

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI
VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Hakan ŞİMŞİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

Doç.Dr.Mikail ET

ELAZIĞ – 2006

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI
VE
GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Hakan ŞİMŞİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, .../.../2006 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Mikail ET

Üye : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye : Yrd.Doç. Dr. Mahmut IŞIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Hakan ŞİMŞİR

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2006, Sayfa: 32 + V

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi, Cesaro yakınsaklık ve kuvvetli p - Cesaro yakınsaklık incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; genelleştirilmiş fark dizi uzayları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık, Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi ve Δ_p^m - Cesaro yakınsaklık incelenmiştir.

Beşinci bölümde; modülüs fonksiyonları yardımıyla tanımlanan fark dizi uzayları ve Δ_q^m -istatistiksel yakınsaklık incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: İstatistiksel Yakınsaklık, Kuvvetli Δ_p^m -Cesaro Yakınsaklık.

SUMMARY

Masters Thesis

GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES

AND

GENERALIZED STATISTICAL CONVERGENCE

Hakan ŞİMŞİR

Fırat University

Graduate School of Science Technology

Department of Mathematics

2006, Page: 32 + V

This study is prepared as five chapter.

In the first chapter; the fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter; statistical convergence statistical Cauchy sequence and strong p -Cesaro summable are examined.

In the third chapter; generalized difference sequence spaces are examined.

In the fourth chapter; Δ^m - statistical convergence, Δ^m -statistical Cauchy sequence and strong Δ_p^m -Cesaro summable are examined.

In the fifth chapter; Difference sequence spaces defined by using a modulus function and Δ_q^m - statistical convergence are examined.

Key Words: Statistical convergence, strong Δ_p^m -Cesaro convergence.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde gerekli bütün imkanlarını sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen değerli hocam **Doç.Dr. Mikail ET'** e minnet ve şükranlarımı sunarım, ayrıca bu çalışmanın oluşumunda desteğini gördüğüm değerli hocalarım **Arş. Gör. Dr. Yavuz ALTIN'** a ve **Arş. Gör. Hıfı ALTINOK'** a teşekkür ederim.

Hakan ŞİMŞİR

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1 : $X \neq \emptyset$ ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir.

$$\forall x, y, z \in X \quad \text{ve} \quad \forall \lambda, \mu \in K \quad \text{için}$$

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

L4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ dır.

L5) $1 \cdot x = x$

L6) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

L7) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

L8) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ dır [1].

Tanım 1.1.2 : X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \| \cdot \|)$ çiftine de bir normlu uzay denir.

$$\forall x, y \in X \quad \text{ve} \quad \forall \alpha \in K \quad \text{için}$$

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3) $\| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \|x\|$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir [2]

Tanım 1.1.3 : X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir yarı-norm ve $(X, \| \cdot \|)$ çiftine de bir yarı-normlu uzay denir .

$$\forall x, y \in X \text{ ve } \forall \alpha \in K \text{ için}$$

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\mathbf{N2)} \quad x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$\mathbf{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{dir [2].}$$

Tanım 1.1.4 : $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > n_0$ iken $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 1.1.5 : $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x' e yakınsaktır denir [2]. $x = (x_n)$ dizisi x' e yakınsak ise $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.6: $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [2].

Teorem 1.1.1 : Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart; Y uzayının X uzayında kapalı olmasıdır [2].

Bu çalışmada kompleks terimli tüm $x = (x_k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) dizilerinin cümlesini w ile göstereceğiz.

w ; $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k) \quad \text{ve} \quad \alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$l_{\infty} = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı diziler uzayı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak diziler uzayı ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.7 : X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$T_k : X \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad T_k(x) = x_k \quad , \quad (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X uzayına BK – uzayı denir [3].

Tanım 1.1.8 : $X \subset w$ bir dizi uzayı olsun. $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in X$ olmak üzere $x \cdot y = (x_k y_k) \in X$ oluyorsa ; yani X noktasal çarpma işlemine göre kapalı ise X uzayına dizi cebiri denir [4].

Tanım 1.1.9 : $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

ifadesine iki teriminin açılımı veya binom açılımı denir.

Tanım 1.1.10 : Bir f modülüs fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan $[0, \infty)$ aralığından $[0, \infty)$ aralığına tanımlı bir fonksiyondur.

$$(i) \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad , \quad (x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0) \quad ,$$

$$(iii) \quad f \text{ artan bir fonksiyon}$$

$$(iv) \quad f \text{ fonksiyonu } 0 \text{ noktasında sağdan sürekli [5].}$$

Yukarıdaki özelliklerden bir modülüs fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında sürekli olduğu anlaşılır. Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. I.J.Maddox [6] ve W.H.Ruckle [7] bir modülüs fonksiyonunu bazı dizi uzaylarını oluşturmak için kullanmıştır. Daha sonraları bir modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan dizi uzayları Bilgin [8], Öztürk ve Bilgin [9] tarafından verilmiştir.

Tanım 1.1.11 : $x = (x_k) \in E$ olmak üzere eğer $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ şartını sağlayan tüm $\alpha = (\alpha_k)$ skalar dizileri için $(\alpha_k x_k) \in E$ ise E dizi uzayına solid (normal) denir [4].

Tanım 1.1.12 : Eğer $\pi(k)$, $\mathbb{N}$ 'nin bir permütasyonu olmak üzere $(x_k) \in E$, $x_{\pi(k)} \in E$ 'yi gerektirirse E dizi uzayına simetrik denir [4].

Teorem 1.1.2 : $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi $0 < p_k \leq \sup p_k = H$, $C = \max(1, 2^{H-1})$, $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_i} \leq C \left\{ |a_k|^{p_i} + |b_k|^{p_i} \right\} \quad (1)$$

dir [1].

2. BÖLÜM

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı en az 1913' ten beri farklı görünüşler altında literatürde yer almaktadır. O zamandan beri Fourier analiz teorisinde, ergodic teoride ve sayılar teorisinde kullanılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık tanımı ilk olarak 1951 yılında Fast [10] tarafından kısa bir not olarak verildi. 1959 yılında Schoenberg [11] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini verdi. Her iki matematikçi de sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğunu gösterdiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Kolk [12], Fridy [13], Salat [14], Connor [15], Maddox [16] tarafından çalışıldı.

Tanım 2.1.1 : Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in K \right\} \right|$$

şeklinde tanımlanır (Burada $\left| \left\{ k \leq n : k \in K \right\} \right|$, K cümlesinin n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir) [17]. Eğer

$$\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : k \in K \right\} \right| = 0$$

ise K cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir.

