

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI
VE İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ

Ertuğrul ULUSOY

Yüksek Lisans Tezi

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Danışman: Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

AĞUSTOS-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI
VE İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ertuğrul ULUSOY
(102121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16.07.2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 01.08.2013

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mikail ET

: Doç.Dr. Mahmut IŞIK

AĞUSTOS-2013

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım sayın hocam Prof.Dr. Rifat ÇOLAK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ertuğrul ULUSOY

ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
3. ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	7
4. ÇİFT DİZİLERİN ÇEKİRDEĞİ	16
5. ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI VE İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ	26
6. ÇİFT DİZİLERİN (α, β) -YINCI DERECEDE İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI VE ÇEKİRDEKLERİ	34
KAYNAKLAR	39

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın giriş olarak adlandırılan ilk bölümü konunun tarihsel gelişimine ayrılmıştır. İkinci bölümde gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise çift diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış olup bu kavrama dair özellikler incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise çift dizi için çekirdek kavramı incelenmiştir. Beşinci bölümde çift dizilerin istatistiksel sınırlılığı ve istatistiksel çekirdeği konuları verilerek istatistiksel çekirdek kavramına ilişkin bazı özellikler incelenmiştir. Çalışmanın orjinal olan altıncı bölümünde ise bir çift dizinin $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel limit noktaları ve çekirdeği kavramı tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çift dizilerin çekirdeği, Çift dizilerin istatistiksel sınırlılığı, Çift dizilerin istatistiksel çekirdeği, Çift dizilerin $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel yakınsaklığı

SUMMARY

STATISTICAL CONVERGENCE AND STATISTICAL CORE OF DOUBLE SEQUENCES

This thesis consists of six chapters. First chapter is devoted the introduction part. In chapter two, we give the basic definitions and preliminary results. In chapter three, we introduce the concept of statistical convergence of double sequences and analyzed some features of this concept. In chapter four, the concept of core of double sequences is given. In chapter five, the concepts of statistically boundedness of double sequences and statisticaly core of double sequences are given and some features of statisticaly core of double sequences are analyzed. In chapter six which is the original part of the study, we give the statistical limit points and statistical core of double sequences of order (α, β) .

Keywords: Core of double sequences, Statistical boundedness of double sequences, Statistical core of double sequences, Statistical convergence of double sequences of order (α, β)

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
w^2	: Kompleks terimli çift diziler uzayı
l_∞^2	: Kompleks terimli sınırlı çift diziler uzayı
c_2^∞	: Kompleks terimli yakınsak çift diziler uzayı
$c_2^{\infty,0}$	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak çift diziler uzayı
$\delta_2(E)$	: E kümesinin çift doğal yoğunluğu
S_2	: İstatistiksel yakınsak çift diziler uzayı
$S_2^{(\alpha,\beta)}$	: (α, β) – yıncı dereceden istatistiksel yakınsak çift diziler uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık düşüncesi, Zygmund [17] tarafından 1935 yılında Varşova da basılan monografisinin ilk baskısında yayınlandı. İstatistiksel yakınsaklık kavramı, Steinhaus [16] ve Fast [4] tarafından verildi. Yıllar boyunca ve farklı isimler altında istatistiksel yakınsaklık, Fourier analizi teorisi, ergodic teori, sayılar teorisi, ölçü teorisi, trigonometrik seriler, dönüşüm teorisi ve Banach uzaylarında tartışılmıştır. Daha sonra Fridy [5], Mursaleen ve Edely [11] ve diğerleri tarafından dizi uzayları açısından incelenerek toplanabilirlikle ilişkisi araştırılmıştır. Çift dizilerin (α, β) –yıncı dereceden istatistiksel yakınsaklığı konusu ise 2013 yılında Çolak ve Altın [3] tarafından çalışıldı.

Çift dizilerin yakınsaklığı ile ilgili ilk tanım ise 1900 de Pringsheim [14] tarafından yapılmıştır. Buna bağlı olarak çift diziler için çekirdek kavramı 1999 da Patterson [13] tarafından çalışılmıştır. Patterson, Knopp [9] çekirdek tanımına benzer olarak çift diziler için çekirdek kavramını tanıtarak dört boyutlu bir A matrisi için bu matris dönüşümü altında çift dizilerin çekirdekleri konusunda incelemeler yapmıştır.

Dizilerin istatistiksel limit noktaları ile ilgili ilk çalışma ise Fridy ve Orhan [6] tarafından 1997 yılında yapıldı. Bu çalışmaya paralel olarak çift dizilerin istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel çekirdeği konusu ise Çakan ve Altay [2] tarafından 2006 yılında ortaya konuldu.

Bu çalışmada çift dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve çekirdeği konularına ek olarak çift dizilerin (α, β) –yıncı dereceden istatistiksel çekirdeği kavramı tanıtıldı.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona **dizi** denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye **reel terimli dizi**, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ise diziye **kompleks terimli dizi** adı verilir.

Tanım 2.2 Her k doğal sayısı için $x_k \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_k) dizisine **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Her k doğal sayısı için $x_k \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa bu diziye **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir.

Tanım 2.3 $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (x_k) dizisine **sınırlı dizi** denir.

Tanım 2.4 Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir. Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırlarının en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir.

Tanım 2.5 $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x : |x - a| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine a nın ε -**komşuluğu** denir .

Tanım 2.6 (x_k) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $k > k_0$ olduğunda $|x_k - x| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε 'a bağlı bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisi x 'e **yakınsaktır** denir .

Teorem 2.7 Yakınsak bir dizinin limiti bir tektir.

Teorem 2.8 Yakınsak her dizi sınırlıdır .

Tanım 2.9 (x_k) reel terimli bir dizi ve C de (x_k) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. C , genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $\sup C$ ve $\inf C$

sayılarına, sırasıyla, (x_k) dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Üst limit, $\limsup x = \limsup (x_k)$, alt limit $\liminf x = \liminf (x_k)$ ile gösterilir .

Tanım 2.10 (x_k) reel terimli bir dizi olsun. (x_k) bir **Cauchy dizisidir** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $j, k \geq k_0$ için $|x_j - x_k| < \varepsilon$ dir.

Teorem 2.11 Her Cauchy dizisi sınırlıdır .

Tanım 2.12 $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen K kümesinin içinde kalıyorsa, K ya bir **konveks küme** denir .

x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası

$$[x_1, x_2] = \{x : x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in [0, 1]\}$$

şeklinde gösterilebileceğinden K cümlesinin konveksliği şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.13 $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun.

$$K \text{ konvekstir} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K \text{ ve } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ için } \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K$$

Tanım 2.14 $R_n(x)$, $k > n$ için (x_k) dizisinin tüm noktalarını içeren en küçük kapalı konveks küme olsun. Bu takdirde $R(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [R_n(x)]$ kümesine (x_k) dizisinin **çekirdeği** denir [9].

Daha önce vermiş olduğumuz alt limit ve üst limit tanımlarını kullanarak reel terimli bir (x_k) dizisinin çekirdeğini şöyle de tanımlayabiliriz.

Tanım 2.15 Reel terimli bir (x_k) dizisinin alt limiti ve üst limiti sırasıyla $\liminf(x_k)$ ve $\limsup(x_k)$ olsun. O halde (x_k) dizisinin çekirdeği

$$[\liminf(x_k), \limsup(x_k)]$$

şeklinde bir kapalı aralıktır [9].

Tanım 2.16 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir E alt kümesi için $\delta(E)$, yani E kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(E) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

ile gösterilir. Kümenin dışındaki dikey çizgiler kapalı kümenin eleman sayısını belirtmektedir [5]. Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.17 Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “ $h.h.k$ ” biçiminde gösterilir [5].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.18 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{S} L$ biçiminde gösterilir [5].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \exists L \in \mathbb{C} \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [5].

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x_k = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Bunu görmek için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 1, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. Diğer yandan $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x_k = L_1$ ve $S - \lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 2.19 Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [5].

Tanım 2.20 (Burkill ve Burkill, 1980): $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi ve X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X \\ (j, k) & \rightarrow x_{jk} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna **çift dizi** veya **çift indisli dizi** denir. Çift indisli bir $x = (x_{jk})$ dizisinin x_{jk} elemanlarını

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz. Bizim bu çalışmamızda kompleks terimli bütün çift indisli dizilerin cümlesini w^2 ile göstereceğiz. Buna göre, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesini göstermek üzere

$$w^2 = \{x = (x_{jk}) : \forall j, k \in \mathbb{N} \text{ için } x_{jk} \in \mathbb{C}\}$$

olup bu cümle $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in w^2$ için $\alpha x = (\alpha x_{jk})$ ve $x + y = (x_{jk} + y_{jk})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır.

3. ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Tanım 3.1 Her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N$ olunca $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi **Pringsheim anlamında yakınsaktır** denir. Bu durumda L sayısına (x_{jk}) dizisinin **Pringsheim limiti** denir. Bütün yakınsak çift dizilerin uzayını c^2 ile göstereceğiz.

Eğer bütün j ve k doğal sayıları için $|x_{jk}| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcut ise, yani

$$\|x\|_{(\infty,2)} = \sup_{j,k} |x_{jk}| < \infty \quad (3.1)$$

ise $x = (x_{jk})$ çift dizisi sınırlıdır denir (Bazı durumlarda $(|x_{jk}|) < M$ gösterimi (x_{jk}) dizisinin sınırlı olduğunu gösterecektir). Bütün sınırlı çift dizilerin uzayını l_∞^2 ile göstereceğiz.

Uyarı 3.2 Tek indisli olan klasik dizilerin aksine yakınsak bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Örnek olarak

$$x_{jk} = \begin{cases} k, & j = 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (x_{jk}) çift dizisi yakınsak olduğu halde sınırlı değildir. Açıkça görüldüğü gibi $P - \lim x = 1$ dir. Sınırlı ve yakınsak olan çift diziler uzayını ise c_∞^2 ile göstereceğiz ve bu uzay için $c_\infty^2 = c^2 \cap l_\infty^2$ eşitliğini yazabiliriz.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $p \geq j \geq N$, $q \geq k \geq N$ olduğunda $|x_{pq} - x_{jk}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 3.3 $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pozitif tam sayıların iki boyutlu bir kümesi olmak üzere $K(n, m)$, $\{(i, j) : (i, j) \in K, i \leq n, j \leq m\}$ kümesinin eleman sayısını gösterebilir. Bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin **alt asimptotik yoğunluğu**

$$\underline{\delta}^2(K) = \liminf_{n,m} \frac{K(n, m)}{nm}$$

olarak tanımlanır. $(K(n, m)/nm)$ çift dizisinin Pringsheim anlamında limitinin var olması durumunda, K kümesi **çift doğal yoğunluğa** sahiptir denir ve bu kümenin çift doğal yoğunluğu

$$\delta^2(K) = \lim_{n,m} \frac{K(n, m)}{nm}$$

ile verilir. Örneğin $K = \{(i^2, j^2) : i, j \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu takdirde

$$\delta^2(K) = \lim_{n,m} \frac{K(n,m)}{nm} \leq \lim_{n,m} \frac{\sqrt{n}\sqrt{m}}{nm} = 0$$

olup K kümesinin çift doğal yoğunluğunun sıfır olduğu görülür. Bir başka örnek olarak, $\{(i, 2j) : i, j \in \mathbb{N}\}$ kümesinin çift doğal yoğunluğunun $\frac{1}{2}$ olduğu görülür [11].

