

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

169339

ORLİCZ FONKSİYONLARI İLE TANIMLI BAZI YENİ DİZİ
UZAYLARI

Beyhan KOYUNBAKAN

Tez Yöneticisi
Doç. Dr. Mikail ET

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ
2005

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

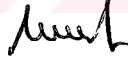
ORLİZCZ FONKSİYONLARI İLE TANIMLI BAZI YENİ DİZİ
UZAYLARI

Beyhan KOYUNBAKAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /~~oyçok~~
~~luğu~~ ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mikail ET



Üye: Prof.Dr. Rifat ÇOLAK



Üye: Yrd.Doç.Dr. Mahmut IŞIK



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/10.../2005
tarih ve 2005/36-4..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen değerli hocam **Doç. Dr. Mikail ET'** e ve yine her konuda desteğini gördüğüm **Ars. G r. Yavuz ALTIN'** a teşekkür eder, saygılar sunarım.

Beyhan KOYUNBAKAN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
SİMGELER LİSTESİ.....	IV
ÖZET.....	V
ABSTRACT.....	VI
BİRİNCİ BÖLÜM	
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	1
1.2.Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık.....	3
1.3. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesáro Yakınsaklık	5
1.4. Lakunary Dizileri	8
1.5. Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık	11
1.6. Fark Dizi Uzayları	13
1.7. Orlicz Fonksiyonları ve Bu Fonksiyonlar ile Tanımlı Dizi Uzayları.....	15
İKİNCİ BÖLÜM	
ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	18
2.1. $N_{\theta} [\Delta, M, p, q, u]_0, N_{\theta} [\Delta, M, p, q, u]_1$ ve $N_{\theta} [\Delta, M, p, q, u]_{\infty}$ Dizi Uzaylarının Bazı Özellikleri	18
2.2. Δ_q — Lakunary İstatistiksel Yakınsaklık.....	26
KAYNAKLAR.....	29

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi

l_{∞} : Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı

c : Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı

c_0 : Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı

ω : $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bütün diziler uzayı

$\delta(K)$: K kümesinin yoğunluğu

$h.h.k.$: Hemen hemen her k için

S : İstatistiksel yakınsak diziler uzayı

S_0 . Sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı

σ_1 : Cesáro yakınsak diziler uzayı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Orlicz Fonksiyonları ile Tanımlı Bazı Yeni Dizi Uzayları

Beyhan KOYUNBAKAN

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Bölümü

2005, Sayfa : 30

Bu çalışma iki bölüm olarak düzenlendi.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık, Cesáro toplanabilme kavramları tanımlanıp bu kavramlara ilişkin bağıntılar incelendi ve hemen hemen yakınsaklık, lakunary dizileri ile fark dizilerinin bilinen bazı özellikleri verildi.

İkinci bölümde; bir Orlicz fonksiyonu ve bir yarı norm kullanarak yeni üç tip fark dizi uzayı ve Δ_q - lakunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlandı ve bu uzaylara ilişkin bir kaç özellik verildi.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzayı, Orlicz fonksiyonu, Cesáro toplanabilme

ABSTRACT

Master Thesis

SOME NEW SEQUENCE SPACES DEFINED BY ORLICZ FUNCTIONS

Beyhan KOYUNBAKAN

Firat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2005, Page : 30

This thesis has been arranged as two sections.

In the first section main definitions and theorems were given. In addition, the concepts of statical convergence and Cesáro summability were defined and some relations related to these concepts were examined. Some known properties of the almost convergence, lacunary sequences and difference sequences were given.

In the second section, by using an Orlicz function and seminorm, three new difference sequence spaces and the the concept of Δ_q -lacunary statical convergence were defined and some relations related the concepts were given.

Key Words: Sequence space, Orlicz function, Cesáro summability

I.BÖLÜM

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ ve } . : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir *vektör (lineer) uzay* adı verilir.

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in X$ vardır.

L4) Her $x \in X$ için $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1.x = x$

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

L8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ [1].

Tanım 1.1.2 X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ çiftine de bir normlu uzay denir.

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in K$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ [2].

Tanım 1.1.3 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X 'de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 1.1.4 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.5 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve bu uzayda $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n > n_0$ için

$$\|x_n - s\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $x = (x_n)$ dizisi s 'ye yakınsaktır denir ve $\lim_n x_n = s$ yazılır.

Bu çalışmada kompleks terimli tüm $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. ω uzayı $x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. ω nın her alt lineer uzayına bir *dizi uzayı* denir. Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$l_\infty = \left\{ x = x_k : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = x_k : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = x_k : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.6 X bir dizi uzayı olsun. X aynı zamanda bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X 'e bir BK - uzayı denir [3].

Tanım 1.1.7 Tanım 1.1.2 de N_1, N_3, N_4 şartlarının sağlanması durumunda X uzayına yarınormlu bir uzay denir [2].

1.2. Doğal Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık tanımı Fast [4] tarafından kısa bir not olarak verildi. Schoenberg [5] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini verdi. Her iki yazar da sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesáro toplanabilir olduğunu ifade ettiler.

Bu bölümde istatistiksel yakınsak diziler, lakunary dizileri ve lakunary istatistiksel yakınsak dizilerin bilinen özellikleri incelenecektir.

Bir $K \subset \mathbb{N}$ cümlesindeki x' e eşit yada x 'ten daha küçük olan pozitif tamsayıların sayısı $K(x)$ ile gösterilsin. Örneğin bir K cümlesi $2, 4, 6, \dots$ çift tam sayılardan oluşursa $K(1) = 0, K(2) = 1, K(6) = 3, K(7) = 3, K(\frac{15}{2}) = 3 \dots$ dir. Gerçekten $x \geq 0$ ise $K(x) = [\frac{x}{2}]$ dir. Diğer taraftan $K = (a_i)$ cümlesi için $K(a_j) = j$ dir.

Tanım 1.2.1 Bir K cümlesinin asimptotik yoğunluğu

$$\delta(K) = \liminf_n \frac{K(n)}{n}$$

dir. $\frac{K(n)}{n}$ dizisi bir limite sahip ise K 'nın doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_n \frac{K(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\delta(K) = 0$ ise K cümlesine *sıfır yoğunluklu cümle* denir [6].

