

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**$BV_{\sigma}(M, p, q, u, s)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ
FARK DİZİ UZAYI**

Seyran KARABULUT

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Çiğdem A. BEKTAŞ

ELAZIĞ-2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$BV_{\sigma}(M, p, q, u, s)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ
FARK DİZİ UZAYI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Seyran KARABULUT
(101121116)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30.11.2015

Tezin Savunulduğu Tarih : 16.12.2015

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Çiğdem A. BEKTAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

: Yard. Doç. Dr. Murat CANDAN

ARALIK-2015

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Prof. Dr. Çiğdem A. Bektaş'a ve her konuda desteğini gördüğüm değerli hocam Sayın Sinan ERCAN'a emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

SEYRAN KARABULUT

ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYI	6
4. $BV_{\sigma}(M, p, q, u, s)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYI	10
KAYNAKLAR	16
ÖZGEÇMİŞ	18

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmada Orlicz fonksiyonları kullanılarak yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmıştır.

İlk bölüm giriş kısmı olup, bu çalışma ile ilgili ön bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ise konuya ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde fark dizi uzayları ve bunlara ait bazı özellikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $M = (M_k)$ Orlicz fonksiyonunun bir dizisi ve Δ_v^m -genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak $B_v(M, p, q, u, s)$ dizi uzayı tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fark dizi uzayları, Orlicz fonksiyonu.

SUMMARY

The generalized sequence space $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ defined by a sequence of Orlicz function

This study is prepared as four chapter.

In the first chapter; the preliminary informations are given.

In the second chapter; the fundamental definitions and theorems are given.

In the third chapter; difference sequence space and their some properties are given.

In the fourth chapter; the sequence space $B_v(M, p, q, u, s)$ is defined by Orlicz functions and some properties of this space is given.

Keywords: The difference sequence spaces, Orlicz function.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi

w : Bütün diziler uzayı

c : Yakınsak diziler uzayı

c_0 : Sıfıra yakınsak diziler uzayı

ℓ_∞ : Sınırlı diziler uzayı

Δ^m : Genelleştirilmiş fark operatörü

1. GİRİŞ

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızılmaz [7] tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızılmaz $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x_1\| = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayları olduğunu gösterdi.

Et ve Çolak [2], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve $\Delta^m x = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$, $c_0(\Delta^m)$ dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

$v = (v_k)$ sıfırdan farklı kompleks terimli herhangi bir dizi olsun. Et ve Esi [3], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_v^0 x = (v_k x_k)$, $\Delta_v x = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$, $\Delta_v^m x = (\Delta_v^m x_k) = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$ ve $\Delta_v^m x = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$ olmak üzere bu uzayları, Et ve Çolak [2] ın tanımladığı uzayları $\ell_\infty(\Delta_v^m)$, $c(\Delta_v^m)$, $c_0(\Delta_v^m)$ şeklindeki uzaylara genelleştirdiler. Aynı zamanda $\Delta_v^m(\ell_\infty)$, $\Delta_v^m(c)$ ve $\Delta_v^m(c_0)$ dizi uzaylarının

$$\|x\|_v = \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

Orlicz fonksiyonu sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonudur.

Lindenstrauss ve Tzafriri [10] ; M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere ℓ_M dizi uzayını

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

olarak tanımladılar.

ℓ_M uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olur. ℓ_M uzayına bir Orlicz dizi uzayı denir.

Orlicz fonksiyonu veya Orlicz fonksiyon dizileri kullanılarak yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve pek çok bilim adamı bu dizi uzayları üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu yüksek lisans tez çalışmasında; Zeren ve Bektaş [16]' ın tanımladığı $BV_{\sigma}(M, p, q, u, s)$ dizi uzayının bazı topolojik ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

X , q yarı normuyla $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir yarınormlu uzay, $M = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi, $u = (u_k)$ pozitif reel sayıların dizisi ve $s \geq 0$ bir sabit reel sayı olmak üzere

$$BV_{\sigma}(M, p, q, u, s) = \left\{ x = (x_k) \in X : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $BV_{\sigma}(M, p, q, u, s)$ dizi uzayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar uzayı üzerinde bir lineer uzaydır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2. 1 X , boş olmayan bir cümle ve K , reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X \quad \text{ve} \quad . : K \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $a, b \in K$ için

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in X$ vardır.

L4) Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır.

L5) $1.x = x$

L6) $a(x + y) = ax + ay$

L7) $(a + b)x = ax + bx$

L8) $a(bx) = (ab)x$

dir [12].

Tanım 2. 2 X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir.

Eğer N2 şartı yerine $x = \theta \implies \|x\| = 0$ şartı yazılırsa yarınorm elde edilir [9].

