

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARAMETREYE BAĞLI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ
İÇİN TERS NODAL PROBLEM

Emrah YILMAZ

Tez Yöneticisi
Yrd.Doç.Dr. Hikmet KOYUNBAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARAMETREYE BAĞLI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ
İÇİN TERS NODAL PROBLEM

Emrah YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, 11 / 01 / 2008 tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Hikmet KOYUNBAKAN

Üye: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

Üye: Yrd. Doç. Dr. Hikmet KOYUNBAKAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ

Bu tezin kabultü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun...../...../..... tarih ve..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Yurtiçi Yüksek Lisans burs desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' a teşekkürü borç bilirim.

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Etibar PENAHLI ve Yrd.Doç.Dr. Hikmet KOYUNBAKAN'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Emrah YILMAZ

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	I
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	II
SİMGELER LİSTESİ.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
1.BÖLÜM.....	1
Temel Tanım ve Teoremler.....	1
2.BÖLÜM.....	16
Sturm-Liouville Denklemleri için Ters Nodal Problem.....	16
3.BÖLÜM.....	46
Öz Değer Parametresine Bağlı Sturm-Liouville Problemi için Potansiyel Fonksiyonun Hesaplanması.....	46
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	57

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. İp üzerindeki gerilme kuvvetleri.....	9
Şekil 1.2. x parametrelî eğri	14

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n –boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$L_2[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında karesel integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
s	: Tüm sayı dizileri uzayı
$L^1[0, \pi]$	: $[0, \pi]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
Δ	: Fark operatörü
δ	: Fark bölüm operatörü
$q(x)$	: Potansiyel fonksiyon
λ_n	: n . özdeğer
x_i^n	: i . nodal nokta
l_i^n	: Ardışık iki nodal nokta arasındaki uzaklık
I_i^n	: Nodal bölge
C^N	: N . mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARAMETREYE BAĞLI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS NODAL PROBLEM

Emrah YILMAZ

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2008, Sayfa: 57

Bu tez üç bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, tez içerisinde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilerek, Sturm-Liouville operatörlerinin genel özellikleri ile bu operatörlerin özdeğer ve öz fonksiyonlarıyla ilgili bazı teorem ve lemmalar verilmiştir.

İkinci bölümde, Sturm-Liouville sınır değer problemindeki $q(x)$ potansiyel fonksiyonu ve bu fonksiyonun her mertebeden türevlerinin, öz fonksiyonların nodal noktaları yardımı ile hesaplanabileceği gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, öz değer parametresine bağlı Sturm-Liouville sınır değer problemindeki $q(x)$ potansiyel fonksiyonu ve bu fonksiyonun her mertebeden türevlerinin, öz fonksiyonların nodal noktaları yardımı ile hesaplanabileceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Sturm-Liouville denklemi, Prüfer Dönüşümü, Ters Nodal Problem.

ABSTRACT

Master's Thesis

INVERSE NODAL PROBLEM FOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR DEPENDING ON EIGEN PARAMETER

Emrah YILMAZ

Fırat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2008, Pages: 57

This thesis is arranged in four chapters.

In the first chapter, some basic concepts used in this thesis were demonstrated and general properties of Sturm-Liouville operators, some theorems and lemmas that are concerning eigenvalues and eigenfunctions of these operators were given.

In the second chapter, it has been shown that the potential function q and all its derivatives, as well as the boundary conditions of the Sturm-Liouville problem can be reconstructed by using nodal points of the eigenfunctions.

In the third chapter, it has been shown that the potential function q and all its derivatives, as well as the boundary conditions of the Sturm-Liouville problem depending on eigen parameter can be reconstructed by using nodal points of the eigenfunctions.

Key Words: Sturm-Liouville equation, Prüfer Substitution, Inverse nodal problem.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

TANIM 1.1. (Metrik Uzay) [1] X bir cümle olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. Bu özellikler $\forall x, y, z \in X$ için

M1) $d(x, y) \geq 0$

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şeklinde. (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. Bir uzay üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir.

ÖRNEK 1.1. $C[a, b]$, $J = [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay $x(t), y(t) \in C[a, b]$ olmak üzere hem

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

hem de

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

metriklerine göre bir metrik uzaydır.

ÖRNEK 1.2. $L_2[a, b]$ uzayının elemanları $x(t), y(t), \dots$ şeklinde $[a, b]$ kapalı aralığında ölçülebilir, kompleks değerli ve karesel integrallenebilen fonksiyonlardır. Yani $x(t) \in L_2[a, b]$ için

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$$

dir. Bu uzay; $\forall x(t), y(t) \in L_2[a, b]$ için

$$d(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan metriğe göre bir metrik uzaydır.

TANIM 1.2. (İntegral için Minkowski eşitsizliği) $f(x), g(x) \in L_p[a, b]$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğine integral için Minkowski eşitsizliği denir.

TANIM 1.3. (Yoğun cümle) [2] X metrik uzayının bir M alt cümlesi verildiğinde $\overline{M} = X$ oluyor ise, M cümlesi X de yoğundur denir. Burada $\overline{M}$, M nin kapanışı olarak adlandırılır. M nin kapanışı, M cümlesine yığılma noktalarının eklenmesi ile elde edilir. Örneğin $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$ de yoğundur.

TANIM 1.4. (Tam uzay) [2] Bir metrik uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l_∞ , c , l_p , $C[a, b]$ uzayları tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ uzayı tam değildir.

TANIM 1.5. (Normlu uzay) [2] X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir. Bu şartlar $\forall x, y \in X$ için

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|ax\| = |a| \|x\| \quad (\alpha \text{ skaler})$$

$$\mathbf{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şeklindedir.

ÖRNEK 1.3. $L_p[0, 1]$ uzayı $f(x) \in L_p[0, 1]$ olmak üzere

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

TANIM 1.6. (Sınır şartları) [3] Sınırlı bir D bölgesinde, fiziksel bir olayın matematiksel davranışını kontrol etmek istiyorsak, D bölgesinin sınırında, genellikle bağımlı değişkene bağlı bazı şartlar yüklememiz gerekir. Verilen bu sınır değerlerine diferansiyel denklem için sınır şartları denir. Sınır şartları 3'e ayrılır.

1) Dirichlet sınır şartı : Bu durumda u fonksiyonu sınırlı D bölgesinin sınırı üzerinde tanımlıdır. $D = (0, L)$ bölgesinde Dirichlet sınır şartları; $u(0) = a$, $u(L) = \beta$ şeklinde tanımlanır. Burada a, β sabittir. Bir dikdörtgensel bölgede $0 < x < L_1$ ve $0 < y < L_2$ olmak üzere Dirichlet sınır şartları; $u(0, y)$, $u(L_1, y)$, $u(x, 0)$ ve $u(x, L_2)$ olarak verilir. Eğer

bağımlı değişken olan u , sınırın herhangi bir noktasında sıfır ise bu sınır şartına homojen sınır şartı, aksi taktirde homojen olmayan sınır şartı denir.

2) Neumann sınır şartı : Bir L uzunluğu için, Neumann sınır şartları

$$u_x(0, t) = a, \quad u_x(L, t) = \beta$$

olarak tanımlanır.

3) Karışık (Robin) sınır şartı : Bu durumda u bağımlı değişkenin bir lineer kombinasyonu ve $\frac{du}{dn}$ normal türevi sınır üzerinde tanımlıdır. Eğer $u(0, y) + u_x(0, y)$ veya $u(L_1, y) + u_x(L_1, y)$ gibi şartlar varsa bu sınır şartları karışık (Robin) sınır şartlarıdır.

TANIM 1.7. (Başlangıç şartları) [3] Difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu zamana bağlıdır. Başlangıç zamanı olan $t = 0$ anında bağımlı değişkenin başlangıç değerleri verilmelidir. Birinci mertebeden bir diferansiyel denklemde başlangıç şartı $u(x, 0)$, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemde ise $u(x, 0)$ ve $u_t(x, 0)$ şeklindedir.

TANIM 1.8. (Operatör) [4] Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir.

ÖRNEK 1.4. [1] $C[a, b]$ den kendi içine olan ve

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b]$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü bir operatördür. Bu operatöre integral operatörü denir.

TANIM 1.9. (Lineer operatör) [5] E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y de bulunan ve E_x de tanımlı $y = Ax$ operatörünü göz önüne alalım. A operatörü için

$$1) \quad x_1, x_2 \in E_x \text{ olmak üzere } A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$2) \quad \lambda \text{ bir skaler olmak üzere } \forall x \in E_x \text{ için } A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir.

ÖRNEK 1.5. $K(t, s)$, $0 \leq t, s \leq 1$ sürekli bir fonksiyon, $x(s) \in C[0, 1]$ olmak üzere

$$y(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$$

eşitliği ile tanımlı $y = Ax$ operatörü bir lineer operatördür.

TANIM 1.10. (Hilbert uzayı) [5] Herhangi $x, y, z, \dots$ elemanlar cümlesini H ile gösterelim.

1) H lineer kompleks uzaydır.

2) H da bulunan her x, y eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen kompleks (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\text{a) } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\text{b) } \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\text{c) } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\text{d) } \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.

4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur. Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H uzayına soyut Hilbert uzayı veya kısaca Hilbert uzayı denir. Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

ÖRNEK 1.6. [5] $H = L_{2,\rho}[0, 1]$ bir Hilbert uzayıdır. $x(t) \in L_{2,\rho}[0, 1]$ ise, $\rho(t) > 0$ integrallenebilen, ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^1 \rho(t) |x(t)|^2 dt < \infty,$$

şeklinde olur. Bu uzayda iç çarpım $\forall x(t), y(t) \in L_{2,\rho}[0, 1]$ için

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 \rho(t) x(t) \overline{y(t)} dt$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK 1.7. [5] $H = L_2[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzayın elemanları $f(x), g(x), \dots$ şeklinde $[a, b]$ kapalı aralıkta ölçülebilir, kompleks değerli, karesel integralenebilen fonksiyonlardır. Bu uzayda iç çarpım ise $\forall f(x), g(x) \in L_2[a, b]$ için

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır.

TANIM 1.11. (O ve o sembolleri) [6,7] $x \in E$ olduğunda, verilen x ler için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $x \rightarrow x_0$ iken, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK 1.8. [7] $\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ dir. Çünkü $x \rightarrow \infty$ iken $\left(\frac{1}{x^2}\right) / \left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$ olur.

ÖRNEK 1.9. [7] $\sinh x = O(e^x)$ dir. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ olduğundan her iki tarafı e^x ile bölersek

$$\frac{\sinh x}{e^x} = \frac{e^x}{2e^x} - \frac{e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2x}}$$

olur. Buradan da $x \rightarrow \infty$ iken $\frac{\sinh x}{e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2x}} \rightarrow \frac{1}{2}$ olur. Yani $\left|\frac{\sinh x}{e^x}\right|$ sınırlıdır. Bu nedenle $\sinh x = O(e^x)$ olur.

TANIM 1.12. (Noktasal Yakınsaklık) [8] (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada her $x \in A$ için bir n_0 bulunacağından n_0 sayısı hem ε a hem de x noktasına bağlıdır.

TANIM 1.13. (Düzgün Yakınsaklık) [8] (f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir.

TANIM 1.14. (Süreklilik) [9] $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

TANIM 1.15. (Düzgün Süreklilik) [9] $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dir.

f fonksiyonu A cümlesi üzerinde sürekli olduğunda bulunacak olan δ sayısı hem ε , hem de A cümlesinde alınan x_0 noktasına bağlıdır. Halbuki düzgün sürekli olması için δ nın sadece ε sayısına bağlı olması gerekir. Dolayısıyla düzgün sürekli bir fonksiyon süreklidir, fakat bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

TANIM 1.16. (Taylor serisi) [8] f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta keyfi mertebeden türevlenebilir olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından türetilen Taylor serisi denir. Bu açılımda özel olarak $a = 0$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

serisi elde edilir ki bu seriye McLaurain serisi denir.

TEOREM 1.1. (Birinci Ortalama değer teoremi) [9] f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve g ile $f.g$ bu aralıkta integrallenebilir olsun. g , $[a, b]$ üzerinde her yerde aynı işaretli ve f sınırlı ise $[\inf f, \sup f]$ aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = k \int_a^b g(x)dx$$

dır. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ise $[a, b]$ aralığındaki en az bir x_0 noktası için

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(x_0) \int_a^b g(x)dx$$

olur. Özel olarak $\forall x \in [a, b]$ için $g(x) = 1$ alınırsa

$$k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

bulunur.

TEOREM 1.2. (Diferansiyel hesabın ortalama değer teoremi) [9] $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde, (a, b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

TEOREM 1.3. (Rolle teoremi) [9] $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ için türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

TEOREM 1.4. (Ara değer teoremi) [9] $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a, b]$ de $x_1 < x_2$ ve $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacak şekilde herhangi iki x_1, x_2 noktası verildiğinde f fonksiyonu (x_1, x_2) aralığında $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

TANIM 1.17. (Özdeğer, Özfonksiyon) [10] L sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu taktirde L operatörünün tanım kümesinde

$$Ly = \lambda y$$

olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir.

TANIM 1.18. (Sturm-Liouville operatörleri) [10]

$p(x), q(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denklemi

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda w(x)y,$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. $w(x)$ fonksiyonuna ağırlık veya yoğunluk fonksiyonu denir. Sınır şartlarını sağlayan yukarıdaki denklemin aşikar olmayan çözümleri için λ değerlerini bulmak, Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan problemin bir parçasıdır.

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda w(x)y,$$

denkleminde $w(x) = 1$ alırsak

$$Lu = \lambda u$$

özdeğer problemini elde ederiz.

Uygulamalarda sık sık kullanılan en temel operatörlerden birisi de $q(x)$ reel değerli ve $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

formundaki Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatör için $y(x)$ çözüm fonksiyonları cümlesi diferansiyellenebilir ve $[a, b]$ aralığının uç noktalarında verilmiş şartlarla belirlenir. L operatörü için en önemli sınır şartları

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

şeklindedir.

$$Ly \equiv -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \quad (1.1)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0 \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. (1.1)-(1.2) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir. (1.2) sınır şartını $\sin \alpha \neq 0$ ve $\sin \beta \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y(a) \cot \alpha + y'(a) &= 0 \\ y(b) \cot \beta + y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada $\cot \alpha = -h$ ve $\cot \beta = H$ denilirse

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) &= 0 \\ y'(b) + Hy(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

sınır şartları elde edilir. Eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli fonksiyon; H ve h sayıları da sonlu ise (1.1)-(1.4) problemine regüler Sturm-Liouville problemi, bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme singular Sturm-Liouville problemi denir. Şimdi bu problemin fiziksel anlamı ile ilgili bir örnek verelim.

ÖRNEK 1.10. (İp titreşimi) [11] Sturm-Liouville denklemi ses, titreşim ve su dalgası olmak üzere tüm dalga hareketleri ile ilgilidir. Diferansiyel denklemler teorisi, dalgaların meydana getirdiği ortalama hareketleri bilerek, dalgaların neye benzeyeceğini tahmin etmek için kullanılabilir. Dalga denklemlerinin birinci örneği titreşen ip denkleminden türer. Esnek bir ip, keman üzerindeki bir tel gibi bir yere bağlı ve asılı durumdadır. Sturm-Liouville denklemi ipin ard arda gelen hareketlerini tasvir eder. Sonuçlar ise niçin farklı uzunluk ve kalınlıktaki iplerin farklı sesler çıkardığına ilişkin teorik bir temel bilgi verir.