Tanım 3.4 $x = (x_{jk})$ kompleks terimli bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi l sayısına **istatistiksel yakınsaktır** denir. Burada küme parantezlerinin dışarısında bulunan dikey çizgiler ile bahsi geçen kümenin eleman sayısı belirtilmektedir. Bütün istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayını S_2 ile göstereceğiz [11].

Not 3.5

(a) Eğer $x = (x_{jk})$ yakınsak bir çift dizi ise yakınsak olduğu sayıya aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Sınırlı (veya sınırsız) satır ve (veya) sütunların sadece bir tane sonlu sayısı olduğundan

$$K(n, m) \leq s_1 n + s_2 m$$

olur ve buradaki s_1 ve s_2 sonlu sayılar olup bu sayıların varlığından x 'in istatistiksel yakınsak olduğunu anlayabiliriz.

(b) Eğer $x = (x_{jk})$ çift dizisi bir l sayısına istatistiksel yakınsak ise bu l sayısı bir tektir.

(c) İstatistiksel yakınsak olan bir çift dizi yakınsak olmak zorunda olmadığı gibi sınırlı olması da gerekmez [11].

Örnek $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} jk & j = n^2, k = m^2, m, n = 1, 2, \dots \\ 1 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $S_2 - \lim x_{jk} = 1$ olduğunu görmek kolaydır. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $|\{(j, k) : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{j}\sqrt{k}$ olur. Fakat $x = (x_{jk})$ dizisi ne yakınsak ne de sınırlıdır.

Teorem 3.6 Reel terimli bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin bir l sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta_2(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{(j, k)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$j, k = 1, 2, \dots$ alt kümesinin var olup

$$\lim_{\substack{j,k \rightarrow \infty \\ (j,k) \in K}} x_{jk} = l$$

olmasıdır [11].

İspat $x = (x_{jk})$ çift dizisi, l sayısına istatistiksel yakınsak olsun.

$$K_r = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - l| \geq \frac{1}{r}\}, r = 1, 2, \dots$$

ve

$$M_r = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{jk} - l| < \frac{1}{r}\}, r = 1, 2, \dots$$

alalım. Bu takdirde $\delta_2(K_r) = 0$ ve

$$(1) M_1 \supset M_2 \supset \dots M_i \supset M_{i+1} \supset \dots$$

ve

$$(2) \delta_2(M_r) = 1, r = 1, 2, \dots$$

olur.

Şimdi, $(j, k) \in M_r$ için (x_{jk}) dizisinin l sayısına yakınsak olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Varsayalım ki (x_{jk}) dizisi l sayısına yakınsak olmasın. Bu takdirde herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve sonsuz sayıda terim için

$$|x_{jk} - l| \geq \varepsilon$$

olur.

$$M_\varepsilon = \{(j, k) : |x_{jk} - l| < \varepsilon\}$$

ve $\varepsilon > \frac{1}{r}, r = 1, 2, \dots$ alalım. Dolayısıyla

$$(3) \delta_2(M_\varepsilon) = 0$$

olur ve (1) den $M_r \subset M_\varepsilon$ olur. Buradan $\delta_2(M_r) = 0$ olup bu durum (2) ile çelişir.

Böylece (x_{jk}) dizisinin l sayısına yakınsak olduğu görülür.

Tersine $\delta_2(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{(j, k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesinin mevcut olduğunu ve $\lim_{(j,k) \in K} x_{jk} = l$ olduğunu varsayalım. O halde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|x_{jk} - l| < \varepsilon, \forall j, k \geq N$$

yazabiliriz.

Şimdi

$$K_\varepsilon = \{(j, k) : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(j_{N+1}, k_{N+1}), (j_{N+2}, k_{N+2}), \dots\}$$

alırsak

$$\delta_2(K_\varepsilon) \leq 1 - 1 = 0$$

olur. Dolayısıyla $x = (x_{jk})$ dizisi, l sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Not 3.7 Eğer $S_2 - \lim_{jk} x_{jk} = l$ ise, $\lim_{jk} y_{jk} = l$ ve $\delta_2\{(j, k) : x_{jk} = y_{jk}\} = 1$ olacak şekilde bir $y = (y_{jk})$ dizisi mevcuttur. Burada $x_{jk} = y_{jk}$ olması durumu hemen hemen her j, k için geçerlidir [11].

Teorem 3.8 $S_2 \cap l_\infty^2$ uzayı, l_∞^2 lineer normlu uzayının kapalı lineer bir alt uzayıdır [11].

İspat $x^{(nm)} = (x_{jk}^{(nm)}) \in S_2 \cap l_\infty^2$ ve $x^{(nm)} \rightarrow x \in l_\infty^2$ olsun. $x^{(nm)} \in S_2 \cap l_\infty^2$ olduğundan

$$S_2 - \lim_{jk} x_{jk}^{(nm)} = a_{nm}, \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

olacak şekilde a_{nm} reel sayıları mevcuttur. $x^{(nm)} \rightarrow x$ iken, her $\varepsilon > 0$ için, $p \geq n \geq N$, $q \geq m \geq N$ olduğunda

$$\left| x_{jk}^{(pq)} - x_{jk}^{(nm)} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.2)$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradaki $|\cdot|$ ile söz konusu lineer uzaydaki norm kastedilmektedir.

Teorem 3.6 dan, $\delta_2(K_1) = \delta_2(K_2) = 1$ olacak şekilde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin K_1 ve K_2 alt kümeleri mevcut olup

$$(1) \quad \lim_{\substack{j,k \\ (j,k) \in K_1}} x_{jk}^{(nm)} = a_{nm}$$

$$(2) \quad \lim_{\substack{j,k \\ (j,k) \in K_2}} x_{jk}^{(pq)} = a_{pq}$$

sağlanır. Bu takdirde $\delta_2(K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan $K_1 \cap K_2$ kümesi sonsuz olur.

$(j_1, k_1) \in K_1 \cap K_2$ seçelim. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\left| x_{j_1, k_1}^{(pq)} - a_{pq} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.3)$$

ve

$$\left| x_{j_1, k_1}^{(nm)} - a_{nm} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.4)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $p \geq n \geq N$ ve $q \geq m \geq N$ için (3.2)-(3.4) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} |a_{pq} - a_{nm}| &\leq \left| a_{pq} - x_{j_1, k_1}^{(pq)} \right| + \left| x_{j_1, k_1}^{(pq)} - x_{j_1, k_1}^{(nm)} \right| + \left| x_{j_1, k_1}^{(nm)} - a_{nm} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (a_{nm}) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve dolayısıyla yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır.

$$(3) \lim_{n, m} a_{nm} = a$$

olsun. x dizisinin a sayısına istatistiksel yakınsak olduğunu göstermemiz gerekiyor.

$x^{(nm)}$ dizisi x' e yakınsak olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N_1(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left| x_{jk}^{nm} - x_{jk} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde en az bir $N_1(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

Ayrıca (3) eşitliğinden, her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N_2(\varepsilon)$ olduğunda

$$\left| a_{jk} - a \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde en az bir $N_2(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

Yine, $S_2 - \lim x^{(nm)} = a_{nm}$ olduğundan dolayı, $\delta_2(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{(j, k)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur öyle ki her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N_3(\varepsilon), (j, k) \in K$ olduğunda

$$\left| x_{jk} - a_{nm} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $N_3(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. $\max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\} = N_4(\varepsilon)$ diyelim.

Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ ve bütün $j, k \geq N_4(\varepsilon), (j, k) \in K$ değerleri için

$$\begin{aligned} |x_{jk} - a| &\leq \left| x_{jk} - x_{jk}^{(nm)} \right| + |x_{jk} - a_{jk}| + |a_{jk} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde x dizisi a sayısına istatistiksel yakınsaktır ve $x \in S_2 \cap l_\infty^2$ olur.

Dolayısıyla $S_2 \cap l_\infty^2$ uzayı l_∞^2 uzayının kapalı lineer bir alt uzayıdır.

Teorem 3.9 $S_2 \cap l_\infty^2$ kümesi l_∞^2 da hiç bir yerde yoğun değildir [11].

İspat Keyfi bir S normlu lineer uzayına ait S uzayından farklı kapalı bir lineer alt uzayının S uzayında hiç bir yerde yoğun olmamasından dolayı ve Teorem 3.8 den, sadece $S_2 \cap l_\infty^2 \neq l_\infty^2$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$x = (x_{jk})$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & j \text{ ve } k \text{ çift ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$x = (x_{jk})$ dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığı fakat sınırlı olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla $S_2 \cap l_\infty^2 \neq l_\infty^2$ olur.

Tanım 3.10 $x = (x_{jk})$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $j, p \geq N$, $k, q \geq M$ olduğunda

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{pq}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ ve $M = M(\varepsilon)$ sayıları varsa $x = (x_{jk})$ çift dizisi **İstatistiksel Cauchy Dizisidir** denir [11].

Teorem 3.11 $x = (x_{jk})$ kompleks terimli dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [11].