Tanım 2. 3 $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için her $n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x' e yakınsaktır denir. Bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır [9].

Tanım 2. 4 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir [9].

Tanım 2. 5 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için her $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [9].

Tanım 2. 6 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [9].

Tanım 2. 7 X bir vektör uzayı, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa g ye bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir. Her $x, y \in X$ için

- 1) $g(\theta) = 0$
- 2) $g(x) = g(-x)$
- 3) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$
- 4) $\lambda \rightarrow \lambda_0, x \rightarrow x_0$ ise $\lambda x \rightarrow \lambda_0 x_0$

dir.

(4) şartını $\lambda \rightarrow \lambda_0, g(x - x_0) \rightarrow 0$ iken $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$ şeklinde ifade edebiliriz.

Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g ye total paranorm denir [12].

Tanım 2. 8 Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin cümlesini s ile gösterelim. $x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere $s, x + y = (x_k + y_k)$ ve $\alpha x = (\alpha x_k)$ şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında bir lineer uzaydır. s nın her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [5].

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2. 9 Bir X dizi uzayı $|\alpha_k| \leq 1$ şeklindeki tüm (α_k) skaler dizileri için $(x_k) \in X$ iken $(\alpha_k x_k) \in X$ ise soliddir (normaldir) [6].

Tanım 2. 10 X boş olmayan bir cümle ve τ , X in alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya, X için bir topoloji ve (X, τ) çiftine de topolojik uzay denir [9].

- i) $X, \theta \in \tau$ dur.
- ii) τ nun keyfi sayıdaki elamanlarının birleşimi τ nun bir elemanıdır.
- iii) τ ya ait iki elamanın arakesiti yine τ ya aittir.

Tanım 2. 11 X bir dizi uzayı ve $J \subset \mathbb{N}$ olsun.

$$X_J = \{x = (x_i) : \forall n_i \in J \text{ için } x_i = y_{n_i} \text{ olacak şekilde bir } (y_i) \in X \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlanan X_J ye X in J - basamak uzayı denir.

Tanım 2. 12 $(x_j) \in X_J$ olsun. X_J nin kanonik önresmi

$$\bar{x} = \begin{cases} x_j, & j \in J \\ 0, & j \notin J \end{cases}$$

dir.

Tanım 2. 13 X bir dizi uzayı olsun. X tüm basamak uzaylarının kanonik ön resimlerini kapsıyorsa, X e monoton dizi uzayı denir.

Hatırlatma 2. 14 Bir X dizi uzayı normal ise monotondur [6].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYI

Tanım 3. 1 $n, k = 1, 2, 3, \dots$ için $\sigma^k(n) = \sigma(\sigma^{k-1}(n))$ olacak şekilde pozitif tam-sayılar kümesinden kendi içine birebir bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan ℓ_∞ üzerinde sürekli, lineer bir φ fonksiyoneline bir invaryant veya σ -ortalama denir.

i) $x = (x_k)$ dizisi her k için $x_k \geq 0$ ise $\varphi(x) \geq 0$ dır.

ii) $e = (1, 1, 1 \dots)$ iken $\varphi(e) = 1$

iii) Her $x \in \ell_\infty$ için $\varphi(\{x_{\sigma(k)}\}) = \varphi(\{x\})$

dir [11].

Tanım 3. 2 $\sigma, n \rightarrow n+1$ şeklinde bir öteleme dönüşümü ise σ -ortalama genellikle bir Banach limiti olarak adlandırılır. $x = (x_n)$ ise $Tx = (Tx_n) = (x_{\sigma(k)})$ olarak gösterilir. σ -yakınsak dizilerin kümesi

$$t_{kn}(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k T^j x_n$$

olmak üzere

$$V_\sigma = \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_k t_{kn}(x) = Le, n' \text{ e göre düzgün olarak } L = \sigma - \lim x \right\}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Mursaleen $k = -1$ için $t_{kn}(x) = 0$ kabul ederek $\phi_{k,n}(x) = t_{kn}(x) - t_{k-1,n}(x)$ olmak üzere

$$BV_\sigma = \left\{ x \in \ell_\infty : \sum_k |\phi_{k,n}(x)| < \infty, n' \text{ e göre düzgün olarak} \right\}$$

uzayını tanımlamıştır [13].

Herhangi x, y dizileri ve λ skaleri için

$$\phi_{k,n}(x+y) = \phi_{k,n}(x) + \phi_{k,n}(y) \text{ ve } \phi_{k,n}(\lambda x) = \lambda \phi_{k,n}(x)$$

olup ϕ_{kn} lineerdir.