A) İp titreşiminin fiziksel özellikleri

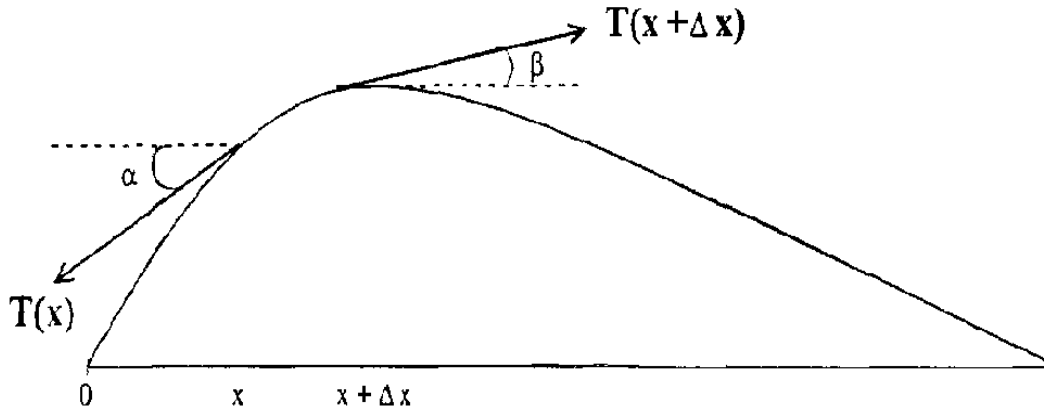
İki tip dalga vardır. Bunlar çarpraz ve boylamsal dalgalardır. Bu isimler, dalganın hareket ettiği yöne göre titreşimin yönünü verdiği için konulmuştur. Su dalgaları çarpraz dalga hareketini gösterir.

Titreşen ipin bir dalga hareketi x eksenini boyunca $u = u(x, t)$ fonksiyonu ile verilir. Farzedelim ki ip gergin olsun. t zamanına bağlı olan bu u fonksiyonu zamana bağlı olarak ipin şeklinin nasıl değiştiğini gösterir. Kabul edelim ki aşağıdaki fiziksel özellikler sağlansın.

- 1) İpin başlangıç ve bitiş noktaları $x = 0$ ve $x = L$ olsun.
- 2) İpteki biçim değiştirme küçüktür. Bu bize iki varsayım yapma fırsatı verir. a) İpteki gerilme kuvveti olan $T = T(x)$ herhangi özel bir bölgede aşırı gerilime neden olmayacak şekilde sabittir. b) Paralel konumdaki açı küçüktür.
- 3) İp sıfıra çok yakın bir kalınlığa sahiptir. Bu ise bizi çok ince bir ipe götürür. İpin içindeki gerilim ve bükülmenin, dalganın hareketi ile önemli bir ilişkisi yoktur.
- 4) İpin her birim uzunluğu ve her birim kütlesi aynı ρ yoğunluğuna sahiptir.
- 5) İp, uzunluğu boyunca esnektir ve yalnızca dikey olarak hareket eder.

B) İp titreşim modeli

İpin başlangıç şeklini $f(x) = u(x, 0)$ olarak verelim. Bu kuvvetlerin ipin küçük bir $[x, x + \Delta x]$ bölümünde etkili olduğunu kabul edelim. Ayrıca ip yukarı doğru yer değiştirsin. Bu durum Şekil 1.1 de görülmektedir.



Şekil 1.1.

Burada ip bükülmeye karşı dayanıklı olmadığından dolayı herhangi bir noktadaki kuvvet ip boyuncadır. İp yatay olarak hareket etmediğinden T_h ile gösterilen gerilme kuvvetinin yatay bileşeni sabit olmalıdır. Eğer $T_1 = T(x)$ ve $T_2(x) = T(x + \Delta x)$ olacak şekilde tanımlarsak

$$T_1 \cos a = T_2 \cos \beta = T_h \quad (1.5)$$

denklemini elde ederiz. Dikey yerde toplam kuvvet $-T_1 \sin a, T_2 \sin \beta$ dikey bileşiminin toplamıdır. Burada bulunan eksi işareti kuvvetin x ekseninden aşağıya doğru yöneldiğini gösterir. Newton'un ikinci hareket kanunundan

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin a = \rho \cdot \Delta x \cdot u_{tt}(x_0, t)$$

denklemini elde edilir. Eğer bu eşitlik T_h ile bölünür, (1.5) göz önüne alınırsa

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin a}{T_1 \cos a} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T_h} u_{tt}(x_0, t) \quad (1.6)$$

sonucu bulunur. $\tan a$ ve $\tan \beta$ sırası ile x ve $x + \Delta x$ noktalarındaki ipin eğimidir. Bu nedenle $\tan a$ ve $\tan \beta$ yerine

$$\tan a = u_x(x, t), \quad \tan \beta = u_x(x + \Delta x, t)$$

yazılır. Bu değerler (1.6) da yazılıp, bulunan ifade Δx e bölünürse

$$\frac{1}{\Delta x} (u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) = \frac{\rho}{T_h} u_{tt}(x_0, t)$$

olur. $\Delta x \rightarrow 0$ iken sol taraf u nun x e bağlı ikinci türevi olur. Burada sağ taraf x den bağımsızdır. Eğer $c^2 = \frac{T_h}{\rho}$ denilirse, T_h ve ρ pozitif sabitler olmak üzere

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx}$$

şeklinde bir boyutlu dalga denklemi elde edilir.

Denklemin her iki tarafı bağımsız değişkenlerin birer fonksiyonudur. Bu denklemin çözümünde değişkenlerine ayırma metodu kullanılır. $u(x, t) = y(x) \cdot s(t)$ olarak alınırsa y bileşeni için aşağıdaki Sturm-Liouville problemi elde edilir.

$$y'' - y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(L) = 0$$

Bu ise tüm katsayıların sabit olduğu, standart Sturm-Liouville probleminin özel durumudur.

TANIM 1.19. (Normlaştırıcı sayılar) [12]

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \quad (1.7)$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0,$$

Sturm-Liouville sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada, λ spektral parametre, h ve H reel sayılar, $q(x) \in L_2(0, \pi)$ dir. $\varphi(x, \lambda)$ ise

$$\varphi(0, \lambda) = 1 \quad \varphi'(0, \lambda) = h,$$

başlangıç şartları altında (1.7) in çözüm fonksiyonu olsun. $\varphi_n = \varphi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları için

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

eşitliği ile tanımlı α_n sayılarına normlaştırıcı sayılar denir.

TANIM 1.20. (Spektral fonksiyon) [10] H bir Hilbert uzayı olmak üzere, reel bir λ parametresine bağlı E_λ spektral fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

- 1) E_λ spektral fonksiyonu, λ nın her değeri için bir izdüşüm operatörüdür.
- 2) $\lambda < \mu$ ise $E_\lambda < E_\mu$ dir.
- 3) $\forall x \in H$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|E_\lambda\| = 0 \text{ ve } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|E_\lambda x - x\| = 0$$

şeklindedir.

- 4) $\forall x \in H$ için $E_\lambda x$ vektör fonksiyonu sağdan süreklidir. Yani

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|E_{\lambda+\varepsilon} x - E_\lambda x\| = 0$$

şeklindedir.

TANIM 1.21. (Rezolvent cümlesi, Spektrum) [5,10] T , H Hilbert uzayında yoğun olan bir cümlede tanımlı, kapalı lineer bir operatör olsun. T operatörünün rezolventi $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ şeklindeki λ parametrelili bir operatör olarak tanımlanır.

$X \neq \phi$ kompleks normlu uzayı ve $T : D(T) \rightarrow X$ lineer operatörü verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa λ ya T nin bir regüler değeri denir.

R1) $R_\lambda(T)$ mevcut R2) $R_\lambda(T)$ sınırlı R3) $R_\lambda(T)$ X de yoğun bir cümle de tanımlı

T nin $\rho(T)$ rezolvent cümlesi tüm λ regüler değerlerinin cümlesidir. Bu cümlemin tümleyeni $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ şeklinde olup, T nin spektrumu adını alır. Eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise λ , T nin spektrum değeri olur.

TEOREM 1.5. [10] (1.1)-(1.2) Sturm-Liouville sınır değer problemi için, λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $y(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldır. Yani

$$\int_0^{\pi} y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

şeklinde dir.

TEOREM 1.6. [10] (1.1)-(1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

TANIM 1.22. (Özfonksiyonların sıfırları-Nodal noktalar) [10]

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

problemini göz önüne alalım. Bu problemin $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 2^2, \dots, \lambda_n = n^2, \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları $\varphi_0(x) = \cos x, \varphi_1(x) = \cos 2x, \dots, \varphi_n(x) = \cos nx, \dots$ şeklindedir. Bu özfonksiyonların sıfırlarına nodal noktalar denir. Böylece özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar sıralanmış olur.

TEOREM 1.7. (I. Sturm karşılaştırma teoremi) [13] Eğer $\lambda_1 > \lambda_2$ ve $i \in \{1, 2\}$ için

$$-y_i'' + q(x)y_i = \lambda_i y_i$$

diferansiyel denkleminin aşık ar olmayan bir çözümü y_1 ise, y_1 in her ardışık x_0, x_1 gibi iki sıfırı için y_2 nin (x_0, x_1) aralığında tam olarak bir sıfırı bulunur.

TEOREM 1.8. (II. Sturm karşılaştırma teoremi) [10]

$$u'' + g(x)u = 0 \tag{I}$$

$$v'' + h(x)v = 0 \tag{II}$$

denklemleri verilsin. $u(x)$, (I) denkleminin $u(0) = \sin \alpha, u'(0) = -\cos \alpha$ şartlarını sağlayan çözümü ve $v(x)$ ise (II) denkleminin aynı şartları sağlayan çözümü olsun. Bunun yanında $[a, b]$ aralığında $g(x) < h(x)$ olsun. Eğer $u(x)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında m tane sıfıra sahipse aynı aralıkta $v(x)$ in sıfırlarının sayısı da m den az değildir.

TEOREM 1.9. (Osilasyon Teoremi) [10]

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y$$

$$y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$$

$$y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta = 0$$

Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğerlerinin artan bir dizisi $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ olsun. λ_m özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonun $a < x < b$ aralığında tam m tane sıfırı vardır.

TANIM 1.23. (Prüfer sistemi) [14] Bu yöntem, cebir alanında çalışan fakat Sturm-Liouville teorisi konusunda makaleleri olan Heinz Prüfer tarafından geliştirildi. Prüfer dönüşümü

$$\frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{du}{dx} \right) + Q(x)u = 0, \quad a < x < b \quad (1.8)$$

şeklindeki herhangi bir ikinci mertebeden diferansiyel denkleme uygulanabilir. $P(x) > 0$, $P'(x)$ ve $Q(x)$ sürekli fonksiyonlardır. Burada aşağıdaki soruların cevabı aranmaktadır.

1) Çözüm fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında kaç tane sıfırı vardır.

2) Çözüm fonksiyonunun herhangi ardışık iki sıfırı arasında kaç tane maksimum ve minimum vardır.

3) $P(x)$ ve $Q(x)$ den herhangi biri değiştiğinde bu sıfırlar ne olur.

Bu sorular üç adımda cevaplandırılacaktır.

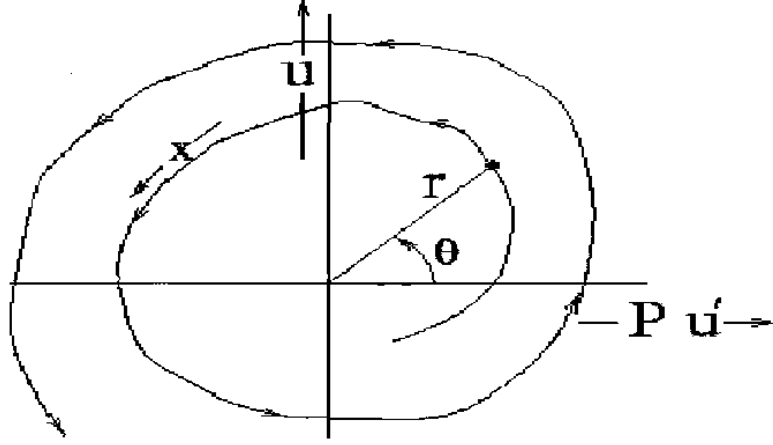
A) İlk olarak (1.8) denklemine

$$P(x)u'(x) = r(x) \cos \theta(x), \quad u(x) = r(x) \sin \theta(x)$$

şeklindeki Prüfer dönüşümünü uygulayalım. Bu ise

$$r^2 = u^2 + P^2(u')^2, \quad \theta = \arctan \frac{u}{Pu'}$$

formülleri ile verilen yeni r ve θ bağımlı değişkenleri verilerek yapılabilir. Diferansiyel denklemin bir çözümü x parametrelili bir eğri ile ifade edilir.



Şekil 1.2.

Burada Prüfer açısı ise şekildeki θ açısıdır. Genelliği bozmadan kabul edelim ki $u(x)$ reel olsun. Buna ilave olarak aşikar olmayan çözümler için $r > 0$ elde edilir. Çünkü $r(x) = 0$ ise bazı özel x değerleri için $u(x) = 0$, $u'(x) = 0$ olur. Bu durumda ikinci mertebeden lineer denklemler için teklik teoreminden $\forall x$ için $u(x) = 0$ aşikar çözümü elde edilir.

B) İkinci olarak (1.8) denkleminde eşdeğer olan birinci mertebeden bir denklem elde edilir. Bu iki adımda yapılır.

i)

$$\cot \theta = \frac{Pu'}{u}$$

bağıntısının türevi alınır

$$-\cos^2 \theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(Pu')'}{u} - \frac{Pu'}{u^2} u' = -Q - \frac{\cos^2 \theta}{P \sin^2 \theta}$$

ya da

$$\frac{d\theta}{dx} = Q(x) \sin^2 \theta + \frac{1}{P(x)} \cos^2 \theta = F(x, \theta) \quad (1.9)$$

elde edilir. Bu denklem θ ya bağlı Prüfer diferansiyel denklemi olarak adlandırılır.

ii) Eğer

$$r^2 = u^2 + P^2(u')^2$$

bağıntısının türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
r \frac{dr}{dx} &= u \cdot u' + (Pu') \cdot (Pu')' \\
&= \frac{u}{P} Pu' - Pu' Qu \\
&= \frac{r \sin \theta}{P} r \cos \theta - r \cos \theta Q r \sin \theta
\end{aligned}$$

ya da

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{P(x)} - Q(x) \right] r \sin 2\theta \quad (1.10)$$

elde edilir. Bu denklem, r ye bağlı Prüfer diferansiyel denklemi olarak adlandırılır.

C) Üçüncü adım ise (1.9) ve (1.10) Prüfer denklem sistemini çözmektir. Bunu yaparak (1.8) denkleminin çözümünü elde ederiz. Prüfer sisteminin herhangi bir çözümü (1.8) denkleminin bir tek çözümünü belirler. Şimdi bu yaptıklarımızın bir özetini verelim.