İspat $x = (x_{jk})$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsak olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. $|x_{NM} - l| \geq \varepsilon$ olacak şekilde N ve M sayıları seçelim.

$$A_\varepsilon = \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| \geq \varepsilon\}$$

$$B_\varepsilon = \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}$$

$$C_\varepsilon = \{(j, k), j = N \leq n, k = M \leq m : |x_{NM} - l| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde üç küme belirleyelim. Bu takdirde $A_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ olur ve buradan $\delta_2(A_\varepsilon) \leq \delta_2(B_\varepsilon) + \delta_2(C_\varepsilon) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $x = (x_{jk})$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tersine x dizisi istatistiksel Cauchy dizisi olsun fakat istatistiksel yakınsak olmasın. Bu takdirde A_ε kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde N ve M sayıları mevcut olacaktır. Dolayısıyla

$$E_\varepsilon = \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| < \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olur. Özel olarak eğer $|x_{jk} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ise

$$|x_{jk} - x_{NM}| \leq 2|x_{jk} - l| < \varepsilon \quad (3.5)$$

yazabiliriz. x dizisi istatistiksel yakınsak olmadığından B_ε kümesinin doğal yoğunluğu 1 olup bununla birlikte

$$\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| < \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. (3.5) eşitsizliğinden

$$\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - x_{NM}| < \varepsilon\}$$

kümesinin de doğal yoğunluğu sıfır olacağından A_ε kümesinin doğal yoğunluğunun bir olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla x dizisi istatistiksel yakınsaktır. Teorem 3.6 ve 3.11 gereğince aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.12 Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir [11].

- (a) x dizisi l ye istatistiksel yakınsaktır.
- (b) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.
- (c) x dizisinin öyle bir y alt dizisi vardır ki;

$$\lim_{jk} y_{jk} = l$$

dir.

Şimdi dizilerin kuvvetli Cesàro toplanabilirliği ile istatistiksel yakınsaklığı arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

Tanım 3.13 $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun.

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{jk} = l$$

şartı sağlanıyorsa x dizisi l 'ye *Cesàro toplanabilir* denir [11]. Cesàro toplanabilir tüm çift dizilerin uzayını $(C, 1, 1)$ ile göstereceğiz.

Benzer olarak, tek indisli dizilerde olduğu gibi aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.14 $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve p pozitif reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - l|^p = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa x dizisine l 'ye **Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilirdir** denir [11].

Bütün kuvvetli p-Cesàro toplanabilir çift dizilerin uzayını w_p^2 ile göstereceğiz.

Not 3.15

(i) Eğer $0 < p \leq q < \infty$ ise $w_q^2 \subseteq w_p^2$ (Hölder Eşitsizliğinden) ve

$$w_p^2 \cap l_\infty^2 = w_1^2 \cap l_\infty^2 \subseteq (C, 1, 1) \cap l_\infty^2$$

olur.

(ii) Eğer $x = (x_{jk})$ dizisi yakınsak fakat sınırlı değilse, x dizisi istatistiksel yakınsak olur. Ancak x dizisi Cesàro ya da kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olmak zorunda değildir [11].

Örnek $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} k, & j = 1, \text{ tüm } k\text{'ler için} \\ j, & k = 1, \text{ tüm } j\text{'ler için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Dolayısıyla $\lim_{jk} x_{jk} = 0$ olur fakat

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{jk} = \lim_{n,m} \frac{1}{nm} \frac{1}{2} (m^2 + n^2 + m + n - 2)$$

olup bu limit sonlu bir değere sahip değildir. Bu yüzden x dizisi Cesàro toplanabilir değildir. x dizisi aynı zamanda kuvvetli p-Cesàro toplanabilir de değildir. Fakat

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} |\{(j, k) : |x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n,m} \frac{m + n - 1}{n.m} = 0$$

olduğundan x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

(iii) Eğer x dizisi, sınırlı ve yakınsak bir çift dizi ise aynı zamanda Cesàro ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olup istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.16 $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve p pozitif reel sayı olsun. Bu takdirde

(a) x , l 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise aynı zamanda l 'ye istatistiksel yakınsaktır.

(b) $w_p^2 \cap l_\infty^2 = S_2 \cap l_\infty^2$ dir [11].

İspat

(a) $K_\varepsilon(P) = \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l|^p \geq \varepsilon\}$ olsun. x, l 'ye kuvvetli p-Cesàro

toplanabilir olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} 0 &\leftarrow \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - l|^p \\ &= \frac{1}{nm} \left\{ \sum_{(j,k) \in K_\varepsilon(P)} |x_{jk} - l|^p + \sum_{(j,k) \notin K_\varepsilon(P)} |x_{jk} - l|^p \right\} \\ &\geq \frac{1}{nm} |\{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden x, l 'ye istatistiksel yakınsaktır.

(b) $I_\varepsilon(P) = \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \text{ ve } M = \|x\|_{(\infty, 2)} + |l| \text{ olsun.}$

Buradaki $\|x\|_{(\infty, 2)}$ ifadesi (3.1) ile verilen $x = (x_{jk})$ sınırlı çift dizisinin sup-normunu göstermektedir.

x dizisi, sınırlı istatistiksel yakınsak olduğundan her $n, m \geq N$ için

$$\frac{1}{nm} \left| \{(j, k), j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı seçebiliriz. Bu takdirde her $n, m \geq N$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x_{jk} - l|^p &= \frac{1}{nm} \left\{ \sum_{(j,k) \in I_\varepsilon(P)} |x_{jk} - l|^p + \sum_{(j,k) \notin I_\varepsilon(P)} |x_{jk} - l|^p \right\} \\ &< \frac{1}{nm} nm \frac{\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{nm} nm \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x = (x_{jk})$ dizisi l sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabiliridir.

Not 3.17 Sınırlı ve istatistiksel yakınsak bir $x = (x_{jk})$ dizisinin aynı zamanda Cesàro toplanabilir olduğunu fakat tersinin doğru olmadığına dikkat etmek gerekir.

Örnek $x = (x_{jk})$ çift dizisi her k için

$$x_{jk} = (-1)^j$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{jk} = 0$$

olur. Fakat $x = (x_{jk})$ dizisi aşıkarak istatistiksel yakınsak değildir.

4. ÇİFT DİZİLERİN ÇEKİRDEĞİ

Bu bölümde çift diziler için limit inferior ve limit superior kavramlarının tanımları göz önüne alınarak çift diziler için çekirdek tanımı verilmiştir. Bu tanımlarla birlikte 4-boyutlu matrislerin regülerliği de kullanılarak Knopp çekirdek teoreminin bazı çeşitlerine dair ispatlar verilmiştir.

$x = (x_{jk})$ bir çift dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $j, k > N(\varepsilon)$ olduğunda $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise (x_{jk}) çift dizisinin L sayısına Pringsheim anlamında yakınsak olacağından daha önce bahsetmiştik. Bununla birlikte 1900 de Pringsheim ; " bir (x_{jk}) çift dizisi, her $G > 0$ için $j \geq n_1, k \geq n_2$ iken $|x_{jk}| > G$ olacak şekilde n_1 ve n_2 doğal sayıları mevcutsa **kesin iraksaktır**" şeklindeki tanımı vermiştir. Bu tanım aşıkarak $P - \lim (x_{jk}) = \infty$ ifadesine denktir.

Tanım 4.1 Bir x çift dizisinin bir y alt dizisi aşağıdaki şartları sağlayan bir çift dizidir: $n_0^1 = k_0^1 = n_{-1}^0 = k_{-1}^0 = 0$ olacak şekilde iki tane artan çift indisli $\{n_j^i\}$ ve $\{k_j^i\}$ dizileri mevcut olup,

n_1^i ve k_1^i nin her ikisi de $\max\{n_{2i-3}^{i-1}, k_{2i-3}^{i-1}\} < n_1^i$ ve k_1^i olacak şekilde seçilmiştir.

n_2^i ve k_2^i nin her ikisi de $\max\{n_1^i, k_1^i\} < n_2^i$ ve k_2^i olacak şekilde seçilmiştir.

n_3^i ve k_3^i nin her ikisi de $\max\{n_2^i, k_2^i\} < n_3^i$ ve k_3^i olacak şekilde seçilmiştir.

.

.

.

n_{2i-1}^i ve k_{2i-1}^i nin her ikisi de $\max\{n_{2(i-1)}^i, k_{2(i-1)}^i\} < n_{2i-1}^i$ ve k_{2i-1}^i olacak şekilde seçilmiştir.

Ayrıca $i = 1, 2, 3, \dots$ için

- $y_{1,i} = x_{n_1^i, k_1^i}$,

- $y_{2,i} = x_{n_2^i, k_2^i}$,

- $y_{3,i} = x_{n_3^i, k_3^i}$,

.

.

.

- $y_{i,i} = x_{n_i^i, k_i^i}$,
- $y_{i,i+1} = x_{n_{i+1}^i, k_{i+1}^i}$,
-
-
-
- $y_{i,2i-1} = x_{n_{2i-1}^i, k_{2i-1}^i}$,

şartları sağlanmaktadır [13].

Örnek 4.2 Her j ve k için $y_{jk} = 1$ ve $z_{jk} = -1$ olan dizilerin her ikisi de (j, k) . terimi $x_{jk} = (-1)^{j+k}$ olan çift dizinin bir alt dizisidir. Gerçekten, 1 ve -1 sayılarının bütün çift dizileri bu (x_{jk}) dizisinin bir alt dizisidir.

İki boyutlu bir matris dönüşümü, tüm yakınsak dizileri aynı limite sahip başka bir diziye dönüştürüyorsa bu dönüşüm matrisi için **regülerdir** denir. 1926 da Robison, ilave olarak sınırlılık varsayımını da ekleyerek, çift diziler için regülerlik kavramının $4 - boyutlu$ bir benzeri üzerinde çalışmıştır. Bu yeni kavram şöyle ifade edilmiştir; $4 - boyutlu$ bir matris ele alalım. Bu matris tüm sınırlı $P - yakınsak$ dizileri aynı $P - limit$ e sahip başka bir $P - yakınsak$ diziye dönüştürüyorsa bu matris dönüşümüne "**RH-regüler**" dir denir.

Teorem 4.3 $4 - boyutlu$ A matrisi $RH - regüler$ dir ancak ve ancak;

$$(RH_1) \quad P - \lim_{m,n} a_{jk}^{mn} = 0 \text{ , her } k \text{ ve } l \text{ için;}$$

$$(RH_2) \quad P - \lim_{m,n} \sum_{j,k=0,0}^{\infty, \infty} a_{jk}^{mn} = 1 \text{ ;}$$

$$(RH_3) \quad P - \lim_{m,n} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}^{mn}| = 0 \text{ , her } l \text{ için;}$$

$$(RH_4) \quad P - \lim_{m,n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}^{mn}| = 0 \text{ , her } k \text{ için;}$$

$$(RH_5) \quad \sum_{j,k=0,0}^{\infty, \infty} |a_{jk}^{mn}| \quad P - yakınsak \text{ olup;}$$

$$(RH_6) \quad \sum_{j,k > B} |a_{jk}^{mn}| < A \text{ olacak şekilde pozitif } A \text{ ve } B \text{ sayıları mevcuttur ([7], [15]).}$$

Tanım 4.4 Bir (x_{jk}) çift dizisinin $P - \lim y = \beta$ olacak şekilde bir y alt dizisi mevcutsa bu β sayısına (x_{jk}) çift dizisinin bir **Pringsheim limit noktası** denir [13].

