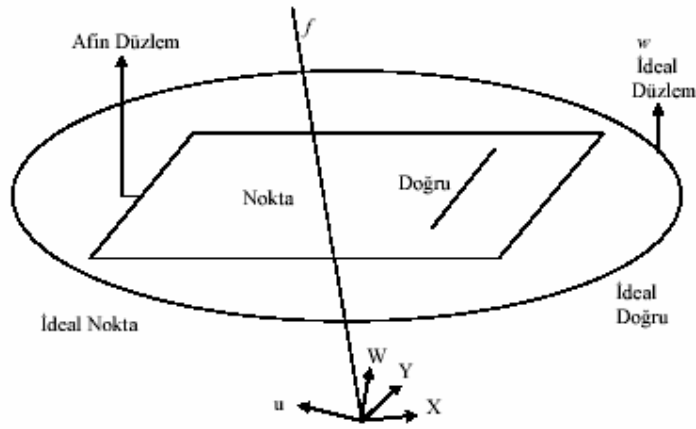
2.2.6. Tanım: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin bir anadoğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme teğet düzlem denir[3].

2.2.7. Tanım: Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilir denir[5].

2.2.8. Tanım: Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir[4].

2.3. Galilean Uzayında Temel Kavramlar

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayı, 3-boyutlu P_3 kompleks projektif uzayının w ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini, $f \subset w$ ideal doğruların bir reel doğrusunu ve $I_1, I_2 \in f$ gibi ideal noktalardan iki tanesini içeren $\{w, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahip olan bir halidir. Galilean geometri, projektif olarak işareti $(0,0,+,+)$ olan reel Cayley-Klein geometrilerinden biridir.



G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayının bir reel modeli olarak, $\mathcal{E}$ eliptik involusyonu ile birlikte $f \subset w$ reel doğrusunu ve $w \subset G_3$ reel düzlemini içeren $\{w, f\}$ ideale sahip bir reel P_3 projektif uzayını alabiliriz.

Uygun koordinatlarda $\mathcal{E}$ eliptik involusyonunu da ,

$$w \dots x_0 = 0, \quad f \dots x_0 = x_1 = 0$$

$$\mathcal{E} : (0 : 0 : x_2 : x_3) \rightarrow (0 : 0 : x_3 : -x_2)$$

şeklinde düşünebiliriz.

Homojen olmayan koordinatlarda H_8 benzerlik grubu,

$$x' = a_{11} + a_{12}x,$$

$$y' = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y \cos \varphi + a_{23}z \sin \varphi,$$

$$z' = a_{31} + a_{32}x - a_{23}y \sin \varphi + a_{23}z \cos \varphi,$$

formundadır.

Burada a_{ij} ve φ reel sayılar olup, ayrıca a_{12} ve a_{23} katsayıları özel bir role sahiptirler.

Şöyleki $a_{12} = a_{23} = 1$ alındığında Galilean uzayının B_6 hareket grubu elde edilir.

Bu grubun hareket denklemi,

$$B_6 : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cos \varphi & \sin \varphi \\ e & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla bu hareket boyunca G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bu doğrular dört ayrı şekilde ifade edilebilir[7]:

- 1) Reel non-izotropik doğrular. Bu doğrular f ideal doğrusunu kesmezler.
- 2) Reel izotropik doğrular. Bu doğrular w düzlemine ait değildir, fakat f ideal doğrusunu keserler.
- 3) Reel olmayan non-izotropik doğrular. Bu doğrular f den başka w nın bütün doğrularıdır.
- 4) f ideal doğrusu.

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında $x = \text{sabit}$ alındığında w şeklindeki düzlemler öklidyen olup diğer düzlemler izotropiktir.

Burada C^k ($k \geq 3$) sınıfından bir $r: I \rightarrow G_3$ eğrisi (I, r) koordinat komşuluğu ile

$$r(x) = (x, y(x), z(x))$$

şeklinde verildiğinde $\kappa(x)$ eğriliği ve $\tau(x)$ torsiyonu ,

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}$$

$$\tau(x) = \frac{\det(r'(x), r''(x), r'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında ortonormal üçyüzlü,

$$t(x) = r'(x)$$

$$n(x) = \frac{1}{\kappa(x)}(0, y''(x), z''(x))$$

$$b(x) = \frac{1}{\kappa(x)}(0, -z''(x), y''(x))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada t, n, b vektörleri , sırasıyla , teğet , aslinormal ve binormal vektörler olarak adlandırılır.

Bu vektörlere ait Frenet formülleri;

$$t'(x) = \kappa(x)n(x)$$

$$n'(x) = \tau(x)b(x)$$

$$b'(x) = -\tau(x)n(x)$$

şeklinde elde edilir[7].

2.3.1. Tanım: $X(x, y, z)$ G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir vektör olsun.

Eğer $X(x, y, z)$ vektörü için $x = 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörüne izotropik vektör denir [2].

2.3.2. Tanım: $X(x, y, z)$ G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir vektör olsun.

Eğer $X(x, y, z)$ vektörü için $x \neq 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörüne non-izotropik vektör denir[2].