Sistemin açısı, sistemin doğal titreşimini karakterize etmenin en direkt yoludur. İkinci mertebeden bir denklem için $\theta(x)$ Prüfer açısı, birinci mertebeden bir denkleme dönüştür. Yani

$$\frac{d\theta}{dx} = Q(x) \sin^2 \theta(x) + \frac{1}{P(x)} \cos^2 \theta = F(x, \theta)$$

olur. Bu ise

$$P(x)u'(x) = r(x) \cos \theta(x), \quad u(x) = r(x) \sin \theta(x)$$

Prüfer dönüşümü yardımı ile

$$\left[\frac{d}{dx} P(x) \frac{d}{dx} + Q(x) \right] u(x) = 0$$

denkleminde elde edilir. Bu denklemin sıfırları ve $u(x)$ in titreşim davranışı, $\theta(x)$ açısı fonksiyonu ile kontrol edilir.

2. BÖLÜM

STURM-LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN TERS NODAL PROBLEM

Ters spektral problemler matematiksel fiziğin önemli bir araştırma konusudur. Spektral bilgileri kullanarak, diferansiyel denklemlerde bulunan katsayı fonksiyonlarını oluşturmak için çeşitli metodlar geliştirilmiştir.

TANIM 2.1. (Ters nodal problem) [15,16,17] Son yıllarda ters problemin farklı bir çözümü ortaya atılmıştır. Bu yeni problem ters nodal problem olarak adlandırılır. Ters nodal problem, ilk olarak 1988 yılında Gelfand ve Levitan'ın [18] klasik ters spektral teorisinden farklı olarak J.R. McLaughlin tarafından tanımlandı. McLaughlin, yalnızca nodal noktaların Sturm-Liouville sınır değer problemindeki $q(x)$ potansiyelini belirlemede yeterli olduğunu göstermiştir. C.F. Yang [19], bu sonucun her $q \in L_1(0,1)$ için geçerli olduğunu gösterdi.

$0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \\ y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Sturm-Liouville sınır değer problemini ele alalım.

$\lambda_n, n = \overline{1, \infty}$ n . özdeğer, $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ ve $x_i^{(n)}$, n . öz fonksiyon olan y_n e karşılık gelen i . nodal nokta olsun. Başka bir ifade ile $y_n(x_i^{(n)}, \lambda_n) = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ olsun. y_n özfonksiyonu $n \in N$ için $(0,1)$ aralığında $(n-1)$ tane nodal noktaya sahiptir. Bu nodal noktalar; $0 < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n)} < 1$ şeklindedir. $I_i^{(n)} = (x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)})$ olsun. Bu durumda; $l_i^{(n)} = |I_i^{(n)}| = x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}$ nodal uzunluk olur.

Lemma 2.1. [13] (2.1), (2.2) problemi için eğer q fonksiyonu sürekli ise, $x_i^{(n)}$ nodal noktaları

$$\frac{i\pi - \nu_m}{\sqrt{\lambda_n - q_m}} \leq x_i^{(n)} \leq \frac{i\pi - \nu_M}{\sqrt{\lambda_n - q_M}} \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$q_m = \min_{[0,1]} q(x), \quad q_M = \max_{[0,1]} q(x),$$

ve

$$\nu_m = \cot^{-1} \left(\frac{-\cot \alpha}{\sqrt{\lambda_n - q_m}} \right), \quad \nu_M = \cot^{-1} \left(\frac{-\cot \alpha}{\sqrt{\lambda_n - q_M}} \right)$$

şeklindedir.

Lemma 2.2. [13] q_m ve q_M sırası ile q potansiyel fonksiyonunun $I_i^{(n)}$ nodal bölgesindeki minimum ve maksimum değerleri olsun. Bu durumda (2.1) Sturm Liouville denklemi için λ_n , n . öz değer olmak üzere

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n - q_m}} \leq l_i^{(n)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n - q_M}} \quad (2.4)$$

elde edilir. Buradan ise

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{q_m}{\lambda_n}}} \leq \sqrt{\lambda_n} l_i^{(n)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{q_M}{\lambda_n}}}$$

şeklinde olur.

İspat: (2.3) eşitsizliği $i + 1$ için yazılırsa

$$\frac{(i+1)\pi - \nu_m}{\sqrt{\lambda_n - q_m}} \leq x_{i+1}^{(n)} \leq \frac{(i+1)\pi - \nu_M}{\sqrt{\lambda_n - q_M}} \quad (2.5)$$

olur. Burada (2.5) ve (2.3) ü taraf tarafa çıkarır, $l_i^{(n)}$ tanımı göz önüne alınırsa

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n - q_m}} \leq l_i^{(n)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n - q_M}} \quad (2.6)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{q_m}{\lambda_n}}} \leq \sqrt{\lambda_n} l_i^{(n)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{q_M}{\lambda_n}}}$$

olur.

Önerme 2.1. [13] Eğer q potansiyel fonksiyonu sürekli ise

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda_n} l_i^{(n)} = \pi \text{ ve } l_i^{(n)} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$(b) l_{i+k}^{(n)} / l_{i+m}^{(n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right); k, m \in N$$

$$(c) q_m \leq \lambda_n - \frac{\pi^2}{(l_i^{(n)})^2} \leq q_M$$

dir.

İspat:

(a) Lemma 2.2 de $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\pi \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda_n} l_i^{(n)} \leq \pi$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda_n} l_i^{(n)} = \pi$$

olur. Diğer taraftan

$$x_i^{(n)} = \frac{i}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.7)$$

ve

$$x_{i+1}^{(n)} = \frac{i+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.8)$$

olduğundan

$$l_i^{(n)} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

bulunur.

(b) $l_i^{(n)} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ olduğu bilindiğine göre $k, m \in N$ olmak üzere bu ifadeden

$$l_{i+k}^{(n)} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ ve } l_{i+m}^{(n)} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olacak şekilde $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l_{i+k}^{(n)}}{l_{i+m}^{(n)}} \right) = 1$$

olur.

(c) (2.4) eşitsizliği tekrar göz önüne alınırsa

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n - q_m}} \leq l_i^{(n)} \quad (2.9)$$

$$l_i^{(n)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n - q_M}} \quad (2.10)$$

olur. (2.9) dan

$$q_m \leq \lambda_n - \frac{\pi^2}{(l_i^{(n)})^2} \quad (2.11)$$

ve (2.10) dan

$$\lambda_n - \frac{\pi^2}{(l_i^{(n)})^2} \leq q_M \quad (2.12)$$

olur. (2.11) ve (2.12) eşitsizliklerinden

$$q_m \leq \lambda_n - \frac{\pi^2}{(l_i^{(n)})^2} \leq q_M$$

olur. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Kabul edelim ki $j_n(x)$ fonksiyonu $j_n(x) = \max\{i : 0 < x_i^{(n)} \leq x\}$ olarak tanımlansın. $j = j_n(x)$ olması $x \in I_i^{(n)}$ olmasını gerektirir. Şimdi ise ileride kullanacağımız Δ fark operatörünü ve δ fark bölüm operatörünü kısaca ifade edelim. Δ operatörü

$$\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $k > 1$ için

$$\Delta^k a_i = \Delta^{k-1} a_{i+1} - \Delta^{k-1} a_i$$

olur. δ operatörü ise

$$\delta a_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta a_i}{l_i}$$

ve $k > 1$ olmak üzere

$$\delta^k a_i = \frac{\delta^{k-1} a_{i+1} - \delta^{k-1} a_i}{l_i}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. [13] Kabul edelim ki (2.1) için $q \in C^{N+1}[0, 1]$ ve $N \geq 1$ olsun. Ayrıca $\forall x \in (0, 1)$ için $j = j_n(x)$ olsun. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ iken

$$q(x) = 2\lambda_n \left(\frac{\sqrt{\lambda_n} l_j^{(n)}}{\pi} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.13)$$

ve $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$q^{(k)}(x) = \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \delta^k l_j^{(n)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.14)$$

olur.

İspat: (2.13) ün sağlandığı açıktır. (2.14) için kabul edelim ki q potansiyel fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli türevlenebilir olsun. Böylece (2.4) e ortalama değer teoremi uygulanırsa; öyle bir $\xi_j^{(n)} \in (x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)})$ elemanı vardır ki

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} l_j^{(n)} = \left(1 - \frac{q(\xi_j^{(n)})}{\lambda_n} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{q(\xi_j^{(n)})}{2\lambda_n} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) \quad (2.15)$$

olur. Buradan

$$2\lambda_n \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} l_j^{(n)} - 1 \right) = q(\xi_j^{(n)}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir. Ara değer teoreminden yeteri kadar büyük n ler için

$$\begin{aligned} 2\lambda_n \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} l_j^{(n)} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) &= q(\xi_j^{(n)}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ q(x) = q(\xi_j^{(n)}) + O\left(\frac{1}{n}\right) &\Rightarrow q^{(k)}(x) = q^{(k)}(\xi_j^{(n)}) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

bulunur.

Lemma 2.3. Eğer $q \in C^N[0, 1]$ ise bu durumda $k = 1, 2, \dots, N$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\Delta^k l_j = O(n^{-(k+3)})$ olur.

İspat: Önerme (2.1) den her bir n için $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$ olacak şekilde sonlu bir (ξ_j) dizisi vardır öyle ki

$$q(\xi_j) = \lambda_n - \frac{\pi^2}{l_j^2}$$

olur. Bu ifadeye Δ fark operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Delta q(\xi_j) &= \Delta \left(\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_j^2} \right) \\ &= -\pi^2 \left(\frac{1}{l_{j+1}^2} - \frac{1}{l_j^2} \right) \\ &= \pi^2 \frac{\Delta l_j (l_j + l_{j+1})}{l_j^2 l_{j+1}^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

bulunur. Ara değer teoreminden $\Delta q(\xi_j) = O(\frac{1}{n})$ olur. Aynı sebepten $\Delta^k q(x_j) = O(l_j^{(k)}) = O(n^{-k})$ şeklindedir. Gerçekten

$$l_j^{(n)} = l_j = O(\frac{1}{n}) \Rightarrow l_j^{(k)} = O(n^{-k})$$

dir. Böylece $\Delta l_j = O(n^{-4})$ olur. Gerçekten (2.17) den

$$\Delta l_j = \frac{\Delta q(\xi_j) l_j^2 l_{j+1}^2}{\pi^2 (l_j + l_{j+1})}$$

olur. Eğer burada $\Delta q(\xi_j) = O(n^{-1})$, $l_j^2 l_{j+1}^2 = O(n^{-4})$, $(l_j + l_{j+1}) = O(n^{-1})$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Delta l_j = \frac{\Delta q(\xi_j) l_j^2 l_{j+1}^2}{\pi^2 (l_j + l_{j+1})} = \frac{O(n^{-1}) O(n^{-4})}{\pi^2 O(n^{-1})} = O(n^{-4})$$

elde edilir. Böylece Lemma $k = 1$ için sağlanmış olur.

Diğer taraftan

$$\Delta q(\xi_j) = \pi^2 \frac{\Delta l_j (l_j + l_{j+1})}{l_j^2 l_{j+1}^2} = \pi^2 \left(\frac{\Delta l_j}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right)$$

olduğundan

$$\Delta^2 q(\xi_j) = \pi^2 \Delta \left(\frac{\Delta l_j}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right) \quad (2.18)$$

olur. $\Delta(a_j b_j) = b_j \Delta a_j + a_{j+1} \Delta b_j$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \Delta^2 q(\xi_j) &= \pi^2 \Delta \left(\frac{\Delta l_j}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right) \\ &= \pi^2 \left[\Delta^2 l_j \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) + \Delta l_{j+1} \Delta \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. $\Delta^k q(\xi_j) = O(n^{-k})$ olduğundan $\Delta^2 q(\xi_j) = O(n^{-2})$ olur. (2.19) dan

$$R_{2,j} = \Delta l_{j+1} \Delta \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right)$$

olarak alınır

$$R_{2,j} = \frac{-\Delta l_{j+1} [l_{j+2} \Delta l_{j+1} + l_{j+1} (\Delta l_j + \Delta l_{j+1})]}{l_j l_{j+1}^2 l_{j+2}^2} - \frac{\Delta l_{j+1} [l_{j+1} \Delta l_{j+1} + \Delta l_j (l_j + l_{j+1})]}{l_j^2 l_{j+1}^2 l_{j+2}} \quad (2.20)$$

elde edilir. Gerçekten (2.20) den

$$\begin{aligned} R_{2,j} &= \frac{-\Delta l_{j+1} [l_{j+2} (l_{j+2} - l_{j+1}) + l_{j+1} (l_{j+1} - l_j + l_{j+2} - l_{j+1})]}{l_j l_{j+1}^2 l_{j+2}^2} \\ &\quad - \frac{\Delta l_{j+1} [l_{j+1} (l_{j+2} - l_{j+1}) + (l_{j+1} - l_j) (l_j + l_{j+1})]}{l_j^2 l_{j+1}^2 l_{j+2}} \\ R_{2,j} &= -\Delta l_{j+1} \left[\frac{l_{j+2}^2 - l_{j+2} l_{j+1} - l_{j+1} l_j + l_{j+1} l_{j+2}}{l_j l_{j+1}^2 l_{j+2}^2} + \frac{l_{j+1} l_{j+2} - l_{j+1}^2 + l_{j+1} l_j + l_{j+1}^2 - l_j^2 - l_j l_{j+1}}{l_j^2 l_{j+1}^2 l_{j+2}} \right] \\ R_{2,j} &= -\Delta l_{j+1} \left[\frac{l_{j+2}^2 - l_{j+1} l_j}{l_j l_{j+1}^2 l_{j+2}^2} + \frac{l_{j+1} l_{j+2} - l_j^2}{l_j^2 l_{j+1}^2 l_{j+2}} \right] = -\Delta l_{j+1} \left[\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} - \frac{1}{l_{j+1} l_{j+2}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} - \frac{1}{l_{j+1}^2 l_{j+2}} \right] \\ R_{2,j} &= \Delta l_{j+1} \left[-\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_{j+1} l_{j+2}^2} - \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} + \frac{1}{l_{j+1}^2 l_{j+2}} \right] = \Delta l_{j+1} \Delta \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Eğer (2.20) de $\Delta l_{j+1} = O(n^{-4})$, $\Delta l_j = O(n^{-4})$, $l_j = l_{j+1} = l_{j+2} = O(n^{-1})$ olduğu göz önüne alınır

$$R_{2,j} = - \left(\frac{O(n^{-4}) O(n^{-5})}{O(n^{-5})} + \frac{O(n^{-4}) O(n^{-5})}{O(n^{-5})} \right) = O(n^{-4})$$

bulunur. Bu değer (2.19) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \pi^2 \Delta^2 l_j \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right) &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \\ \pi^2 \Delta^2 l_j \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\Delta^2 l_j = O(n^{-5})$$

elde edilir. Şimdi ise Δ fark operatörünün lineerlik özelliğini kullanarak $\Delta^k l_j$ nin eşitini bulalım. $0 \leq s \leq k$, $1 \leq \mu \leq k$ ve $\varphi_{j,i,p}$ lerden herbiri l_{j+s} , l_{j+s}^{-1} , $\Delta^\mu l_{j+s}$ den biri ve $c_{j,i} \in \mathbb{R}$, $\phi_{j,i} = c_{j,i} \varphi_{j,i,1} \dots \varphi_{j,i,k}$ olacak şekilde