Not 4.5 Pringsheim limit noktası tanımı şu ifadeye denktir: β , (x_{jk}) çift dizisinin Pringsheim limit noktasıdır ancak ve ancak $\lim_i x_{j_i k_i} = \beta$ olacak şekilde iki tane artan $\{j_i\}$ ve $\{k_i\}$ dizisi mevcuttur. Eğer bir (x_{jk}) çift dizisi $P - yakınsak$ değilse **Pringsheim anlamında ıraksaktır (P-ıraksak)** denir. Bu ifade şuna denktir: Bir (x_{jk}) çift dizisi $P - ıraksak$ tır ancak ve ancak ya (x_{jk}) çift dizisi farklı ve sonlu limitlere sahip en az iki tane alt diziye sahiptir ya da (x_{jk}) çift dizisinin sınırsız bir alt dizisi mevcuttur. Ayrıca eğer (x_{jk}) çift dizisi sınırsız bir alt diziye sahipse aynı zamanda kesin ıraksak bir alt diziye sahiptir.

Knopp, kompleks bir sayı dizisinin çekirdeği kavramını tanıttı [9]. Buna dayanarak çift indisli bir dizinin çekirdeğine dair tanımı Patterson aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 4.6 $P - C_n\{x\}$, $j, k > n$ için (x_{jk}) çift dizisinin tüm noktalarını içeren en küçük kapalı konveks küme olsun. Buna göre $P - C\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [P - C_n\{x\}]$ kümesine (x_{jk}) çift dizisinin **Pringsheim çekirdeği** denir [13].

Teorem 4.7 Eğer A , negatif olmayan regüler bir matris ise bu takdirde Ax çift dizisi mevcut olmak üzere Ax in çekirdeği (x_{jk}) çift dizisinin çekirdeğinde kapsanır [9].

Reel terimli bir dizinin klasik alt ve üst limitlerine benzer şekilde, çift diziler için de limit superior ve limit inferior tanımları verilebilir.

Tanım 4.8 $x = (x_{jk})$ reel terimli bir çift dizi ve her n için $\alpha_n = \sup_n \{x_{jk} : j, k \geq n\}$ olsun. Buna göre (x_{jk}) çift dizisinin **Pringsheim üst limiti** ($P - \lim \sup$) aşağıdaki gibi tanımlanır:

- 1 Her n için $\alpha_n = +\infty$ ise $P - \lim \sup x := +\infty$;
- 2 Bazı n ler için $\alpha_n < +\infty$ ise $P - \lim \sup x := \inf_n \{\alpha_n\}$.

Benzer şekilde $\beta_n = \inf_n \{x_{jk} : j, k \geq n\}$ olsun. Buna göre $x = (x_{jk})$ çift dizisinin **Pringsheim alt limiti** ($P - \lim \inf$) aşağıdaki gibi tanımlanır:

- 1 Her n için $\beta_n = -\infty$ ise $P - \lim \inf x := -\infty$;
- 2 Bazı n ler için $\beta_n > -\infty$ ise $P - \lim \inf x := \sup_n \{\beta_n\}$ [13].

Sonuç 4.9 Reel terimli bir çift dizinin Pringsheim çekirdeği $[P - \lim \inf x, P - \lim \sup x]$ kapalı aralıktır.

Örnek: (x_{jk}) çift dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_{jk} = \begin{cases} j & k = 1 \text{ ise} \\ -k & j = 1 \text{ ise} \\ (-1)^j & k = j > 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada açıkça görüleceği üzere (x_{jk}) çift dizisi ne alttan ne de üstten sınırlıdır. Dolayısıyla $P - \lim \inf x = -1$ ve $P - \lim \sup x = 1$ olur.

Aşağıdaki önermenin ispatı, tek indisli dizilerdeki önermenin ispatı ile aynıdır.

Önerme 4.10 x reel terimli bir çift dizi olsun. Bu durumda

- 1 $P - \lim \inf x \leq P - \lim \sup x$;
- 2 $P - \lim x = L$ ancak ve ancak $P - \lim \inf x = P - \lim \sup x = L$;
- 3 $P - \lim \sup (-x) = -(P - \lim \inf x)$;
- 4 $P - \lim \sup (x + y) \leq (P - \lim \sup x) + (P - \lim \sup y)$
- 5 $P - \lim \inf (x + y) \geq (P - \lim \inf x) + (P - \lim \inf y)$;
- 6 Eğer y, x çift dizisinin bir alt dizisi ise

$$P - \lim \inf x \leq P - \lim \inf y \leq P - \lim \sup y \leq P - \lim \sup x$$

olur [13].

Teorem 4.11 A negatif olmayan $RH - regüler$ matris olsun. Bu takdirde herhangi bir x çift dizisi için Ax dizisi mevcut olup $P - C\{Ax\} \subset P - C\{x\}$ olur [13].

İspat Eğer $P - C\{x\}$ kümesi kompleks düzlem ise ispat aşıkardır. Biz teoremimizi x dizisinin sınırlı veya sınırsız olması durumlarına göre ayrı ayrı düşünerek ispatlayacağız.

Her iki durumda da sonuç şu ifadenin ispatı ile belirlenecektir: Eğer $\omega \notin P - C_q\{x\}$ olacak şekilde bir q varsa, $\omega \notin P - C_p\{Ax\}$ olacak şekilde bir p de mevcuttur.

$x = (x_{jk})$ dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde $P - C\{x\}$ kompleks düzlem olmaz. Bu takdirde $\omega \notin P - C\{x\}$ olacak şekilde sonlu bir ω vardır. Bu ise $\omega \notin P - C_q\{x\}$ olacak şekilde bir q sayısının varlığını gösterir. ω sonlu olduğundan, A nın lineerliğinden $\omega = 0$ olduğunu varsayabiliriz. Aynı zamanda $P - C_q\{x\}$ konveks bir küme olarak alındığından $P - C_q\{x\}$ kümesini döndürebiliriz öyle ki sıfırdan $P - C_q\{x\}$ kümesine kadar olan mesafe $\min\{|y| : y \in P - C_q\{x\}\}$ değeridir ve pozitif reel eksen üzerindedir. Bu minimum değere $3d$ diyelim. $P - C_q\{x\}$ konveks olduğundan $P - C_q\{x\}$ kümesinin tüm noktaları değeri en az $3d$ olan reel bir değere sahiptir. $M = \max\{|x_{k,l}|\}$ olsun. $(RH_1) - (RH_4)$ regülerlik koşullarından ve $a_{k,l}^{m,n} \geq 0$ varsayımından dolayı, $m, n > N$ için

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(j, k) : 0 \leq j \leq j_0 \text{ ve } 0 \leq k \leq k_0\}, \\ I_2 &= \{(j, k) : k_0 \leq j \leq \infty \text{ ve } 0 \leq k \leq k_0\}, \\ I_3 &= \{(j, k) : 0 < j \leq j_0 \text{ ve } l_0 \leq k \leq \infty\}, \\ I_4 &= \{(j, k) : k_0 \leq j \leq \infty \text{ ve } l_0 \leq k \leq \infty\}. \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in I_1} a_{jk}^{mn} &< \frac{d}{3M}, & \sum_{j,k \in I_2} a_{jk}^{mn} &< \frac{d}{3M} \\ \sum_{j,k \in I_3} a_{jk}^{mn} &< \frac{d}{3M}, & \sum_{j,k \in I_4} a_{jk}^{mn} &> \frac{2}{3} \end{aligned}$$

olacak şekilde N sayısı mevcuttur. Bu takdirde $m, n > N$ için R reel kısmı göstermek üzere

$$\begin{aligned} R \left\{ \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right\} &= R \left\{ \sum_{j,k \in I_1} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right\} + R \left\{ \sum_{j,k \in I_2} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right\} \\ &\quad + R \left\{ \sum_{j,k \in I_3} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right\} + R \left\{ \sum_{j,k \in I_4} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right\} \\ &> -M \sum_{j,k \in I_1} a_{jk}^{mn} - M \sum_{j,k \in I_2} a_{jk}^{mn} \\ &\quad - M \sum_{j,k \in I_3} a_{jk}^{mn} + 3d \sum_{j,k \in I_4} a_{jk}^{mn} \\ &> -M \frac{3d}{3M} + 3d \frac{2}{3} = d \end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla $R\{Ax\} > d$ olur. Bu ise $P - C_p\{Ax\}$ kümesinin dışında bulunan bir $\omega = 0$ için bir p sayısının varlığını gösterir.

Şimdi farz edelim ki x sınırsız olsun. Burada ω sonsuzda bir nokta olabilir veya olmayabilir. Eğer ω sonsuzda bir nokta değilse $m, n > N$ olacak şekilde aşağıdaki ifadeleri sağlayan bir N seçelim:

$$\sum_{k,l \in I_1} a_{k,l}^{m,n} < \frac{d}{3M}, \quad \sum_{k,l \in I_2 \cup I_3 \cup I_4} a_{k,l}^{m,n} < \frac{2}{3}$$

İlk bölümdekine benzer şekilde $R\{Ax\} > d$ olduğunu elde ederiz. Eğer ω sonsuzda bir nokta ise, tüm q sayıları için $P - C_q\{x\}$ kümesi sınırlı olur. Bu ise $k, l > q$ için $x_{k,l}$ nin sınırlı olduğunu gösterir. Genel ifadeden bir şey kaybetmeksizin bir B pozitif sayısı için $(|x|) < B$ olduğunu varsayabiliriz. Bu takdirde yeterince büyük m ve n sayıları için aşağıdaki ifadenin doğruluğu elde edilir.

$$\left| \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right| \leq \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} a_{jk}^{mn} |x_{jk}| \leq B \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} a_{jk}^{mn} < \infty$$

Dolayısıyla $P - C_p\{Ax\}$ kümesinin dışındaki sonsuzdaki bir nokta için bir p sayısı mevcuttur. Teoremimizin ispatı böylece tamamlanmış olur.

Aşağıdaki lemmayı Teorem 4.13 ü ispatlamak için kullanacağız.

Lemma 4.12 Eğer $\{a_{jk}^{mn}\}_{j,k=0,0}^{\infty,\infty}$, $(RH_1), (RH_3), (RH_4)$ ve

$$P - \limsup_{m,n} \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| = M$$

şartlarını sağlayan reel ya da kompleks değerli 4 - boyutlu bir matris ise herhangi bir sınırlı $x = (x_{jk})$ çift dizisi için

$$y_{m,n} = \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} a_{jk}^{mn} x_{jk}$$

olmak üzere

$$P - \limsup |y| \leq M(P - \limsup |x|)$$

elde edilir.

