



**İKİLİ BAND MATRİSİ YARDIMIYLA
TANIMLANMIŞ YENİ BAZI DİZİ UZAYLARI**

Suzan ZEREN

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ**

AĞUSTOS-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİLİ BAND MATRİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
YENİ BAZI DİZİ UZAYLARI

DOKTORA TEZİ
Suzan ZEREN
(112121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Temmuz 2017
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Ağustos 2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ (F.Ü) 
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü) 
Doç. Dr. Melike AYDOĞAN (I.Ü) 
Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü) 
Yrd. Doç. Dr. Gülcan ATICI TURAN (M.A.Ü) 

AĞUSTOS-2017

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde beni yönlendiren, bilgi ve yardımını esirgemeyen, desteğini her zaman yanımda hissettiğim saygıdeğer hocam Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yardımlarından dolayı Arş. Gör. Dr. Sinan ERCAN' a ve doktora burs desteğinden dolayı TÜBİTAK BİDEB' e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak her zaman yanımda olan ve beni destekleyen sevgili anne ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Suzan ZEREN
ELAZIĞ-2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	1
2. $\ell_p(\tilde{T})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T})$ DİZİ UZAYLARI.....	10
3. $\ell_p(\tilde{T})$ DİZİ UZAYININ α -, β - ve γ - DUALLERİ.....	19
4. BAZI MATRİS SINIFLARININ KARAKTERİZASYONU.....	24
5. $\ell_p(\tilde{T})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T})$ DİZİ UZAYLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ.....	27
6. KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde temel tanımlar ve teoremler ifade edilmiş, Fibonacci sayıları ile ilgili bilgi verilmiş ve bu konuda yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde yeni bir band matris kullanılarak $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı tanımlanmış, bu dizi uzayının bazı topolojik özellikleri incelenmiş ve bu dizi uzayı ile ilgili bazı kapsama bağıntıları sunulmuştur.

Üçüncü bölümde $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayından ℓ_∞ , c , c_0 ve ℓ_1 uzaylarına olan matris dönüşümleri araştırılmıştır.

Son bölümde ise $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının bazı geometrik özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzayları, Matris dönüşümleri, $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualler, Konvekslik.

SUMMARY

Some New Sequence Spaces Defined By The Double Band Matrix

This study consists of five chapters.

In Chapter 1, we give some fundamental definitions and theorems and give some information about Fibonacci numbers and present the works done on this subject.

In Chapter 2, we define the $\ell_p(\tilde{T})$ sequence space, where $1 \leq p \leq \infty$ by using a new band matrix and we examine some topological properties of this space. Finally, we give some inclusion relations about this space.

In Chapter 3, we investigate the α –, β – and γ – duals of the space $\ell_p(\tilde{T})$.

In Chapter 4, we analyze the matrix mappings from the space $\ell_p(\tilde{T})$ to the spaces ℓ_∞ , c , c_0 and ℓ_1 .

In the last chapter, we give some geometrical properties of the space $\ell_p(\tilde{T})$.

Keywords: Sequence spaces, Matrix mappings, α –, β – and γ – duals, Convexity

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
ℓ_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_p	: p - mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_1	: Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
bs	: Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
cs	: Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ω	: Kompleks veya reel terimli tüm dizilerin uzayı
$\xrightarrow{z}$	: Zayıf yakınsama
X'	: Sürekli dual uzay
X''	: X uzayının ikinci duali
$diam A$	: A cümlesinin çapı
S_X	: X Banach uzayında birim küre
$\dim X$	: X uzayının boyutu

1. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

- i) $x + y = y + x$
- ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
- iv) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
- v) $1.x = x$
- vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

dir [1].

Tanım 1.2. X boş olmayan bir cümle olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Her $x, y, z \in X$ için,

$$\text{M1)} \quad d(x, y) \geq 0 \text{ ve } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\text{M2)} \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$\text{M3)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

dir [1].

Tanım 1.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow \|x\| \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ için,

$$\text{N1)} \|x\| \geq 0,$$

$$\text{N2)} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\text{N3)} \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ (\lambda \text{ skaler}),$$

$$\text{N4)} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir. N2) şartı $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$ şartı ile değiştirilirse yarınorm elde edilir [2].

Tanım 1.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x 'e yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır [2].

Tanım 1.5. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > n_0$ için

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [2].