$$\Delta^k q(\xi_j) = \pi^2 \Delta^k l_j \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) + \sum_{i=1}^m \phi_{j,i}$$

yazılır. Farzedelim ki $1 \leq v \leq k$ olmak üzere her $\phi_{j,i} = O(n^{-(v+2)})$ için $\Delta^v l_j = O(n^{-(v+3)})$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} q(\xi_j) &= \pi^2 \Delta^{k+1} l_j \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) - \frac{\pi^2 \Delta^k l_{j+1} [l_{j+2} \Delta l_{j+1} + l_{j+1} (\Delta l_j + \Delta l_{j+1})]}{l_j l_{j+1}^2 l_{j+2}^2} \\ &\quad - \frac{\pi^2 \Delta^k l_{j+1} [l_{j+1} \Delta l_{j+1} + \Delta l_j (l_j + l_{j+1})]}{l_j^2 l_{j+1}^2 l_{j+2}} + \sum_{i=1}^m \Delta \phi_{j,i} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

olur. Yukarıda $1 \leq v \leq k$ olduğundan $v = k$ olarak alabiliriz. Bu durumda $\phi_{j,i} = O(n^{-(k+2)})$ için $\Delta^v l_j = O(n^{-(k+3)})$ olur. (2.21) ifadesinin ilk iki terimindeki Δ^k operatörleri $O(n^{-(k+3)})$ mertebesinde. Bu durumda

$$\Delta \phi_{j,i} = \sum_{s=1}^{k_i} \Delta \varphi_{j,i,p} \cdot \prod_{t=1, t \neq p}^{k_i} \psi_{j,i,t}$$

ve $\psi_{j,i,t} = \varphi_{j,i,t}$ veya $\varphi_{j+1,i,t}$ olduğundan $\Delta \phi_{j,i} = O(n^{-(k+3)})$ olur. Böylece (2.21) den

$$\begin{aligned} &\pi^2 \Delta^{k+1} l_j \left(\frac{1}{l_j l_{j+1}^2} + \frac{1}{l_j^2 l_{j+1}} \right) - \left(\frac{O(n^{-(k+3)}) O(n^{-5})}{O(n^{-5})} \right) - \left(\frac{O(n^{-(k+3)}) O(n^{-5})}{O(n^{-5})} \right) + O(n^{-(k+3)}) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\pi^2 \Delta^{k+1} l_j O(n^3) + O(n^{-(k+3)}) = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \Rightarrow \Delta^{k+1} l_j = O(n^{-(k+4)})$$

elde edilir. Böylece Lemma ispatlanmış olur.

$n, j \in N$ olmak üzere

$$U_j^{(n)} = \{l_{j+s}, l_{j+s}^{-1}, \Delta^\mu l_{j+s}^{(n)}, \Delta^\mu f_{j+s}^{(n)} : s, \mu \in Z^+\}$$

olsun. f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında tanımlıdır.

Lemma 2.4. [13] $\varphi_{j,i,p} \in U_j^{(n)}$ olmak üzere her bir $\phi_{j,i} = \prod_{p=1}^{k_i} \varphi_{j,i,p}$ ile $\Phi_j = \sum_{i=1}^m \phi_{j,i}$ olsun. Ayrıca $\Phi_j = O(n^{-v})$ ve q yeterince düzgün olsun. Bu durumda her $k \in N$ için $\delta^k \Phi_j = O(n^{-v})$ dir.

İspat: Lemma 2.3 ün ispatında $\varphi_{j,i,p}$ terimi l_{j+s}, l_{j+s}^{-1} ya da $\Delta^\mu l_{j+s}^{(n)}$ şeklinde olur. Ayrıca yukarıdaki lemmadan $\phi_{j,i} = O(n^{-(v+2)})$ iken $\Delta \phi_{j,i} = O(n^{-(v+3)})$ olur. O halde $v+2$ yerine v alırsak $\phi_{j,i} = O(n^{-v})$ olmak üzere $\Delta \phi_{j,i} = O(n^{-(v+1)})$ olur. Bu ifade negatif olmayan μ tamsayısı için

$$\varphi_{j,i,p} = \Delta^\mu f(x_{j+s})$$

eşitliğinde de geçerlidir. O halde

$$\delta\Phi_j = \frac{\Delta\Phi_j}{l_j} = O(n^{-v})$$

olur. Daha sonra tümevarımı devam ettirirsek

$$\delta^k\Phi_j = O(n^{-v})$$

elde edilir. Burada $\Phi_j = \sum_{i=1}^m \phi_{j,i}$ olduğundan $\Phi_j = O(n^{-v}) \Rightarrow \Delta\Phi_j = O(n^{-(v+1)})$ olur.

Lemma 2.5. [13] Farzedelim ki $f \in C^N[0, 1]$ ve

$$\Phi_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx$$

olsun. Bu durumda her $k = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\delta^k\Phi_j = O(n^{-1})$ olur.

İspat: İlk olarak birinci ortalama değer teoreminden $\delta^0\Phi_j = \Phi_j = O(n^{-1})$ olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \\ k.l_j &= \Phi_j \\ \Phi_j &= O(n^{-1}) \end{aligned}$$

olur. Şimdi ise $x > x_j$ olmak üzere $f(x)$ in Taylor seri açılımını göz önüne alalım. Bu açılmıdan, $\xi \in (x_j, x)$ olmak üzere

$$f(x) = f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + \dots + \frac{f^{(N-1)}(x_j)}{(N-1)!}(x - x_j)^{N-1} + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(x - x_j)^N \quad (2.22)$$

elde edilir. Böylece öyle $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$ ve $\eta_j \in (x_j, x_{j+2})$ elemanları vardır ki Φ_j nin tanımından

$$\delta\Phi_j = \frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{l_j} = \frac{1}{l_j} \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} f(x)dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \right) \quad (2.23)$$

olur. (2.22) ifadesi (2.23) te yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta\Phi_j &= \frac{1}{l_j} \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \left(f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + \dots + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(x - x_j)^N \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + \dots + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(x - x_j)^N \right) dx \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

elde edilir. (2.24) ün sağındaki terimler hesaplanırsa

1. Terim.

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} f(x_j) dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x_j) dx &= f(x_j) \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} dx \right) \\
&= f(x_j) (x_{j+2} - x_{j+1} - (x_{j+1} - x_j)) \\
&= f(x_j) \Delta l_j,
\end{aligned}$$

2. Terim.

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} f'(x_j)(x - x_j) dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x_j)(x - x_j) dx &= f'(x_j) \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} (x - x_j) dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j) dx \right) \\
&= f'(x_j) \left(\frac{(x - x_j)^2}{2!} \Big|_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} - \frac{(x - x_j)^2}{2!} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \right) \\
&= f'(x_j) \left(\frac{(x_{j+2} - x_j)^2}{2!} - \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + \frac{(x_j - x_j)^2}{2!} \right) \\
&= \frac{f'(x_j)}{2!} ((x_{j+2} - x_j)^2 - 2(x_{j+1} - x_j)^2) \\
&= \frac{f'(x_j)}{2!} ((l_j + l_{j+1})^2 - 2l_j^2)
\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse N . terim

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \frac{f^{(N-1)}(x_j)}{(N-1)!} (x - x_j)^{N-1} dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f^{(N-1)}(x_j)}{(N-1)!} (x - x_j)^{N-1} dx \\
&= \frac{f^{(N-1)}(x_j)}{(N-1)!} \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} (x - x_j)^{N-1} dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)^{N-1} dx \right) \\
&= \frac{f^{(N-1)}(x_j)}{N!} ((x_{j+2} - x_j)^N - 2(x_{j+1} - x_j)^N) \\
&= \frac{f^{(N-1)}(x_j)}{N!} ((l_j + l_{j+1})^N - 2l_j^N)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Son terim ise

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} (x - x_j)^N dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} (x - x_j)^N dx \\
&= \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \left(\int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} (x - x_j)^N dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)^N dx \right) \\
&= \frac{f^{(N)}(\mu_j)}{(N+1)!} ((l_j + l_{j+1})^{N+1} - l_j^{N+1}) - \frac{f^{(N)}(\xi)}{(N+1)!} l_j^{N+1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler (2.24) te yerine yazılırsa

$$\delta\Phi_j = \frac{1}{l_j} \left\{ f(x_j)\Delta l_j + \frac{f'(x_j)}{2!} ((l_j + l_{j+1})^2 - 2l_j^2) + \dots + \frac{f^{(N-1)}(x_j)}{N!} ((l_j + l_{j+1})^N - 2l_j^N) + \frac{f^{(N)}(\mu_j)}{(N+1)!} ((l_j + l_{j+1})^{N+1} - l_j^{N+1}) - \frac{f^{(N)}(\xi)}{(N+1)!} l_j^{N+1} \right\}$$

olmak üzere

$$\delta\Phi_j = \sum_{p=1}^{N-1} f^{(p)}(x_j)\phi_{j,p} + O\left(\frac{1}{n^N}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.25)$$

elde edilir. $\forall p$ için $f^{(p)}(x_j) = O(1)$ ve $\phi_{j,p} = O(n^{-p})$ olduğundan

$$\delta\Phi_j = f'(x_j)\phi_{j,1} + \dots + f^{(N-1)}(x_j)\phi_{j,N-1} + O\left(\frac{1}{n^N}\right), (N \geq 1)$$

$$\delta\Phi_j = O\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + O\left(\frac{1}{n^{N-1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^N}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Diğer taraftan

$$\phi_{j,p} = \frac{[(l_j + l_{j+1})^{p+1} - 2l_j^{p+1}]}{(p+1)!l_j} = O(n^{-p})$$

olur. Ayrıca

$$\frac{1}{l_j} \left[f(x_j)\Delta l_j + \frac{f^{(N)}(x_j)}{(N+1)!} ((l_j + l_{j+1})^{N+1} - l_j^{N+1}) - \frac{f^{(N)}(\xi_J)}{(N+1)!} l_j^{N+1} \right] = O\left(\frac{1}{n^N}\right) \quad (2.26)$$

olmalıdır. Gerçekten

$$l_j^{(n)} = O(n^{-1}), \Delta l_j = O(n^{-4}), f(x_j) = O(1), f^{(N)}(\mu_j) = O(1),$$

$$((l_j + l_{j+1})^{N+1} - l_j^{N+1}) = O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right), f^{(N)}(\xi_j) = O(1), l_j^{N+1} = O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right)$$

olmak üzere eğer bu ifadeler (2.26) da yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_j} \left[f(x_j)\Delta l_j + \frac{f^{(N)}(x_j)}{(N+1)!} ((l_j + l_{j+1})^{N+1} - l_j^{N+1}) - \frac{f^{(N)}(\xi_J)}{(N+1)!} l_j^{N+1} \right] \\ &= \frac{1}{l_j} \left[O(n^{-4}) + O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) - O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \right] \\ &= O\left(\frac{1}{n^N}\right) \end{aligned}$$

olur. Burada $\delta f^{(p)}(x_j) = O(1)$ olduğundan

$$\delta f^{(p)}(x_j) = \frac{\Delta f^{(p)}(x_j)}{l_j} = O(1) \Rightarrow f^{(p)}(x_j) = O(1)$$

olur. (2.25) e δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\delta\Phi_j &= \sum_{p=1}^{N-1} f^{(p)}(x_j)\phi_{j,p} + O\left(\frac{1}{n^N}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \delta^2\Phi_j &= \sum_{p=1}^{N-1} \delta \left[f^{(p)}(x_j)\phi_{j,p} \right] + \delta O\left(\frac{1}{n^N}\right)\end{aligned}\quad (2.27)$$

olur. (2.27) de

$$\delta \left[f^{(p)}(x_j)\phi_{j,p} \right] = \phi_{j+1,p}\delta f^{(p)}(x_j) + f^{(p)}(x_j)\delta\phi_{j,p}$$

olduğu göz önüne alınır

$$\begin{aligned}\delta^2\Phi_j &= \sum_{p=1}^{N-1} \left[\phi_{j+1,p}\delta f^{(p)}(x_j) + f^{(p)}(x_j)\delta\phi_{j,p} \right] + \delta O\left(\frac{1}{n^N}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{N-1} \left[\phi_{j+1,p}\delta f^{(p)}(x_j) + f^{(p)}(x_j)\delta\phi_{j,p} \right] + O\left(\frac{1}{n^{N-1}}\right)\end{aligned}\quad (2.28)$$

elde edilir. Burada

$$\delta f^{(p)}(x_j) = O(1), f^{(p)}(x_j) = O(1), \phi_{j+1,p} = O(n^{-p}), \delta\phi_{j,p} = \frac{\Delta\phi_{j,p}}{l_j} = \frac{O(n^{-(p+1)})}{O(n^{-1})} = O(n^{-p})$$

olduğundan

$$\delta^2\Phi_j = \sum_{p=1}^{N-1} \left[O(n^{-p})O(1) + O(n^{-p})O(1) \right] + O\left(\frac{1}{n^{N-1}}\right), N \geq 2$$

olur.

$$\sum_{p=1}^{N-1} O(n^{-p}) = O(n^{-1}) + O(n^{-2}) + \dots + O(n^{-(N-1)}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan

$$\delta^2\Phi_j = O\left(\frac{1}{n}\right)\quad (2.29)$$

olarak elde edilir. Böylece tümevarımdan $k = 0, 1, \dots, N$ için

$$\delta^k\Phi_j = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. Burada

$$\delta^s f^{(p)}(x_j) = \begin{cases} O(1), & s \leq N-p \\ O(n^{(s-N+p)}), & s > N-p \end{cases}$$

şeklindedir.