Ek olarak a_{jk}^{mn} reel olmak üzere $0 < P - \limsup |x| < \infty$ olduğunda

$$P - \limsup |y| = M(P - \limsup |x|)$$

olacak şekilde reel terimli bir x çift dizisi vardır [13].

İspat $x = (x_{jk})$ dizisi sınırlı ve

$$B := P - \limsup |x| < \infty$$

olarak tanımlansın. Verilen bir $\varepsilon > 0$ ve her $j > N$ ve/veya $k > N$ için $|x_{jk}| < \frac{\beta + \varepsilon}{3}$ olacak şekilde N seçilebilir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} |y_{m,n}| &\leq \sum_{j,k=0,0}^{N,N} |a_{jk}^{mn}| |x_{jk}| + \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ N \leq j \leq \infty}} |a_{jk}^{mn}| |x_{jk}| \\ &\quad + \sum_{\substack{N \leq k \leq \infty \\ 0 \leq j \leq N}} |a_{jk}^{mn}| |x_{jk}| + \sum_{j,k=N+1,N+1}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| |x_{jk}| \\ &\leq \sum_{j,k=0,0}^{N,N} |a_{jk}^{mn}| |x_{jk}| + \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ N \leq j \leq \infty}} |a_{jk}^{mn}| \left(\frac{\beta + \varepsilon}{3} \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{N \leq k \leq \infty \\ 0 \leq j \leq N}} |a_{jk}^{mn}| \left(\frac{\beta + \varepsilon}{3} \right) + \sum_{j,k=N+1,N+1}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| \left(\frac{\beta + \varepsilon}{3} \right) \end{aligned}$$

olup buradan

$$P - \limsup |y| \leq M(\beta + \varepsilon)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$P - \limsup |y| \leq M(P - \limsup |x|)$$

eşitsizliği de sağlar.

$$P - \limsup_{m,n} \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| = M$$

olduğundan, genellikle bir kayıp olmaksızın $M > 0$ olarak varsayabiliriz. $RH -$ *regülerlik* koşullarını kullanarak m_0, n_0, k_0 ve j_0 sayılarını

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=0,0}^{N,N} |a_{j,k}^{m_0,n_0}| > M - \frac{1}{4} \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq k_0 \\ j_0 \leq j \leq \infty \\ \infty,\infty}} |a_{j,k}^{m_0,n_0}| \leq \frac{1}{4} \\ \sum_{\substack{k_0 \leq k \leq \infty \\ 0 \leq j \leq j_0}} |a_{j,k}^{m_0,n_0}| \leq \frac{1}{4} \quad \sum_{j,k=j_0,k_0}^{\infty,\infty} |a_{j,k}^{m_0,n_0}| \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

olacak şekilde yeteri kadar büyüklükte seçebiliriz. $[m_{p-1}], [n_{q-1}], [j_{p-1}], [k_{q-1}]$, $p, q = 1, \dots, s-1, t-1$, $j_0 = k_0 > 0$ dizileri 4 tane kesin artan dizi olsun. *RH – regülerlik* koşullarını kullanarak $m_s > m_{s-1}$, $n_t > n_{t-1}$, $j_s > j_{s-1}$ ve $k_t > k_{t-1}$ ifadelerini

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq j \leq j_{s-1} \\ 0 \leq k \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| &< \frac{1}{2^{s+t}} \\ \sum_{\substack{0 \leq j < k_{t-1} \\ j_{s-1} \leq j \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| &< \frac{1}{2^{s+t}} \\ \sum_{j,k=0,0}^{\infty, \infty} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| &> M - \frac{1}{2^{s+t}} \\ \sum_{\substack{j_{s-1} < j < j_s \\ k_t \leq k \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| &< \frac{1}{2^{s+t}} \\ \sum_{\substack{k_{t-1} \leq k < \infty \\ j_s \leq j \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| &< \frac{1}{2^{s+t}} \end{aligned}$$

olacak şekilde seçebiliriz.

$$x_{jk} := \begin{cases} \frac{a_{j,k}^{m_s, n_t}}{|a_{j,k}^{m_s, n_t}|} & j_{s-1} < j < j_s \text{ ve } k_{t-1} < k < k_t \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} |y_{m_i, n_j}| &= \left| \sum_{j,k=0,0}^{\infty, \infty} a_{j,k}^{m_s, n_t} x_{jk} \right| \geq - \sum_{\substack{0 \leq k \leq k_{s-1} \\ 0 \leq l \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| - \sum_{\substack{0 \leq l < l_{t-1} \\ k_{s-1} \leq k \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| \\ &\quad - \sum_{\substack{j_{s-1} < j < j_s \\ k_t \leq k \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| - \sum_{\substack{k_{t-1} \leq k < \infty \\ j_s \leq j \leq \infty}} |a_{j,k}^{m_s, n_t}| + \sum_{\substack{k_{t-1} \leq k < k_t \\ j_{s-1} \leq j \leq j_s}} a_{j,k}^{m_s, n_t} \operatorname{sgn}(a_{j,k}^{m_s, n_t}) \\ &\geq -\frac{1}{2^{s+t}} - \frac{1}{2^{s+t}} - \frac{1}{2^{s+t}} - \frac{1}{2^{s+t}} + M - 5 \left(\frac{1}{2^{s+t}} \right) \\ &= M - 9 \frac{1}{2^{s+t}} \end{aligned}$$

ifadesini yazmamızda bir sakınca yoktur. Bu ifade

$$P - \limsup |y| \geq M = M (P - \limsup |x|)$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla eğer A reel terimli ise, $0 < \limsup [|x|] < \infty$ olmakla beraber

$$P - \limsup |y| = M (P - \limsup |x|)$$

elde edilir.

Teorem 4.13 Eğer A 4-boyutlu bir matris ise, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [13].

1. Reel terimli bir x çift dizisi için

$$P - \limsup Ax \leq P - \limsup x$$

2. A ,

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| = 1$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $RH - regüler$ toplanabilme matrisidir [13].

İspat (1) ifadesinin (2) ifadesini gerektirdiğini göstermek için x sınırlı $P - yakınsak$ bir çift dizi olsun. Bu takdirde

$$P - \liminf x = P - \limsup x = P - \lim x$$

olup buradan

$$P - \limsup A(-x) \leq -(P - \liminf x)$$

olur. Bu eşitsizlik ise $P - \liminf x \leq P - \liminf Ax$ olmasını gerektirir. Bu takdirde

$$P - \liminf x \leq P - \liminf Ax \leq P - \limsup Ax \leq P - \limsup x$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dolayısıyla Ax dizisi $P - yakınsak$ ve $P - \lim Ax = P - \lim x$ olur. Bu ise A matrisinin $RH - regüler$ bir toplanabilme matrisi olduğunu gösterir.

Lemma 4.12 ve ispatından, sınırlı bir $x = (x_{jk})$ çift dizisi mevcuttur öyle ki $P - \limsup x = 1$ ve $P - \limsup y = A$ sağlanır. (Burada A matrisi (RH_6) ile tanımlıdır). Bu ise

$$1 \leq P - \liminf_{m,n} \sum_{j,k}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| < P - \limsup_{m,n} \sum_{j,k}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| \leq 1$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| = 1$$

olur.

(2) ifadesinin (1) ifadesini gerektirdiğini göstermek için, eğer x sınırlı, P -yakınsak bir çift dizi ve A , RH -regüler bir matris olmakla beraber

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| = 1$$

ise

$$P - \limsup Ax \leq P - \limsup x$$

olduğunu göstereceğiz. $p, q > 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} a_{m,n,j,k} x_{jk} &\leq \left| \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} \frac{|a_{jk}^{mn} x_{jk}| + a_{jk}^{mn} x_{jk}}{2} + \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} \frac{|a_{jk}^{mn} x_{jk}| - a_{jk}^{mn} x_{jk}}{2} \right| \\ &\leq \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| |x_{jk}| + \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} (|a_{jk}^{mn}| - a_{jk}^{mn}) |x_{jk}| \\ &\leq \|x\| \sum_{j,k=0,0}^{p,q} |a_{jk}^{mn}| + \|x\| \sum_{\substack{p < j < \infty \\ 0 \leq k \leq q}} |a_{jk}^{mn}| + \|x\| \sum_{\substack{0 \leq j < p \\ q < k < \infty}} |a_{jk}^{mn}| \\ &\quad + \sup_{j,k > p,q} |x| \sum_{j,k > p,q} |a_{jk}^{mn}| + \|x\| \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} (|a_{jk}^{mn}| - a_{jk}^{mn}) \end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz. Bu ifadede her iki tarafın Pringsheim limitleri alınır ve RH -regülerlik koşulları ile birlikte

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k}^{\infty,\infty} |a_{jk}^{mn}| = 1$$

kabulü göz önünde bulundurulursa

$$P - \limsup Ax \leq P - \limsup x$$

elde edilir.

5. ÇİFT DİZİLERİN İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞI VE İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ

Bu bölümde verilen sonuçlar Fridy ve Orhan tarafından 1997 yılında yayınlanan sonuçların çift diziler için benzerleridir. Sırasıyla çift diziler için istatistiksel sınırlılık, istatistiksel limit inferior ve istatistiksel limit süperior kavramlarının tanımları verilmiş olup bu kavramlar arasındaki bazı ilişkilere dair ispatlar verilmiştir.

Tanım 5.1 $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve $A = [a_{jk}^{mn}]_{j,k=0}^{\infty}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) reel sayıların dört boyutlu sonsuz bir matrisi olsun. Bu takdirde her bir m, n için

$$y_{m,n} = \sum_{j,k=0,0}^{\infty,\infty} a_{jk}^{mn} x_{jk}$$

serisi yakınsak ise bu diziye $x = (x_{jk})$ çift dizisinin A -dönüşüm dizisi denir [2].

Aşağıdaki tanım ve teoremler Fridy ve Orhan tarafından verilen sonuçların çift diziler için benzerleridir [6].

Tanım 5.2

(a) $x = (x_{jk})$ reel bir çift dizi olsun. Eğer $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > M\}) = 0$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ var ise $x = (x_{jk})$ çift dizisine üstten istatistiksel sınırlıdır denir.

(b) $x = (x_{jk})$ reel bir çift dizi olmak üzere, $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < N\}) = 0$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{R}$ var ise $x = (x_{jk})$ çift dizisine alttan istatistiksel sınırlıdır denir [2].