2.3.3. Tanım: $X(x, y, z)$ G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir vektör olsun. Eğer $x = 1$ ise

$X(x, y, z)$ vektörüne birim non-izotropik vektör denir. Yani bütün birim non-izotropik vektörler $X(1, y, z)$ formundadır[2] .

2.3.4. Tanım: 3-boyutlu reel vektör uzayı R^3 olsun. $\forall X_1(x_1, y_1, z_1), X_2(x_2, y_2, z_2) \in G_3$ vektörü için Galilean iç çarpımı;

$$g : G_3 \times G_3 \rightarrow R$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow g(X_1, X_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & , x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \\ y_1 y_2 + z_1 z_2 & , x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır[10].

2.3.5. Tanım: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ izotropik vektörünü göz önüne alalım. Eğer $y^2 + z^2 = 1$ ise bu $X(x, y, z)$ izotropik vektörü birim vektör olarak adlandırılır[2].

2.3.6. Tanım: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörünün normu;

$$\|X\| = \begin{cases} x & , \quad x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

dir[11].

2.3.7. Tanım: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında $X(x_1, x_2, x_3)$ ve $Y(y_1, y_2, y_3)$ vektörlerini göz önüne alalım. X ve Y vektörleri için Galilean uzayında vektörel çarpım;

$$X \wedge_G Y = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır[8].

2.4. Galilean Uzayında Regle Yüzeyler

Bu bölümde 3-boyutlu Galilean uzayında regle yüzeyler incelendi. 3-boyutlu Galilean uzayında regle yüzeylerle ilgili bazı temel tanımlar verildi.

2.4.1. Tanım: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere,

$$\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler γ fonksiyonuna C^k ($k \geq 1$) sınıfından diferensiyellenebilirdir denir[10].

2.4.2. Tanım: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında verilen bir l doğrusunun verilen bir r eğrisi boyunca hareketiyle bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Galilean uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen l doğrusuna, regle yüzeyin bir anadoğrusu ve verilen r eğrisine de regle yüzeyin dayanak eğrisi denir.

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında C^3 sınıfından bir regle yüzey,

$$\varphi(x, v) = r(x) + va(x), \quad r, a \in C^3, \quad v \in \mathbb{R}$$

şeklinde olsun.

Burada r eğrisine Galilean yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir dayanak eğrisi denir. Bu eğri,

$$r(x) = (x, y(x), z(x))$$

şeklinde yazılır.

Ayrıca $a(x)$ anadoğrusu,

$$a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$$

veya

$$a(x) = (0, a_2(x), a_3(x)), \quad |a_2^2(x) + a_3^2(x)| = 1$$

şeklinde ifade edilir[2].

2.4.3. Tanım: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında,

$$\varphi(x, v) = r(x) + v.a(x)$$

bir regle yüzey olsun. Eğer bu yüzey için

$$\varphi_x \neq 0, \varphi_v \neq 0, \varphi_x \times \varphi_v \neq 0$$

şartları sağlanıyorsa bu regle yüzeye regülerdir denir [2].

Galilean uzayında regle yüzeyler, aşağıda verildiği biçimde üç farklı tiptedirler:

2.4.1. 3-Boyutlu Galilean Uzayında A-Tip Regle Yüzeyler

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri ,

$$r: I \rightarrow G_3$$

$$x \rightarrow r(x) = (x, y(x), z(x))$$

olsun. $\forall x \in I$ için $r(x)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde ,

$$l: \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$v \rightarrow l(v) = (x+v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

doğrusunu seçelim. Burada $a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$, $r(x)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusu r eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey ,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$(x, v) \rightarrow \varphi(x, v) = (x+v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde gösterilen $\varphi(x, v)$ regle yüzey A-tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(x), z(x), a_2(x), a_3(x) \in C^3$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ şeklindedir.

A-tip regle yüzeylerin $a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$ olarak verilen anadoğrusu non-izotropiktir.

A-tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü, $\kappa(x) \neq 0$ olmak üzere ,

$$\begin{aligned} t(x) &= a(x) = (1, a_2(x), a_3(x)) \\ n(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} a'(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, a'_2(x), a'_3(x)) \\ b(x) &= \frac{1}{\kappa(x)} (0, -a'_3(x), a'_2(x)) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

dir.

Burada $\kappa(x)$, A-tip regle yüzeyin eğriliği olup,

$$\kappa(x) = \sqrt{a_2'^2(x) + a_3'^2(x)}$$

şeklindedir.

A-tip regle yüzeyler için Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} t'(x) &= \kappa(x) n(x) \\ n'(x) &= \tau(x) b(x) \\ b'(x) &= -\tau(x) n(x) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca A-tip regle yüzeyin $\tau(x)$ torsiyonu,

$$\tau(x) = \frac{a'_2(x) a_3''(x) - a_2''(x) a'_3(x)}{\kappa^2(x)}$$

dir[11].