Teorem 1.2.1 $K = (a_i)$ sonsuz bir dizi ise bu taktirde;

$$\delta(K) = \liminf_n \frac{n}{a_n}$$

dir. Eğer $\delta(K)$ mevcut ise $\delta(K) = \lim_n \frac{n}{a_n}$ dir [6].

İspat $(\frac{k}{a_k})$ dizisi $\frac{K(n)}{n}$ dizisinin bir alt dizisidir. Buradan

$$\liminf_n \frac{K(n)}{n} \leq \liminf_k \frac{k}{a_k}$$

elde edilir. Eğer $n \geq a_i$ olacak şekilde bir tam sayı ve a_k , K cümlesindeki n ' den büyük en küçük tamsayı ise bu durumda $a_{k-1} \leq n < a_k$ ve

$$\frac{k}{a_k} - \frac{K(n)}{n} = \frac{k}{a_k} - \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$$

dir. Böylece

$$\frac{k}{a_k} - \frac{K(n)}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur.

Tanım 1.2.2 Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir cümle hariç diğer bütün k 'lar için bir P özelliğini sağlıyorsa (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir, kısaca h.h.k. şeklinde gösterilir [7].

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenilerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 1.2.3 $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani h.h.k. için $|x_k - \ell| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $S - \lim x = \ell$ veya $x_k \rightarrow \ell(S)$ yazılır. Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir [7].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $\ell = 0$ olması halinde S_0 yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\},$$

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

dir. Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ demektir. Ancak bu dizi yakınsak değildir. Diğer taraftan l_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ dir. Ancak $x \notin l_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise limiti tektir, yani $S - \lim x = \ell_1$, $S - \lim x = \ell_2$ ise $\ell_1 = \ell_2$ dir.

Teorem 1.2.2 $S - \lim x = \ell_1$, $S - \lim y = \ell_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $S - \lim x = \ell_1$ ise $S - \lim(\alpha x) = \alpha \ell_1$

ii) $S - \lim x = \ell_1$, $S - \lim y = \ell_2$ ise $S - \lim (x + y) = \ell_1 + \ell_2$ dir [7].

Bu teoremden istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 1.2.4 $\varepsilon > 0$ olsun. h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var yani,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}|$$

ise $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir [7].

Teorem 1.2.3 Bir x dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir [7].

İspat Burada "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir." teoreminin ispatına benzer bir yol takip edilecektir. $S - \lim x_k = \ell$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda h.h.k için

$$|x_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer N , $|x_N - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| &= |x_k - \ell + \ell - x_N| \leq |x_k - \ell| + |x_N - \ell| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\text{h.h.k için}) \end{aligned}$$

elde edilir.

1.3. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesáro Yakınsaklık

Bu kısımda, kuvvetli Cesáro yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 1.3.1 $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \ell$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa x dizisi ℓ ye Cesáro yakınsaktır denir. Cesáro yakınsak dizilerin cümlesi

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \ell) = 0 \text{ en az bir } \ell \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [8].

Teorem 1.3.1 $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına yakınsak ise (x_k) dizisi ℓ ye σ_1 -yakınsaktır denir [8].

Teorem 1.3.2 $S - \lim x = \ell$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| < M$ ise $\sigma_1 - \lim x = \ell$ dir [7].

İspat $\ell = 0$ olsun $\sigma_1 - \lim x = 0$ olduğunu gösterelim. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k| < \varepsilon}} |x_k| + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k| \geq \varepsilon}} |x_k| \right\} \\ &\leq \frac{1}{n} n\varepsilon + \frac{1}{n} M |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

x dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Teoremin karşıtı doğru değildir. Gerçekten $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması $\frac{1}{2}$ ye yakınsaktır. Fakat bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 1.3.2 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa x dizisi ℓ ye kuvvetli p -Cesáro yakınsaktır denir. Kuvvetli p -Cesáro yakınsak dizilerin cümlesi,

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p = 0, \text{ en az bir } \ell \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [1]. $p = 1$ olması durumunda w_p uzayı $|\sigma_1|$ ile gösterilecektir.

Teorem 1.3.3 $0 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde;

i) Bir ℓ sayısına kuvvetli p -Cesáro yakınsak olan bir dizi ℓ sayısına istatistiksel yakınsaktır.

ii) Bir ℓ sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi ℓ sayısına aynı zamanda kuvvetli p -Cesáro yakınsaktır [9].

İspat i) $x \in w_p$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - \ell| < \varepsilon}} |x_k - \ell|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - \ell| \geq \varepsilon}} |x_k - \ell|^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $S - \lim x_k = \ell$ demektir.

ii) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ve $K = \|x\|_\infty + \ell$ olsun. Ayrıca $\varepsilon \geq 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için N_ε 'u

$$\frac{1}{n} \left\{ k \leq n : |x_k - \ell| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - \ell| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu taktirde $n \geq N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - \ell|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - \ell|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına kuvvetli p -Cesáro yakınsaktır.

1.4 Lakunary Dizileri

Bu kısımda lakunary dizisi kavramı tanımlanacak ve N_θ ile $|\sigma_1|$ arasındaki bağıntılar incelenecektir.

Tanım 1.4.1 Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lakunary dizisi denir [10]. $\theta = \{k_r\}$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir. Bu çalışmada

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve uygunluk için kısaca $\sum_{i \in I_r} |x_i|$ ile gösterilecek ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır.

Tanım 1.4.2 Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lakunary dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - \ell| = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa x dizisi ℓ sayısına kuvvetli lakunary yakınsaktır denir, kuvvetli lakunary yakınsak dizilerin cümlesi

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \tau_r \equiv \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - \ell| \rightarrow 0, \text{ en az bir } \ell \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir [10].

N_θ uzayı $\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k| \right)$ normu ile bir BK- uzayıdır. Herhangi bir $x \in N_\theta$ için $\ell = \ell_\theta(x)$ tektir. $\ell_\theta(x) = 0$ ise bu uzayı N_θ^0 ile göstereceğiz. $\theta = (2^r)$ olması halinde $N_\theta = |\sigma_1|$ dir ve yukarıda verilen norm alışılmış norma denktir.

Teorem 1.4.1 $|\sigma_1| \subseteq N_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır [10].