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

Tanım 2.1.2 : $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir [13].

$x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise $S\text{-}\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

$L = 0$ olması halinde $x = (x_k)$ dizisine sıfıra istatistiksel yakınsak dizi denir. $x = (x_k)$ dizisi sıfıra istatistiksel yakınsak ise $S - \lim x = 0$ veya $x_k \rightarrow 0(S)$ yazılır. Sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Sonuç 2.1.1 : Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.

Gerçekten;

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \left\{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \left| \left\{ k \leq n : x_k \neq 0 \right\} \right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_k \neq 0 \right\} \right| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ demektir. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

Sonuç 2.1.2 : l_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.

Gerçekten;

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ dir, ancak $x \notin l_\infty$ dur. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Fakat istatistiksel yakınsak değildir.

Sonuç 2.1.3 : $S - \lim x = L_1, S - \lim x = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$ dir.

Teorem 2.1.1 :

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $S - \lim x = L_1$ ise $S - \lim (\alpha x) = \alpha L_1$

(ii) $S - \lim x = L_1, S - \lim y = L_2$ ise $S - \lim (x + y) = L_1 + L_2$ dir [14].

Tanım 2.1.3 : $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [13].

Teorem 2.1.2 : Bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir [13].

İspat : $\varepsilon > 0$ ve $S\text{-}\lim x_k = L$ olsun. Bu taktirde h.h.k. için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer $N,$

$$|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçilirse h.h.k. için

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Cesaro Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Tanım 2.2.1 : $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Cesaro yakınsaktır denir [18]. $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Cesaro yakınsak ise $\sigma_1\text{-}\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(\sigma_1)$ yazılır. Cesaro yakınsak dizilerin uzayı

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 2.2.1 : $x = (x_k)$ dizisi L sayısına yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Cesaro yakınsaktır [18].

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun, $n \geq N_1$ için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Bu taktirde $n \geq N_2$ için

$$\frac{1}{n} |(x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1-1}) - N_1 L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir pozitif N_2 tamsayısı mevcuttur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n \geq N$ ise,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k - L \right| &= \left| \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^n x_k - (n+1)L \right] \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=N_1}^n (x_k - L) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=N_1}^n (x_k - L) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} (n+1 - N_1) \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur.

Teoremin tersi doğru değildir. Gerçekten $(x_n) = (1 + (-1)^n)$ dizisi Cesaro yakınsaktır, ancak yakınsak değildir.

Teorem 2.2.2 : $S - \lim x = L$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| < M$ ise $\sigma_1 - \lim x = L$ dir [11].

İspat: Genelliği bozmaksızın $L = 0$ kabul edebiliriz. $\sigma_1 - \lim x = 0$ ve x dizisi sınırlı olsun.

Bu taktirde

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k| < \varepsilon}} |x_k| + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k| \geq \varepsilon}} |x_k| \right\} \leq \frac{1}{n} n\varepsilon + \frac{1}{n} M \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right|$$

yazabiliriz.

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teoremin karşıtı doğru değildir. Gerçekten $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması $\frac{1}{2}$ 'ye yakınsaktır. Fakat bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

2.3. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p – Cesaro Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Tanım 2.3.1 : $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır denir [1]. $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsak ise w_p - $\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(w_p)$ yazılır. Kuvvetli p -Cesaro yakınsak dizilerin uzayı

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 2.3.1: $p \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

1) Bir $x = (x_k)$ dizisi, L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsak ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

2) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır [15].

İspat :

1) $x \in w$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde ;

$$\sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \leq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \geq \varepsilon^p \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

elde edilir. Bu S - $\lim x_k = L$ demektir.

2) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $K = \|x\|_\infty + L$ diyelim, $\varepsilon \geq 0$ verilsin. $\forall n > N_\varepsilon$ için N_ε 'u

$$\frac{1}{n} \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \right\} < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p} \right\}$$

diyelim. Bu taktirde $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = \frac{1}{n} \left(\sum_{k \in L_n} |x_k - L|^p + \sum_{k \notin L_n} |x_k - L|^p \right) < \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır.

3. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

3.1. $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ Dizi Uzayları

Tanım 3.1.1 : l_∞ , c ve c_0 dizi uzaylarının birçok topolojik özellikleri bilinmektedir.

$x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli herhangi bir dizi olmak üzere

$$\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$$

şeklinde tanımlanan Δ - operatörü lineer operatördür.

$\Delta(l_\infty)$, $\Delta(c)$ ve $\Delta(c_0)$ dizi uzayları Kızmaz [19] tarafından,

$$\Delta(l_\infty) = \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\}$$

$$\Delta(c) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

$$\Delta(c_0) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

şeklinde tanımlandı. Kızmaz [19], $\Delta(l_\infty)$, $\Delta(c)$ ve $\Delta(c_0)$ dizi uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Daha sonra $\Delta(l_\infty)$, $\Delta(c)$ ve $\Delta(c_0)$ dizi uzayları Et ve Çolak [20] tarafından; m bir pozitif tam sayı ve

$$\Delta^0 x = (\Delta^0 x_k) = (x_k) \quad ,$$

$$\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1}) \quad ,$$

$$\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}) \quad , \quad \Delta^m x_k = \Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\Delta^m(l_\infty) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in l_\infty\}$$

$$\Delta^m(c) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$\Delta^m(c_0) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarına genişletildi.

Teorem 3.1.1 : $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları aşıkarak birer lineer uzaydır [20].

Teorem 3.1.2 : $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları, $\Delta^m(l_\infty)$ dizi uzayının kapalı bir alt uzayıdır [20].

Teorem 3.1.3 :

- 1) $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^{m+1}(c_0)$ ve $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^{m+1}(c_0)$ dir.
- 2) $\Delta^{m-1}(c) \subset \Delta^m(c)$ ve $\Delta^{m-1}(c) \neq \Delta^m(c)$ dir.
- 3) $\Delta^{m-1}(l_\infty) \subset \Delta^m(l_\infty)$ ve $\Delta^{m-1}(l_\infty) \neq \Delta^m(l_\infty)$ dur [20].

İspat :

- 1) $x \in \Delta^m(c_0)$ olsun. Bu taktirde $k \rightarrow \infty$ için $\Delta^m x_k \rightarrow \infty$ dir.

$$|\Delta^{m+1} x_k| = |\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}| \leq |\Delta^m x_k| + |\Delta^m x_{k+1}| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

olduğundan $x \in \Delta^{m+1}(c_0)$ dir.