2.4.2. 3-Boyutlu Galilean Uzayında B-Tip Regle Yüzeyler

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri ,

$$r: I \rightarrow G_3$$

$$u \rightarrow r(u) = (0, y(u), z(u))$$

ve $y'^2 + z'^2 = 1$ olsun. $\forall u \in I$ için $r(u)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde ,

$$l: \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$v \rightarrow l(v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

doğrusunu seçelim. Burada $a(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$, $r(u)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusu r eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey ,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow G^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde gösterilen $\varphi(u, v)$ regle yüzey, B-tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(u), z(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ dir.

B-tip regle yüzeylerin $a(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$ şeklindeki anadoğrusu non-izotropiktir.

B-tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü, $\kappa(u) \neq 0$ olmak üzere ,

$$\begin{aligned} t(u) &= a(u) = (1, a_2(u), a_3(u)) \\ n(u) &= (0, -z'(u), y'(u)) \\ b(u) &= (0, y'(u), z'(u)) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

ve Frenet formülleri de,

$$\begin{aligned} t'(u) &= \kappa(u)n(u) \\ n'(u) &= \tau(u)b(u) \\ b'(u) &= -\tau(u)n(u) \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\kappa(u)$ ve $\tau(u)$, sırasıyla, B-tip regle yüzeyin eğriliği ve torsiyonu olup,

$$\kappa(u) = -\frac{a_2'(u)}{z'(u)}, \quad \tau(u) = \frac{y''(u)}{z'(u)}$$

dir[11].

2.4.3. 3-Boyutlu Galilean Uzayında C-Tip Regle Yüzeyler

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri ,

$$r: I \rightarrow G_3$$

$$u \rightarrow r(u) = (u, y(u), 0)$$

ve $a_2^2 + a_3^2 = 1$ olsun. $\forall u \in I$ için $r(u)$ noktasındaki teğet vektör ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde ,

$$l: \mathbb{R} \rightarrow G^3$$

$$v \rightarrow l(v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

doğrusunu seçelim. Burada $a(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$, $r(u)$ noktasındaki doğrultman vektörüdür.

l doğrusu r eğrisi boyunca hareket etsin. Bu durumda $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey ,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

şeklinde elde edilir. Bu şekilde gösterilen $\varphi(u, v)$ regle yüzey C-tip regle yüzey olarak adlandırılır. Burada $y(u), a_2(u), a_3(u) \in C^3$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ dir.

C-tip regle yüzeylerin $a(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$ şeklindeki anadoğrusu izotropiktir.

C-tip bir regle yüzeyin ortonormal üçyüzlüsü $\kappa(u) \neq 0$ olmak üzere ,

$$t(u) = r'(u) = (1, y'(u), 0)$$

$$n(u) = a(u) = (0, a_2(u), a_3(u)) \quad (2.4.5)$$

$$b(u) = (0, -a_3(u), a_2(u))$$

ve Frenet formülleri de,

$$t' = (0, y''(u), 0) = \kappa(n \cos \psi(u) - b \sin \psi(u))$$

$$n' = \frac{1}{\delta} b \quad (2.4.6)$$

$$b' = -\frac{1}{\delta} n$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\kappa(u)$, C-tip regle yüzeyin eğriliği olup,

$$\kappa(u) = y''(u)$$

şeklinde verilir. $\delta(u)$ fonksiyonu ise ,

$$\delta(u) = -\frac{a_3(u)}{a_2'(u)}$$

dir. ψ açısı ise $z = 0$ düzlemi ile regle yüzeyin doğrultmanı arasındaki açıdır[11].

3. G_3 , 3-BOYUTLU GALİLEAN UZAYINDA REGLE YÜZEYLERİN DRALLERİ

$\alpha: I \rightarrow E^3$ regüler bir eğri ve $\{t, n, b\}$ Frenet vektörleri olsun. Ayrıca E^3 de $\{O, t, n, b\}$ ve $\{O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de, sırasıyla, hareketli ve sabit uzayı temsil eden ortogonal koordinat sistemleri olsun. Genellikle hareketli uzayda bir X doğrusu sabit uzayda bir regle yüzey çizer. $\xi \in Sp\{n, b\}$ alınırsa ξ , t ye normal olup M yönlendirmesine bağlı X doğrusu boyunca $\xi = t \wedge X$ olarak seçilebilir. Böylece $\psi = \psi(s)$, α boyunca ξ ve n arasındaki açı olmak üzere,

$$\xi = \cos \psi n + \sin \psi b \quad \text{ve} \quad X = \sin \psi n - \cos \psi b$$

yazılabilir. Tanım 2.2.8 kullanılarak bu X doğrusunun drali,

$$P_x = \frac{\det\left(t, X, \frac{dX}{ds}\right)}{\left\|\frac{dX}{ds}\right\|^2} \quad (3.1)$$

şeklinde hesaplanır. Burada üç tip için de $t = (1, 0, 0)$ şeklinde alınırsa, Frenet formüllerinin de kullanılarak, bu X doğrusunun Galilean uzayında çizdiği A, B ve C-tip regle yüzeylerin drallerini hesaplayalım:

$X = \sin \psi n - \cos \psi b$ doğrusunun Galilean uzayında çizdiği A-tip regle yüzeyin drali (3.1) formülü ile hesaplanır. Burada (2.4.2) formülü kullanılarak,

$$\frac{dX}{ds} = (\psi' + \tau) \cos \psi n + (\psi' + \tau) \sin \psi b$$

şeklinde bulunur. $t = (1, 0, 0)$ olduğu da göz önüne alınırsa ,

$$\det\left(t, X, \frac{dX}{ds}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \\ 0 & (\tau + \psi') \cos \psi & (\tau + \psi') \sin \psi \end{vmatrix} = \tau + \psi'$$

bulunur. Bulunan bu değer (3.1) ifadesinin determinantında yerine yazılırsa,

$$P_x = \frac{\tau + \psi'}{(\tau + \psi')^2} = \frac{1}{\tau + \psi'} \quad (3.2)$$

elde edilir.