İspat (Yeterlilik) $\liminf_r q_r > 1$ ise yeteri kadar büyük r ler için $1 + \delta \leq q_r$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $x \in |\sigma_1^0|$ için

$$\begin{aligned} \tau_r &= \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_i| = \frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i| - \frac{1}{h_r} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i| \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i| \right) - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i| \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan

$$\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1 + \delta}{\delta} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$$

elde ederiz. Böylece $\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i|$ ve $\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |x_i|$ terimlerinin her ikisi de sıfıra yakınsar ve $x \in N_\theta^0$ elde edilir. Buradan $|\sigma_1| \subseteq N_\theta$ bağıntısı elde edilir.

(Gereklilik) Kabul edelim ki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. θ lakunary olduğundan $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere $\frac{k_{r_j}}{k_{r_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{k_{r_{j-1}}}{k_{r_{j-2}}} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lakunary dizisinin bir (k_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz. $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{r_j}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde herhangi bir ℓ sayısı için

$$\frac{1}{h_{r_j}} \sum_{I_{r_j}} |x_i - \ell| = |1 - \ell|, \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

ve

$$\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k - \ell| = |\ell|, \quad r \neq r(j)$$

olur. Bundan dolayı $x \notin N_\theta$ fakat x kuvvetli Cesáro yakınsaktır. Eğer t yeteri kadar büyük bir tamsayı ise $k_{r_{j-1}} < t \leq k_{r_{j+1}-1}$ olacak şekilde bir tek j bulabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_k| \leq \frac{k_{r_{j-1}} + h_{r_j}}{k_{r_{j-1}}} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}$$

yazabiliriz. $t \rightarrow \infty$ iken $j \rightarrow \infty$ olur. Böylece $x \in |\sigma_1^0|$ olur.

Teorem 1.4.2 $N_\theta \subseteq |\sigma_1|$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır [10].

İspat (Yeterlilik) Eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise her $r \geq 1$ için $q_r \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ tamsayısı vardır. $x \in N_\theta^0$ ve $\varepsilon > 0$ alındığında $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\tau_i < K$ ve $\sup_{i \geq R} \tau_i < \varepsilon$ olacak şekilde $K > 0$ ve $R > 0$ sayılarını bulabiliriz. Böylece $r > R$ olmak üzere $k_{r-1} < t < k_r$ olacak şekilde herhangi bir t için

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sum_{I_1} |x_i| + \sum_{I_2} |x_i| + \dots + \sum_{I_r} |x_i| \right) \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}} \tau_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} \tau_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} \tau_R + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}} \tau_{R+1} + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} \tau_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sup_{i \geq 1} \tau_i \right) \frac{k_R}{k_{r-1}} + \left(\sup_{i \geq R} \tau_i \right) \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \\ &< K \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon M \end{aligned}$$

yazabiliriz. $t \rightarrow \infty$ iken $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan $\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i| \rightarrow 0$ olur ve sonuç olarak $x \in |\sigma_1^0|$ bulunur.

(Gereklik) Kabul edelim ki $\limsup_r q_r = \infty$ olsun ve N_θ uzayında kuvvetli Cesáro yakınsak olmayan bir dizi oluşturalım. İlk olarak $q_{r_j} > j$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ lakunary dizisinin bir $\{k_{r_j}\}$ alt dizisini seçelim ve $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & k_{r_j-1} < i \leq 2k_{r_j-1} \quad j = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$\tau_{r_j} = \frac{k_{r_j-1}}{k_{r_j} - k_{r_j-1}} < \frac{1}{j-1}$$

ve $r \neq r_j$ ise $\tau_r = 0$ dir. Böylece $x \in N_\theta^0$ dir. $|\sigma_1|$ de 0 ve 1 den oluşan herhangi bir dizinin kuvvetli limiti vardır, bu limit 0 veya 1 dir. Yukarıdaki $x = (x_i)$ dizisi $i = 1, 2, 3, \dots, k_{r_j}$, için

$$\frac{1}{k_{r_j}} \sum_i |x_i - 1| \geq \frac{k_{r_j} - 2k_{r_j-1}}{k_{r_j}} = 1 - \frac{2k_{r_j-1}}{k_{r_j}} > 1 - \frac{2}{j}$$

olup bu ifade de 1' yakınsar ve $i = 1, 2, 3, \dots, 2k_{r_j-1}$ için

$$\frac{1}{2k_{r_j}} \sum_i |x_i| \geq \frac{k_{r_j-1}}{2k_{r_j-1}} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Buradan $x \notin |\sigma_1|$.

Teorem 1.4.3 $\theta = \{k_r\}$ bir lakunary dizisi olsun. Bu taktirde $N_\theta = |\sigma_1|$ olması için gerek ve yeter şart $1 < \liminf_r q_r < \limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır [10].

Teorem 1.4.4 $x \in |\sigma_1| \cap N_\theta$ ise bu taktirde $\ell_{|\sigma_1|} = \ell_\theta(x)$ dir [10].

İspat $\ell = \ell_{|\sigma_1|}(x)$, $\ell' = \ell_\theta(x)$ olsun ve $\ell \neq \ell'$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\sigma_r + \tau_r = \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_i - \ell| + \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |\ell - \ell'| = |\ell - \ell'| > 0$$

dir. $x \in N_\theta$ olduğundan $\tau_r \rightarrow 0$ olur. Böylece yeteri kadar büyük r için $\sigma_r > \frac{1}{2} |\ell - \ell'|$ dir.

Yeteri kadar büyük r ' ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} |x_i - \ell| &\geq \frac{1}{k_r} \sum_{I_r} |x_i - \ell| = \frac{k_r - k_{r-1}}{k_r} \sigma_r \\ &= \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) \sigma_r > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) |\ell - \ell'| \end{aligned}$$

dir. $x \in |\sigma_1|$ olduğundan sol taraf sıfıra yakınsar. Buradan $q_r \rightarrow 1$ elde ederiz. Böylece $N_\theta^0 \subseteq |\sigma_1^0|$ dir. $(x - \ell') \in N_\theta^0$ olduğundan $(x - \ell') \in |\sigma_1^0|$ dir. Böylece

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i - \ell'| \rightarrow 0$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i - \ell'| + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i - \ell| \geq |\ell - \ell'| > 0$$

elde edilir. ki bu bir çelişkidir. Çünkü soldaki her iki terim de sıfıra yakınsar. Dolayısıyla $\ell = \ell'$ elde edilir.