$\Delta^m(c_0) \neq \Delta^{m+1}(c_0)$ olduğunu bir örnekle gösterelim :

$x = (x_k) = (k^m)$ dizisini seçelim. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^{m+1}(k^m) = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta^m(k^m) = (-1)^m m!$$

dir.

İspatı tümevarımın ikinci prensibi gereğince yapalım:

a) $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^{m+1}(k^m) = 0$ dır.

$$m = 1 \quad \text{için} \quad x = (k) \quad \text{ve} \quad \Delta^2 x_k = k - 2(k+1) + k + 2 = 0$$

$$m = n-1 \quad \text{için} \quad x = (k^{n-1}) \quad \text{ve} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \Delta^n x_k = 0 \quad \text{olsun.}$$

$m = n$ için $\Delta^{n+1}(k^n) = 0$ olduğunu göstereceğiz:

$$\Delta^{n+1} x_k = \Delta^n x_k - \Delta^n x_{k+1} = 0$$

b) $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir.

$$m = 1 \quad \text{için} \quad x = (x_k) = (k) \quad \text{ve} \quad \Delta x_k = k - (k+1) = -1 = (-1)^1 \cdot 1!$$

$$m = n-1 \quad \text{için} \quad x = (k^{n-1}) \quad \text{ve} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \Delta^n x_k = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad \text{olsun.}$$

$m = n$ için $x = (x_k) = (k^n)$ ve $\Delta^n x_k = (-1)^n n!$ olduğunu göstereceğiz:

$$\begin{aligned}
\Delta^n x_k &= \Delta^{n-1}(\Delta(k^n)) \\
&= \Delta^{n-1}(k^n - (k+1)^n) \\
&= -\left[\binom{n}{1} \Delta^{n-1}(k^{n-1}) + \binom{n}{2} \Delta^{n-1}(k^{n-2}) + \dots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1}(1) \right] \\
&= -n \Delta^{n-1}(k^{n-1}) \\
&= -n[(-1)^{n-1}(n-1)!] \\
&= (-1)^n n!
\end{aligned}$$

O halde $x = (x_k) = (k^m) \in \Delta^{m+1}(c_0) - \Delta^m(c_0)$ dir.

2) $x \in \Delta^{m-1}(c)$ olsun. Bu taktirde en az bir l için $\Delta^{m-1}x_k \rightarrow l$ dir ($k \rightarrow \infty$).

Buradan

$$|\Delta^m x_k| = |\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| \leq |\Delta^{m-1}x_k - l| + |\Delta^{m-1}x_{k+1} - l| \rightarrow 0$$

olur ki bu $\Delta^m x \in c_0 \subset c$ demektir. O halde $x \in \Delta^m(c)$ dir.

$\Delta^{m-1}(c) \neq \Delta^m(c)$ olduğunu bir örnekle gösterelim:

$x = (x_k) = (k^m)$ dizisini seçelim. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^m x_k = (-1)^m m! \quad \text{ve} \quad \Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2} \right)$$

dir.

a) $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir.

Gerçekten (1)' den $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir. O halde $x \in \Delta^m(c) - \Delta^{m-1}(c)$ dir.

b) $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2} \right)$ dir.

$$m = l \quad \text{için} \quad x = (x_k) = (k) \quad \text{ve} \quad \Delta^0 x_k = (-1)^2 l! \left(k + \frac{1-1}{2} \right) = k$$

$$m = n \quad \text{için} \quad x = (x_k) = (k^n) \quad \text{ve} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \Delta^{n-1} x_k = (-1)^{n+1} n! \left(k + \frac{n-1}{2} \right) \text{ olsun.}$$

$$m = n+1 \quad \text{için} \quad x = (x_k) = (k^{n+1}) \quad \text{ve} \quad \Delta^n x_k = (-1)^{n+2} (n+1)! \left(k + \frac{n}{2} \right)$$

olduğunu göstereceğiz:

$$\begin{aligned} \Delta^n x_k &= \Delta^{n-1} (\Delta(k^{n+1})) \\ &= \Delta^{n-1} (k^{n+1} - (k+1)^{n+1}) \\ &= - \left[\binom{n+1}{1} \Delta^{n-1} (k^n) + \binom{n+2}{2} \Delta^{n-1} (k^{n-1}) + \binom{n+1}{3} \Delta^{n-1} (k^{n-2}) + \dots + \binom{n+1}{n+1} \Delta^{n-1} (1) \right] \\ &= - \left[(n+1)(-1)^{n+1} n! \left(k + \frac{n-1}{2} \right) + \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} (-1)^{n-1} (n-1)! \right] \\ &= (-1)^{n+2} (n+1)! \left(k + \frac{n}{2} \right) \end{aligned}$$

olup, $x \in \Delta^m(c) - \Delta^{m-1}(c)$ dir.

3) $x \in \Delta^{m-1}(l_\infty)$ olsun. Bu taktirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^{m-1} x_k| \leq K$ olacak şekilde en az bir $K > 0$ vardır. Böylece $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|\Delta^m x_k| = |\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq |\Delta^{m-1} x_k| + |\Delta^{m-1} x_{k+1}| \leq 2K$$

ve buradan $x \in \Delta^m(l_\infty)$ elde edilir.

$\Delta^{m-1}(l_\infty) \neq \Delta^m(l_\infty)$ olduğunu bir örnekle gösterelim :

$x = (k^m)$ dizisini seçelim. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^m x_k = (-1)^m m! \quad \text{ve} \quad \Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2} \right)$$

dir. $x \in \Delta^m(l_\infty) - \Delta^{m-1}(l_\infty)$ dir.

a) $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir.

Gerçekten (1)' den $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m m!$ dir. O halde

$x \in \Delta^m(l_\infty) - \Delta^{m-1}(l_\infty)$ dir.

b) $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2} \right)$ dir.

Gerçekten (2)' den $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m+1} m! \left(k + \frac{m-1}{2} \right)$

dir. O halde $x \in \Delta^m(l_\infty) - \Delta^{m-1}(l_\infty)$ dir.

Theorem 3.1.4 :

1) $\Delta^m(c_0) \subset \Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^m(c)$

2) $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(l_\infty)$ ve $\Delta^m(c) \neq \Delta^m(l_\infty)$ dur [20].

İspat :

1) $x = (x_k) \in \Delta^m(c_0)$ olsun. Bu taktirde $\Delta^m x \in c_0 \subset c$ olup $x \in \Delta^m(c)$ dir.