Eğer reel bir $x = (x_{jk})$ çift dizisi hem alttan hem de üstten istatistiksel sınırlı ise bu x çift dizisine istatistiksel sınırlıdır denir. Sınırlı bir x çift dizisinin aynı zamanda istatistiksel sınırlı olacağı açıktır. İstatistiksel sınırlı tüm çift dizilerin uzayını S_2^∞ olarak göstereceğiz.

Şimdi istatistiksel süperior ve istatistiksel inferior tanımlarını verebiliriz.

Tanım 5.3 Bir $x = (x_{jk})$ çift dizisi ve herhangi $M, N \in \mathbb{R}$ sayıları için K_x ve L_x kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$K_x = \{N : \delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < N\}) = 0\}$$

$$L_x = \{M : \delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > M\}) = 0\}$$

Bu durumda $x = (x_{jk})$ dizisinin istatistiksel inferioru (yani $S_2 - \inf$) $\sup K_x$ ve istatistiksel süperioru (yani $S_2 - \sup$) $\inf L_x$ ile ifade edilir. İstatistiksel sınırlı bir (x_{jk}) çift dizisinin hem $S_2 - \inf$ hem de $S_2 - \sup$ değerlerine sahip olacağı kolayca görülebilir [2].

Örnek: $x = (x_{jk})$ çift dizisi her $j, k \in \mathbb{N}$ için

$$x_{jk} = \begin{cases} j, & j = k \text{ ise} \\ 1, & j = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada $L_x = (0, \infty)$ ve $K_x = (-\infty, 0]$ olduğunu görmek kolaydır. Bu yüzden, $S_2 - \sup x = S_2 - \inf x = 0$ olur, yani (x_{jk}) dizisi istatistiksel sınırlıdır. Fakat x ne yakınsaktır ne de sınırlıdır. Dolayısıyla $l_\infty^2 \subset S_2^\infty$ kapsaması kesindir.

İstatistiksel limit superior ve istatistiksel limit inferior kavramlarını tanımlamak için herhangi bir $x = (x_{jk})$ reel çift dizisi için

$$\begin{aligned} G_x &= \{C \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > C\}) \neq 0\} \\ F_x &= \{D \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < D\}) \neq 0\} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $\delta_2(E) \neq 0$ ifadesi ile $\delta_2(E) > 0$ veya E kümesinin çift doğal yoğunluğa sahip olmamasının kastedildiğini ayrıca belirtelim [2].

Tanım 5.4 Herhangi bir reel x çift dizisi için, x in istatistiksel limit süperioru

$$S_2 - \limsup x = \begin{cases} \sup G_x & G_x \neq \emptyset \text{ ise} \\ -\infty & G_x = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde x in istatistiksel limit inferioru

$$S_2 - \liminf x = \begin{cases} \inf F_x & F_x \neq \emptyset \text{ ise} \\ \infty & F_x = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Örneğin

$$x_{jk} = \begin{cases} j, & j = k \text{ ise} \\ 1, & j = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. $G_x = (-\infty, 0)$ ve $F_x = (0, \infty)$ olduğundan $S_2 - \limsup x = S_2 - \liminf x = 0$ olur [2].

Aşağıdaki teorem, klasik dizilerdekine benzer olarak ispat edilebilir.

Teorem 5.5

- (a) $S_2 - \limsup x = \beta \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için, $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > \beta - \varepsilon\}) \neq 0$ ve $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > \beta + \varepsilon\}) = 0$
- (b) $S_2 - \liminf x = \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için, $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0$ ve $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < \alpha - \varepsilon\}) = 0$ [2].

Aşağıdaki teoremler, $P - \limsup$ ve $P - \liminf$ için elde edilmiş olan sonuçların benzerleridir.

Teorem 5.6 Herhangi bir $x = (x_{jk})$ reel çift dizisi için $S_2 - \liminf x \leq S_2 - \limsup x$ dir [2].

İspat İlk olarak, $S_2 - \limsup x = -\infty$ olsun. Bu bize $G_x = \emptyset$ olduğunu gösterir. Bu takdirde her $c \in \mathbb{R}$ için $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > c\}) = 0$ olup bu ise $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < c\}) = 1$ olması demektir. Dolayısıyla $S_2 - \liminf x = -\infty$ olur.

Eğer $S_2 - \limsup x = \infty$ ise, $S_2 - \liminf x \leq \infty$ olacağı aşıkardır. Şimdi farz edelim ki $S_2 - \limsup x = \beta$ ve $S_2 - \liminf x = \alpha$ eşitlikleri mevcut olsun. Verilen herhangi bir ε için $\beta + \varepsilon \in F_x$ olduğunu göstereceğiz öyle ki bu bize $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ olduğunu gösterir. Teorem 5.5 (a) dan dolayı $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > \beta + \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0$ olup bu ise $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\}) = 1$ eşitliğini verir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdiye kadar verilmiş olan sonuç ve teoremlerden herhangi bir x reel çift dizisi için

$$P - \liminf x \leq S_2 - \liminf x \leq S_2 - \limsup x \leq P - \limsup x \quad (5.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.7 İstatistiksel sınırlı bir $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel yakınsaktır $\Leftrightarrow S_2 - \liminf x = S_2 - \limsup x$ [2].

İspat $S_2 - \lim x = L$ olsun. Bu takdirde verilen bir $\varepsilon > 0$ için, $\delta_2(\{(j, k) : |x_{jk} - L| > \varepsilon\}) = 0$ olur. Dolayısıyla $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > L + \varepsilon\}) = 0$ olur ve bu ise $S_2 - \limsup x \leq L$

olması demektir. Ayrıca, $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < L - \varepsilon\}) = 0$ olup buradan $L \leq S_2 - \liminf x$ olur. Dolayısıyla (5.1) eşitsizliği de göz önünde bulundurulursa $S_2 - \liminf x = S_2 - \limsup x$ elde edilir.

Tersine $S_2 - \liminf x = S_2 - \limsup x = L$ olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, Teorem 5.5 gereğince $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > L + \varepsilon\}) = 0$ ve $\delta_2(\{(j, k) : x_{jk} < L - \varepsilon\}) = 0$ elde edilir. Bu ise $\delta_2(\{(j, k) : |x_{jk} - L| > \varepsilon\}) = 0$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla $S_2 - \lim x = L$ elde edilir.

Çift dizilerin istatistiksel çekirdeğini, P -çekirdek tanımına benzer olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 5.8 Herhangi bir istatistiksel sınırlı reel $x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel çekirdeği (ya da kısaca $S_2 - core[x]$)

$$[S_2 - \liminf x, S_2 - \limsup x]$$

kapalı aralığı olarak tanımlanır. Eğer $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel sınırlı değilse $S_2 - core[x]$, $(-\infty, S_2 - \limsup x]$, $[S_2 - \liminf x, \infty)$ veya $(-\infty, \infty)$ aralıklarından birisi olur [2].

(4.1) den, herhangi bir x reel çift dizisi için

$$S_2 - core[x] \subseteq P - core[x]$$

olacağı açıktır [2].

Şimdi, $P - core$ ve $S_2 - core$ kavramlarına ilişkin bir eşitsizlik verilebilir. Ancak bu eşitsizliğin verilebilmesi için öncelikle iki tane lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 5.9 $c_2^{\infty,0}$, sınırlı ve sıfıra $P - yakınsak$ olan tüm çift dizilerin uzayı olsun. Bu takdirde $A \in (l_{\infty}^2, c_2^{\infty,0})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_{m,n} \sum_{j,k} |a_{jk}^{mn}| < \infty \quad (5.2)$$

koşulunun sağlanması ve

1. $P - \lim_{m,n} a_{jk}^{mn} = 0, \forall j, k \in N$ için

$$2. P - \lim_{m,n} \sum_k a_{jk}^{mn} = 0, \forall j \in N \text{ için}$$

$$3. P - \lim_{m,n} \sum_j a_{jk}^{mn} = 0, \forall k \in N \text{ için}$$

$$4. P - \lim_{m,n} \sum_{j,k} |a_{jk}^{mn}| = 0$$

olmasıdır [2].

İspat Yeterlilik kısmı aşıkardır.

Şimdi, $A \in (l_\infty^2, c_2^{\infty,0})$ olsun. Bu takdirde, her $x \in l_\infty^2$ için Ax mevcuttur ve $Ax \in c_2^{\infty,0}$ dır. Bu nedenle

$$x_{jk} = \begin{cases} \text{sgn } a_{jk}^{mn} & 0 \leq j \leq r, 0 \leq k \leq r \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlı bir $x = (x_{jk})$ dizisi için

$$P - \lim Ax = P - \lim \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} x_{jk} = P - \lim \sum_{j,k} |a_{jk}^{mn}| = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Ax aynı zamanda sınırlı olduğundan, sırası ile 4. koşul ve (5.2) eşitliği sağlanır.

Şimdi bir $e^{i,l}$ dizisini

$$e_{j,k}^{i,l} = \begin{cases} 1 & (j, k) = (i, l) \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım ve noktasal toplamları $i, l \in N$ için $s^l = \sum_i e^{i,l}$ ve $r^i = \sum_l e^{i,l}$ olarak gösterelim. O halde 1. koşul $P - \lim A e^{i,l}$, 2. koşul $P - \lim A r^j$, 3. koşul $P - \lim A s_k$ ifadelerinden elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 5.10 $A = [a_{jk}^{mn}]$ dört boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde

$$A \in (S_2 \cap l_\infty^2, c_2^\infty)_{reg} \quad (5.3)$$

ancak ve ancak A , $RH - regüler$ ve $\delta_2(E) = 0$ şartını sağlayan her $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k \in E} |a_{jk}^{mn}| = 0 \quad (5.4)$$

olmalıdır [2].

İspat Öncelikle farz edelim ki (5.3) sağlansın. Bu takdirde A nın $RH - regülerliği$, $c_2^\infty \subset S_2 \cap l_\infty^2$ gerçeğinden elde edilir. Bir $x = (x_{jk}) \in l_\infty^2$ dizisi üzerinden $z = (z_{j,k})$ dizisini

$$z_{jk} = \begin{cases} x_{jk} & j, k \in E \text{ ise} \\ 0 & \text{diğ}er durumlarda \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $z \in S_2$ olup $S_2 - \lim z = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $Az \in c_2^{\infty,0}$ olur. Diğ}er yandan

$$Az = \sum_{j,k \in E} a_{jk}^{mn} x_{jk}$$

olduğundan, $\forall m, n \in N$ için

$$b_{j,k}^{m,n} = \begin{cases} a_{jk}^{mn} & j, k \in E \text{ ise} \\ 0 & \text{diğ}er durumlarda \end{cases}$$

olarak tanımlanan $B = [b_{j,k}^{m,n}]$ matrisi $(l_\infty^2, c_2^{\infty,0})$ sınıfına dahildir. Dolayısıyla (5.4)

eşitliği Lemma 5.9 dan elde edilir.