1.5. Kuvvetli Hemen Hemen Yakınsaklık

Bu kısımda kuvvetli hemen hemen yakınsak diziler uzayı ile N_θ uzayı arasında kapsama bağıntılarını inceleyeceğiz.

Tanım 1.5.1 Bir $x = (x_i)$ dizisinin ℓ sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} (x_i - \ell) = 0, \quad m \text{ ye göre düzgün}$$

olmasıdır [11].

Tanım 1.5.2 Bir $x = (x_i)$ dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} |x_i - \ell| = 0, \quad m \text{ ye göre düzgün}$$

ise x dizisi ℓ sayısına kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir [10].

Hemen hemen yakınsak dizilerin cümlesi AC ve kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin cümlesi ise $[AC]$ ile gösterilecektir. Aşıkarak olarak $c \subset [AC] \subset AC \subset l_\infty$ dir.

Teorem 1.5.1 Her θ lakunary dizisi için $[AC] \subset N_\theta$ dir [10].

İspat $x \in [AC]$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} |x_i - \ell| < \varepsilon, \quad n > N, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

olacak şekilde ℓ ve $N > 0$ sayıları vardır. θ lakunary olduğundan $r \geq R$ olduğunda $h_r > N$ olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı seçebiliriz. Buradan $\tau_r < \varepsilon$ dir. Böylece $x \in N_\theta$ olur. Şimdi $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & k_r \leq k_{r-1} + \sqrt{h_r}, \text{ en az bir } r \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi kuvvetli hemen hemen yakınsak değildir. O halde $x \in N_\theta \setminus [AC]$ dir.

Teorem 1.5.2 $[AC] = \cap N_\theta$ dir [10].

İspat İspat için $x \notin [AC]$ iken $x \notin N_\theta$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ lakunary dizisinin var olduğunu göstermek yeterlidir. x 'in kuvvetli Cesáro yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i - \ell| \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı vardır. $x \notin [AC]$ olduğundan

$$\frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} |x_i - \ell| \geq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı, her bir $n > N$ ve m tamsayısı vardır. Bu taktirde $n_r \rightarrow \infty$ ve

$$\frac{1}{n_r} \sum_{i=m_r+1}^{m_r+n} |x_i - \ell| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde (m_r) ve (n_r) alt dizilerini seçebiliriz. $x \in |\sigma_1|$ olduğundan $m_r \rightarrow \infty$ olur. $\theta = \{k_r\}$ nin lakunary dizisini aşağıdaki şekilde oluşturalım.

$$\begin{array}{lll}
\dots & k_1 = m_1, & \dots \\
k_2 = m_1 + n_1, & k_3 = m_{r_2}, & (m_{r_2} > 2k_2), \\
k_4 = m_{r_2} + n_{r_2}, & k_5 = m_{r_3}, & (m_{r_3} > 2k_4), \\
k_6 = m_{r_3} + n_{r_3}, & \dots & (m_{r_i} > 2k_{2i-2}), \\
\dots & k_{2i-1} = m_{r_i}, & \dots \\
k_{2i} = m_{r_i} + n_{r_i}, & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Bu taktirde $\theta = \{k_r\}$ nin lakunary olduğu aşıkardır ve $r = 2j$ için toplamı, $i = m_{r_j} + 1$ den $i = m_{r_j} + n_{r_j}$ ye kadar alırsak

$$\tau_r = \frac{1}{n_r} \sum_i |x_i - \ell| \geq \varepsilon$$

olur. Teorem 1.4.4 den $x \notin N_\theta$ olur.

1.6. Fark Dizi Uzayları

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızmaz [12] tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızmaz $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\ell_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}, \\
c(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}, \\
c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},
\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normlu ile birer BK -uzayı olduğunu gösterdi. Et [13] ve Et, Nuray[14] çalışmalarında X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $X(\Delta)$ dizi uzayını aşağıdaki gibi tanımlayıp bazı özelliklerini verdiler.

Tanım 1.6.1 X herhangi bir dizi uzayı olsun. $X(\Delta)$ dizi uzayını

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) : (\Delta x) \in X\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi $X(\Delta)$ 'nin birkaç özelliğini verelim.

Teorem 1.6.1 X bir lineer uzay ise $X(\Delta)$ de bir lineer uzaydır [14].

Teorem 1.6.2 $X \subset Y$ ise $X(\Delta) \subset Y(\Delta)$ dir [14].

Teorem 1.6.3 X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A konveks ise $A(\Delta)$, $X(\Delta)$ de konvektir [13].

Teorem 1.6.4 X , $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta)$

$$\|x\|_{\Delta} = |x_i| + \|\Delta x\|$$

normu ile Banach uzayıdır [14].

Teorem 1.6.5 X ayrılabilir ise $X(\Delta)$ de ayrılabilirdir [13].

Sonuç 1.6.1 $c_0(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $\ell_p(\Delta)$, $(1 \leq p < \infty)$ ayrılabilirdir [14].

Tanım 1.6.2 $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani h.h.k. için $|\Delta x_k - \ell| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına Δ -istatistiksel yakınsaktır. Δ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta)$ ile gösterilir. $\ell = 0$ olması halinde $S_0(\Delta)$, yani sıfıra yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [15].

Sonuç 1.6.2 $S(\Delta)$ lineer uzaydır [14].

Tanım 1.6.3 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde bir ℓ sayısı varsa x dizisi ℓ ye kuvvetli Δ -Cesáro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ -Cesáro yakınsak dizilerin cümlesini

$$w_p(\Delta) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta x_k - \ell|^p = 0, n \rightarrow \infty, \text{ en az bir } \ell \text{ için} \right\}$$

ile göstereceğiz. $x \in w_p(\Delta)$ olması durumunda $x_k \rightarrow \ell(w_p(\Delta))$ yazacağız [15].

Teorem 1.6.6 $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow \ell(w_p(\Delta))$ ise $x_k \rightarrow \ell(S(\Delta))$ dir.
- ii) $x \in \ell_{\infty}(\Delta)$ ve $x_k \rightarrow \ell(S(\Delta))$ ise $x_k \rightarrow \ell(w_p(\Delta))$ [15].

Sonuç 1.6.3 i) $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta)$

ii) $S(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta) = w_p(\Delta) \cap \ell_\infty(\Delta)$ [14].