Tanım 1.6. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir [2].

Tanım 1.7. X bir vektör uzay, K da reel ya da kompleks sayılar cismi olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir. Her $x, y, z \in X$ için

$$(i) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$(ii) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \alpha \in K,$$

$$(iii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$(iv) \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

dir.

X üzerinde tanımlanan bir iç çarpım, X üzerinde

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{1.1}$$

ile verilen bir norm ve

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

ile verilen bir metrik tanımlar [2].

Tanım 1.8. Üzerindeki iç çarpımla tanımlı metriğe göre tam olan iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [2].

Teorem 1.9. (Paralelkenar Eşitliği) $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı üzerindeki (1.1) normu her $x, y \in X$ için paralelkenar eşitliği olarak bilinen

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliğini sağlar [2].

Tanım 1.10. X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı iki lineer uzay olsun. $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her α skaleri için

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

ve

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

şartlarını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer operatör denir [2].

Tanım 1.11. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. T operatörü normu koruyorsa, yani her $x \in X$ için $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T ye lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün bire-bir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ve Y normlu uzaylarına izomorfik uzaylar denir [3].

Tanım 1.12. Tanım bölgesi bir X vektör uzayında, değer bölgesi ise, X' in K skaler cismi içinde bulunan lineer bir f operatörüne bir lineer fonksiyonel adı verilir. Eğer X reel ise $K = \mathbb{R}$ ve X kompleks ise $K = \mathbb{C}$ olmak üzere, $f : D(f) \rightarrow K$ yazılır [2].

Tanım 1.13. $D(f)$ tanım bölgesi, normlu bir X uzayında, değer bölgesi ise bu normlu X uzayının skaler cismi içinde bulunan, sınırlı lineer bir f operatörüne, sınırlı lineer fonksiyonel adı verilir. Buna göre, her $x \in D(f)$ için,

$$|f(x)| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde reel bir c sayısı vardır. Ayrıca, f ' in normu

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq \theta}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

ya da

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 1.14. X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X, K)$ cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq \theta}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayı oluşturur. Bu uzaya X in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir [1].

Tanım 1.15. X' , X Banach uzayının sürekli duali olmak üzere $B(X', K)$ uzayına X uzayının ikinci duali denir ve X'' ile gösterilir. X'' uzayı da bir Banach uzayıdır [1].

Tanım 1.16. X normlu bir uzay olmak üzere $X'' \cong X$ ise X uzayına yansımali uzay denir [1].

Tanım 1.17. Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa, (x_n) dizisi x ' e kuvvetli yakınsaktır ya da norma göre yakınsaktır denir ve bu durum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

veya kısaca

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

şeklinde gösterilir [2].

Tanım 1.18. Normlu bir X uzayında bir (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f \in X'$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, (x_n) dizisi x' e zayıf yakınsaktır denir ve

$$x_n \xrightarrow{z} x \quad (n \rightarrow \infty)$$

ya da $x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$ şeklinde gösterilir [2].

Kuvvetli yakınsaklık ile zayıf yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 1.19. (x_n) normlu bir X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda,

- (i) Kuvvetli yakınsak bir dizi aynı limite zayıf yakınsaktır.
- (ii) Zayıf yakınsak bir dizi kuvvetli yakınsak olmayabilir.
- (iii) $\dim X < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir [2].

Tanım 1.20. Birim küre üzerindeki her zayıf yakınsak dizi norma göre yakınsak ise X Banach uzayı Kadec- Klee özelliğine veya (H) özelliğine sahiptir denir [5].

Tanım 1.21. X yansımali bir Banach uzayı ve A , X Banach uzayının kapalı, sınırlı, konveks bir alt cümlesi olsun. Her $x \in A$ için $r(x, A) = \sup \{\|x - y\| : y \in A\}$ olmak üzere A cümlesinin Chebyshev yarıçapı

$$R(A) = \min \{r(x, A) : x \in A\}$$

şeklinde tanımlıdır. X Banach uzayının kapalı, sınırlı, konveks birden fazla elemana sahip her A alt cümlesi için $R(A) < \text{diam} A$ şartı sağlanıyorsa X Banach uzayı normal yapıya sahiptir denir [6].