Tersine, farz edelim ki A , $RH - regüler$ olup (5.4) eşitliği sağlansın. $x \in S_2 \cap l_\infty^2$ ve $S_2 - \lim x = L$ olsun. Böylece verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $\delta_2(E) = \delta_2(\{(j, k) : |x_{jk} - L| > \varepsilon\}) = 0$ ve $j, k \notin E$ olduğunda $|x_{jk} - L| \leq \varepsilon$ olur. Bu takdirde

$$\sum_{j,k} a_{jk}^{mn} x_{jk} = \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} (x_{jk} - L) + L \sum_{j,k} a_{jk}^{mn}$$

eşitliğini yazabiliriz. A nın $RH - regüler$ olmasından

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} x_{jk} = P - \lim_{m,n} \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} (x_{jk} - L) + L \quad (5.5)$$

olur. Diğ}er taraftan

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} (x_{jk} - L) \right| &= \left| \sum_{j,k \in E} a_{jk}^{mn} (x_{jk} - L) + \sum_{j,k \notin E} a_{jk}^{mn} (x_{jk} - L) \right| \\ &\leq \|x_{jk} - L\| \sum_{j,k \in E} |a_{jk}^{mn}| + \varepsilon \|A\| \end{aligned}$$

olduğundan (5.4) gereğince

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} (x_{jk} - L) = 0$$

olur. Bu nedenle, (5.5) eşitliği $P - \lim Ax = L = S_2 - \lim x$ olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.11 $\|A\| < \infty$ ve $x \in l_\infty^2$ olsun. Bu takdirde

$$P - \lim \sup Ax \leq S_2 - \lim \sup x \quad (5.6)$$

olması için gerek ve yeter şart, $A \in (S_2 \cap l_\infty^2, c_2^\infty)_{reg}$ olup

$$P - \lim_{m,n} \sum_{j,k} |a_{jk}^{mn}| = 1 \quad (5.7)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [2].

İspat Farz edelim ki (5.6) sağlansın. Bu takdirde daha önceki ispatlardan

$$S_2 - \lim \inf x \leq P - \lim \inf Ax \leq P - \lim \sup Ax \leq S_2 - \lim \sup x \quad (5.8)$$

eşitsizliği yazılabilir. x keyfi olduğundan ve $S_2 \cap l_\infty^2 \subset l_\infty^2$ olduğundan, (5.8) eşitsizliğinde $S_2 - \lim x = L$ olacak şekilde herhangi bir $x \in S_2 \cap l_\infty^2$ dizisini göz önüne alabiliriz. Bu takdirde Teorem 5.6 gereğince $S_2 - \lim \inf x = S_2 - \lim \sup x = L$ olduğu görülür. Bu yüzden tekrar (5.8) gereğince

$$P - \lim \inf Ax = P - \lim \sup Ax = P - \lim Ax = L$$

olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla $A \in (S_2 \cap l_\infty^2, c_2^\infty)_{reg}$ olur.

Diğer taraftan (5.1) gereğince $S_2 - \lim \sup x \leq P - \lim \sup x$ olduğundan, (5.7) için gereklilik koşulu Teorem 4.14 aracılığıyla elde edilir.

Tersine, $A \in (S_2 \cap l_\infty^2, c_2^\infty)_{reg}$ olsun ve (5.7) sağlansın. x herhangi sınırlı bir çift dizi olsun. Bu takdirde Ax dizisi de aynı zamanda sınırlı olur ve $S_2 - \lim \sup x$ sonlu olur. Bu yüzden Teorem 5.5 gereğince, verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta_2(E) = \delta_2(\{(j, k) : x_{jk} > S_2 - \lim \sup x + \varepsilon\}) = 0$ olur. Aynı zamanda $j, k \notin E$ olduğunda $x_{jk} \leq S_2 - \lim \sup x + \varepsilon$ olduğu da kolayca görülebilir. O halde aşağıdaki ifadeyi yazmamızda herhangi bir

sakınca yoktur.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} x_{jk} \\
& \leq \left| \sum_{j,k} \frac{|a_{jk}^{mn} x_{jk}| + a_{jk}^{mn} x_{jk}}{2} + \sum_{j,k} \frac{|a_{jk}^{mn} x_{jk}| - a_{jk}^{mn} x_{jk}}{2} \right| \\
& \leq \left| \sum_{j,k} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right| + \sum_{j,k} (|a_{jk}^{mn}| - a_{jk}^{mn}) |x_{jk}| \\
& \leq \left| \sum_{j,k \in E} a_{jk}^{mn} x_{jk} + \sum_{j,k \notin E} a_{jk}^{mn} x_{jk} \right| + \|x\| \sum_{j,k} (|a_{jk}^{mn}| - a_{jk}^{mn}) \\
& \leq \|x\| \sum_{j,k \in E} |a_{jk}^{mn}| + (S_2 - \limsup x + \varepsilon) \sum_{j,k \notin E} |a_{jk}^{mn}| + \|x\| \sum_{j,k} (|a_{jk}^{mn}| - a_{jk}^{mn})
\end{aligned}$$

A nın RH – *regülerliği* ve (5.7) koşulu aracılığıyla

$$P - \limsup Ax \leq S_2 - \limsup x + \varepsilon$$

elde edilir. x ve ε keyfi olduğundan ispatımız tamamlanmış olur.

6. ÇİFT DİZİLERİN (α, β) -YINCI DERECEDEN İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI VE ÇEKİRDEKLERİ

Bu bölümde $\alpha, \beta \in (0, 1]$ olmak üzere bir çift dizinin (α, β) -yıncı dereceden istatistiksel alt limit ve üst limit tanımları verilmiş ve çift diziler için (α, β) -yıncı dereceden istatistiksel çekirdek konusu ve bu konuya dair bazı özellikler incelenmiştir.

Tanım 6.1 $(\alpha, \beta) \in (0, 1]$ olmak üzere bir $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin (α, β) -çift yoğunluğu

$$\delta_2^{(\alpha, \beta)}(K) = P - \lim_{n, m} \frac{K(n, m)}{n^\alpha m^\beta}$$

olarak tanımlanır [3].

Not 6.2 Her $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi için $\delta_2(K) \leq 1$ olduğu halde $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(K) > 1$ veya $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(K) = \infty$ olabilir [3].

Tanım 6.3 $x = (x_{jk})$ bir çift dizi ve $\alpha, \beta \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{n, m} \frac{1}{n^\alpha m^\beta} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı mevcut ise x dizisi l sayısına (α, β) -yıncı dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_2^{(\alpha, \beta)} - \lim_{jk} x_{jk} = l$ yazılır. Buradaki l sayısı tektir. (α, β) -yıncı dereceden istatistiksel yakınsak çift dizilerin uzayını $S_2^{(\alpha, \beta)}$ ile göstereceğiz.

$\alpha = 1, \beta = 1$ olması durumunda (α, β) -yıncı dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı çift dizilerin istatistiksel yakınsaklığı kavramına indirgenmiş olur. (α, β) -yıncı dereceden istatistiksel yakınsaklık $\alpha, \beta \in (0, 1]$ için iyi tanımlıdır, ancak $\alpha > 1$ ve $\beta > 1$ için iyi tanımlı değildir. Örneğin $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & j+k \text{ çift ise} \\ 0 & j+k \text{ tek ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Buradan $\alpha > 1$ ve $\beta > 1$ için

$$\begin{aligned} & P - \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha m^\beta} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq P - \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{m}{2} + 1\right)}{n^\alpha m^\beta} = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & P - \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha m^\beta} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk}| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq P - \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{m}{2} + 1\right)}{n^\alpha m^\beta} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $S_2^{(\alpha,\beta)} - \lim_{jk} x_{jk} = 1$ ve $S_2^{(\alpha,\beta)} - \lim_{jk} x_{jk} = 0$ demektir ki $S_2^{(\alpha,\beta)} - \lim_{jk} x_{jk}$ limitinin tekliğınden dolayı bu mümkün değildir [3].

Teorem 6.4 $\alpha, \beta, \xi, \eta \in (0, 1]$ olmak üzere $\alpha \leq \xi$ ve $\beta \leq \eta$ verilsin Bu takdirde $S_2^{(\alpha,\beta)} \subseteq S_2^{(\xi,\eta)}$ olur [3].

İspat $\alpha, \beta, \xi, \eta \in (0, 1]$ olsun. $\alpha \leq \xi$ ve $\beta \leq \eta$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & P - \lim_{n,m} \frac{1}{n^\xi m^\eta} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq P - \lim_{n,m} \frac{1}{n^\alpha m^\beta} |\{(j, k) : j \leq n, k \leq m : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ise bize $S_2^{(\alpha,\beta)} \subseteq S_2^{(\xi,\eta)}$ olduğunu verir.

Bu Teoremde özel olarak $\xi = \eta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.5 Herhangi $\alpha, \beta \in (0, 1]$ için $S_2^{(\alpha,\beta)} \subseteq S_2$ olur [3].

Tanım 6.6 $x = (x_{jk})$ reel bir çift dizi ve $\alpha, \beta \in (0, 1]$ olsun.

(a) Eğer $\delta_2^{(\alpha,\beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > M\}) = 0$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ var ise $x = (x_{jk})$ çift dizisine üstten $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlıdır denir.

(b) Eğer $\delta_2^{(\alpha,\beta)}(\{(j, k) : x_{jk} < N\}) = 0$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{R}$ var ise $x = (x_{jk})$ çift dizisine alttan $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlıdır denir [3].

Eğer reel bir $x = (x_{jk})$ çift dizisi hem alttan hem de üstten $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlı ise bu x çift dizisine $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlıdır denir. Sınırlı bir x çift dizisinin aynı zamanda $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlı olacağı açıktır.

Şimdi $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel süperior ve istatistiksel inferior tanımlarını verebiliriz.