Tanım 1.6.4 $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta x_k - \Delta x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ -istatistiksel Cauchy dizisi denir. [14].

Teorem 1.6.7 Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ -istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi Δ -istatistiksel Cauchy dizisidir [14].

Teorem 1.6.8 $y = (y_k)$, Δ -istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer $x = (x_k)$, h.h.k. için $\Delta x_k = \Delta y_k$ olacak şekilde bir dizi ise x de Δ -istatistiksel yakınsak bir dizidir [14].

1.7. Orlicz Fonksiyonu ve Bu Fonksiyon Yardımıyla Tanımlanan Dizi Uzayları

Tanım 1.7.1 $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı sürekli, azalmayan, konveks ve $M(0) = 0, x > 0$ için $M(x) > 0, x \rightarrow \infty$ iken $M(x) \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan M fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir.

Bir M Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x p(t) dt$$

integral formunda yazılabilir. Burada M nin çekirdeği olarak bilinen $p, t > 0$ için sağdan türevlenebilir, $P(0) = 0, t > 0$ için $p(t) > 0, p$ azalmayan ve $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ dur.

Bir Orlicz fonksiyonu verilmiş olsun ve

$$q(s) = \sup \{t : p(t) \leq s\}$$

olsun. Bu taktirde

$$N(x) = \int_0^x q(s) ds$$

şeklinde bir N fonksiyonu vardır. Burada $q(s), p(t)$ nin tüm özelliklerine sahip olan N nin çekirdeğidir. Açıkça N bir Orlicz fonksiyonudur. Bu şekildeki M ve N fonksiyonları birbirinin tamamlayıcısı olarak adlandırılır.

$\{x_i\}$ reel dizilerinin,

$$l_M = \left\{ x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olur ki bu uzaya Orlicz dizi uzayı denir [16].

Tanım 1.7.2 $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayalım.

$$l_M(p) = \left\{ x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} (M(\frac{x_k}{\rho}))^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

$$W(M, p) = \left\{ x \in \omega : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (M(\frac{|x_k - \ell|}{\rho}))^{p_k} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ iken, bazı } \ell, \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

$$W_0(M, p) = \left\{ x \in \omega : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (M(\frac{|x_k|}{\rho}))^{p_k} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ iken, bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

$$W_{\infty}(M, p) = \left\{ x \in \omega : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} (M(\frac{|x_k|}{\rho}))^{p_k} < \infty, \text{ bazı } r > 0 \text{ için} \right\}$$

Tüm k lar için $p_k = 1$ olduğundan $l_M(p) = l_M$ olur. $M(x) = x$ olduğundan sırası ile yukarıda tanımlı uzaylar $[C, 1, p]$, $[C, 1, p]_0$, $[C, 1, p]_{\infty}$ olur. Tüm k lar için $p_k = 1$ olduğundan $W(M, p)$, $W_0(M, p)$, ve $W_{\infty}(M, p)$ uzayları $W(M)$, $W_0(M)$, ve $W_{\infty}(M)$ olarak gösterilir [17].

Bu kısımda $l_M(p)$ ile ilgili bir kaç sonuç vereceğiz.

Teorem 1.7.1 $H = \sup_k p_k$ ise $l_M(p)$ kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzaydır [17].

Teorem 1.7.2 $l_M(p)$,

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} (M(\frac{|x_k|}{\rho}))^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} < 1, n = 1, 2, \dots \right\}$$

ile bir paranormlu uzaydır. Burada $H = \max_k(1, \sup p_k)$ olur [17].

Teorem 1.7.3 $1 \leq p_k < \infty$ olsun. Bu halde $l_M(p)$,

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{\frac{pn}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, \dots \right\}$$

ile tam paranormlu uzaydır [17].

Teorem 1.7.4 Her k için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ olsun. Bu durumda

$$l_M(p) \subseteq l_M(q)$$

olur [17].

Teorem 1.7.5 (p_k) sınırlı olsun. $W(M, p)$, $W_0(M, p)$, ve $W_\infty(M, p)$ uzayları lineer uzaylardır [17].

Teorem 1.7.6 $0 < p_k \leq q_k$ ve $\left(\frac{q_k}{p_k} \right)$ sınırlı olsun. Bu durumda

$$W(M, q) \subseteq W(M, p)$$

olur [17].

2. BÖLÜM

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

2.1. $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0, N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1$ ve $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_\infty$ Dizi Uzaylarının Bazı Özellikleri

Bu bölümde bir Orlicz fonksiyonu, bir q yarı normu ve bir $u = (u_k)$ çarpım dizisi kullanılarak $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1$, $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0$ ve $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_\infty$ dizi uzaylarını tanımlayıp bazı özelliklerini vereceğiz. $\omega(X)$ ile tüm vektör değerli dizilerin kümesini göstereceğiz.

Tanım 2.1.1 M bir Orlicz fonksiyonu, (X, q) bir yarı normlu uzay, $p = (p_k)$ reel sayıların artan bir dizisi, θ bir lakunary dizisi ve $u = (u_k)$ skaler sayıların herhangi bir dizisi olmak üzere aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayalım.

$$\begin{aligned} N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1 &= \left\{ x \in \omega(X) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = \infty, \text{ en az bir } \ell, \rho > 0 \text{ için} \right\} \\ N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0 &= \left\{ x \in \omega(X) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}, \\ N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_\infty &= \left\{ x \in \omega(X) : \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}. \end{aligned}$$

Eğer $M(x) = x, \forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ ise bu uzaylar $N_\theta [\Delta, q, u]_0, N_\theta [\Delta, q, u]_1$ ve $N_\theta [\Delta, q, u]_\infty$ ile gösterilir.

$H = (1, \sup_k p_k)$ ve $C = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$|a_k + b_k| \leq C(|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k})$$

ve

$$|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H)$$

eşitsizlikleri çalışmanın ilerleyen kısımlarında sık sık kullanılacaktır.

Teorem 2.1.1 $p = (p_k)$ sınırlı bir dizi olsun. $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0, N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1$ ve $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_\infty$ uzayları $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde bir lineer uzaydır.