Tanım 1.22. Reel veya kompleks terimli tüm dizilerin cümlesini ω ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere ω , $x + y = (x_k + y_k)$ ve $\alpha x = (\alpha x_k)$ şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. ω nın her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir [7].

Aşağıda bu çalışmada kullanacağımız dizi uzayları verilmiştir:

$$\begin{aligned}\ell_\infty &= \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}, \\ c &= \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}, \\ c_0 &= \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}, \\ \ell_p &= \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k|^p < \infty, 0 < p < \infty \right\}, \\ bs &= \left\{ x = (x_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| < \infty \right\}, \\ cs &= \left\{ x = (x_k) : \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \in c \right\}, \\ bv_p &= \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty \right\}.\end{aligned}$$

ℓ_∞ , c ve c_0 dizi uzayları

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

ℓ_p dizi uzayı ise

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p} \quad (0 < p < 1)$$

ve

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.23. X bir dizi uzayı olsun.

$$X^\alpha = \{a = (a_k) \in \omega : \text{Her } x \in X \text{ için } ax \in \ell_1\},$$

$$X^\beta = \{a = (a_k) \in \omega : \text{Her } x \in X \text{ için } ax \in cs\},$$

$$X^\gamma = \{a = (a_k) \in \omega : \text{Her } x \in X \text{ için } ax \in bs\}$$

olsun. X^α , X^β ve X^γ ya sırasıyla, X in α -, β - ve γ -duali denir. α -dualine Köthe - Toeplitz duali, β -dualine genelleştirilmiş Köthe - Toeplitz duali denir. $\emptyset \subset X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ kapsamaları mevcuttur. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olsun. $X \subset Y$ ise $X^\eta \subset Y^\eta$ dir [8].

Tanım 1.24. $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \quad (1.2)$$

serileri yakınsak ise $((Ax)_n)$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve A da bir sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayında ise A matrisi, λ uzayından μ uzayına tanımlıdır denir. λ uzayından μ uzayına tanımlı bütün matrislerin sınıfı $(\lambda : \mu)$ ile gösterilir.

Tanım 1.25. Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin bir λ dizi uzayı üzerindeki λ_A etki alanı

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\} \quad (1.3)$$

cümlesidir. λ_A aynı zamanda bir dizi uzayıdır.

Tanım 1.26. (Üçgen eşitsizliği) a ve b herhangi iki kompleks sayı olsun. Bu durumda

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 1.27. (Minkowski eşitsizliği) $p \geq 1$ ve $a_1, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}$$

dir [1].

Bu çalışmada aşağıdaki eşitsizlikler kullanılacaktır.

$a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $2 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p) \quad (1.4)$$

dir.

Her $x, y \in \ell_p(\tilde{T})$ (Tanım 2.1 de tanımı verilmiştir.) ve $2 \leq p < \infty$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2^{p-1} (\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (1.5)$$

Fibonacci dizisi

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 = 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

olmak üzere (f_n) dizisidir [9].

Şimdi, Fibonacci dizisinin bazı özelliklerini vereceğiz. Bunlardan en iyi bilinenleri Altın oran ve Cassini formülüdür.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ (Altın oran),}$$

$$\sum_{k=0}^n f_k = f_{n+2} - 1 \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için,}$$

$$\sum_k \frac{1}{f_k} \text{ yakınsaktır,}$$

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^{n-1} \text{ her } n \geq 1 \text{ için (Cassini formülü)}$$

Bir çok araştırmacı Fibonacci sayılarını kullanarak yeni dizi uzayları inşa etti. Kara [10], (f_n) Fibonacci dizisi ve $\hat{F} = (\hat{f}_{nk})$ ikili band matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\hat{f}_{nk} = \begin{cases} \frac{-f_{n+1}}{f_n} & , \quad k = n - 1 \\ \frac{f_n}{f_{n+1}} & , \quad k = n \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n - 1 \text{ veya } k > n \end{cases}$$

olmak üzere

$$\ell_p(\hat{F}) = \left\{ x \in \omega : \hat{F}x \in \ell_p \right\}, \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

dizi uzayını tanımladı. Daha sonra M. Candan [11] $\hat{F}(r, s)$ matrisi yardımıyla r ve s sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $c_0(\hat{F}(r, s))$ ve $c(\hat{F}(r, s))$ dizi uzaylarını, M. Candan ve E. E. Kara [12] da aynı matris yardımıyla $\ell_p(\hat{F}(r, s))$ ve $\ell_\infty(\hat{F}(r, s))$ dizi uzaylarını tanımladılar. Bu uzaylarla ilgili bazı kapsama bağıntılarını ve bu uzayların $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallerini hesapladılar. Bu dizi uzaylarıyla ilgili bazı matris sınıflarını karakterize ettiler.