TEOREM 2.2. [13] Kabul edelim ki $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\psi_i(x_j) = x_{j+k_i}$ olmak üzere $\Phi_m(x_j) = \psi_1(x_j)\psi_2(x_j)\dots\psi_m(x_j)$ olsun. Bu durumda $[0, 1]$ aralığında $q \in C^k$ olsun. Yani q fonksiyonu k . mertebeden sürekli türevlere sahip ise

$$\delta^k \Phi_m(x_j) = \begin{cases} O(1), & 0 \leq k \leq m-1 \\ m! + O(n^{-1}), & k = m \\ O(n^{-2}), & k \geq m+1 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: İspat için m ye göre tümevarım metodu kullanılacaktır. Kabul edelim ki $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\psi(x_j) = x_{j+p}$$

olsun. Bu durumda $\psi(x_j) = O(1)$ olur. Gerçekten

$$\psi(x_j) = x_{j+p} = \frac{j+p}{n} + O(n^{-2}) = O(n^{-1})$$

olmak üzere x_j nin tanımı gereği $n = 1$ için $\psi(x_j) = O(1)$ olur. Buradan ise

$$\delta\psi(x_j) = \frac{x_{j+p+1} - x_{j+p}}{l_j}$$

olur. Önerme (2.1) den

$$\delta\psi(x_j) = \frac{x_{j+p+1} - x_{j+p}}{l_j} = 1 + O(n^{-1})$$

olarak elde edilir. Şimdi ise $\delta^2\psi(x_j)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \delta^2\psi(x_j) &= \frac{\delta\psi(x_{j+1}) - \delta\psi(x_j)}{l_j} \\ &= \frac{-l_{j+p+1}\Delta l_j + l_{j+1}\Delta l_{j+p}}{l_j^2 l_{j+1}} \\ &= O(n^{-2}) \end{aligned} \tag{2.30}$$

olarak elde edilir. (2.30) un gerçekten sağlandığını gösterelim. Bu ifade deki ilk eşitlikten

$$\begin{aligned} \frac{\delta\psi(x_{j+1}) - \delta\psi(x_j)}{l_j} &= \frac{\left(\frac{\psi(x_{j+2}) - \psi(x_{j+1})}{l_{j+1}} - \frac{\psi(x_{j+1}) - \psi(x_j)}{l_j} \right)}{l_j} \\ &= \frac{l_j l_{j+p+1} - l_{j+p} l_{j+1}}{l_j^2 l_{j+1}} \end{aligned} \tag{2.31}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{-l_{j+p+1}\Delta l_j + l_{j+1}\Delta l_{j+p}}{l_j^2 l_{j+1}} &= \frac{-l_{j+p+1}(l_{j+1} - l_j) + l_{j+1}(l_{j+p+1} - l_{j+p})}{l_j^2 l_{j+1}} \\ &= \frac{l_j l_{j+p+1} - l_{j+p} l_{j+1}}{l_j^2 l_{j+1}} \end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir. (2.31) ve (2.32) den

$$\delta^2 \psi(x_j) = \frac{-l_{j+p+1} \Delta l_j + l_{j+1} \Delta l_{j+p}}{l_j^2 l_{j+1}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.33)$$

olur. Şimdi de $\delta^2 \psi(x_j) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ olduğunu gösterelim. Eğer

$$-l_{j+p+1} = l_{j+1} = O(n^{-1}), \quad \Delta l_j = \Delta l_{j+p} = O(n^{-4}), \quad l_j^2 = O(n^{-2})$$

olmak üzere bu ifadeler (2.33) de göz önüne alınırsa

$$\delta^2 \psi(x_j) = \frac{O(n^{-1})O(n^{-4}) + O(n^{-1})O(n^{-4})}{O(n^{-3})} = O(n^{-2})$$

olarak elde edilir. Böylece Lemma 2.2 den

$$\delta^k \psi(x_j) = O(n^{-2})$$

olup

$$\delta^k \Phi(x_j) = \begin{cases} O(1), & k = 0 \\ 1! + O(n^{-1}), & k = 1 \\ O(n^{-2}), & k \geq 2 \end{cases}$$

elde edilir. Bu ifadenin $m = 1$ için doğru olduğunu gösterir. Kabul edelim ki teorem $m - 1$ için doğru olsun. Yani

$$\delta^k \Phi_{m-1}(x_j) = \begin{cases} O(1), & 0 \leq k \leq m - 2 \\ (m - 1)! + O(n^{-1}), & k = 1 \\ O(n^{-2}), & k \geq m \end{cases} \quad (2.34)$$

olsun. Teoremin m için doğru olduğunu göstereceğiz. Teoremin ifadesi ve $\delta(a_j b_j) = a_{j+1} \delta b_j + b_j \delta a_j$ olduğu göz önüne alınır

$$\delta^k \Phi_m(x_j) = \delta^k [\psi_m(x_j) \Phi_{m-1}(x_j)] \quad (2.35)$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \delta^i \psi_m(x_{j+k-i}) \delta^{k-i} \Phi_{m-1}(x_j) \quad (2.36)$$

elde edilir. Şimdi ise (2.36) nın doğruluğunu gösterelim. (2.36) de $k = 1$ için

$$\begin{aligned} \delta \Phi_m(x_j) &= \delta [\psi_m(x_j) \Phi_{m-1}(x_j)] \\ &= \psi_m(x_{j+1}) \delta \Phi_{m-1}(x_j) + \Phi_{m-1}(x_j) \delta \psi_m(x_j) \end{aligned} \quad (2.37)$$

olur. Gerçekten (2.36) da $k = 1$ yazarsak (2.37) elde edilir. İfadenin $k = 2$ için doğru olduğunu gösterelim. (2.37) ye δ operatörünü tekrar uygularsak;

$$\begin{aligned} \delta^2 \Phi_m(x_j) &= \delta [\psi_m(x_{j+1}) \delta \Phi_{m-1}(x_j) + \Phi_{m-1}(x_j) \delta \psi_m(x_j)] \\ &= \delta (\psi_m(x_{j+1}) \delta \Phi_{m-1}(x_j)) + \delta (\delta \psi_m(x_j) \Phi_{m-1}(x_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 \Phi_m(x_j) &= \psi_m(x_{j+2})\delta^2 \Phi_{m-1}(x_j) + \delta \Phi_{m-1}(x_j)\delta \psi_m(x_{j+1}) \\
&\quad + \delta \psi_m(x_{j+1})\delta \Phi_{m-1}(x_j) + \Phi_{m-1}(x_j)\delta^2 \psi_m(x_j) \\
&= \psi_m(x_{j+2})\delta^2 \Phi_{m-1}(x_j) + 2\delta \Phi_{m-1}(x_j)\delta \psi_m(x_{j+1}) + \Phi_{m-1}(x_j)\delta^2 \psi_m(x_j)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

elde edilir. Gerçekten (2.36) da $k = 2$ yazarsak (2.38) elde edilir. Şimdi ise önermenin $k = 3$ için doğru olduğunu gösterelim. Eğer (2.38) e δ operatörünü uygularsak

$$\begin{aligned}
\delta^3 \Phi_m(x_j) &= \delta [\psi_m(x_{j+2})\delta^2 \Phi_{m-1}(x_j) + 2\delta \Phi_{m-1}(x_j)\delta \psi_m(x_{j+1}) + \Phi_{m-1}(x_j)\delta^2 \psi_m(x_j)] \\
&= \delta [\psi_m(x_{j+2})\delta^2 \Phi_{m-1}(x_j)] + 2\delta [\delta \Phi_{m-1}(x_j)\delta \psi_m(x_{j+1})] + \delta [\Phi_{m-1}(x_j)\delta^2 \psi_m(x_j)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^3 \Phi_m(x_j) &= \psi_m(x_{j+3})\delta^3 \Phi_{m-1}(x_j) + \delta^2 \Phi_{m-1}(x_j)\delta \psi_m(x_{j+2}) \\
&\quad + 2 [\delta \psi_m(x_{j+2})\delta^2 \Phi_{m-1}(x_j) + \delta \Phi_{m-1}(x_j)\delta^2 \psi_m(x_{j+1})] + \delta^2 \psi_m(x_{j+1})\delta \Phi_{m-1}(x_j) \\
&\quad + \Phi_{m-1}(x_j)\delta^3 \psi_m(x_j) \\
&= \psi_m(x_{j+3})\delta^3 \Phi_{m-1}(x_j) + 3\delta^2 \Phi_{m-1}(x_j)\delta \psi_m(x_{j+2}) + 3\delta^2 \psi_m(x_{j+1})\delta \Phi_{m-1}(x_j) \\
&\quad + \Phi_{m-1}(x_j)\delta^3 \psi_m(x_j)
\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edildiğinde

$$\begin{aligned}
\delta^k \Phi_m(x_j) &= \psi_m(x_{j+k})\delta^k \Phi_{m-1}(x_j) + \dots + \Phi_{m-1}(x_j)\delta^k \psi_m(x_j) \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \delta^i \psi_m(x_{j+k-i}) \delta^{k-i} \Phi_{m-1}(x_j)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece δ operatörünün k . dereceden ifadesi elde edilmiş olur. (2.34) den $i \geq 2$ için $\delta^i \psi_m(x_{j+k-i}) = O(n^{-2})$ şeklindedir. Yani

$$\delta^2 \psi_m(x_{j+k-2}) = \delta^3 \psi_m(x_{j+k-3}) = \dots = \delta^k \psi_m(x_j) = O(n^{-2})$$

olur.

$$\delta^k \Phi_m(x_j) = \psi_m(x_{j+k})\delta^k \Phi_{m-1}(x_j) + \dots + \Phi_{m-1}(x_j)\delta^k \psi_m(x_j) \tag{2.39}$$

ifadesini $k \leq m-1$ için ele alalım. Bu durumda (2.39) un terimlerini hesaplırsak

$$\delta^k \Phi_{m-1}(x_j) = O(1), \delta^{k-1} \Phi_{m-1}(x_j) = O(1), \dots, \delta^0 \Phi_{m-1}(x_j) = O(1) \tag{a}$$

$$\delta^0 \psi_m(x_{j+k}) = O(1), \delta^1 \psi_m(x_{j+k-1}) = 1 + O(n^{-1}), \dots, \delta^k \psi_m(x_j) = O(n^{-2}) \tag{b}$$

olur. Gerçekten; $\delta^0 \psi_m(x_{j+k}) = \psi_m(x_{j+k}) = O(1), \delta^1 \psi_m(x_{j+k}) = 1 + O(n^{-1})$ şeklindedir.

(a) dan eğer $k \leq m-1$ ise $k-1 \leq m-1, \dots, 1 \leq m$ olup (2.34) den

$$\delta^k \Phi_{m-1}(x_j) = \delta^{k-1} \Phi_{m-1}(x_j) = \dots = \delta^0 \Phi_{m-1}(x_j) = O(1)$$

olur. Burada $k = 0$ olup $k \leq m - 1$ ise $m \geq 1$ ve $k \leq m$ ise $k \leq m - 2$ şeklindedir. (a) ve (b) yi (2.39) da göz önüne alırsak

$$\delta^k \Phi_m(x_j) = O(1) + O(1) + O(n^{-1}) + \dots + O(n^{-2}) = O(1) + O(n^{-2}) = O(1)$$

elde edilir. Şimdi ise $k \geq m + 1$ olduğunu göz önüne alalım.

$$\delta^k \Phi_{m-1}(x_j) = O(n^{-2}), \delta^{k-1} \Phi_{m-1}(x_j) = O(n^{-2}), \dots, \delta^0 \Phi_{m-1}(x_j) = O(n^{-2}) \quad (c)$$

$$\delta^0 \psi_m(x_{j+k}) = O(1), \delta^1 \psi_m(x_{j+k-1}) = 1 + O(n^{-1}), \dots, \delta^k \psi_m(x_j) = O(n^{-2}) \quad (d)$$

Gerçekten $k \geq m + 1$ ise $k \geq m$ olur. $k \geq m + 1$ ise $k \geq m$ olduğundan $\delta^k \Phi_{m-1}(x_j) = O(n^{-2})$ olur. Ayrıca $k \geq m$ olduğundan $k - 1 \geq m$ olur. $k = 0$ ise yine $k \geq m$ olur. O halde (c) ve (d), (2.39) da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \delta^k \Phi_m(x_j) &= O(n^{-2})O(1) + O(n^{-2})(1 + O(n^{-1})) + \dots + O(n^{-2})O(n^{-2}) \\ &= O(n^{-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $k = m$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \delta^m \Phi_m(x_j) &= \delta^m [\psi_m(x_j) \Phi_{m-1}(x_j)] \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} \delta^i \psi_m(x_{j+m-i}) \delta^{m-i} \Phi_{m-1}(x_j) \end{aligned}$$

$$\delta^m \Phi_m(x_j) = \delta^0 \psi_m(x_{j+m}) \delta^m \Phi_{m-1}(x_j) + \dots + \Phi_{m-1}(x_j) \delta^m \psi_m(x_j) \quad (2.40)$$

olur. (2.34) ifadesinden

$$\delta^m \Phi_{m-1}(x_j) = O(n^{-2}), \delta^{m-1} \Phi_{m-1}(x_j) = (m-1)! + O(n^{-1}), \dots, \quad (e)$$

$$\delta^0 \Phi_{m-1}(x_j) = O(1)$$

$$\delta^0 \psi_m(x_{j+m}) = O(1), \delta^1 \psi_m(x_{j+m-1}) = 1 + O(n^{-1}), \dots, \delta^m \psi_m(x_j) = O(n^{-2}) \quad (f)$$

olur. Eğer bu (2.40) da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \delta^m \Phi_m(x_j) &= O(n^{-2})O(1) + \frac{m!}{(m-1)!} ((m-1)! + O(n^{-1})) + \dots + O(1)O(n^{-2}) \\ &= O(n^{-2}) + m! + \frac{m!}{(m-1)!} O(n^{-1}) + \dots + O(n^{-2}) \\ &= m! + O(n^{-1}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.1 nin ispatı

İspat için Ashbaugh-Benguria [20] tarafından verilen genelleştirilmiş prüfer dönüştürme kullanılacaktır.

$$\begin{cases} y = r(x) \sin \sqrt{\lambda} \theta(x) \\ y' = \sqrt{\lambda} r(x) \cos \sqrt{\lambda} \theta(x) \end{cases} \quad (2.41)$$

dönüştürme ve

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (2.42)$$

denklemini birlikte göz önüne alınırsa

$$\theta' = 1 - \frac{q}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta \quad (2.43)$$

elde edilir. Gerçekten (2.42) den

$$\frac{-y''}{y} + q(x) = \lambda \quad (2.44)$$

olur. Burada

$$\frac{-y''}{y} = -\left(\frac{y'}{y}\right)' - \left(\frac{y'}{y}\right)^2$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$q(x) - \lambda = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \quad (2.45)$$

bulunur. (2.45) teki $\left(\frac{y'}{y}\right)'$ ve $\left(\frac{y'}{y}\right)^2$ terimleri (2.41) yardımıyla