İspat $x, y \in N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 sayıları vardır. $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olarak tanımlansın. M azalmayan, konveks ve Δ lineer bir operatör olduğundan $H = \sup_k p_k$ ve $C = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta(\alpha x_k + \beta y_k)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha u_k \Delta x_k}{\rho_3} + \frac{\beta u_k \Delta y_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha u_k \Delta x_k}{\rho_1} + \frac{\beta u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{\beta u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq C \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + C \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\beta u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olduğundan $N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_0$ uzayı lineer uzaydır. $N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1$ ve $N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_\infty$ uzayları için benzer bir ispat yapılır.

Teorem 2.1.2 $H = \max(1, \sup_k p_k)$ olmak üzere

$$N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_0, N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1, N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_\infty$$

uzayları

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right] \leq 1 \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right\}$$

ile paranormlu uzaydır.

İspat $x \in N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_\infty$ olsun.

$$g(x) \geq 0, \quad g(x) = g(-x), \quad g(\bar{\theta}) = 0$$

olur.

$(x_k), (y_k) \in N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_\infty$ olsun. $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ olmak üzere

$$\sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) \leq 1,$$

$$\sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right) \leq 1$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. $\rho = \rho_1 + \rho_2$ olsun. O zaman

$$\sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{\Delta(u_k x_k + u_k y_k)}{\rho} \right) \right) \leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho_1} \right) \right) + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta y_k}{\rho_2} \right) \right)$$

olur. Böylece

$$g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$

olduğunu elde ederiz.

Son olarak skaler çarpımın sürekli olduğunu ispatlayalım. λ sıfırdan farklı bir sayı olsun.

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta(\lambda x_k)}{\rho} \right) \right) \leq 1, \rho > 0 \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{\lambda u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \leq 1, \rho > 0 \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \inf \left\{ (r \cdot |\lambda|)^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{r} \right) \right) \leq 1, r > 0 \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Burada $r = \frac{\rho}{\lambda}$ dır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.1.3 M bir Orlicz fonksiyonu ve $p = (p_k)$ dizisi sınırlı olsun. Bu taktirde $N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_0 \subset N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1 \subset N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_\infty$ ve bu kapsama kesindir.

İspat $N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_0 \subset N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1$ kapsamı açıktır. $N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1 \subset N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_\infty$ olduğunu gösterelim. $x \in N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde en az bir pozitif ρ_1 sayısı vardır. $\rho = 2\rho_1$ olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &= \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell + \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \left\{ \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right] + \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(q \left(\frac{\ell}{\rho_1} \right) \right) \right] \right\}^{p_k} \\ &< \sup_r \frac{C}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + \sup_r \frac{C}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\ell}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &< \sup_r \frac{C}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + C \max \left(1, \left[M \left(q \left(\frac{\ell}{\rho_1} \right) \right) \right]^H \right) < \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $x \in N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_\infty$ olur.

Bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. $\theta = (2^r)$, $M(x) = x$, $q(x) = |x|$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ve $u = (1, 1, 1, \dots)$ olsun. $x = (x_k)$ dizisini

$$\Delta x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde $x \in N_\theta[M, p, q, u]_\infty \setminus N_\theta[M, p, q, u]_1$ dir.

Teorem 2.1.4 M bir orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde

$$i) N_\theta[M, q]_1 \subset N_\theta[\Delta, M, q]_1$$

$$ii) N_\theta[M, q]_0 \subset N_\theta[\Delta, M, q]_0$$

$$iii) N_\theta[M, q]_\infty \subset N_\theta[\Delta, M, q]_\infty$$

ve bu kapsamalar kesindir.

İspat $i)$ $x \in N_\theta[M, q]_1$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right] = 0$$

dir. Diğer taraftan M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right] \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{(x_k - x_{k+1}) - \ell}{\rho} \right) \right) \right] \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right] + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_{k+1}}{\rho} \right) \right) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur. O halde $x \in N_\theta[\Delta, M, q]_1$ dir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

$X = \mathbb{C}$, $q = |x|$, $M(x) = x$, $\theta = 2^r$ olsun. Bu taktirde $x = (k) \in N_\theta[\Delta, M, q]_1$ fakat $x = (k) \notin N_\theta[M, q]_1$ dir.

$ii)$ $x \in N_\theta[M, q]_0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] = 0$$

dir. Diğer taraftan M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right] \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_{k+1}}{\rho} \right) \right) \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur. O halde $x \in N_\theta [\Delta, M, q]_0$ olur.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

$X = \mathbb{C}$, $q = |x|$, $M(x) = x$, $\theta = 2^r$ olsun. Bu taktirde $x = (1) \in N_\theta [\Delta, M, q]_0$ fakat $x = (1) \notin N_\theta [M, q]_0$ dır.

iii) $x \in N_\theta [M, q]_\infty$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] < \infty$$

dir. Diğer taraftan M azalmayan ve konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{\Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right] \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{x_{k+1}}{\rho} \right) \right) \right] < \infty \end{aligned}$$

olur. O halde $x \in N_\theta [\Delta, M, q]_\infty$ olur.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

$X = \mathbb{C}$, $q = |x|$, $M(x) = x$, $\theta = 2^r$ olsun. Bu taktirde $x = (k) \in N_\theta [\Delta, M, q]_\infty$ fakat $x = (k) \notin N_\theta [M, q]_\infty$ dır.

Teorem 2.1.5 M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonları olsunlar. Buna göre

- i) $N_\theta [\Delta, M_1, p, q, u]_0 \cap N_\theta [\Delta, M_2, p, q, u]_0 \subset N_\theta [\Delta, M_1 + M_2, p, q, u]_0$
- ii) $N_\theta [\Delta, M_1, p, q, u]_1 \cap N_\theta [\Delta, M_2, p, q, u]_1 \subset N_\theta [\Delta, M_1 + M_2, p, q, u]_1$
- iii) $N_\theta [\Delta, M_1, p, q, u]_\infty \cap N_\theta [\Delta, M_2, p, q, u]_\infty \subset N_\theta [\Delta, M_1 + M_2, p, q, u]_\infty$ dır.

İspat i) $x \in N_\theta [\Delta, M_1, p, q, u]_0 \cap N_\theta [\Delta, M_2, p, q, u]_0$ olsun. Bu taktirde $r \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

ve

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

dır. Buradan

$$\left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq C \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + C \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

elde ederiz. $k \in I_r$ üzerinden her iki tarafın toplamı alınır ve $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} & \leq \frac{1}{h_r} C \sum_{k \in I_r} \left[M_1 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \quad + \frac{1}{h_r} C \sum_{k \in I_r} \left[M_2 \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da i) şikkını ispatlar.