Tanım 3. 3 q_1 ve q_2 bir X lineer uzayı üzerinde birer yarınorm olsun. Her $x \in X$ için $q_2(x) \leq Tq_1(x)$ olacak şekilde bir T sabiti varsa q_1, q_2 den kuvvetlidir denir [15].

Aşağıdaki eşitsizlik çalışma boyunca sık sık kullanılacaktır.

$a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $0 < p_k \leq \sup_k p_k = G$ ve $D = \max(1, 2^{G-1})$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \{|a_k| + |b_k|\}$$

dir [12].

Fark dizileri kavramı ilk olarak 1981 de Kızmaz tarafından tanımlandı. Kızmaz [7] $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\} \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\} \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\} \end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x_1\| = \|x_1\| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Et ve Çolak [2], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve $\Delta^m x = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\} \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\} \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\} \end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m \|x_i\| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

$v = (v_k)$ sıfırdan farklı kompleks terimli herhangi bir dizi olsun. Et ve Esi [3], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta_v^0 x = (v_k x_k)$, $\Delta_v x = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1})$, $\Delta_v^m x = (\Delta_v^m x_k) = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$ ve $\Delta_v^m x = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$ olmak üzere bu uzayları, Et ve Çolak [2] tarafından tanımlanan uzayları

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in \ell_\infty\} \\ c(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c\} \\ c_0(\Delta_v^m) &= \{x = (x_k) : \Delta_v^m x \in c_0\}\end{aligned}$$

şeklinde uzaylara genelleştirdiler. Aynı zamanda $\Delta_v^m(\ell_\infty)$, $\Delta_v^m(c)$ ve $\Delta_v^m(c_0)$ dizi uzaylarının

$$\|x\|_v = \sum_{i=1}^m |x_i v_i| + \|\Delta_v^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdiler.

Teorem 3. 4 Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [4].

Teorem 3. 5 Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [4].

Tanım 3. 6 Her $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)]$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konvektir denir [8].

Tanım 3. 7 Bir Orlicz fonksiyonu sürekli, azalmayan, konveks, $M(0) = 0$, $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonudur [6].

Lindenstrauss ve Tzafriri [10] Orlicz fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki dizi uzayını tanımladılar.

Tanım 3. 8 Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

şekinde tanımlanan cümleye Orlicz dizi uzayı denir.

ℓ_M uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3. 9 Bir M Orlicz fonksiyonuna, eğer her bir $k > 0$ için

$$M(kx) \leq R_k M(x), \quad \forall x \in (0, x_k]$$

olacak şekilde $R_k > 0$ ve $x_k > 0$ mevcutsa Δ_2 - şartını sağlıyor denir [6].

4. $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ DİZİ UZAYI

X , q yarınormuyla $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir yarınormlu uzay, $M = (M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi, $u = (u_k)$ pozitif reel sayıların dizisi, $s \geq 0$ bir sabit reel sayı olsun.

$$BV_\sigma(M, p, q, u, s) = \left\{ x = (x_k) \in X : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4. 1 $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ dizi uzayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır [16].

İspat Her $x, y \in BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için düzgün olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(y)}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ şeklinde tanımlayalım. M_k azalmayan ve konveks ve q bir yarınorm olduğundan $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere, n e göre düzgün olarak

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(\alpha x + \beta y)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{\alpha u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho_3} \right) + q \left(\frac{\beta u_k \phi_{k,n}(y)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho_1} \right) + q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(y)}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq D \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} M_k \left[q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + D \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} M_k \left[q \left(\frac{\beta u_k \phi_{k,n}(y)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \\ & < \infty \end{aligned} \tag{1}$$

elde edilir. Bu da $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ uzayının bir lineer uzay olduğunu gösterir.

Teorem 4. 2 $BV_\sigma(M, p, q, u)$ uzayı $H = \max \left(1, \sup_k p_k \right)$ olmak üzere

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{\frac{pm}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, m, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

ile bir paranormlu (total paranorm olması gerekmez) uzaydır [16].

İspat $q(\theta) = 0$ ve $M_k(0) = 0$ olduğundan $x = \theta$ için $\inf \{ \rho^{\frac{pm}{H}} \} = 0$ dir.