Son olarak E. E. Kara ve M. İlkhan [13], her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 0$, $t = (t_n) \in c \setminus c_0$ ve

$$t_{nk} = \begin{cases} t_n & , \quad k = n \\ -\frac{1}{t_n} & , \quad k = n - 1 \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n - 1 \text{ veya } k > n \end{cases}$$

olmak üzere $T = (t_{nk})$ matrisini kullanarak

$$\ell_p(T) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_n \left| t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\ell_\infty(T) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sup_n \left| t_n x_n - \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right| < \infty \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar. Bu çalışma ile Fibonacci dizisini kullanarak elde edilen dizi uzaylarını genelleştirdiler.

Biz bu çalışmamızda E. E. Kara ve M. İlkhan' ın [13] deki çalışmalarını genelleştirerek yeni bir dizi uzayı inşa ettik. Bu yeni dizi uzayının bazı topolojik özelliklerine ve bazı kapsama bağıntılarına yer verdik. Bu uzayın $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallerini inceledik ve bazı matris sınıfı karakterizasyonlarına ve son olarak bazı geometrik özelliklerine yer verdik.

2. $\ell_p(\tilde{T})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T})$ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\tilde{T}$ - band matrisini kullanarak $\ell_p(\tilde{T})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzaylarını tanımlayacağız. Ayrıca, bu yeni dizi uzaylarının bazı topolojik özelliklerini inceleyecek ve bu uzaylarla ilgili bazı kapsama bağıntılarına yer vereceğiz.

Tanım 2.1. $\tilde{T}$ - band matrisi yardımıyla tanımlayacağımız yeni dizi uzayları

$$\ell_p(\tilde{T}) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_n \left| rt_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\ell_\infty(\tilde{T}) = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sup_n \left| rt_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right| < \infty \right\}$$

şeklinde [14].

Aynı zamanda (1.3) gösterimiyle $\ell_p(\tilde{T})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzaylarını $\ell_p(\tilde{T}) = (\ell_p)_{\tilde{T}}$ ($1 \leq p < \infty$) ve $\ell_\infty(\tilde{T}) = (\ell_\infty)_{\tilde{T}}$ şeklinde yeniden yazabiliriz.

Bu çalışma boyunca; her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 0$ olmak üzere $(t_n) \in c \setminus c_0$ ve $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olarak alınacaktır. Ayrıca $\tilde{T} = (t_{nk})$ band matrisini bütün $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk} = \begin{cases} rt_n & , \quad k = n \\ s \frac{1}{t_n} & , \quad k = n - 1 \\ 0 & , \quad \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu dizi uzaylarından $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sayılarının ve $t = (t_n)$ dizisinin bazı özel hallerini alarak aşağıdaki özel dizi uzaylarını elde ederiz.

(i) $r = 1$ ve $s = -1$ alınrsa $\ell_p(\tilde{T}) = \ell_p(T)$ ve $\ell_\infty(\tilde{T}) = \ell_\infty(T)$ elde edilir [13].

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1$, $r = 1$ ve $s = -1$ alınrsa $\ell_p(\tilde{T}) = b v_p$ elde edilir.

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ alınrsa $\ell_p(\tilde{T}) = \ell_p(\hat{F}(r, s))$ ve $\ell_\infty(\tilde{T}) = \ell_\infty(\hat{F}(r, s))$ elde edilir [12].

(iv) Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$, $r = 1$ ve $s = -1$ alınrsa $\ell_p(\tilde{T}) = \ell_p(\hat{F})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T}) = \ell_\infty(\hat{F})$ elde edilir [10].

(v) Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = e$, $r = 1$ ve $s = -1$ alınrsa $\tilde{T}$ matrisinden Δ matrisi elde edilir [15].

(vi) Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1$ seçilirse $\ell_p(\tilde{T}) = \hat{\ell}_p$ ve $\ell_\infty(\tilde{T}) = \hat{\ell}_\infty$ elde edilir [16].