Teoremin diğer şıkları da benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.1.6 $0 < p_k < r_k$ ve $(\frac{r_k}{p_k})$ sınırlı olsun. Bu taktirde

$$i) N_\theta [\Delta, M, r, q, u]_1 \subset N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1$$

$$ii) N_\theta [\Delta, M, r, q, u]_0 \subset N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0$$

$$iii) N_\theta [\Delta, M, r, q, u]_\infty \subset N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_\infty \text{ olur.}$$

İspat $i)$ $x \in N_\theta [\Delta, M, r, q, u]_1$ olsun. Bu taktirde $r \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k} \rightarrow 0$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$w_k = \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k}$$

ve $\lambda_k = \frac{p_k}{r_k}$ diyelim. Bu taktirde $0 < \lambda_k \leq 1$ dir. λ sayısı $0 < \lambda < \lambda_k \leq 1$ olacak şekilde bir sayı olsun. Şimdi (s_k) ve (v_k) dizilerini

$$s_k = \begin{cases} w_k & w_k \geq 1 \\ 0 & w_k < 1 \end{cases}$$

$$v_k = \begin{cases} 0 & w_k \geq 1 \\ w_k & w_k < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $w_k = s_k + v_k$ ve $w_k^{\lambda_k} = s_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k}$ dır. Buradan $s_k^{\lambda_k} \leq s_k \leq w_k$ ve $v_k^{\lambda_k} \leq v_k$ olur. Böylece

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} w_k^{\lambda_k} \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} w_k + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} v_k^{\lambda_k}$$

olur. Şimdi her bir r için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} v_k^{\lambda_k} &= \sum_{k \in I_r} \left(\frac{1}{h_r} v_k \right)^\lambda \left(\frac{1}{h_r} \right)^{1-\lambda} \\ &\leq \left(\sum_{k \in I_r} \left[\left(\frac{1}{h_r} v_k \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^\lambda \left(\sum_{k \in I_r} \left[\left(\frac{1}{h_r} \right)^{1-\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{1-\lambda} \\ &= \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} v_k \right)^\lambda \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} w_k^{\lambda_k} \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} w_k + \left[\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} v_k \right]^\lambda.$$

Buradan $x \in N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1$ elde edilir. (ii) ve (iii) şıkları da benzer şekilde ispatlanabilir.

Lemma 2.1.7 $\liminf_r q_r > 1$ ve $\theta = \{k_r\}$ bir lakunary dizisi olsun. Bu taktirde herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için

$$i) w [\Delta, M, p, q, u]_0 \subset N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0$$

$$ii) w [\Delta, M, p, q, u]_1 \subset N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1$$

$$iii) w [\Delta, M, p, q, u]_\infty \subset N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_\infty$$

dır. Burada

$$w [\Delta, M, p, q, u]_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = 0 \text{ en az bir } \ell, \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

$$w [\Delta, M, p, q, u]_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} = 0 \text{ en az bir } \ell, \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

$$w [\Delta, M, p, q, u]_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty \text{ en az bir } \ell, \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

İspat $w [\Delta, M, p, q, u]_0 \subset N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Diğer bağıntılar benzer olarak yapılabilir.

$\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu taktirde her $r \geq 1$ ler için $q_r = \left(\frac{k_r}{k_{r-1}} \right) \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $x \in w [\Delta, M, p, q, u]_0$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} A_r &\equiv \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} - \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(\frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right) - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ ve $\frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$ yazılabilir.

$$\frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

ve

$$\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

terimlerinin her ikisi sıfıra yakınsaktır. Dolayısıyla $r \rightarrow \infty$ için $A_r \rightarrow 0$ olur. Böylece $x \in N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0$ olur.

Lemma 2.1.8 $\limsup_r q_r < \infty$ olmak üzere $\theta = \{k_r\}$ bir lakunary dizisi olsun. Bu durumda herhangi bir M Orlicz fonksiyonu için

- i) $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0 \subset w [\Delta, M, p, q, u]_0$
 - ii) $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_1 \subset w [\Delta, M, p, q, u]_1$
 - iii) $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_\infty \subset w [\Delta, M, p, q, u]_\infty$
- dir.

İspat $N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0 \subset w [\Delta, M, p, q, u]_0$ olduğunu gösterelim. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir. Eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise yeteri kadar büyük r ler için $q_r < B$ olacak şekilde $B > 0$ vardır. $x \in N_\theta [\Delta, M, p, q, u]_0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $j \geq R$ için

$$A_j \equiv \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_j} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$$

olacak şekilde $R > 0$ vardır. Ayrıca $j = 1, 2, 3, \dots$ için $A_j \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ bulunabilir. Şimdi $r > R$ olmak üzere $k_{r-1} < m \leq k_r$ olacak şekilde bir m tamsayısı alalım.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & = \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \sum_{k \in I_1} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + \sum_{k \in I_2} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right\} \\ & = \frac{k_1}{k_{r-1}} k_1^{-1} \sum_{k \in I_1} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} (k_2 - k_1)^{-1} \sum_{k \in I_2} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + \dots \\ & \quad + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} (k_R - k_{R-1})^{-1} \sum_{k \in I_R} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + \dots \\ & \quad + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} (k_r - k_{r-1})^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ & = \frac{k_1}{k_{r-1}} A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} A_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} A_R + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}} A_{R+1} + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} A_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sup_{j \geq 1} A_j \right) \frac{k_R}{k_{r-1}} + \left(\sup_{j \geq R} A_j \right) \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \\ &< K \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon B \end{aligned}$$

olur ki burada $m \rightarrow \infty$ iken $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

olur. Sonuç olarak $x \in w[\Delta, M, p, q, u]_0$ elde edilir.

2.2. Δ_q -Lakunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde $\theta = (k_r)$ lakunary dizisi ve Δ operatörünü kullanarak Δ_q -lakunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayıp $S_\theta(\Delta, q, u)$ dizi uzayı ile $N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1$ dizi uzayı arasında birkaç bağıntı vereceğiz.