$g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. g nin alt toplamsallığı (1) de $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ alınarak elde edilir. Son olarak skaler çarpımın sürekliliği ispatlanırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur. λ herhangi bir sayı olsun. $m, n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$g(\lambda x) = \inf \left\{ \rho^{\frac{pm}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(\lambda x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

dir. Bu taktirde $r = \frac{\rho}{\lambda}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$g(\lambda x) = \inf \left\{ (\lambda r)^{\frac{pm}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{r} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

dir. $|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H)$ olduğu için $|\lambda|^{\frac{p_k}{H}} \leq \left(\max(1, |\lambda|^H) \right)^{\frac{1}{H}}$ elde edilir. Bu taktirde $m, n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$g(\lambda x) \leq \left(\max(1, |\lambda|^H) \right)^{\frac{1}{H}} \inf \left\{ r^{\frac{pm}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{r} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

elde edilir. Buradan $g(x)$, $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ uzayında sıfıra yakınsadığı için $g(\lambda x)$ sıfıra yakınsar. Kabul edelim ki $\lambda_n \rightarrow 0$ olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ için en az bir $\rho > 0$ vardır ve her n için

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^H$$

olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ ve her n için

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir.

$0 < |\lambda| < 1$ olsun. M_k nin konveksliğinden her n için

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{\lambda u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[|\lambda| M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^H \end{aligned}$$

elde edilir.

M_k fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli olduğu için

$$f_t = \sum_{k=1}^N k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{t u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

dir. 0 da süreklidir. Böylece $0 < t < \delta$ için $|f_t| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ vardır. K yı $i > K$ için $|\lambda_i| > \delta$ olacak şekilde seçelim. Bu taktirde $i > K$ ve her n için

$$\left(\sum_{k=1}^N k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{\lambda_i u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir.

$0 < \varepsilon < 1$ olduğundan her $i > K$ ve her n için

$$\left(\sum_{k=1}^N k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{\lambda_i u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} < 1$$

elde edilir. $\inf \left\{ \rho^{\frac{pm}{H}} \right\}$ üzerinden limit alınırsa $g(\lambda x) \rightarrow 0$ elde edilir.

Teorem 4. 3 $M = (M_k)$ ve $T = (T_k)$ Orlicz fonksiyonlarının birer dizisi q, q_1, q_2 bir yarınorm $s, s_1, s_2 \geq 0$ olsun. Bu taktirde

- i) $BV_\sigma(M, p, q, u, s) \cap BV_\sigma(T, p, q, u, s) \subseteq BV_\sigma(M + T, p, q, u, s)$
- ii) $BV_\sigma(M, p, q_1, u, s) \cap BV_\sigma(M, p, q_2, u, s) \subseteq BV_\sigma(M, p, q_1 + q_2, u, s)$
- iii) $s_1 \leq s_2$ iken $BV_\sigma(M, p, q, u, s_1) \subseteq BV_\sigma(M, p, q, u, s_2)$
- iv) q_1, q_2 den daha kuvvetli ve M_k, Δ_2 -şartını sağlayan Orlicz fonksiyonu ise $BV_\sigma(M, p, q_1, u, s) \subseteq BV_\sigma(M, p, q_2, u, s)$ dir.

İspat i) $x \in BV_\sigma(M, p, q, u, s) \cap BV_\sigma(T, p, q, u, s)$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
& \sum_k k^{-s} \left[(M_k + T_k) \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&= \sum_k k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) + T_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&\leq D \sum_k k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + D \sum_k k^{-s} \left[T_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $x \in BV_\sigma(M + T, p, q, u, s)$ elde edilir.

ii) $x \in BV_\sigma(M, p, q_1, u, s) \cap BV_\sigma(M, p, q_2, u, s)$ olsun. Bu taktirde $\rho = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ alınırsa, n' e göre düzgün olarak

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left((q_1 + q_2) \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) + q_2 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&\leq D \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k q_1 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + D \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k q_2 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \in BV_\sigma(M, p, q_1 + q_2, u, s)$ olduğunu göstermiş olur.

iii) $s_1 < s_2$ için $x \in BV_\sigma(M, p, q, u, s_1)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ için, n' e göre düzgün olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s_1} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

yazabiliriz. Bu taktirde n' e göre düzgün olarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s_1} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s_2} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv) $x \in BV_\sigma(M, p, q_1, u, s)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

dir. q_1, q_2 den daha kuvvetli ve M_k, Δ_2 - şartını sağlayan Orlicz fonksiyonu olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q_2 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq R_k \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde edilir. Böylece $BV_{\sigma}(M, p, q_1, u, s) \subseteq BV_{\sigma}(M, p, q_2, u, s)$ bulunur.

Teorem 4. 4 $0 < r_k \leq t_k$ ve $\left(\frac{t_k}{r_k}\right)$ sınırlı olsun. $r = (r_k)$ ve $t = (t_k)$ pozitif reel sayıların birer dizileri olmak üzere $BV_{\sigma}(M, r, q, u, s) \subseteq BV_{\sigma}(M, t, q, u, s)$ dir [16].