X doğrusunun Galilean uzayında çizdiği B-tip regle yüzeyin drali (3.1) formülü ile hesaplanır. Burada (2.4.4) formülleri kullanılarak,

$$\frac{dX}{ds} = (\psi' + \tau) \cos \psi n + (\psi' + \tau) \sin \psi b$$

bulunur. Buradan $t = (1, 0, 0)$ kullanılarak,

$$\det \left(t, X, \frac{dX}{ds} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \\ 0 & (\tau + \psi') \cos \psi & (\tau + \psi') \sin \psi \end{vmatrix} = \tau + \psi'$$

olur. Bulunan bu değer (3.1) ifadesinin determinantında yerine yazılırsa

$$P_x = \frac{\tau + \psi'}{(\tau + \psi')^2} = \frac{1}{\tau + \psi'} \quad (3.3)$$

elde edilir.

Son olarak X doğrusunun Galilean uzayında çizdiği C-tip regle yüzeyin dralini (3.1) formülü yardımıyla hesaplayalım. İlk olarak (2.4.6) yardımıyla,

$$\frac{dX}{ds} = \left(\psi' + \frac{1}{\delta} \right) \cos \psi n + \left(\psi' + \frac{1}{\delta} \right) \sin \psi b$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeyi (3.1) de yerine yazarsak ve $t = (1, 0, 0)$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$\det \left(t, X, \frac{dX}{ds} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \\ 0 & \left(\frac{1}{\delta} + \psi' \right) \cos \psi & \left(\frac{1}{\delta} + \psi' \right) \sin \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta} + \psi'$$

bulunur. Bulunan bu değer (3.1) ifadesinin determinantında yerine yazılırsa,

$$P_x = \frac{\frac{1}{\delta} + \psi'}{\left(\frac{1}{\delta} + \psi' \right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \psi'} \quad (3.4)$$

elde edilir.

3.1. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında A-Tip Regle Yüzeyin Drali

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında A-tip regle yüzey,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$(x, v) \rightarrow \varphi(x, v) = (x + v, y(x) + va_2(x), z(x) + va_3(x))$$

olsun. Ayrıca A-tip regle yüzeyin dayanak eğrisi ve doğrultmanı ,sırasıyla,

$$r: I \rightarrow G_3$$

$$x \rightarrow r(x) = (x, y(x), z(x)),$$

ve

$$a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$$

dir. Verilen bu regle yüzeyin teğet, aslinormal ve binormal doğrultusundaki drallerini hesaplayalım;

t teğetine karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği A-tip regle yüzey,

$$\varphi(x, v) = r(x) + vt(x)$$

olsun.

t teğetine karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği A-tip regle yüzeyin P_t drali,

$$P_t = \frac{\det \left[\begin{array}{c} \vec{t} \\ \vec{t} \\ \vec{t} \end{array}, \frac{d\vec{t}}{dx} \right]}{\left\| \frac{d\vec{t}}{dx} \right\|^2} \quad (3.1.1)$$

dir. Burada (2.4.1) ve (2.4.2) den ,sırasıyla,

$$t(x) = a(x) = (1, a_2(x), a_3(x))$$

ve

$$t'(x) = \kappa(x)n(x) \text{ göz önüne alınırsa,}$$

$$P_t = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{t}, \vec{t}, \frac{\vec{dt}}{dx} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{\vec{dt}}{dx} \right\|^2} = 0 \quad (3.1.2)$$

elde edilir.

n aslinormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği regle yüzey bir C-tipli regle yüzeye dönüşür ve

$$\varphi(x, v) = r(x) + vn(x)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre C-tipli regle yüzeyin P_n drali,

$$P_n = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{t}, \vec{n}, \frac{\vec{dn}}{dx} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{\vec{dn}}{dx} \right\|^2} \quad (3.1.3)$$

dir. (2.4.1) ve (2.4.2) den, sırasıyla,

$$n(x) = \frac{1}{\kappa(x)} a'(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, a'_2(x), a'_3(x))$$

ve

$$n'(x) = \tau(x)b(x)$$

değerleri (3.1.3) ifadesinin determinantında göz önüne alınırsa,

$$\det(t, n, n') = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \frac{1}{\kappa} a'_2 & \frac{1}{\kappa} a'_3 \\ 0 & -\frac{\tau}{\kappa} a'_3 & \frac{\tau}{\kappa} a'_2 \end{vmatrix} = \frac{\tau}{\kappa^2} a'^2_2 + \frac{\tau}{\kappa^2} a'^2_3 = \frac{\tau}{\kappa^2} (a'^2_2 + a'^2_3) , \quad \|n'\|^2 = \tau^2$$

bulunur. Bu ifade (3.1.3) de yerine yazılırsa,

$$P_n = \frac{\tau(a'^2_2 + a'^2_3)}{\tau^2} \frac{1}{\kappa^2} = \frac{1}{\tau \kappa^2} (a'^2_2 + a'^2_3) \quad (3.1.4)$$

elde edilir.