Tanım 6.7 Bir $x = (x_{jk})$ dizisi verildiğinde herhangi $M, N \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \in (0, 1]$ için $K_x^{(\alpha,\beta)}$ ve $L_x^{(\alpha,\beta)}$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{aligned} K_x^{(\alpha,\beta)} &= \{N : \delta_{(\alpha,\beta)}^2(\{(j, k) : x_{jk} < N\}) = 0\} \\ L_x^{(\alpha,\beta)} &= \{M : \delta_{(\alpha,\beta)}^2(\{(j, k) : x_{jk} > M\}) = 0\} \end{aligned}$$

Buna göre $x = (x_{jk})$ dizisinin $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel inferioru (yani $S_2^{(\alpha,\beta)} - \inf x$) $\sup K_x^{(\alpha,\beta)}$ ve $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel süperioru (yani $S_2^{(\alpha,\beta)} - \sup x$) $\inf L_x^{(\alpha,\beta)}$ ile vereceğiz. $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlı bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin hem $S_2^{(\alpha,\beta)} - \inf x$ hem de $S_2^{(\alpha,\beta)} - \sup x$ değerlerine sahip olacağı kolayca görülebilir [3].

İstatistiksel limit superior ve istatistiksel limit inferior kavramlarına geçmek için herhangi bir $x = (x_{jk})$ reel çift dizisi için

$$\begin{aligned} G_x^{(\alpha, \beta)} &= \{C \in \mathbb{R} : \delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > C\}) \neq 0\} \\ F_x^{(\alpha, \beta)} &= \{D \in \mathbb{R} : \delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} < D\}) \neq 0\} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(E) \neq 0$ ifadesi ile $\delta_2^{(\alpha, \beta)} > 0$ veya E kümesinin (α, β) -çift doğal yoğunluğa sahip olmaması kastedilmektedir.

Tanım 6.8 Herhangi bir reel x çift dizisi için, x in (α, β) -yüncü dereceden istatistiksel limit süperiorunu

$$S_2^{(\alpha, \beta)} - \limsup x = \begin{cases} \sup G_x^{(\alpha, \beta)} & G_x^{(\alpha, \beta)} \neq \emptyset \text{ ise} \\ -\infty & G_x^{(\alpha, \beta)} = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Benzer şekilde x in (α, β) -yüncü dereceden istatistiksel limit inferioru

$$S_2^{(\alpha, \beta)} - \liminf x = \begin{cases} \inf F_x^{(\alpha, \beta)} & F_x^{(\alpha, \beta)} \neq \emptyset \text{ ise} \\ \infty & F_x^{(\alpha, \beta)} = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Aşağıdaki Teoremin ispatı kolayca yapılabilir.

Teorem 6.9

- (a) $S_2^{(\alpha, \beta)} - \limsup x = u \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için, $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > u - \varepsilon\}) \neq 0$ ve $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > u + \varepsilon\}) = 0$
- (b) $S_2^{(\alpha, \beta)} - \liminf x = v \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için, $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} < v + \varepsilon\}) \neq 0$ ve $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} < v - \varepsilon\}) = 0$.

Teorem 6.10 Herhangi bir $x = (x_{jk})$ reel çift dizisi için

$$S_2^{(\alpha, \beta)} - \liminf x \leq S_2^{(\alpha, \beta)} - \limsup x$$

dir .

İspat İlk olarak, $S_2^{(\alpha, \beta)} - \limsup x = -\infty$ olsun. Bu bize $G_x^{(\alpha, \beta)} = \emptyset$ olduğunu gösterir. Bu takdirde her $c \in \mathbb{R}$ için $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > c\}) = 0$ olup bu ise $\delta_2^{(\alpha, \beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > c\}) \geq 1$ olması demektir. Dolayısıyla $S_2^{(\alpha, \beta)} - \liminf x = -\infty$ olur.

Eğer $S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x = \infty$ ise , $S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x \leq \infty$ olacağı aşıkardır. Şimdi farz edelim ki $S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x = u$ ve $S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x = v$ eşitlikleri mevcut olsun. Verilen herhangi bir ε için $u + \varepsilon \in F_{(\alpha,\beta)}$ olduğunu göstereceğiz öyle ki bu bize $v \leq u + \varepsilon$ olduğunu gösterir. Teorem 3.2.4 (a) dan dolayı $\delta_2^{(\alpha,\beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > u + \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0$ olup bu ise $\delta_2^{(\alpha,\beta)}(\{(j, k) : x_{jk} \leq u + \frac{\varepsilon}{2}\}) = 1$ eşitliğini verir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Çift dizilerin $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel çekirdeğini, P -çekirdek ve S_2 -çekirdek tanımlarına benzer olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 6.12 $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlı herhangi reel terimli bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel çekirdeği

$$\left[S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x, S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x \right]$$

kapalı aralığıdır ve bu aralığı $S_2^{(\alpha,\beta)} - \text{core}(x)$ ile göstereceğiz. Eğer x , $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel sınırlı değilse x çift dizisinin $(\alpha, \beta) - y\text{ıncı}$ dereceden istatistiksel çekirdeği, $(-\infty, S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x]$, $[S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x, \infty)$ veya $(-\infty, \infty)$ aralıklarından birisi olur.

Not 6.13 $\alpha = \beta = 1$ olması durumunda

$$S_2 - \text{core}(x) = S_2^{(\alpha,\beta)} - \text{core}(x)$$

olur.

Teorem 6.14 $\alpha, \beta, \xi, \eta \in (0, 1]$ olmak üzere $\alpha \leq \xi$ ve $\beta \leq \eta$ verilsin. Bu takdirde

$$S_2^{(\xi,\eta)} - \text{core}(x) \subseteq S_2^{(\alpha,\beta)} - \text{core}(x)$$

olur.

İspat $\left[S_2^{(\xi,\eta)} - \liminf x, S_2^{(\xi,\eta)} - \limsup x \right] \subseteq \left[S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x, S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x \right]$ olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. Daha önce $G_x^{(\alpha,\beta)}$ ve $G_x^{(\xi,\eta)}$ kümelerini aşağıdaki gibi tanımlamıştık:

$$\begin{aligned} G_x^{(\alpha,\beta)} &= \left\{ C \in \mathbb{R} : \delta_2^{(\alpha,\beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > C\}) \neq 0 \right\} \\ G_x^{(\xi,\eta)} &= \left\{ C \in \mathbb{R} : \delta_2^{(\xi,\eta)}(\{(j, k) : x_{jk} > C\}) \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

Teorem 6.4 gereğince herhangi bir $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\alpha \leq \xi$ ve $\beta \leq \eta$ olduğunda $\delta_2^{(\xi,\eta)}(E) \leq \delta_2^{(\alpha,\beta)}(E)$ olduğunu biliyoruz. Bu takdirde $\alpha \leq \xi$ ve $\beta \leq \eta$ için

$$\delta_2^{(\xi,\eta)}(\{(j, k) : x_{jk} > C\}) \leq \delta_2^{(\alpha,\beta)}(\{(j, k) : x_{jk} > C\}) \quad (6.1)$$

olduğu görüldür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x &= \begin{cases} \sup G_x^{(\alpha,\beta)} & , G_x^{(\alpha,\beta)} \neq \emptyset \text{ ise} \\ -\infty & , G_x^{(\alpha,\beta)} = \emptyset \text{ ise} \end{cases} \\ S_2^{(\xi,\eta)} - \limsup x &= \begin{cases} \sup G_x^{(\xi,\eta)} & , G_x^{(\xi,\eta)} \neq \emptyset \text{ ise} \\ -\infty & , G_x^{(\xi,\eta)} = \emptyset \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan

$$S_2^{(\xi,\eta)} - \limsup x \leq S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x \quad (6.2)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x \leq S_2^{(\xi,\eta)} - \liminf x \quad (6.3)$$

eşitsizliği de elde edilebilir. (6.2) ve (6.3) eşitsizlikleri gereğince

$$S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x \leq S_2^{(\xi,\eta)} - \liminf x \leq S_2^{(\xi,\eta)} - \limsup x \leq S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x$$

olacağından

$$\left[S_2^{(\xi,\eta)} - \liminf x, S_2^{(\xi,\eta)} - \limsup x \right] \subseteq \left[S_2^{(\alpha,\beta)} - \liminf x, S_2^{(\alpha,\beta)} - \limsup x \right]$$

elde edilir. Bu ise bizden istenendir.

Bu Teoremde özel olarak $\xi = \eta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.15 Her $\alpha, \beta \in (0, 1]$ için

$$S_2 - \text{core}(x) \subseteq S_2^{(\alpha,\beta)} - \text{core}(x)$$

kapsaması sağlanır.

Kaynaklar

- [1] **Agnew R. P.** 1949, Abel transforms and partial sums of Tauberian series, Ann. of Math. (2) 50, 110–117. MR 10,291i. Zbl 032.15203.
- [2] **Çakan C., Altay B.**, 2006, Statistically boundedness and statistical core of double sequences, J. Math. Anal. Appl. 317 690–697
- [3] **Çolak, R. , Altın Y.**, 2013, Statistical convergence of double sequences of order $\tilde{\alpha}$, Journal of Function Spaces and Applications (in press).
- [4] **Fast, H.**, 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
- [5] **Fridy, J.A.**, 1985, On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.
- [6] **Fridy, J.A., Orhan, C.**, 1997, Statistical limit superior and inferior, Proc. Amer. Math. Soc. 125 3625–3631..
- [7] **Hamilton, H. J.**, 1936, Transformations of multiple sequences, Duke Math. J. 2, 29–60. Zbl 013.30301
- [8] **Hardy, G. H.**, 1949, Divergent Series, Oxford, at the Clarendon Press. MR 11, 25a. Zbl 032.05801.
- [9] **Knopp, K.**, 1930, Zur Theorie der Limitierungsverfahren (Erste Mitteilung), Math. Z. 31, 115–127.
- [10] **Maddox, I. J.**, 1979, Some analogues of Knopp’s core theorem, Internat. J. Math. Math. Sci. 2 , 605–614. MR 81m:40012. Zbl 416.40004.
- [11] **Mursaleen, Edely, O.H.H.**, 2003, Statistical convergence of double sequences, J. Math. Anal. Appl. 288 223–231.
- [12] **Niven, I. and Zuckerman, H.S.**, 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
- [13] **Patterson, R.F.**, 1999, Double sequence core theorems, Internat. J. Math. Math. Sci. 22 785–793.

- [14] **Pringsheim, A.**, 1900, Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, Math. Ann. 53, 289–321.
- [15] **Robison, G. M.**, 1926, Divergent Double Sequences and Series, Trans. Amer. Math. Soc. 28 , 50–73.
- [16] **Steinhaus, H.**, 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, vol.2. pp. 73-74.
- [17] **Zygmund, A.**, 1979, Trigonometric Series, Cambridge Universty Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Afyonkarahisar’da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Afyonkarahisar ve Denizli illerinde tamamladım. 2006 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne girdim. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nın Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Programı’nda yüksek lisans eğitimime başladım. Evliyim ve bir çocuk babasıyım.