$\Delta^m(c_0) \neq \Delta^m(c)$ olduğunu gösterelim:

$x = (x_k) = (k^m)$ seçersek $\Delta^m x_k = (-1)^m .m!$ dir.

Gerçekten Teorem 3.1.3'den $x = (x_k) = (k^m)$ için $\Delta^m x_k = (-1)^m .m!$ dir. Böylece $\Delta^m x \in c - c_0$ olduğundan $\Delta^m(c_0) \neq \Delta^m(c)$ dir.

2) $x \in \Delta^m(c)$ olsun. Bu taktirde $\Delta^m x \in c \subset l_\infty$ olup $x \in \Delta^m(l_\infty)$ dur.

$\Delta^m(c) \neq \Delta^m(l_\infty)$ olduğunu gösterelim:

$x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ seçersek $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$ dir. Gerçekten

$m = 1$ için $\Delta x_k = (-1)^{k+1}$ olur.

$m = n$ için $\Delta^n x_k = (-1)^{k+1} .2^{n-1}$ olsun.

$m = n+1$ için $\Delta^{n+1} x_k = (-1)^{k+1} .2^n$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}x_k &= \Delta^n x_k - \Delta^n x_{k+1} \\
&= (-1)^{k+1} 2^{n-1} - (-1)^{k+2} 2^{n-1} \\
&= (-1)^{k+1} 2^{n-1} [1 - (-1)] \\
&= (-1)^{k+1} 2^n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.1 : l_∞ , c ve c_0 dizi uzayları birer dizi cebiri oldukları halde $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları birer dizi cebiri değildir.

İspat: l_∞ , c ve c_0 dizi uzaylarının birer dizi cebiri oldukları bilinmektedir. $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzaylarının birer dizi cebiri olmadıklarını birer örnekle gösterelim:

$x = (x_k) = (k)$ ve $y = (y_k) = (k^{m-1})$ dizilerini seçelim. $x, y \in \Delta^m(c_0)$ olduğu halde $(\Delta^m(k^m)) \notin c_0$; yani $x \cdot y \notin \Delta^m(c_0)$ dır.

$x = (x_k) = (k)$ ve $y = (y_k) = (k^m)$ dizilerini seçelim. $x, y \in \Delta^m(c)$ olduğu halde $(\Delta^m(k^{m+1})) \notin c$; yani $x \cdot y \notin \Delta^m(c)$ dir.

$x = (x_k) = (k)$ ve $y = (y_k) = (k^m)$ dizilerini seçelim. $x, y \in \Delta^m(l_\infty)$ olduğu halde $(\Delta^m(k^{m+1})) \notin l_\infty$; yani $x \cdot y \notin \Delta^m(l_\infty)$ dur.

Şimdi l_∞ , c ve c_0 dizi uzayları yerine daha genel bir X dizi uzayı olarak $\Delta^m(X)$ dizi uzayını tanımlayalım ve X uzayı ile $\Delta^m(X)$ dizi uzayı arasındaki ilişkileri ve $\Delta^m(X)$ dizi uzayının bazı topolojik özelliklerini verelim:

X herhangi bir dizi uzayı ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. $\Delta^m(X)$ dizi uzayını

$$\Delta^m(X) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in X\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 3.1.5 : X bir lineer uzay ise $\Delta^m(X)$ dizi uzayı da bir lineer uzaydır [21].

İspat :

i) $x \in \Delta^m(X)$ ve $y \in \Delta^m(X)$ ise $\Delta^m x \in X$ ve $\Delta^m y \in X$ dir. X lineer uzay olduğundan $\Delta^m x + \Delta^m y \in X$ ve Δ^m - operatörü lineer olduğundan $\Delta^m(x + y) \in X$ yazılabilir. Buradan $(x + y) \in \Delta^m(X)$ elde edilir.

ii) $x \in \Delta^m(X)$ ve α bir skaler olsun. Bu taktirde $\Delta^m x \in X$ dir. X lineer uzay olduğundan $\alpha \Delta^m x \in X$ ve Δ^m - operatörü lineer olduğundan $\Delta^m(\alpha x) \in X$ yazılabilir. Buradan $\alpha x \in \Delta^m(X)$ elde edilir.

Teorem 3.1.6 : $\Delta^m(X)$ dizi uzayı

$$\|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir normlu uzaydır [21].

İspat :

$$\text{N 1)} \quad \|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\| \geq 0$$

$$\text{N 2)} \quad \|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\| = 0$$

olsun. Bu taktirde

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$$

ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \binom{m}{0} x_k - \binom{m}{1} x_{k+1} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} x_{k+m} \right| = 0$$

oldüğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir ki buradan $x = \theta$ bulunur.

Tersine $x = \theta$ olması halinde $\|x\| = 0$ olduğü aşıkardır.

$$\begin{aligned}
\text{N 3) } \quad \|x\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |\alpha x_i| + \sup_k \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \alpha x_{k+v} \right| \\
&= \left| \alpha \left(\sum_{i=1}^m |x_i| + \sup_k \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v} \right) \right| \\
&= \left| \alpha \right| \|x\|_{\Delta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{N 4) } \|x + y\|_{\Delta} &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| + \|\Delta^m x + \Delta^m y\| \\
&\leq \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\| + \sum_{i=1}^m |y_i| + \|\Delta^m y\| \\
&\leq \|x\|_{\Delta} + \|y\|_{\Delta}
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.7: $X, \|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $\Delta^m(X)$ dizi uzayı

$$\|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile Banach uzaydır [21].

Teorem 3.1.8 : $X, \|\cdot\|$ normu ile bir BK - uzayı ise $\Delta^m(X)$ dizi uzayı

$$\|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir BK – uzayıdır [21].

İspat : $X, \|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı olduğundan ve $\|x^n - x\|_{\Delta} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k^n - x\|_k \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ olması gerektiğinden $\Delta^m(X)$ dizi uzayı bir BK - uzayıdır.

Teorem 3.1.9 : $X \subset Y$ ise $\Delta^m(X) \subset \Delta^m(Y)$ dir [21].

Teorem 3.1.10 : X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $n < m$ ise $\Delta^n(X) \subset \Delta^m(X)$ dir [21].

4. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

4.1. Δ^m - İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1.1 : $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m - istatistiksel yakınsaktır denir [21]. $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m - istatistiksel yakınsak ise $\Delta^m(S)$ - $\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$ yazılır. Δ^m - istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$\Delta^m(S) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilir

$L = 0$ olması halinde $x = (x_k)$ dizisine sıfıra Δ^m - istatistiksel yakınsak dizi denir.

$x = (x_k)$ dizisi sıfıra Δ^m - istatistiksel yakınsak ise $\Delta^m(S)$ - $\lim x = 0$ veya $x_k \rightarrow 0(\Delta^m(S))$ yazılır. Sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$\Delta^m(S_0) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 4.1.1 : $\Delta^m(S)$ lineer uzaydır [21].

4.2. Δ^m - İstatistiksel Yakınsaklık ve Δ_p^m - Cesaro Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Tanım 4.2.1 : $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \Delta^m x_k - L \right|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli Δ_p^m - Cesaro yakınsaktır denir [21]. $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli Δ_p^m - Cesaro yakınsak ise $\Delta^m(w_p)$ - $\lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$ yazılır. Kuvvetli Δ_p^m - Cesaro yakınsak dizilerin uzayı

$$\Delta^m(w_p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \Delta^m x_k - L \right|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 4.2.1 : $p \in R, \quad 0 < p < \infty$ olsun.

(i) $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$ ise $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$ dir.

(ii) $x \in \Delta^m(l_\infty)$ ve $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$ ise $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$ dir [21].

İspat :

(i) $x = (x_k) \in \Delta^m(w_p)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^n \left| \Delta^m x_k - L \right|^p = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left| \Delta^m x_k - L \right| \leq \varepsilon}} \left| \Delta^m x_k - L \right|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \Delta^m x_k - L \right|^p \geq \varepsilon^p \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$ olduğundan $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$ dir.

(ii) $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$ olsun. $x \in \Delta^m(l_\infty)$ olduğundan $M = \|\Delta^m x\|_\infty + |L|$ yazabiliriz.

$\varepsilon \geq 0$ verilsin. N_ε sayısını

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k - L \right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu taktirde $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k \in L_n} \left| \Delta^m x_k - L \right|^p + \sum_{k \notin L_n} \left| \Delta^m x_k - L \right|^p \right) < \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2M^p} M^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$ olur.

Tanım 4.2.2 : $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \Delta^m x_k - \Delta^m x_N \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.2.2 : Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ^m - istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisidir [21].

İspat : Kabul edelim ki $x \in \Delta^m(S)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde h.h.k. için

$$\left| \Delta^m x_k - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. N sayısını h.h.k. için

$$\left| \Delta^m x_N - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçelim. Bu taktirde h.h.k. için

$$\left| \Delta^m x_k - \Delta^m x_N \right| < \left| \Delta^m x_k - L \right| + \left| \Delta^m x_N - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Buradan $x = (x_k)$ dizisi Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 4.2.3 :

- (i) $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(S)$ ve bu kapsama kesindir.
- (ii) $\Delta^m(S)$ ve $\Delta^m(l_\infty)$ birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.
- (iii) $\Delta^m(S)$ ve l_∞ birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.
- (iv) S ve $\Delta^m(c_0)$ birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.
- (v) S ve $\Delta^m(l_\infty)$ birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. [21].

İspat :

(i) $c \subset S$ olduğundan $\Delta^m(c) \subset \Delta^m(S)$ dir. Şimdi

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \quad (1)$$

şeklinde seçelim. Bu taktirde $\Delta^m x \in S$ fakat $\Delta^m x \notin c$ dir. $c \subset \Delta^m(S)$, $c \subset \Delta^m(c)$, $c \subset \Delta^m(l_\infty)$, $c \subset S$, $c \subset l_\infty$ ve $c \cap \Delta^m(c_0) \neq \emptyset$ olduğundan $\Delta^m(S)$ ile $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(S)$ ile l_∞ , $\Delta^m(S)$ ile S , S ile $\Delta^m(c_0)$ ve S ile $\Delta^m(l_\infty)$ dizi uzaylarının ortak elemanları vardır. Şimdi bu uzayların birbirlerini kapsamadıklarını gösterelim.

(ii) Yukarıda tanımlanan diziyi gözönüne alalım. $x \in \Delta^m(S)$; fakat $x \notin \Delta^m(l_\infty)$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ seçersek $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1} 2^{m-1}$ ve $x \in \Delta^m(l_\infty)$; fakat $x \notin \Delta^m(S)$ dir.

(iii) (i) de tanımlanan dizi sınırlı değildir. Ancak Δ^m – istatistiksel yakınsaktır.

Tersine $x = (1, 0, 1, 0, \dots) \in l_\infty$ seçersek $x \notin \Delta^m(S)$ dir.

(iv)

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi bu şıkkın şartını sağlar.

(v) $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $x \in S$ dir, ancak $x \notin \Delta^m(l_\infty)$ dir.

Tersine $x = (k)$ olarak alınırsa $x \in \Delta^m(l_\infty)$ dir. Fakat $x \notin S$ dir.

5. BÖLÜM

Δ_q^m – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde bir modülüs fonksiyonu, genelleştirilmiş fark operatörü, bir yarı-norm kullanarak yeni birkaç dizi uzayı tanımlayacağız ve bu dizi uzaylarının bazı topolojik özelliklerini vereceğiz. Ayrıca bu uzaylar arasında birkaç kapsama bağıntısını inceleyeceğiz.

5.1. Modülüs Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Fark Dizi Uzayları

Tanım 5.1.1 : f bir modülüs fonksiyonu, X lokal konveks bir Hausdorff uzay, $p = (p_k)$ de pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $w(X)$, X üzerinde tanımlı tüm dizilerin uzayını gösterebilir.

Aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayalım:

$$w(\Delta^m, f, p, q) = \left\{ x \in w(X) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f(q(\Delta^m x_k - L)) \right]^{p_k} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\}$$

$$w_0(\Delta^m, f, p, q) = \left\{ x \in w(X) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f(q(\Delta^m x_k)) \right]^{p_k} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\}$$

$$w_\infty(\Delta^m, f, p, q) = \left\{ x \in w(X) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f(q(\Delta^m x_k)) \right]^{p_k} < \infty \right\}$$

$f(x) = x$ ise $w(\Delta^m, f, p, q)$, $w_0(\Delta^m, f, p, q)$ ve $w_\infty(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzaylarını sırasıyla $w(\Delta^m, p, q)$, $w_0(\Delta^m, p, q)$ ve $w_\infty(\Delta^m, p, q)$ ile göstereceğiz [22].