İspat $x \in BV_{\sigma}(M, r, q, u, s)$ olsun. Bu taktirde n e göre düzgün olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k} < \infty$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ mevcuttur. Bu da en az bir sabit $k_0 \in \mathbb{N}$ için $r_k \leq t_k$ olmak üzere yeterince büyük K için $k^{-s} \left[M_k \left(q_1 \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right] \leq 1$ olmasını gerektirir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $r_k \leq t_k$ olduğundan her $k \geq k_0$ için

$$k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{t_k} \leq k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{k \geq k_0}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{t_k} \leq \sum_{k \geq k_0}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k}$$

olur. Burada n' e göre düzgün olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{t_k} < \infty$$

bulunur ki bu da $x \in BV_{\sigma}(M, r, q, u, s)$ olması demektir.

Teorem 4. 5 i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ ise $BV_{\sigma}(M, p, q, u, s) \subseteq BV_{\sigma}(M, q, u, s)$ dir.

ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ ise $BV_{\sigma}(M, q, u, s) \subseteq BV_{\sigma}(M, p, q, u, s)$ dir [16].

İspat i) Teorem 4. 4 te her $k \in \mathbb{N}$ için $t_k = 1$ alınrsa teorem ispatlanmış olur.

ii) Teorem 4. 4 te her $k \in \mathbb{N}$ için $t_k = p_k$ ve $r_k = 1$ alınırsa teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4. 6 $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ dizi uzayı soliddir [16].

İspat $x \in BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ olsun. Yani n' e göre düzgün olarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

dir. $\alpha = (\alpha_k)$ skaler dizisi her $k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ şeklinde olsun. Bu taktirde ϕ lineer, q yarınorm ve her $k \in \mathbb{N}$ için M_k Orlicz fonksiyonu olduğundan n' e göre düzgün olarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{\alpha_k u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M_k \left(q \left(\frac{u_k \phi_{k,n}(x)}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki kısıtlamalar altında $x \in BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ iken $\alpha x \in BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ bulunur. Bu taktirde $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ dizi uzayı solid dizi uzayıdır.

Buradan $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ dizi uzayının, monoton olduğu söylenir.

KAYNAKLAR

- [1] **Bektaş, Ç. A.**, 2011. Generalized sequences on spaces seminormed spaces, *Acta Universitatis Apulensis*, **26**, 245-250.
- [2] **Et, M. and Çolak, R.**, 1995. On some generalized difference sequence spaces. *Soochow J. Math.*, **21**, 377-386.
- [3] **Et, M. and Esi, A.**, 2000. On Köthe-Toeplitz duals of generalized difference sequence spaces, *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, **23**, 1-8.
- [4] **Et, M. and Nuray, F.**, 2001. m-Statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32**, 961-969.
- [5] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, *Math. Z.*, **118**, 93-102.
- [6] **Kamthan, P.K. and Gupta, M.**, 1981. Sequence spaces and series, Marcel dekkar.
- [7] **Kızmaz, H.**, 1981. On certain sequence spaces, *Canad. Math. Bull.*, **24**, 169-176.
- [8] **Krasnoselskii, M. A. and Rutitsky, Y. B.**, 1961. Convex functions and Orlicz spaces, Groningen, Netherlands.
- [9] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
- [10] **Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.**, 1965. On Orlicz sequence spaces, *Israel Jour. Math.*, **10**, 379-390.
- [11] **Lorentz, G. G.**, 1948. A contribution the theory of divergnt series, *Acta Math*, **80**, 167-190.
- [12] **Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition, London and New York.
- [13] **Mursaleen, M.**, 1983. On some new invariant matrix methods of summability, *Quart.J.Math.*, Oxford, **34(2)**, 77-86.
- [14] **Schafer, R.**, 1972. Infinite matrices and invariant means, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**, 104-110.
- [15] **Wilansky, A.**, 1964. Functional Analisis, Blaisdell Publishing Comany, New York.

[16] Zeren, S. and Bektaş, Ç. A., 2013. The generalized sequence space $BV_\sigma(M, p, q, u, s)$ defined by a sequence of Orlicz functions, Palestine Journal of Mathematics, **2(1)**, 81-85.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2005 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat fakültesi, Matematik bölümüne yerleştim. 2009 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Fakültesi tezsiz yüksek lisans öğrenimime başladım. 2010 yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans öğrenimime başladım. Aynı yıl Bingöl'e matematik öğretmeni olarak atandım. 2012 yılında Elazığ'a tayin oldum. 2015 yılında Lise Müdür Yardımcısı görevine atandım ve halen bu görevi devam ettirmekteyim.

SEYRAN KARABULUT