Son olarak b binormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği regle yüzey bir C-tipli regle yüzeye dönüşür ve

$$\varphi(x, v) = r(x) + vb(x)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre Galilean uzayında çizilen C-tipli regle yüzeyin P_b drali,

$$P_b = \frac{\det \left[\vec{t}, \vec{b}, \frac{d\vec{b}}{dx} \right]}{\left\| \frac{d\vec{b}}{dx} \right\|^2} \quad (3.1.5)$$

şeklindedir. (2.4.1) ve (2.4.2) den, sırasıyla,

$$b(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, -a'_3(x), a'_2(x))$$

ve

$$b'(x) = -\tau(x)n(x)$$

değerleri (3.1.5) ifadesinin determinantında yerine yazılırsa,

$$\det(t, b, b') = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa} a'_3 & \frac{1}{\kappa} a'_2 \\ 0 & -\frac{\tau}{\kappa} a'_2 & \frac{\tau}{\kappa} a'_3 \end{vmatrix} = \frac{\tau}{\kappa^2} a'^2_3 + \frac{\tau}{\kappa^2} a'^2_2 = \frac{\tau}{\kappa^2} (a'^2_3 + a'^2_2) , \quad \|b'\|^2 = \tau^2$$

elde edilir. Elde edilen bu değer (3.1.5) de göz önüne alınırsa,

$$P_b = \frac{\tau(a'^2_3 + a'^2_2)}{\tau^2} \frac{1}{\tau \kappa^2} (a'^2_3 + a'^2_2) \quad (3.1.6)$$

bulunur.

3.1.1. Sonuç: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında aslinormal ve binormallere karşılık gelen doğruların Galilean uzayında çizdiği regle yüzeyler, sırasıyla,

$$\varphi(x, v) = r(x) + vn(x)$$

ve

$$\varphi(x, v) = r(x) + vb(x)$$

olsun. Bu regle yüzeylerin dralleri, sırasıyla, P_n ve P_b ise

$$P_n = P_b$$

dir.

3.1.1. İspat: (3.1.4) ve (3.1.6) eşitliklerinden ispat açıktır.

3.1.2. Sonuç: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında aslinormal ve binormallere karşılık gelen doğruların Galilean uzayında çizdiği regle yüzeyler, sırasıyla,

$$\varphi(x, v) = r(x) + vn(x)$$

ve

$$\varphi(x, v) = r(x) + vb(x)$$

olsun.

Bu regle yüzeylerin dralleri, sırasıyla, P_n ve P_b ise bunların oranı sabittir,yani

$$\frac{P_n}{P_b} = 1 (= \text{sabit})$$

dir.

3.1.2. İspat: Sonuç 3.1.1 den açıktır.

3.2. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında B-Tip Regle Yüzeyin Drali

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında B-tip regle yüzey,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (v, y(u) + va_2(u), z(u) + va_3(u))$$

olsun. Ayrıca B-tip regle yüzeyin dayanak eğrisi ve doğrultmanı, sırasıyla,

$$r: I \rightarrow G_3$$

$$u \rightarrow r(u) = (0, y(u), z(u))$$

ve

$$a(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$$

olarak ifade edilir. Şimdi B-tip regle yüzeyin teğet, aslinormal ve binormal doğrultusundaki drallerini hesaplayalım;

İlk olarak t teğetine karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği B-tip regle yüzey,

$$\varphi(u, v) = r(u) + vt(u)$$

olsun.

t teğetine karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği B-tip regle yüzeyin P_t drali,

$$P_t = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{t}, \vec{t}, \frac{\vec{dt}}{du} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{\vec{dt}}{du} \right\|^2} \quad (3.2.1)$$

dir. (2.4.3) ve (2.4.4) den,

$$t(u) = a(u) = (1, a_2(u), a_3(u))$$

ve

$$t'(u) = \kappa(u)n(u)$$

değerleri (3.2.1) de göz önüne alınırsa,

$$P_t = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{t}, \vec{t}, \frac{\vec{dt}}{du} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{\vec{dt}}{du} \right\|^2} = 0 \quad (3.2.2)$$

elde edilir.

n aslinormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği regle yüzey C-tipli bir regle yüzeye dönüşür ve

$$\varphi(u, v) = r(u) + vn(u)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre Galilean uzayında çizilen C-tipli regle yüzeyin P_n drali,

$$P_n = \frac{\det \left[\begin{array}{c} \vec{t}, \vec{n}, \frac{d\vec{n}}{du} \end{array} \right]}{\left\| \frac{d\vec{n}}{du} \right\|^2} \quad (3.2.3)$$

dir. (2.4.3) ve (2.4.4) den, sırasıyla,

$$n(u) = (0, -z'(u), y(u))$$

ve

$$n'(u) = \tau(u)b(u)$$

değerleri (3.2.3) ifadesinin determinantında göz önüne alınırsa,

$$\det(t, n, n') = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -z' & y' \\ 0 & \tau y' & \tau z' \end{vmatrix} = -\tau z'^2 - \tau y'^2 = -\tau(z'^2 + y'^2), \quad \|n'\|^2 = \tau^2$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.3) de yerine yazılırsa,

$$P_n = \frac{-\tau(z'^2 + y'^2)}{\tau^2} = -\frac{1}{\tau}(z'^2 + y'^2) \quad (3.2.4)$$

elde edilir.

Son olarak b binormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği regle yüzey bir C-tipli regle yüzeye dönüşür ve

$$\varphi(u, v) = r(u) + vb(u)$$

şeklinde gösterilir. Buna göre Galilean uzayında çizilen C-tipli regle yüzeyin P_b drali,

$$P_b = \frac{\det \left[\begin{array}{c} \vec{t}, \vec{b}, \frac{d\vec{b}}{du} \end{array} \right]}{\left\| \frac{d\vec{b}}{du} \right\|^2} \quad (3.2.5)$$

şeklinde dir. (2.4.3) ve (2.4.4) den, sırasıyla,

$$b(u) = (0, y'(u), z'(u))$$

ve

$$b'(u) = -\tau(u)n(u)$$

değerleri (3.2.5) eşitliğinin determinantında göz önüne alınırsa,

$$\det(t, b, b') = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & y' & z' \\ 0 & \tau z' & -\tau y' \end{vmatrix} = -\tau y'^2 - \tau z'^2 = -\tau(y'^2 + z'^2), \quad \|b'\|^2 = \tau^2$$

elde edilir. Elde edilen bu değer (3.2.5) de yerine yazılırsa,

$$P_b = \frac{-\tau(y'^2 + z'^2)}{\tau^2} = -\frac{1}{\tau}(y'^2 + z'^2) \quad (3.2.6)$$

bulunur.

3.2.1. Sonuç: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında aslinormal ve binormallere karşılık gelen doğruların Galilean uzayında çizdiği regle yüzeyler,

$$\varphi(u, v) = r(u) + vn(u)$$

ve

$$\varphi(u, v) = r(u) + vb(u)$$

olsun.

Bu regle yüzeylerin dralleri, sırasıyla, P_n ve P_b ise

$$P_n = P_b$$

dir.

3.2.1. İspat: Denklem (3.2.4) ve (3.2.6) dan ispat açıktır.

3.2.2. Sonuç: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında aslinormal ve binormale karşılık gelen doğruların Galilean uzayında çizdiği regle yüzeyler,

$$\varphi(u, v) = r(u) + vn(u)$$

ve

$$\varphi(u, v) = r(u) + vb(u)$$

olsun.

Bu regle yüzeylerin dralleri, sırasıyla, P_n ve P_b ise

$$\frac{P_n}{P_b} = 1 (= \text{sabit})$$

dir.

3.2.2. İspat: Sonuç 3.2.1 den açıktır.

3.3. G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında C-Tip Regle Yüzeyin Drali

G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında C-tip regle yüzey,

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (u, y(u) + va_2(u), va_3(u))$$

olsun. Ayrıca C-tip regle yüzeyin dayanak eğrisi ve doğrultmanı, sırasıyla,

$$r: I \rightarrow G_3$$

$$u \rightarrow r(u) = (u, y(u), 0)$$

ve

$$a(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$$

olarak ifade edilir. Verilen bu regle yüzeyin teğet, aslinormal ve binormal doğrultusundaki drallerini hesaplayalım;

İlk olarak t teğetine karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği regle yüzey $z(x) = 0$ alınırsa A-tipli regle yüzeye dönüşür ve

$$\varphi(u, v) = r(u) + vt(u)$$

şeklinde gösterilir. Buna göre Galilean uzayında çizilen A-tipli regle yüzeyin P_t drali,

$$P_t = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{t} & \vec{t} & \frac{d\vec{t}}{du} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{d\vec{t}}{du} \right\|^2} \quad (3.3.1)$$

dir. (2.4.5) ve (2.4.6) dan

$$t(u) = r'(u) = (1, y'(u), 0)$$

ve

$$t'(u) = (0, y''(u), 0) = \kappa(N \cos \psi(u) - B \sin \psi(u))$$

değerleri (3.3.1) de göz önüne alınırsa

$$P_t = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{t}, \vec{t}, \frac{\vec{dt}}{du} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{\vec{dt}}{du} \right\|^2} = 0 \quad (3.3.2)$$

bulunur.