Teorem 5.1.1 : $p = (p_k)$ dizisi sınırlı olsun. Bu durumda $w(\Delta^m, f, p, q)$, $w_0(\Delta^m, f, p, q)$ ve $w_\infty(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzayları lineer uzaydır [22].

İspat : İspatı $w_0(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzayı için yapalım. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir.

$x, y \in w_0(\Delta^m, f, p, q)$ olsun. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $|\lambda| \leq M_\lambda$ ve $|\mu| \leq N_\mu$ olacak şekilde M_λ ve N_μ mevcuttur. f alt toplamsal, q bir yarı-norm ve Δ^m -operatörü lineer olduğundan (1) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f \left(q \left(\Delta^m (\lambda x_k + \mu y_k) \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f \left(\left| \lambda \right| q \left(\Delta^m x_k \right) \right) + f \left(\left| \mu \right| q \left(\Delta^m y_k \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq C(M_\lambda)^H \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f \left(q \left(\Delta^m x_k \right) \right) \right]^{p_k} + C(N_\mu)^H \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f \left(q \left(\Delta^m y_k \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $w_0(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzayının bir lineer uzay olduğunu gösterir.

Teorem 5.1.2 : f, f_1, f_2 modülüs fonksiyonlar ve $0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq \sup p_k = H < \infty$

olsun. Bu durumda

$$(i) \quad w_0(\Delta^m, f_1, p, q) \subseteq w_0(\Delta^m, f, p, q)$$

$$(ii) \quad w_0(\Delta^m, f_1, p, q) \cap w_0(\Delta^m, f_2, p, q) \subseteq w_0(\Delta^m, f_1 + f_2, p, q)$$

dur. [22].

İspat :

$$(i) \quad (x_k) \in w_0(\Delta^m, f_1, p, q) \text{ olsun. } \varepsilon > 0 \text{ ve } 0 \leq t \leq \delta \text{ için } f(t) < \varepsilon \text{ olacak}$$

şekilde $0 < \delta < 1$ şartını sağlayan δ sayısını seçelim. $y_k = f_1(q(\Delta^m(x_k)))$ yazalım ve

$$\sum_{k=1}^n [f(y_k)]^{p_k} = \sum_1 [f(y_k)]^{p_k} + \sum_2 [f(y_k)]^{p_k}$$

ifadesini göz önüne alalım. Burada ilk toplam $y_k \leq \delta$, ikinci toplam ise $y_k > \delta$ üzerindendir.

f fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\sum_1 [f(y_k)]^{p_k} < n \max(\varepsilon^h, \varepsilon^H)$$

yazabiliriz. $y_k > \delta$ için

$$y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \frac{y_k}{\delta}$$

gerçeğini kullanarak f fonksiyonunun tanımından $y_k > \delta$ için

$$f(y_k) \leq f(1) \left[1 + \left(\frac{y_k}{\delta} \right) \right] \leq 2f(1) \frac{y_k}{\delta}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(y_k)]^{p_k} \leq \max \left(1, \left(\frac{2f(1)}{\delta} \right)^H \right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [y_k]^{p_k} \rightarrow 0$$

olur. Buradan $w_0(\Delta^m, f_1, p, q) \subseteq w_0(\Delta^m, f \circ f_1, p, q)$ elde edilir.

(ii) $(x_k) \in w_0(\Delta^m, f_1, p, q) \cap w_0(\Delta^m, f_2, p, q)$ olsun. Bu taktirde (1) eşitsizliğini kullanırsak $(x_k) \in w_0(\Delta^m, f_1 + f_2, p, q)$ elde ederiz. Böylece

$$w_0(\Delta^m, f_1, p, q) \cap w_0(\Delta^m, f_2, p, q) \subseteq w_0(\Delta^m, f_1 + f_2, p, q) \text{ olur.}$$

Aşağıdaki sonucun ispatı yukarıdaki teoremin ispatıyla benzerdir. Bu yüzden ispatsız olarak veriyoruz:

Sonuç 5.1.1 : f, f_1, f_2 modülüs fonksiyonları olsun. Bu taktirde

$$(i) \ w(\Delta^m, f_1, p, q) \subseteq w(\Delta^m, f \circ f_1, p, q)$$

$$(ii) \ w(\Delta^m, f_1, p, q) \cap w(\Delta^m, f_2, p, q) \subseteq w(\Delta^m, f_1 + f_2, p, q)$$

$$(iii) \ w_\infty(\Delta^m, f_1, p, q) \subseteq w_\infty(\Delta^m, f \circ f_1, p, q)$$

$$(iv) \ w_\infty(\Delta^m, f_1, p, q) \cap w_\infty(\Delta^m, f_2, p, q) \subseteq w_\infty(\Delta^m, f_1 + f_2, p, q) \text{ dur [22].}$$

Teorem 5.1.3 : $m \geq 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki kapsamalar kesindir.

$$(i) \ w_0(\Delta^{m-1}, f, q) \subseteq w_0(\Delta^m, f, q)$$

$$(ii) \ w(\Delta^{m-1}, f, q) \subseteq w(\Delta^m, f, q)$$

$$(iii) \ w_\infty(\Delta^{m-1}, f, q) \subseteq w_\infty(\Delta^m, f, q) \text{ [22].}$$

İspat : İspatı (i) için yapalım. Diğerleri benzer şekilde ispatlanabilir.

$$x \in w_0(\Delta^{m-1}, f, q) \text{ olsun. Bu taktirde } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(q(\Delta^{m-1}x_k)) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ elde}$$

edilir. f ve q fonksiyonlarının tanımından

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(q(\Delta^m x_k)) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(q(\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1})) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(q(\Delta^{m-1} x_k)) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(q(\Delta^{m-1} x_{k+1}))
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Genelde $\forall i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ için $w(\Delta^i, f, q) \subseteq w(\Delta^m, f, q)$ dur ve kapsama kesindir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

Örnek 5.1.1 : $X = \mathbb{C}$, $f(x) = x$ ve $q(x) = |x|$ olsun. $x = (x_k) = (k^{m-1})$ dizisini düşünelim. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x_k = 0$, $\Delta^{m-1} x_k = (-1)^{m-1} (m-1)!$ olduğundan $x = (x_k) \in w_0(\Delta^m, f, q)$ dir. Fakat $x = (x_k) \notin w_0(\Delta^{m-1}, f, q)$ dur.