Tanım 2.2.1 $x = (x_k)$ herhangi bir vektör değerli dizi, q bir yarınorm $\theta = (k_r)$ bir lakunary dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine Δ_q -lakunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Δ_q -lakunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayını $S_\theta(\Delta, q, u)$ ile göstereceğiz. Eğer $x \in S_\theta(\Delta, q, u)$ ise

$$x_k \rightarrow \ell(S_\theta(\Delta, q, u))$$

yazacağız.

Teorem 2.2.1 $0 < p < \infty$ olsun. Buna göre

- i) $x \rightarrow \ell(N_\theta[\Delta, q, u]_1)$ ise $x_k \rightarrow \ell(S_\theta(\Delta, q, u))$,
- ii) $x \in l_\infty(\Delta, q, u)$ ve $x_k \rightarrow \ell(S_\theta[\Delta, q, u])$ ise $x_k \rightarrow \ell(N_\theta[\Delta, q, u]_1)$,
- iii) $l_\infty(\Delta, q, u) \cap S_\theta(\Delta, q, u) = l_\infty(\Delta, q, u) \cap N_\theta[\Delta, q, u]_1$

dir.

İspat i) $\varepsilon > 0$ ve $(x_k) \in N_\theta[\Delta, q, u]_1$ olsun. Buna göre

$$\sum_{k \in I_r} [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p \geq |\{k \in I_r : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

yazılabilir. Böylece $x_k \rightarrow \ell(S_\theta(\Delta, q, u))$ dir.

ii) $x \in l_\infty(\Delta, q, u)$, $x_k \rightarrow \ell(S_\theta(\Delta, q, u))$ olsun. Bu taktirde $q(u_k \Delta x_k) + q(\ell) = K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ve her $r > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçilsin ve $L_r = \left\{ k \in I_r : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$ diyelim.

Şimdi tüm $r > N_\varepsilon$ ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in L_r} [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p + \frac{1}{h_r} \sum_{k \notin L_r} [q(u_k \Delta x_k - \ell)]^p \\ &< \frac{1}{h_r} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} \right) K^p + \frac{1}{h_r} h_r \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır. Böylece $x_k \rightarrow \ell N_\theta[\Delta, q, u]_1$ elde edilir.

(iii) şıkkı (i) ve (ii) den elde edilir.

Teorem 2.2.2 M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde

$$N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1 \subset S_\theta(\Delta, q, u)$$

İspat $x \in N_\theta[\Delta, M, p, q, u]_1$ olsun. Buna göre $r \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

dir. $\varepsilon > 0$ verilsin. $H = \sup_k p_k$ ve $h = \inf_k p_k$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) < \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} \left[M \left(q \left(\frac{u_k \Delta x_k - \ell}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} [M(\varepsilon_1)]^{p_k}, \quad \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon_1 \\ &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} \min \left\{ [M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right\} \\ &\geq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon\}| \cdot \min \left\{ [M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H \right\} \end{aligned}$$

olur ki, bu da $x \in S_\theta(\Delta, q, u)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.3 M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde

$$S_\theta(\Delta, q, u) \cap l_\infty(\Delta, q, u) = N_\theta[\Delta, M, q, u]_1 \cap l_\infty(\Delta, q, u)$$

dir.

İspat Teorem 2.2.2 den

$$S_{\theta}(\Delta, q, u) \cap l_{\infty}(\Delta, q, u) \subseteq N_{\theta}[\Delta, M, q, u]_1 \cap l_{\infty}(\Delta, q, u)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$y_k = u_k \Delta x_k - \ell \rightarrow \theta(S_{\theta}(q))$ olsun. $(x_k) \in l_{\infty}(\Delta, q, u)$ olduğundan tüm y_k lar için

$$M\left(q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right) \leq K$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Buna göre her $r \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} M\left[q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right] &\leq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) \geq \varepsilon}} M\left[q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right] + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ q(u_k \Delta x_k - \ell) < \varepsilon}} M\left[q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right] \\ &\leq \frac{K}{h_r} |\{k \in I_r; q(y_k) \geq \varepsilon \rho\}| + M\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $x \in N_{\theta}[\Delta, M, q, u]_1 \cap l_{\infty}(\Delta, q, u)$ elde edilir ki bu da teoremi ispatlar.

KAYNAKLAR

1. Maddox, I.J., 1970, Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, London.
2. Kreyszig E., 1978, Introductory to Functional Analysis with Applications, *John Wiley Sons*, New York.
3. Goes, G. and Goes S., 1970, Sequence of variation and sequence of Fourier Coefficients 1. *Math. Z.* 118, 93-102.
4. Fast, H. , 1951, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.* (2), 241-244.
5. Schoenberg, I.J., 1959, The integrability methods of certain functions and related summability, *Am. Math. Monthly*, 66, 361-375.
6. Niven, I. and Zuekerman, 1960, An introduction to the theory of numbers, *John Wiley Sons*, New York.
7. Fridy, J. A., 1985, On statistical convergence, *Analysis*, 5, 301-313
8. Powell, R.E., and Shah, S.M., 1972, Summability theory and its applications, *V.N.R. Company*, London.
9. Connor, J.S., 1988, The statistical and strong p -Cesáro convergence of sequences, *Analysis*, 8, 47-63.
10. Freedman, A.R., Sember J.J. and Raphel, M., 1978, Some Cesáro-type summability spaces, *Proc. London Math. Soc.*(3)37, 508-520.
11. Lorentz, G.G., 1948, A Contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.* 80, 167-190.
12. Kızmaz, H., 1981, On certain sequences spaces *Canad. Math. Bull.*,24, 169-176
13. Et, M., 2000, On Some topological properties of generalized difference sequence spaces , *Internat. J. Math. and Math. Sci.* , 24(11), 785-791
14. Et, M., Nuray 2001, F., Δ^m - statistical convergence, *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 32(6), 961-969

15. Başarır, M., 1995, On the Δ - statistical convergence of sequences, *F. U., Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi* 7(2), 1-6
16. Lindenstrauss, J. Tzafriri, L., On Orlicz sequence spaces, *Isr.J. Math.* 10 (1971), 379-390
17. Parashar, S.D., Chaudhary, B. Sequence spaces defined by Orlicz functions, *Indian J. Pure Appl. Math.* 25(4) (1994), 419-428