Şimdi n aslinormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği C-tip regle yüzey,

$$\varphi(u, v) = r(u) + vn(u)$$

olsun.

n aslinormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği C-tip regle yüzeyin P_n dralı,

$$P_n = \frac{\det \begin{bmatrix} \vec{t}, \vec{n}, \frac{\vec{dn}}{du} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{\vec{dn}}{du} \right\|^2} \quad (3.3.3)$$

dir. (2.4.5) ve (2.4.6) dan, sırasıyla,

$$n(u) = a(u) = (0, a_2(u), a_3(u))$$

ve

$$n'(u) = \frac{1}{\delta(u)} b(u)$$

değerleri (3.3.3) ifadesinin determinantında yerine yazılırsa

$$\det(t, n, n') = \begin{vmatrix} 1 & y' & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & -\frac{1}{\delta} a_3 & \frac{1}{\delta} a_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta} (a_2^2 + a_3^2), \quad \|n'\|^2 = \frac{1}{\delta^2}$$

elde edilir. Bulunan bu değer (3.3.3) de göz önüne alınırsa

$$P_n = \frac{1/\delta(a_2^2 + a_3^2)}{1/\delta^2} = \delta(a_2^2 + a_3^2) \quad (3.3.4)$$

bulunur.

Son olarak b binormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği C-tip regle yüzey,

$$\varphi(u, v) = r(u) + vb(u)$$

olsun.

Benzer şekilde, b binormaline karşılık gelen doğrunun G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında çizdiği C-tip regle yüzeyin P_b drali,

$$P_b = \frac{\det \left[\vec{t}, \vec{b}, \frac{d\vec{b}}{du} \right]}{\left\| \frac{d\vec{b}}{du} \right\|^2} \quad (3.3.5)$$

dir. (2.4.5) ve (2.4.6) dan, sırasıyla,

$$b(u) = (0, -a_3(u), a_2(u))$$

ve

$$b'(u) = -\frac{1}{\delta(u)} n(u)$$

değerleri (3.3.5) eşitliğinin determinantında göz önüne alınırsa

$$\det(t, b, b') = \begin{vmatrix} 1 & y' & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & -\frac{1}{\delta} a_2 & -\frac{1}{\delta} a_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta} (a_3^2 + a_2^2), \quad \|b'\|^2 = \frac{1}{\delta^2}$$

bulunur. Bulunan bu değer (3.3.5) de yerine yazılırsa

$$P_b = \frac{1/\delta(a_3^2 + a_2^2)}{1/\delta^2} = \delta(a_3^2 + a_2^2) \quad (3.3.6)$$

elde edilir.

3.3.1. Sonuç: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında aslinormal ve binormallere karşılık gelen doğruların Galilean uzayında çizdiği regle yüzeyler,

$$\varphi(u, v) = r(u) + vn(u)$$

ve

$$\varphi(u, v) = r(u) + vb(u)$$

olsun.

Bu regle yüzeylerin dralleri, sırasıyla, P_n ve P_b ise

$$P_n = P_b$$

dir.

3.3.1. İspat: (3.3.4) ve (3.3.6) dan açıktır.

3.3.2. Sonuç: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında aslinormal ve binormallere karşılık gelen doğruların Galilean uzayında çizdiği regle yüzeyler,

$$\varphi(u, v) = r(u) + vn(u)$$

ve

$$\varphi(u, v) = r(u) + vb(u)$$

olsun. Bu regle yüzeylerin dralleri, sırasıyla, P_n ve P_b ise

$$\frac{P_n}{P_b} = 1 (= sabit)$$

dir.

3.3.2. İspat: Sonuç 3.3.1 den açıktır.

3.3.3. Teorem: G_3 , 3-boyutlu Galilean uzayında aslinormal ve binormallere karşılık gelen doğruların Galilean uzayında çizdiği regle yüzeyleri göz önüne alalım. Bu regle yüzeylerin dralleri, sırasıyla, P_n ve P_b olsun. Bu draller arasında,

$$\frac{P_n}{P_b} = 1 (= sabit)$$

bağıntısı geçerlidir.

3.3.3. İspat: Sonuç 3.1.2, sonuç 3.2.2 ve sonuç 3.3.2 den açıktır.

4. UYGULAMALAR

$$1) \varphi(u, v) = (pu, A \cos u, -A \sin u) + v(1, B \sin u, B \cos u)$$

şeklinde verilen A-tip regle yüzeyi ele alalım[8]. Bu regle yüzey için teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri hesaplayalım:

Bu regle yüzey için Frenet çatısı,

$$\begin{aligned} t(u) &= (1, B \sin u, B \cos u) \\ n(u) &= \frac{1}{\kappa(u)} (0, u'B \cos u, -u'B \sin u) \\ b(u) &= \frac{1}{\kappa(u)} (0, u'B \sin u, u'B \cos u) \end{aligned} \quad (4.1)$$

olarak elde edilir. Buradan Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} t'(u) &= (0, u'B \cos u, -u'B \sin u) \\ n'(u) &= \tau(u) \frac{1}{\kappa(u)} (0, u'B \sin u, u'B \cos u) \\ b'(u) &= -\tau(u) \frac{1}{\kappa(u)} (0, u'B \cos u, -u'B \sin u) \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda verilen regle yüzeyin teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{\det(t, t, t')}{\|t'\|^2} = 0 \\ P_n &= \frac{\det(t, n, n')}{\|n'\|^2} = \frac{1}{\tau(u)} \\ P_b &= \frac{\det(t, b, b')}{\|b'\|^2} = \frac{1}{\tau(u)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

dir.