Teorem 5.1.4 : Pozitif reel sayıların herhangi iki p ve t dizileri ve herhangi q_1, q_2 yarı-normları için

$$(i) \quad w_0(\Delta^m, f, p, q_1) \cap w_0(\Delta^m, f, t, q_2) \neq \emptyset$$

$$(ii) \quad w(\Delta^m, f, p, q_1) \cap w(\Delta^m, f, t, q_2) \neq \emptyset$$

$$(iii) \quad w_\infty(\Delta^m, f, p, q_1) \cap w_\infty(\Delta^m, f, t, q_2) \neq \emptyset$$

dir [22].

İspat : Sıfır elemanı yukarıdaki her bir dizi sınıfına ait olduğundan boş değildir.

Önerme 5.1.1 : f bir modülüs fonksiyonu olsun . Bu durumda

$$(i) \quad w_0(\Delta^m, p, q) \subseteq w_0(\Delta^m, f, p, q)$$

$$(ii) \quad w(\Delta^m, p, q) \subseteq w(\Delta^m, f, p, q)$$

$$(iii) \quad w_\infty(\Delta^m, p, q) \subseteq w_\infty(\Delta^m, f, p, q)$$

dur [22].

İspat : Teorem 5.1.2' nin (i) şıkında $f(x) = x$ alınırsa sonuç elde edilir.

Teorem 5.1.5 : $0 < p_k < r_k$ ve $\left(\frac{r_k}{p_k}\right)$ sınırlı olsun. Bu durumda $w(\Delta^m, f, r, q) \subseteq w(\Delta^m, f, p, q)$ dur [22].

İspat : $(x_k) \in w(\Delta^m, f, r, q)$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = \left(\frac{p_k}{r_k}\right)$ olmak üzere $0 < \lambda \leq \lambda_k \leq 1$ olacak şekilde bir λ sayısı seçelim. $w_k = \left[f(q(\Delta^m(x) - L)) \right]^{r_k}$ diyelim, (u_k) ve (v_k) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$w_k \geq 1 \text{ için } u_k = w_k, v_k = 0 \text{ ve } w_k < 1 \text{ için } u_k = 0, v_k = w_k$$

olsun. Bu taktirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$w_k = u_k + v_k, w_k^{\lambda_k} = u_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k}, u_k^{\lambda_k} \leq u_k \leq w_k \text{ ve } v_k^{\lambda_k} \leq v_k$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k^{\lambda_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k + \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \right]$$

dir. Böylece $(x_k) \in w(\Delta^m, f, p, q)$ olur.

Teorem 5.1.6 : $m \geq 1$ için $w_0(\Delta^m, f, p, q)$, $w(\Delta^m, f, p, q)$ ve $w_\infty(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzayları normal değildir [22].

İspat : $w_0(\Delta^m, f, p, q)$, $w(\Delta^m, f, p, q)$ ve $w_\infty(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzaylarının normal olmadıklarını göstermek için aşağıdaki örnekleri göz önüne alalım:

Örnek 5.1.2 : $m = 1$, $f(x) = x$, $q(x) = |x|$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ seçelim. Bu taktirde $x = (x_k) = (k)$ dizisi, $w_\infty(\Delta)$ ve $w(\Delta)$ dizi uzaylarına aittir. $\alpha_k = (-1)^k$ olsun. Bu durumda $(\alpha_k x_k)$ dizisi, $w_\infty(\Delta)$ ve $w(\Delta)$ dizi uzaylarına ait olamaz.

Örnek 5.1.3 : f, q, m ve p 'yi Örnek 5.1.2 'deki gibi seçelim. $x = (x_k) = (1)$ dizisini ele alalım. Bu taktirde $x \in w_0(\Delta)$ dir. $\alpha_k = (-1)^k$ olsun. Bu durumda $(\alpha_k x_k) \notin w_0(\Delta)$ dir.

Teorem 5.1.7 : $w(\Delta^m, f, p, q)$ ve $w_\infty(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzayları simetrik değildir [22].

İspat : $w(\Delta^m, f, p, q)$ ve $w_\infty(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzaylarının simetrik olmadıklarını göstermek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

Örnek 5.1.4 : f, q, m ve p Örnek 5.1.2' deki gibi olsun. Bu durumda $x = (x_k) = (k)$ dizisi, $w_\infty(\Delta)$ ve $w(\Delta)$ dizi uzaylarına aittir. $y = (y_k)$ dizisi, $x = (x_k)$ dizisinin $y = (y_k) = (x_1, x_2, x_4, x_3, x_9, x_5, x_{16}, x_6, x_{25}, x_7, x_{36}, x_8, x_{49}, x_{10}, \dots)$ şeklinde yeniden düzenlenmiş olsun. Bu durumda $y = (y_k)$ dizisi, $w_\infty(\Delta)$ ve $w(\Delta)$ dizi uzaylarına ait değildir.

Uyarı 5.1.1 : $m \geq 2$ için $w_0(\Delta^m, f, p, q)$ dizi uzayı simetrik değildir.

5.2. Δ_q^m - İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda q yarı-normu ve Δ^m - operatörü kullanılarak Δ_q^m - istatistiksel yakınsaklığı tanımlayacağız.

Tanım 5.2.1 : q bir yarı-norm olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine L sayısına Δ_q^m - istatistiksel yakınsak dizi denir [22]. $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ_q^m - istatistiksel yakınsak ise $\Delta_q^m(S) - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(\Delta_q^m(S))$ yazılır. Δ_q^m istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$\Delta_q^m(S) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Aşağıdaki üç teoremden $0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ şartının sağlandığını kabul edeceğiz.

Teorem 5.2.1 : f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda $w(\Delta^m, f, p, q) \subset \Delta_q^m(S)$ dur [22].

İspat : $x \in w(\Delta^m, f, p, q)$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım, $\sum_1$ ile $q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon$

olacak şekilde $k \leq n$ üzerinden toplamı ve $\sum_2$ ile de $q(\Delta^m x_k - L) < \varepsilon$ olacak şekilde $k \leq n$ üzerinden toplamı gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(q(\Delta^m x_k - L))]^{p_k} &= \frac{1}{n} \left(\sum_1 [f(q(\Delta^m x_k - L))]^{p_k} + \sum_2 [f(q(\Delta^m x_k - L))]^{p_k} \right) \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_1 [f(q(\Delta^m x_k - L))]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_1 [f(\varepsilon)]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_1 \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H) \\
&= \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon \right\} \right| \min([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $x \in \Delta_q^m(S)$ olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.2 : f fonksiyonu sınırlı olsun. Bu durumda $\Delta_q^m(S) \subset w(\Delta^m, f, p, q)$ dur [22].