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{\lambda} \cot \sqrt{\lambda} \theta(x)$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = -\frac{\lambda \theta'(x)}{\left(\sin \sqrt{\lambda} \theta(x)\right)^2} \quad (2.46)$$

ve

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{\lambda \cos^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)}{\sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)} \quad (2.47)$$

olur. Bu ifadeler (2.45) te yazılırsa

$$q(x) - \lambda = -\frac{\lambda \theta'(x)}{\left(\sin \sqrt{\lambda} \theta(x)\right)^2} + \frac{\lambda \cos^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)}{\sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)}$$

$$\theta'(x) = 1 - \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)$$

olur. Bu ifadenin x_j den x_{j+1} e integrali alınırsa

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \theta'(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[1 - \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x) \right] dx$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} &= (x_{j+1} - x_j) - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q(x)}{\lambda_n} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) dx \\ \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} &= l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q(x)}{\lambda_n} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) dx\end{aligned}\quad (2.48)$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan $\theta(x) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}}$ olduğunu göstermek için (2.41) deki Prüfer dönüşümünü tekrar ele alacağız. (2.41) den

$$\frac{y}{y'} = \frac{\tan \sqrt{\lambda} \theta(x)}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.49)$$

olur. Burada x_j ve x_{j+1} nodal noktalar olduğundan

$$y(x_j) = 0 \quad \text{ve} \quad y(x_{j+1}) = 0$$

dir. Bunlar (2.49) da sırası ile göz önüne alınırsa

$$\theta(x_j) \sqrt{\lambda_n} = n_1 \pi, \quad n_1 = 0, 2, 3, \dots \quad (2.50)$$

ve

$$\theta(x_{j+1}) \sqrt{\lambda_n} = n_2 \pi, \quad n_2 = 0, 2, 3, \dots \quad (2.51)$$

elde edilir. $0 \leq \theta \leq \pi$ olduğundan; x_j için $n_1 \pi = 0$, x_{j+1} için $n_2 \pi = \pi$ alalım. Bu değerler (2.50) ve (2.51) de yerine yazılırsa

$$\theta(x_j) = 0 \quad (2.52)$$

ve

$$\theta(x_{j+1}) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (2.53)$$

olarak bulunur. Böylece

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} = l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x) \frac{\theta'}{1 - \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)} dx \quad (2.54)$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \quad (2.55)$$

olduğu göz önüne alınır ve $u = \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)$ olarak alınırsa

$$\frac{\frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)}{1 - \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)} = \frac{u}{1-u} = -1 + \frac{1}{1-u} \quad (2.56)$$

olup (2.55) den

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-u} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-u-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (u)^n\end{aligned}\tag{2.57}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{u}{1-u} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} (u)^n = u + u^2 + u^3 + \dots$$

olur. $u = \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)$ olduğundan

$$\frac{\frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)}{1 - \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)} = \frac{u}{1-u} = \frac{q(x)}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x) + \frac{q^2(x)}{\lambda^2} \sin^4 \sqrt{\lambda} \theta(x) + \dots$$

olur. Bu ifade (2.54) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} &= l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{q(x)}{\lambda_n} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) + \frac{q^2(x)}{\lambda_n^2} \sin^4 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) + \dots \right] \theta' dx \\ \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} &= l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q(x)}{\lambda_n} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q^2(x)}{\lambda_n^2} \sin^4 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - \dots\end{aligned}\tag{2.58}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}a_j &= - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q^2(x)}{\lambda_n^2} \sin^4 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - \frac{1}{\lambda_n^3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^4(x) \sin^6 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - \dots \\ &= - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^k \left[\sin \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \right]^{2k} \theta'(x) dx\end{aligned}\tag{2.59}$$

olsun. Eğer λ_n in asimptotik formu ve Lemma 2.5 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}a_j &= - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q^2(x)}{\lambda_n^2} \sin^4 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - \frac{1}{\lambda_n^3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^4(x) \sin^6 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - \dots \\ &= O\left(\frac{1}{n^4}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^6}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + \dots \\ &= O\left(\frac{1}{n^5}\right)\end{aligned}\tag{2.60}$$

şeklinde olur. Şimdi (2.58) deki diğer terimleri göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^k \left[\sin \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \right]^{2k} \theta'(x) dx &= -\frac{1}{\lambda_n^{N+2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^{N+2} \left[\sin \sqrt{\lambda_n} \theta \right]^{2(N+2)} \theta' dx - \dots \\
&= O\left(\frac{1}{n^{2N+4}}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2N+6}}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + \dots \\
&= O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \tag{2.61}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer (2.59), (2.60) ve (2.61); (2.58) de yazılırsa

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} = l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q(x)}{\lambda_n} \sin^2 \sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \tag{2.62}$$

ve

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} = l_j - \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x) \theta'(x) dx + \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right)$$

olur. Burada $\theta' = 1 - \frac{q}{\lambda} \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} &= l_j - \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^2 \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx - a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \tag{2.63}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^2 \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x) dx = b_j \tag{2.64}$$

olarak alınırsa Lemma 2.5 ten

$$b_j = \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q^2 \sin^2 \sqrt{\lambda} \theta(x) dx = O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 2.4 den $b_j = O\left(\frac{1}{n^5}\right) \Rightarrow \delta b_j = O\left(\frac{1}{n^5}\right)$ olur. Ayrıca Taylor seri açılımından

$$\frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx = \frac{q(x_j)}{2\lambda_n} l_j + c_j + O\left(\frac{1}{n^{N+4}}\right) \tag{2.65}$$

şeklinde olur. Şimdi (2.65) in sağlandığını göstereyim. Gerçekten $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun

$$q(x) = q(x_j) + q'(x_j)(x - x_j) + \frac{q''(x)}{2!}(x - x_j)^2 + \dots \quad (x > x_j)$$

şeklindeki açılımı (2.65) te yazılırsa

$$\frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx = \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[q(x_j) + q'(x_j)(x - x_j) + \frac{q''(x)}{2!}(x - x_j)^2 + \dots \right] dx \quad (2.66)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx &= \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x_j) dx + \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q'(x_j)(x - x_j) dx + \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{q''(x)}{2!}(x - x_j)^2 dx + \dots \\ \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx &= \frac{q(x_j)}{2\lambda_n} l_j + \left[\frac{q'(x_j)}{2\lambda_n} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + \frac{1}{2\lambda_n} \frac{q''(x)}{3!}(x_{j+1} - x_j)^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

olur. Burada

$$c_j = \frac{q'(x_j)}{2\lambda_n} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + \frac{1}{2\lambda_n} \frac{q''(x)}{3!}(x_{j+1} - x_j)^3 + \dots = \frac{1}{2\lambda_n} \sum_{k=1}^N \frac{q^{(k)}(x_j) l_j^{k+1}}{(k+1)!} \quad (2.68)$$

olarak alınır

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{q'(x_j)}{2\lambda_n} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + \frac{1}{2\lambda_n} \frac{q''(x)}{3!}(x_{j+1} - x_j)^3 + \dots \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{n^4}\right) + \dots \\ &= O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

elde edilir. Şimdi ise geri kalan terimleri ifade edelim.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda_n} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(x_j) l_j^{k+1}}{(k+1)!} &= \frac{q^{(N+1)}(x_j)}{2\lambda_n} \frac{(x_{j+1} - x_j)^{N+2}}{(N+2)!} + \frac{1}{2\lambda_n} \frac{q^{(N+2)}(x)}{(N+3)!} (x_{j+1} - x_j)^{(N+3)} + \dots \\ \frac{1}{2\lambda_n} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(x_j) l_j^{k+1}}{(k+1)!} &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{n^{N+2}}\right) + \dots = O\left(\frac{1}{n^{N+4}}\right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

olarak elde edilir. Bu ifade (2.66) da yazılırsa

$$\frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx = \frac{q(x_j)}{2\lambda_n} l_j + c_j + O\left(\frac{1}{n^{N+4}}\right)$$

elde ederiz. Son olarak

$$d_j = \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} \theta(x) \theta'(x) dx \quad (2.71)$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
d_j &= \frac{1}{2\lambda_n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n}\theta(x)\theta'(x)dx \\
&= -\frac{1}{4\lambda_n^{3/2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q'(x) \sin 2\sqrt{\lambda_n}\theta(x)dx
\end{aligned} \tag{2.72}$$

elde edilir. Burada ise Lemma 2.5 göz önüne alınır

$$d_j = O\left(\frac{1}{(n^2)^{3/2}}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{2.73}$$

olur. Bu ifade (2.63) te yazılırsa

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n}} = l_j - \frac{q(x_j)}{2\lambda_n} l_j + a_j + b_j + c_j + d_j + O\left(\frac{1}{n^{N+4}}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n} l_j} &= 1 - \frac{q(x_j)}{2\lambda_n} + \frac{a_j + b_j + c_j + d_j}{l_j} + O\left(\frac{1}{n^{N+3}}\right) \\
q(x_j) &= 2\lambda_n \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n} l_j}\right) + 2\lambda_n \left(\frac{a_j + b_j + c_j + d_j}{l_j}\right) + O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right)
\end{aligned}$$

olur. $E_j = 2\lambda_n \left(\frac{a_j + b_j + c_j + d_j}{l_j}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ olduğundan

$$q(x_j) = 2\lambda_n \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n} l_j}\right) + E_j + O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \tag{2.74}$$

elde edilir. Lemma 2.4 den $E_j = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ise $\delta E_j = O\left(\frac{1}{n}\right)$ olur. Diğer taraftan (2.74) e δ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta q(x_j) &= 2\lambda_n \delta \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_n} l_j}\right) + \delta E_j + \delta O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \\
\delta q(x_j) &= -2\pi \sqrt{\lambda_n} \delta \left(\frac{1}{l_j}\right) + \delta E_j + O\left(\frac{1}{n^N}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\delta q(x_j) &= -2\pi \sqrt{\lambda_n} \frac{\Delta\left(\frac{1}{l_j}\right)}{l_j} + \delta E_j + O\left(\frac{1}{n^N}\right) \\
\delta q(x_j) &= 2\pi \sqrt{\lambda_n} \frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

elde edilir. Bu ifadeyi $k = 1, 2, \dots, N$ için genelleştirirsek

$$\delta^k q(x_j) = 2\pi \sqrt{\lambda_n} \delta^{k-1} \left(\frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.76}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3. [13] Kabul edelim ki q fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında $(N + 1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu durumda $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$\delta^k q(x_j) = \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \delta^k l_j + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.77)$$

dir.

İspat: (2.76) eşitliğindeki sonuç, bu teoremi ispatlamak için kullanılacaktır. Bu sonuçla beraber

$$\delta l_j = \frac{\Delta l_j}{l_j} = O(n^{-3})$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\delta^{k-1} \left[\frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] = \delta^{k-1} \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} \right] + O(n^{-3}) \quad (2.78)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten bu ifadeyi (2.76) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \delta^k q(x_j) &= 2\pi \sqrt{\lambda_n} \delta^{k-1} \left(\frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \delta^k q(x_j) &= 2\pi \sqrt{\lambda_n} \left[\delta^{k-1} \left(\frac{\lambda_n \Delta l_j}{\pi^2 l_j} \right) + O(n^{-3}) \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \delta^k q(x_j) &= 2\pi \lambda_n^{3/2} \delta^{k-1} \left(\frac{\Delta l_j}{\pi^2 l_j} \right) + O(n^{-2}) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \delta^k q(x_j) &= \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \delta^k l_j + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

olur. Bu da istenilendir. Dolayısıyla (2.78) in sağlandığını göstermeliyiz. Bunun için

$$\delta \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} - \frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] = \delta \left[\left(\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_j l_{j+1}} \right) \delta l_j \right]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} - \frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] &= \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta^2 l_j + \delta \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_j l_{j+1}} \right] \delta l_j \\ &= \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta^2 l_j + \frac{\Delta \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_j l_{j+1}} \right]}{l_j} \delta l_j \\ &= \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta^2 l_j + \pi^2 \left[\frac{l_{j+2} - l_j}{l_j^2 l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta l_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1}l_{j+2}} \right] \delta^2 l_j + \pi^2 \left[\frac{l_{j+2} - l_{j+1} + l_{j+1} - l_j}{l_j^2 l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta l_j \\
\delta \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} - \frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] &= \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1}l_{j+2}} \right] \delta^2 l_j + \pi^2 \left[\frac{\Delta l_j + \Delta l_{j+1}}{l_j^2 l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta l_j \quad (2.79)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadenin $O(n^{-3})$ e eşit olduğunu gösterelim. (2.79) un sağındaki ilk terimden

$$\left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1}l_{j+2}} \right] \delta^2 l_j = O(1)O(n^{-3})$$

ve ikinci terimden

$$\pi^2 \left[\frac{\Delta l_j + \Delta l_{j+1}}{l_j^2 l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta l_j = \frac{O(n^{-4})O(n^{-3})}{O(n^{-4})} = O(n^{-3})$$

olarak bulunur. Bunlar (2.79) da yazılırsa

$$\delta \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} - \frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] = \left[\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1}l_{j+2}} \right] \delta^2 l_j + \pi^2 \left[\frac{\Delta l_j + \Delta l_{j+1}}{l_j^2 l_{j+1} l_{j+2}} \right] \delta l_j = O(n^{-3}) \quad (2.80)$$

elde edilir. Lemma 2.4 gereğince

$$\delta \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} - \frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] = O(n^{-3}) \Rightarrow \delta^{k-1} \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} - \frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] = O(n^{-3})$$

olup bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.4. [13] Eğer $q \in C^{N+1}[0, 1]$ ise $k = 0, 1, 2, \dots, N$ için $j = j_n(x)$ olmak üzere

$$q^{(k)}(x) = \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.81)$$

dir.

Bu teoremi ispat etmek için bir lemmaya ihtiyaç vardır. Burada kabul edelim ki $k = 1, 2, 3, \dots, N$ için

$$V_k(x_j) = \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_j^k \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{j+1}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 1 & x_{j+k} & x_{j+k}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{j+k}^k \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

olsun. Bu matris $(k+1) \times (k+1)$ tipinde bir Vandermonde matrisidir ve determinantı

$$\det V_k(x_j) = \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} (x_{j+m} - x_{j+i}) \right] = \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{p=i}^{m-1} l_{j+p} \right) \right] \quad (2.83)$$

şeklindedir. Gerçekten

$$a = \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} (x_{j+m} - x_{j+i}) \right] \quad \text{ve} \quad b = \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{p=i}^{m-1} l_{j+p} \right) \right]$$

olsun. (a) dan

$$\prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} (x_{j+m} - x_{j+i}) \right] = \prod_{m=1}^k [(x_{j+m} - x_j) \dots (x_{j+m} - x_{j+m-1})] \quad (2.84)$$

olur. (b) den ise

$$\prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{p=i}^{m-1} l_{j+p} \right) \right] = \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} (l_{j+i} + l_{j+i+1} + l_{j+i+2} + \dots + l_{j+m-1}) \right] \quad (2.85)$$

elde edilir. (2.85) eşitliğinde $i = 0, 1, \dots, m-1$ için değer vererek (2.84) ün terimlerini oluşturmaya çalışalım. (2.85) den $i = 0$ için

$$(l_{j+0} + l_{j+1} + l_{j+2} + \dots + l_{j+m-1}) = (x_{j+m} - x_j)$$

ve $i = 1$ için

$$(l_{j+1} + l_{j+2} + l_{j+3} + \dots + l_{j+m-1}) = (x_{j+m} - x_{j+1})$$

olur. Son olarak $i = m-1$ için

$$(l_{j+m-1}) = (x_{j+m} - x_{j+m-1})$$

elde edilir. Bu ise $\det V_k(x_j) = \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} (x_{j+m} - x_{j+i}) \right] = \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{p=i}^{m-1} l_{j+p} \right) \right]$ olduğunu gösterir.

Lemma 2.6. [13]

$$\frac{\prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\det V_k(x_j)} = \frac{1}{\prod_{m=1}^k (m!)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.86)$$

şeklindedir.