$$2) \varphi(u, v) = \left(0, \frac{1}{B} \cos Bu, -\frac{1}{B} \sin Bu \right) + v \left(1, \frac{A}{B} \sin Bu, \frac{A}{B} \cos Bu \right)$$

şeklinde verilen B-tip regle yüzeyi ele alalım[8]. Bu regle yüzey için teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri hesaplayalım:

Bu regle yüzey için Frenet çatısı,

$$\begin{aligned} t(u) &= \left(1, \frac{A}{B} \sin Bu, \frac{A}{B} \cos Bu \right) \\ n(u) &= (0, u' \cos Bu, -u' \sin Bu) \\ b(u) &= (0, -u' \sin Bu, -u' \cos Bu) \end{aligned} \quad (4.4)$$

olur. Buradan Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} t'(u) &= \kappa(u) (0, u' \cos Bu, -u' \sin Bu) \\ n'(u) &= \tau(u) (0, -u' \sin Bu, -u' \cos Bu) \\ b'(u) &= -\tau(u) (0, u' \cos Bu, -u' \sin Bu) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda verilen regle yüzeyin teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{\det(t, t, t')}{\|t'\|^2} = 0 \\ P_n &= \frac{\det(t, n, n')}{\|n'\|^2} = -\frac{1}{\tau(u)} \\ P_b &= \frac{\det(t, b, b')}{\|b'\|^2} = -\frac{1}{\tau(u)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur.

$$3) \quad \varphi(u, v) = \left(bu, b \frac{u^2}{2}, 0 \right) + v(0, \cos u, \sin u)$$

şeklinde verilen C-tip regle yüzeyi ele alalım[8]. Bu regle yüzey için teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri hesaplayalım:

Bu regle yüzey için Frenet çatısı,

$$\begin{aligned} t(u) &= r'(u) = (b, bu, 0) \\ n(u) &= a(u) = (0, \cos u, \sin u) \\ b(u) &= (0, -\sin u, \cos u) \end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak yazılır. Buradan Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} t'(u) &= (0, b, 0) \\ n'(u) &= \frac{1}{\delta(u)} (0, -\sin u, \cos u) \\ b'(u) &= \frac{1}{\delta(u)} (0, \cos u, \sin u) \end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda verilen regle yüzeyin teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{\det(t, t, t')}{\|t'\|^2} = 0 \\ P_n &= \frac{\det(t, n, n')}{\|n'\|^2} = \delta(u)b \\ P_b &= \frac{\det(t, b, b')}{\|b'\|^2} = \delta(u)b \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur.

5. SONUÇLAR

1) Bu çalışmada, Öklid uzayındaki temel kavramlar ve teoremler incelendi ve bir kısmı çalışmamızda verildi.

2) 3-boyutlu Galilean uzayının temel yapısı incelendi, Öklid uzayı ile benzer olan ve farklılıklar gösteren yapılar araştırıldı.

3) 3-boyutlu Galilean uzayında mevcut olan regle yüzey tipleri incelendi. Bu regle yüzeylerin teğet, normal ve binormal doğrultusundaki dralleri hesaplandı ve bulunan ifadeler teorem ve sonuçlar halinde verildi.

Bu çalışmaya ek olarak yukarıda belirtilen sonuçlar doğrultusunda çalışmalar devam etmektedir.

Bu konu ile ilgili çalışma yapmak isteyen araştırmacı ve uygulayıcılara elde edilen sonuçların bir yol göstermesi beklenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Carmo, M.P.**, 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 503p.
- [2] **Divjak, B. and Milin-Sipus, Z.**, 2003. Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces, Acta Math. Hungar., 98(3), 203-215.
- [3] **Ergüt, M.** , 1980, Regle Yüzeyler , Yüksek Lisans Tezi , Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [4] **Ergüt, M.**, 1983. Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 53s.
- [5] **Guggenheimer, H.N.**, 1963. Differential Geometry, College of Liberal Arts University of Minnesota.
- [6] **Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1980. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları Mat. No:1, 224s.
- [7] **Kamenarovic, I.**, 1991. Existence Theorems for Ruled Surfaces in the Galilean Space G_3 , Rad HAZU. Mat.456, 10, 183-196.
- [8] **Milin Sipus, Z.**, 2008. Ruled Weingarten Surfaces in the Galilean Space, Periodica Mathematica Hungarica, Vol.56(2), 213-225.
- [9] **Müller, H.R.**, 1963. Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.
- [10] **Öğrenmiş, A.O.** , 2007. Pseudo-Galilean Uzayında Regle Yüzeyler , Doktora Tezi , Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [11] **Röschel, O.**, 1986. Die Geometrie Des Galileischen Raumes, Berichte der Math.-Stat. Sektion im Forschungszentrum Graz, Ber.256, 1-20.
- [12] **Yaglom, I.M.**, 1979. A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 2009 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2009 yılında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandım. Halen adı geçen üniversitede araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.