İspat : Kabul edelim ki f fonksiyonu sınırlı, $q \in \mathbb{Q}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\sum_1$ ve $\sum_2$, Teorem 5.2.1 'deki gibi olsun. Bu durumda f fonksiyonu sınırlı olduğundan $\forall x \geq 0$ için $f(x) < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı mevcuttur. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(q(\Delta^m x_k - L))]^{p_k} &\leq \frac{1}{n} \sum_1 [f(q(\Delta^m x_k - L))]^{p_k} + \frac{1}{n} \sum_2 [f(q(\Delta^m x_k - L))]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_1 \max(K^h, K^H) + \frac{1}{n} \sum_2 [f(\varepsilon)]^{p_k} \\
&\leq \max(K^h, K^H) \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon \right\} \right| + \max(f(\varepsilon)^h, f(\varepsilon)^H)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $x \in w(\Delta^m, f, p, q)$ olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.3 : $\Delta_q^m(S) = w(\Delta^m, f, p, q)$ olması için gerek ve yeter şart; f fonksiyonunun sınırlı olmasıdır [22].

İspat : Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.2.2 ‘den $\Delta_q^m(S) = w(\Delta^m, f, p, q)$ elde edilir.

Tersine kabul edelim ki $\Delta_q^m(S) = w(\Delta^m, f, p, q)$ ve f fonksiyonu sınırlı olmasın. Bu taktirde $f(t_n) = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ olacak şekilde pozitif sayıların artan bir dizisi mevcuttur. Eğer

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} t_n, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde seçilirse

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : q(\Delta^m x_k) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir. Böylece $x_k \rightarrow 0$ ($\Delta_q^m(S)$), fakat $q = |x|$ ve $X = \mathbf{C}$ için

$x \notin w(\Delta^m, f, q)$ dur. Gerçekten; $q = |x|$ ve $X = \mathbf{C}$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} (\Delta^m x_k) &= (\Delta^m x_1, \Delta^m x_2, \Delta^m x_3, \Delta^m x_4, \Delta^m x_5, \Delta^m x_6, \Delta^m x_7, \Delta^m x_8, \Delta^m x_9, \Delta^m x_{10}, \dots, \Delta^m x_{16}, \dots) \\ &= (t_1, 0, 0, t_2, 0, \dots, 0, t_3, 0, \dots, 0, t_4, 0, \dots, 0, t_5, 0, \dots) \end{aligned}$$

dir.

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|\Delta^m x_k|)$$

olsun. Bu durumda

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} t_n, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

olup,

$$s_{n^2} = \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

olur. (s_n) dizisinin (s_{n^2}) alt dizisi sınırlı değildir. Bu nedenle $(s_n) \notin w_\infty(\Delta^m, f, q)$ ve böylece $(s_n) \notin w(\Delta^m, f, q)$ elde edilir. Bu $\Delta_q^m(S) = w(\Delta^m, f, q)$ olması ile çelişir.

KAYNAKLAR

- 1) Maddox, I. J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres., London.
- 2) Kreyszig, E. , 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons New York.
- 3) Goes, G. ve Goes, S. , 1970, Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients 1, Math. Z., 118, 93-102.
- 4) Kamptan, P.K. ve Gupta, M. , 1981, Sequence Spaces and Series , Marcel Dekker Inc. , New York.
- 5) Nakano, H. , 1953, Convex modulars , J. Math. Soc. Japan 5 , 29-49 .
- 6) Maddox, I.J. , 1986, Sequence spaces defined by a modulus , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 100 , 161 – 166.
- 7) Ruckle, W.H. 1973, FK Spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded , Canad. J. Math. 25 , 973-978 .
- 8) Bilgin, T. 1994, The sequence space $l(p, f, q, s)$ on seminormed spaces, Bull. Calcutta Math. Soc 86 , 295-304 .
- 9) Öztürk, E. ve Bilgin, T. , 1994, Strongly summable sequence spaces defined by a modulus , Indian J. Pure Appl. Math. 25 (6) , 621- 625 .
- 10) Fast, H. , 1951, Statistical convergence , Colloq Math. (2), 241-244.
- 11) Schoenberg, I.J. , 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly 66, 361-375.
- 12) Kolk, E. , 1991, The statistical convergence in Banach spaces, Acta et Commentationes Univ. Tartuensis, 928 41-52.
- 13) Fridy, J.A. , 1985, On statistical convergence, Analysis 5, 301-313.

- 14) Salat, T. , 1980**, On statistically convergent sequences of reel numbers, Math. Slovaca., 30 (2) 139-150
- 15) Connor, J.S. , 1988**, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis 8, 47-63.
- 16) Maddox, I.J. , 1988**, Statistical convergence in a locally convex space, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 104 , 141-145 .
- 17) Niven, I. ve Zuckerman, H.S. 1960**, An Introduction to the Theory of Numbers , John Wiley & Sons , New York.
- 18) Powell, R.E. ve Shah, S.M. , 1972**, Summability Theory and its Applications, V.N.R. Company, London.
- 19) Kızmaz, H. , 1981**, On certain sequence spaces , Canad. Math. Bull , 24 (2) 169-176.
- 20) Et, M. ve Çolak, R. , 1995**, On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math. 21 (4) 377-386
- 21) Et, M. ve Nuray, F. 2001**, Δ^m - statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math. 32 (6) , 961-969.
- 22) Altın,Y. ve Et, M. , 2005**, Generalized difference sequence spaces defined by a modulus function in a locally convex space , Soochow J. Math. 31, 233-243.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında İstanbul'da doğdum. İlkokulu babamın mesleği nedeniyle değişik illerde tamamladım. Ortaokulu ve liseyi Samsun'da bitirdim. 1997 yılında Fırat Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandım. 2001 yılında mezun oldum. Aynı yıl Elazığ ilinde Özel Akademi Dershanesi'nde bir yıl matematik öğretmeni olarak çalıştım. 2002 yılında Isparta'da vatani görevimi yaptım. 2003 yılında Elazığ ilinde Özel Ekol Dershanesi'nde bir yıl matematik öğretmeni olarak çalıştım. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün açmış olduğu Matematik Ana Bilim Dalı'nın Fonksiyonel Analiz programında tezli yüksek lisansa başladım. 2004 yılında Samsun Final Dergisi Dershanesi' nde çalışmaya başladım ve halen burada çalışmaktayım.

Hakan ŞİMŞİR