İspat: Çarpım sembolünün özelliğinden

$$\prod_{j=0}^{m-1} l_{j+k-m} = \prod_{j=1}^m l_{j+k-m} = l_{j+k-m}^m$$

şeklindedir. Böylece

$$\frac{\prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\det V_k(x_j)} = \frac{\prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{p=i}^{m-1} l_{j+p} \right) \right]} = \frac{\prod_{m=1}^k \prod_{i=0}^{m-1} l_{j+k-m}}{\prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{p=i}^{m-1} l_{j+p} \right) \right]}$$

olur. Önerme (2.1) den

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\det V_k(x_j)} &= \prod_{m=1}^k \prod_{i=0}^{m-1} \left[\frac{1}{\sum_{p=i}^{m-1} \frac{l_{j+p}}{l_{j+k-m}}} \right] \\ &= \frac{1}{\prod_{m=1}^k (m!)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi ise aşağıda bulunan $(k+1) \times (k+1)$ tipindeki A matrisini ele alalım.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_j^{k-1} & q(x_j) \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{j+1}^{k-1} & q(x_{j+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{j+k} & x_{j+k}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_{j+k}^{k-1} & q(x_{j+k}) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Bu matrisin determinantını bulmak için bazı sütun operasyonları yapmamız gerekir. Bu operasyonlarla

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & \cdot & \cdot & \cdot & q(x_j) \\ 1-1 & x_{j+1}-x_j & \cdot & \cdot & \cdot & q(x_{j+1})-q(x_j) \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 1-1 & x_{j+k}-x_{j+k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & q(x_{j+k})-q(x_{j+k-1}) \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} x_{j+1} - x_j &= l_j, \quad x_{j+1}^2 - x_j^2 = l_j(x_j + x_{j+1}), \quad q(x_{j+1}) - q(x_j) = \Delta q(x_j) \\ x_{j+k} - x_{j+k-1} &= l_{j+k-1}, \quad q(x_{j+k}) - q(x_{j+k-1}) = \Delta q(x_{j+k-1}), \quad \Delta q(x_j) = l_j \delta q(x_j) \\ \Delta q(x_{j+k-1}) &= l_{j+k-1} \delta q(x_{j+k-1}). \end{aligned}$$

değerleri (2.88) teki determinanttta yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & . & . & . & q(x_j) \\ 0 & l_j & l_j(x_j + x_{j+1}) & . & . & . & \Delta q(x_j) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & l_{j+k-1} & l_{j+k-1}(x_{j+k} + x_{j+k-1}) & . & . & . & \Delta q(x_{j+k-1}) \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & . & . & . & q(x_j) \\ 0 & l_j & l_j \delta(x_j^2) & . & . & . & l_j \delta q(x_j) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & l_{j+k-1} & l_{j+k-1} \delta(x_{j+k-1}^2) & . & . & . & l_{j+k-1} \delta q(x_{j+k-1}) \end{bmatrix} \\
&= l_j l_{j+1} \dots l_{j+k-1} \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & . & . & . & q(x_j) \\ 0 & 1 & \delta(x_j^2) & . & . & . & \delta q(x_j) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & \delta(x_{j+k-1}^2) & . & . & . & \delta q(x_{j+k-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur.

$$\delta(x_j) = \frac{l_j}{l_j} = 1, \quad \delta(1) = 0$$

olduğundan

$$\det A = l_j l_{j+1} \dots l_{j+k-1} \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & . & . & . & q(x_j) \\ \delta(1) & \delta(x_j) & \delta(x_j^2) & . & . & . & \delta q(x_j) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \delta(1) & \delta(x_{j+k-1}) & \delta(x_{j+k-1}^2) & . & . & . & \delta q(x_{j+k-1}) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yukarıdaki işlem bir kez daha uygulanır, bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}
\det A &= l_j l_{j+1} \dots l_{j+k-1} \det \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & q(x_j) \\ \delta(1) & . & . & . & \delta q(x_j) \\ \delta(1) - \delta(1) & . & . & . & \delta q(x_{j+1}) - \delta q(x_j) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \delta(1) - \delta(1) & . & . & . & \delta q(x_{j+k-1}) - \delta q(x_{j+k-2}) \end{bmatrix} \\
&= l_j^2 l_{j+1}^2 \dots l_{j+k-2}^2 l_{j+k-1} \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & . & . & . & q(x_j) \\ \delta(1) & \delta(x_j) & . & . & . & \delta q(x_j) \\ \delta^2(1) & \delta^2(x_j) & . & . & . & \delta^2 q(x_j) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \delta^2(1) & \delta^2(x_{j+k-2}) & . & . & . & \delta^2 q(x_{j+k-2}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu işlem k defa tekrarlanırsa

$$\det A = l_j^k l_{j+1}^{k-1} \dots l_{j+k-1} \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & . & . & . & q(x_j) \\ \delta(1) & \delta(x_j) & . & . & . & \delta q(x_j) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \delta^k(1) & \delta^k(x_j) & . & . & . & \delta^k q(x_j) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

olur. Bu ifadenin sağındaki matrisi B ile gösterelim.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & x_j & . & . & . & q(x_j) \\ \delta(1) & \delta(x_j) & . & . & . & \delta q(x_j) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \delta^k(1) & \delta^k(x_j) & . & . & . & \delta^k q(x_j) \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi bu matrisin determinantını bulalım. Bu matrisin köşegen elemanlarının altındaki elemanların sıfıra eşit olduğunu gösterirsek alt üçgensel matris elde ederiz. Bu

durumda B matrisinin determinanı köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & . & . & . & x_j^{k-1} & q(x_j) \\ \delta(1) & \delta(x_j) & \delta(x_j^2) & . & . & . & \delta(x_j^{k-1}) & \delta q(x_j) \\ \delta^2(1) & \delta^2(x_j) & \delta^2(x_j^2) & . & . & . & \delta^2(x_j^{k-1}) & \delta^2 q(x_j) \\ \delta^3(1) & \delta^3(x_j) & \delta^3(x_j^2) & . & . & . & \delta^3(x_j^{k-1}) & \delta^3 q(x_j) \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \delta^k(1) & \delta^k(x_j) & \delta^k(x_j^2) & . & . & . & \delta^k(x_j^{k-1}) & \delta^k q(x_j) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\delta(1) = \frac{1-1}{l_j} = 0, \delta^2(1) = \delta(\delta(1)) = \delta(0) = 0, \dots, \delta^k(1) = \delta(\delta^{k-1}(1)) = \delta(0) = 0,$$

$$\delta(x_j) = \frac{x_{j+1} - x_j}{l_j} = 1, \delta^2(x_j) = \delta(\delta(x_j)) = \delta(1) = 0, \dots, \delta^k(x_j) = \delta(\delta^{k-1}(x_j)) = \delta(0) = 0,$$

$$\delta(x_j^2) = \frac{\Delta(x_j^2)}{l_j},$$

$$\begin{aligned} \delta^2(x_j^2) &= \delta(\delta(x_j^2)) = \delta\left(\frac{\Delta(x_j^2)}{l_j}\right) = \frac{\left[\frac{\Delta(x_{j+1}^2)}{l_{j+1}} - \frac{\Delta(x_j^2)}{l_j}\right]}{l_j} \\ \delta^2(x_j^2) &= \frac{x_{j+2} - x_j}{l_j} = \delta(x_j) + \delta(x_{j+1}) = 2, \end{aligned}$$

$$\delta^2(x_j^2) = 2, \delta^3(x_j^2) = \delta(\delta^2(x_j^2)) = \delta(2) = 0, \dots, \delta^k(x_j) = \delta(\delta^{k-1}(x_j^2)) = \delta(0) = 0$$

olur. Böylece

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & . & . & . & x_j^{k-1} & q(x_j) \\ 0 & \delta(x_j) & \delta(x_j^2) & . & . & . & \delta(x_j^{k-1}) & \delta q(x_j) \\ 0 & 0 & \delta^2(x_j^2) & . & . & . & \delta^2(x_j^{k-1}) & \delta^2 q(x_j) \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \delta^3(x_j^{k-1}) & \delta^3 q(x_j) \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \delta^k q(x_j) \end{bmatrix}$$

şeklindeki alt üçgensel matris elde edilip

$$\det B = \delta(x_j) \delta^2(x_j^2) \dots \delta^{k-1}(x_j^{k-1}) \cdot \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.90)$$

olur. Eğer (2.90) da Lemma 2.4 ve Teorem 2.2 göz önüne alınırsa $k = m$ için

$$\delta^k(x_j^m) = m! + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

olmak üzere

$$\delta(x_j) = 1! + O\left(\frac{1}{n}\right), \delta^2(x_j^2) = 2! + O\left(\frac{1}{n}\right), \dots, \delta^{k-1}(x_j^{k-1}) = (k-1)! + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Bu değer (2.90) da yerine yazılırsa

$$\det B = 0!1!2!\dots(k-1)!\delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\det B = \prod_{m=0}^{k-1} m! \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.91)$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.4 ' ün ispatı: Kabul edelim ki $k = 1, 2, 3, \dots, N$ için

$$g(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & x & . & . & . & x^k & q(x) \\ 1 & x_j & . & . & . & x_j^k & q(x_j) \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 1 & x_{j+k} & . & . & . & x_{j+k}^k & q(x_{j+k}) \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

olsun. Rolle teoreminden $g(x_j) = g(x_{j+1}) = \dots = g(x_{j+k}) = 0$ ise öyle bir $\xi_{1,j+i} \in (x_{j+i}, x_{j+i+1})$ vardır ki; $g'(\xi_{1,j+i}) = 0$ olur. Gerçekten (2.92) den; $g(x_j) = g(x_{j+1}) = \dots = g(x_{j+k}) = 0$ olduğu görülebilir. Bu şekilde devam edilirse öyle $\xi_{k,j} \in (x_j, x_{j+k})$ vardır öyle ki $g^{(k)}(\xi_{k,j}) = 0$ olur. O halde g fonksiyonunun tanımından

$$q^{(k)}(\xi_{k,j}) \cdot \det V_k(x_j) = k! \det A$$

olur. Buradan ise; $\det A$ nın tanımından

$$\begin{aligned} q^{(k)}(\xi_{k,j}) &= \frac{k! l_j^k l_{j+1}^{k-1} \dots l_{j+k-1} \det B}{\det V_k(x_j)} \\ &= \frac{k! \prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\det V_k(x_j)} \det B \end{aligned} \quad (2.93)$$

olur. Ayrıca

$$\det B = \prod_{m=0}^{k-1} m! \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$\frac{\prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\det V_k(x_j)} = \frac{1}{\prod_{m=1}^k (m!)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ifadeleri (2.93) de yazılırsa

$$q^{(k)}(\xi_{k,j}) = \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$q^{(k)}(x) = q^{(k)}(\xi_{k,j}) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan

$$q^{(k)}(\xi_{k,j}) = \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow q^{(k)}(x) = \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Bu ifade de Teorem 2.3 göz önüne alınırsa

$$q^{(k)}(x) = \frac{2\lambda_n^{3/2}}{\pi} \delta^k l_j + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olarak bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3. BÖLÜM

ÖZ DEĞER PARAMETRESİNE BAĞLI STURM-LİOUVILLE PROBLEMİ İÇİN POTANSİYEL FONKSİYONUN HESAPLANMASI

$$y'' + [\lambda^2 + \mu - q(x)] y = 0 \quad (3.1)$$

$$y(0) = 0 \quad (3.2)$$

$$\alpha y'(\pi, \lambda) + \lambda y(\pi, \lambda) = 0 \quad (3.3)$$

problemini göz önüne alalım. Burada $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında integrallenebilen, reel bir fonksiyon, μ reel bir parametre ve $\alpha \neq 0$ olsun. (3.1)-(3.2) probleminin çözümü

$$y(x, \lambda_n) = \sin \lambda_n x + \int_0^x \frac{\sin \lambda_n(x-t)}{\lambda_n} (q - \mu) \sin \lambda_n t dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right) \quad (3.4)$$

şeklindedir. Ayrıca; $\tan \lambda_0 \pi = -\alpha$ ve $|\lambda_0 \pi| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\lambda_n = n + \lambda_0 + \frac{1}{2n} \int_0^\pi (q - \mu) dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir [21].

Lemma 3.1. Farzedelim ki $q \in L^1[0, \pi]$ olsun. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ iken

$$x_i^n = \frac{\pi i}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_0^{x_i^n} (1 + \cos 2\lambda_n t) [q(t) - \mu] dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right) \quad (3.5)$$

$$l_i^n = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} (1 + \cos 2\lambda_n t) [q(t) - \mu] dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right) \quad (3.6)$$

şeklindedir.

Lemma 3.2. Farzedelim ki $f \in L^1[0, \pi]$ olsun. Bu durumda $j = j_n(x)$ olmak üzere hemen hemen her $x \in [0, \pi]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\pi} \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} f(t) dt = f(x)$$

olur.

Teorem 3.1. Eğer $q \in C^{N+1}[0, \pi]$ ise, $k = 0, 1, \dots, N$ için $j = j_n(x) = \max\{i : 0 < x_i^{(n)} \leq x\}$ olmak üzere $q^{(k)}(x) = F(\lambda_n, \mu)\delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)$ şeklindedir. Burada $F(\lambda_n, \mu) = \left(\frac{2\lambda_n^2}{2\lambda_n^2 - \mu}\right)$ dir.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için bir lemmaya ihtiyaç vardır. $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$V_k(x_j) = \begin{bmatrix} 1 & x_j & . & . & . & x_j^k \\ 1 & x_{j+1} & . & . & . & x_{j+1}^k \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 1 & x_{j+k} & . & . & . & x_{j+k}^k \end{bmatrix}$$

$(k+1) \times (k+1)$ tipinde bir Vandermonde matrisini göz önüne alalım. Bu matrisin determinantı

$$\begin{aligned} \det V_k(x_j) &= \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} (x_{j+m} - x_{j+i}) \right] \\ &= \prod_{m=1}^k \left[\prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{p=i}^{m-1} l_{j+p} \right) \right] \end{aligned}$$

şeklindedir. Diğer taraftan $(k+1) \times (k+1)$ tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_j & . & . & . & x_j^{k-1} & q(x_j) \\ 1 & x_{j+1} & . & . & . & x_{j+1}^{k-1} & q(x_{j+1}) \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 1 & x_{j+k} & . & . & . & x_{j+k}^{k-1} & q(x_{j+k}) \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Bazı satır operasyonlarından sonra

$$\det A = (l_j)^k (l_{j+1})^{k-1} \dots l_{j+k-1} \det \begin{bmatrix} 1 & x_j & . & . & . & q(x_j) \\ \delta(1) & \delta x_j & . & . & . & \delta q(x_j) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \delta^k(1) & \delta^k(x_j) & . & . & . & \delta^k q(x_j) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu determinantın sağındaki matrisi B ile gösterirsek Lemma 2.4 ve Teorem 2.2 den

$$\begin{aligned}\det B &= (\delta x_j)(\delta^2 x_j^2) \dots (\delta^{k-1} x_j^{k-1})(\delta^k q(x_j)) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \prod_{m=0}^{k-1} (m!) \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

olur. Şimdi ise teoremin ispatı için $k = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$g(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & x & \cdot & \cdot & \cdot & x^k & q(x) \\ 1 & x_j & \cdot & \cdot & \cdot & x_j^k & q(x_j) \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{j+k} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{j+k}^k & q(x_{j+k}) \end{bmatrix}$$

matrisini alalım. Rolle teoreminden $g(x_j) = g(x_{j+1}) = \dots = g(x_{j+k}) = 0$ ise öyle bir $\xi_{1,j+i} \in (x_{j+i}, x_{j+i+1})$ vardır ki; $g'(\xi_{1,j+i}) = 0$ olur. Bu şekilde devam edildiğinde öyle $\xi_{k,j} \in (x_j, x_{j+k})$ vardır öyle ki $g^{(k)}(\xi_{k,j}) = 0$ olur. O halde g fonksiyonunun tanımından

$$q^{(k)}(\xi_{k,j}) \cdot \det V_k(x_j) = k! \det A$$

olur. Buradan

$$q^{(k)}(\xi_{k,j}) = \frac{k! \prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\det V_k(x_j)} \det B \quad (3.8)$$

olur. Ayrıca

$$\det B = \prod_{m=0}^{k-1} m! \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$\frac{\prod_{m=1}^k l_{j+k-m}^m}{\det V_k(x_j)} = \frac{1}{\prod_{m=1}^k (m!)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ifadeleri (3.7) de yazılırsa

$$\begin{aligned}q^{(k)}(\xi_{k,j}) &= k! \left[\frac{1}{\prod_{m=1}^k (m!)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \left[\prod_{m=0}^{k-1} m! \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ q^{(k)}(\xi_{k,j}) &= \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$q^{(k)}(x) = F(\lambda_n, \mu)q^{(k)}(\xi_{k,j}) + O(n^{-1})$$

olduğundan

$$q^{(k)}(x) = F(\lambda_n, \mu)\delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.2. Farzedelim ki q potansiyel fonksiyonu $N \geq 1$ olmak üzere $(N + 1)$. mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu durumda $j = j_n(x) = \max\{i : x_i^n \leq x\}$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için

$$q(x) = 2\lambda_n \left[\frac{\sqrt{\lambda_n} l_j}{\pi} - 1 \right] + \frac{\lambda_n}{\pi} \mu l_j \quad (3.9)$$

ve $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$q^{(k)}(x) = F(\lambda_n, \mu) \frac{2\lambda_n^2}{\pi} \delta^k l_j + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.10)$$

şeklindedir.

İspat: (3.9) nin ispatı açıktır. (3.10) için kabul edelim ki q potansiyel fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında sürekli olarak türevlenebilir olsun. Ortalama değer teoreminden öyle bir $\xi_j^{(n)} \in (x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)})$ elemanı vardır öyle ki

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} l_j^{(n)} = \left(1 - \frac{q(\xi_j^{(n)})}{\lambda_n} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{q(\xi_j^{(n)})}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^4}\right)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} l_j^{(n)} &= 1 + \frac{q(\xi_j^{(n)})}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^4}\right) \\ \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} l_j^{(n)} - 1 &= \frac{q(\xi_j^{(n)})}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^4}\right) \\ 2\lambda_n^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} l_j^{(n)} - 1 \right) &= q(\xi_j^{(n)}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.9) dan

$$q(x) - q(\xi_j^n) = \frac{\lambda_n}{\pi} \mu l_j + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.11)$$

olur. $q^{(k)}(x)$ i elde etmek için l_j^n in tanımını kullanacağız. Lemma (3.1) den

$$l_j^n = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} (1 + \cos 2\lambda_n t) [q(t) - \mu] dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

$$l_j^n = \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} q(t) dt - \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \mu dt + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \cos 2\lambda_n t [q(t) - \mu] dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^3}\right)$$

olur. Ayrıca Lemma 3.2 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\pi} \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} [q(t) - \mu] dt = q(x) - \mu$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda_n^3}{\pi} l_j &= 2\lambda_n^2 + \frac{\lambda_n}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} [q(t) - \mu] dt + \frac{\lambda_n}{\pi} \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \cos 2\lambda_n t [q(t) - \mu] dt + O(1) \\ &= 2\lambda_n^2 + q(x) - \mu \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} l_j &= \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{\pi q(x)}{2\lambda_n^3} - \frac{\pi \mu}{2\lambda_n^3} \\ l_j^{(k)} &= \frac{\pi q^{(k)}(x)}{2\lambda_n^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade (3.11) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q^{(k)}(x) &= q^{(k)}(\xi_j^n) + \frac{\lambda_n}{\pi} \mu l_j^{(k)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ q^{(k)}(x) &= q^{(k)}(\xi_j^n) + \frac{\lambda_n}{\pi} \mu \left[\frac{\pi q^{(k)}(x)}{2\lambda_n^3} \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ q^{(k)}(x) &= q^{(k)}(\xi_j^n) + \frac{\mu q^{(k)}(x)}{2\lambda_n^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer burada $q^{(k)}(x)$ parantezine alınırsa

$$q^{(k)}(x) = F(\lambda_n, \mu) \left[q^{(k)}(\xi_j^n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (3.12)$$

olur.

$$\begin{cases} y = r(x) \sin \lambda_n \theta(x) \\ y' = \lambda_n r(x) \cos \lambda_n \theta(x) \end{cases} \quad (3.13)$$

şeklindeki Prüfer dönüşümünü göz önüne alalım. (3.1) den

$$q(x) = \frac{y''}{y} + \lambda_n^2 + \mu \quad (3.14)$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y} \right)^2 + \left(\frac{y'}{y} \right)'$$

ifadesi (3.14) de yazılırsa

$$q(x) = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \left(\frac{y'}{y}\right)' + \lambda_n^2 + \mu \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.13) den

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \lambda_n^2 \frac{\cos^2 \lambda_n \theta(x)}{\sin^2 \lambda_n \theta(x)}$$

ve

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = -\frac{\lambda_n^2 \theta'}{\sin^2 \lambda_n \theta(x)}$$

elde edilir. Bu değerler (3.15) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q(x) &= \lambda_n^2 \frac{\cos^2 \lambda_n \theta(x)}{\sin^2 \lambda_n \theta(x)} - \frac{\lambda_n^2 \theta'}{\sin^2 \lambda_n \theta(x)} + \lambda_n^2 + \mu \\ q(x) \sin^2 \lambda_n \theta(x) - (\lambda_n^2 + \mu) \sin^2 \lambda_n \theta(x) &= \lambda_n^2 \cos^2 \lambda_n \theta(x) - \lambda_n^2 \theta' \\ [q(x) - \mu] \sin^2 \lambda_n \theta(x) &= \lambda_n^2 [1 - \theta'] \\ \theta' &= 1 - \frac{[q(x) - \mu]}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n \theta(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

bulunur. (3.16) eşitliğini x_j den x_{j+1} e integrallersek

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \theta' dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(1 - \frac{[q(x) - \mu]}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n \theta(x)\right) dx \\ \frac{\pi}{\lambda_n} &= l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{[q(x) - \mu]}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n \theta(x) \frac{\theta'}{1 - \frac{[q(x) - \mu]}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n \theta(x)} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Taylor seri açılımı kullanılırsa

$$\frac{\pi}{\lambda_n} = l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{(q - \mu)}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n \theta(x) + \frac{(q - \mu)^2}{\lambda_n^4} \sin^4 \lambda_n \theta(x) + \dots \right] \theta' dx$$

yazılabilir. Buradan

$$a_j = - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{\lambda_n^{2k}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q - \mu)^k (\sin \lambda_n \theta)^{2k} \theta' dx = O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{\pi}{\lambda_n} = l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(q - \mu)}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n \theta(x) \theta' dx + a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \quad (3.17)$$

olur. (3.17) de $\sin^2 \lambda_n \theta(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\lambda_n \theta$ trigonometrik eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda_n} &= l_j - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(q-\mu)}{\lambda_n^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\lambda_n \theta \right] \theta' dx + a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \\ \frac{\pi}{\lambda_n} &= l_j - \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) \theta' dx + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) \cos(2\lambda_n \theta) \theta' dx + a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Tekrar (3.16) teki θ' nün tanımını kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda_n} &= l_j - \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) \left[1 - \frac{(q-\mu)}{\lambda_n^2} \sin^2 \lambda_n \theta(x) \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) \cos(2\lambda_n \theta) \theta' dx + a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \\ &= l_j - \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) dx + \frac{1}{2\lambda_n^4} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu)^2 \sin^2 \lambda_n \theta(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) \cos(2\lambda_n \theta) \theta' dx + a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \\ &= l_j - \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mu dx + \frac{1}{2\lambda_n^4} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu)^2 \sin^2 \lambda_n \theta(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) \cos(2\lambda_n \theta) \theta' dx + a_j + O\left(\frac{1}{n^{2N+5}}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olur. Bu ifade de

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{2\lambda_n^4} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu)^2 \sin^2 \lambda_n \theta(x) dx = O\left(\frac{1}{n^5}\right) \\ \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q dx &= \frac{q(x_j)}{2\lambda_n^2} l_j + c_j + O\left(\frac{1}{n^{N+4}}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

ve

$$\frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mu dx = \frac{\mu}{2\lambda^2} (x_{j+1} - x_j) = \frac{\mu}{2\lambda_n^2} l_j \quad (3.20)$$

şeklindedir. Ayrıca (3.18) de

$$d_j = \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (q-\mu) \cos(2\lambda_n \theta) \theta' dx$$

olarak alınırsa kısmi integrasyondan

$$d_j = -\frac{1}{4\lambda_n^3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q'(x) \sin 2\lambda_n \theta dx = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (3.21)$$

elde edilir. Eğer (3.19), (3.20) ve (3.21); (3.18) de yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda_n} &= l_j - \frac{q(x_j)}{2\lambda_n^2} l_j + \frac{\mu}{2\lambda_n^2} l_j + a_j + b_j + c_j + d_j + O\left(\frac{1}{n^{N+4}}\right) \\ \frac{q(x_j)}{2\lambda_n^2} &= 1 - \frac{\pi}{\lambda_n l_j} + \frac{\mu}{2\lambda_n^2} + \frac{a_j + b_j + c_j + d_j}{l_j} + O\left(\frac{1}{n^{N+3}}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan ise $E_j = 2\lambda_n^2 \left(\frac{a_j + b_j + c_j + d_j}{l_j} \right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ olmak üzere

$$q(x_j) = 2\lambda_n^2 \left(1 - \frac{\pi}{\lambda_n l_j} \right) + \mu + E_j + O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right) \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) ye δ operatörünü uygularsak

$$\delta q(x_j) = \delta \left[2\lambda_n^2 \left(1 - \frac{\pi}{\lambda_n l_j} \right) \right] + \delta \mu + \delta E_j + \delta O\left(\frac{1}{n^{N+1}}\right)$$

yazılır. Lemma 2.4 den; $\delta E_j = O\left(\frac{1}{n}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \delta q(x_j) &= \delta(2\lambda_n^2) - \delta \left(\frac{2\pi\lambda_n^2}{\lambda_n l_j} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \delta q(x_j) &= 2\lambda_n \pi \frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$\delta^k q(x_j) = 2\lambda_n \pi \delta^{k-1} \left[\frac{\Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.23)$$

olur. Teorem 3.1 ve Teorem 3.3 den

$$\begin{aligned} q^{(k)}(x) &= F(\lambda_n, \mu) \cdot \delta^k q(x_j) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ q^{(k)}(x) &= F(\lambda_n, \mu) \frac{2\lambda_n^2}{\pi} \delta^k l_j + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3. Kabul edelim ki $q \in C^{N+1}[0, 1]$ olsun. Bu durumda $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$\delta^k q(x_j) = \frac{2\lambda_n^2}{\pi} \delta^k l_j + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.24)$$

olur.

İspat: Teorem 3.2 deki türevlerden ve $\delta l_j = \frac{\Delta l_j}{l_j} = O(n^{-3})$ olduğu gerçeği göz önüne alınırsa, (3.24) yi ispatlamak için

$$\delta^{k-1} \left(\frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right) = \delta^{k-1} \left(\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} \right) + O \left(\frac{1}{n^3} \right) \quad (3.25)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten (3.25), (3.23) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \delta^k q(x_j) &= 2\lambda_n \pi \left[\delta^{k-1} \left(\frac{\lambda_n \Delta l_j}{\pi^2 l_j} \right) + O \left(\frac{1}{n^3} \right) \right] + O \left(\frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2\lambda_n^2}{\pi} \delta^k l_j + O \left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{\lambda_n \Delta l_j}{l_j} - \frac{\pi^2 \Delta l_j}{l_j^2 l_{j+1}} \right] &= \delta \left[\left(\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_j l_{j+1}} \right) \frac{\Delta l_j}{l_j} \right] \\ &= \delta \left[\left(\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_j l_{j+1}} \right) \delta l_j \right] \\ &= \pi^2 \frac{(\Delta l_j + \Delta l_{j+1}) \delta l_j}{l_j^2 l_{j+1} l_{j+2}} + \left(\lambda_n - \frac{\pi^2}{l_{j+1} l_{j+2}} \right) \delta^2 l_j \\ &= O \left(\frac{1}{n^3} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece Lemma 2.4 den (3.25) gösterilmiş olur.

KAYNAKLAR

1. Kreyzig, E., 1978, *Introductory to Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 688p.
2. Bayraktar, M., 1994, *Fonksiyonel Analiz*, Atatürk üniversitesi yayınları, Erzurum, 314s.
3. Waz Waz, A. M., 2002, *Partial Differential Equations Methods and Applications*, Saint Xavier University, Chicago, 455p.
4. Musayev, B., Alp, M., 2000, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı yayınları, Kütahya, 470s.
5. Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1972, *Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions*, Moscow, Russia, 327p.
6. Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L. M., İbikli, E., Brown, S., 2000, *Matematik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 678s.
7. Olver, F. W. J., 1974, *Introduction to asymptotics and special functions*, Academic press, New York and London, 375p.
8. Balcı, M., *Analiz 2*, 1997, Balcı yayınları, Ankara, 420s.
9. Balcı, M., *Analiz 1*, 1999, Balcı yayınları, Ankara, 341s.
10. Levitan, B.M., Sargsyan, I.S., 1975, *Introduction to Spectral Theory; Selfadjoint Ordinary Differential Operators*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 525p.
11. Code, W. J., 2003, Sturm-Liouville problems with eigen-parameter dependent boundary conditions, Phd Thesis, University of Saskatchewan Saskatoon, 145p.
12. Freiling, G. and Yurko, V., 2001, *Invers Sturm-Liouville problems and their Applications*, Nova Science Pub. Inc., 305p.
13. Law, C.K., Yang, C. F., 1998, Reconstructing potential function and its derivatives using nodal data, *Inverse Problems*, 14(2), 299-312.
14. Gerlach, U., 2007, *The Prüfer System*, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
15. Chen, Y. T., Cheng, Y. H., Law, C. K. and Tsay, J., 2002, L^1 convergence of the reconstruction formula for the potential function, *American Mathematical Society*, 130, 2319-2324.
16. McLaughlin, J.R., 1988, Inverse spectral theory using nodal points as data-a uniqueness result, *Journal of Differential Equations*, 73, 354-362.

17. Koyunbakan, H., 2005, Inverse nodal problem for singular differential operator, *Journal of Inverse and Ill- Posed Problems*, 13, 435-440.
18. Gelfand, I.M. and Levitan, B. M., 1951, On the determination of a differential equation from its spectral function, *American Mathematical Society Trans.*, 1, 253-304.
19. Law, C.K., Shen, C. L., Yang, C. F., 1999, The inverse nodal problem on the smoothness of the potential function, *Inverse Problems*, 15, No.1, 253-263.
20. Ashbaugh, M.S. and Benguira, R.D., 1993, Eigenvalue ratios for Sturm-Liouville operators, *Journal of Differential Equations*, 103, 205-219.
21. Hochstadt, H., 1967, On inverse problems associated with second-order differential operators, *Acta Math.*, 119, 173-192.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2001 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2005 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2007 yılı ekim ayında Fen Bilimleri Enstitüsünün açtığı araştırma görevliliği kadrosunu kazandım. Halen Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.