Bir $x = (x_n)$ dizisinin $\tilde{T}$ - dönüşümü altındaki görüntüsü olan $y = (y_n)$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \tilde{T}_n x = \begin{cases} rt_0 x_0 & , \quad n = 0 \\ rt_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} & , \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $\tilde{T}^{-1} = (t_{nk}^{-1})$ ters matrisi her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} t_k \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzaylarına ait bazı topolojik özellikleri ve bu uzaylarla ilgili bazı kapsama bağıntılarını verebiliriz.

Teorem 2.2. $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} = \|\tilde{T}(x)\|_{\ell_p}$ normu ile, yani

$$\|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} = \begin{cases} \left(\sum_n |\tilde{T}_n x|^p \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |\tilde{T}_n x| & , \quad p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat. $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $\|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\|\tilde{T}x\|_{\ell_p} = 0$ dir. $\|\cdot\|_{\ell_p}$ bir norm olduğundan $\tilde{T}x = \theta$ bulunur. Buradan da $x = \theta$ elde edilir. $x = \theta$ iken $\|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} = 0$ olduğu açıktır.

$\alpha \in \mathbb{C}$ ve $x \in \ell_p(\tilde{T})$ olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}(\alpha x)\|_{\ell_p} = \|\alpha \tilde{T}x\|_{\ell_p} \\ &= |\alpha| \|\tilde{T}x\|_{\ell_p} = |\alpha| \|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $x, y \in \ell_p(\tilde{T})$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}(x + y)\|_{\ell_p} \\
&= \|\tilde{T}x + \tilde{T}y\|_{\ell_p} \\
&\leq \|\tilde{T}x\|_{\ell_p} + \|\tilde{T}y\|_{\ell_p} \\
&= \|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} + \|y\|_{\ell_p(\tilde{T})}
\end{aligned}$$

dir. O halde $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere bir normlu uzaydır.

Şimdi, $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. (x_n) dizisi $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde (y_n) dizisi ℓ_p de bir dizidir. O halde,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}(x_n - x_m)\|_{\ell_p} \\
&= \|\tilde{T}x_n - \tilde{T}x_m\|_{\ell_p} \\
&= \|y_n - y_m\|_{\ell_p}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (y_n) dizisinin ℓ_p de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. ℓ_p dizi uzayı tam olduğundan ℓ_p dizi uzayında $(y_n) \rightarrow y$ olacak şekilde bir $y \in \ell_p$ dizisi mevcuttur. Ayrıca, $x = \tilde{T}^{-1}y$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{T}(x_n - x)\|_{\ell_p} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{T}x_n - \tilde{T}x\|_{\ell_p} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\|_{\ell_p} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayında $(x_n) \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in \ell_p(\tilde{T})$ mevcuttur. Bu taktirde, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı verilen normla birlikte bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.3. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı ve ℓ_p dizi uzayları lineer izomorftir. Yani $\ell_p(\tilde{T}) \cong \ell_p$ dir.

İspat. (2.1) kullanılarak $\ell_p(\tilde{T})$ uzayından ℓ_p uzayına bir $\tilde{T}$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\tilde{T} : \ell_p(\tilde{T}) \rightarrow \ell_p$$

$$x \rightarrow y = \tilde{T}x = (\tilde{T}_n x)$$

Bu taktirde her $x \in \ell_p(\tilde{T})$ için bir $\tilde{T}x = y \in \ell_p$ mevcuttur. $\tilde{T}$ - dönüşümünün lineer olduğu açıktır.

$\tilde{T}x = \theta$ olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $rt_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} = 0$ elde edilir. $n = 0$ için $x_0 = 0$, $n = 1$ için $rt_1 x_1 + s \frac{1}{t_1} x_0 = 0$ olup $x_1 = 0$ elde edilir. $n = k$ için $rt_k x_k + s \frac{1}{t_k} x_{k-1} = 0 \Rightarrow x_k = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 0$ yani $x = \theta$ bulunur. Buradan $\tilde{T}$ lineer dönüşümünün " $\tilde{T}x = \theta \Rightarrow x = \theta$ " önermesini sağladığından dolayı bu dönüşümün birebir olduğunu söyleyebiliriz.

Son olarak, $\tilde{T}$ dönüşümünün örten olduğunu göstermeliyiz. $y = (y_n) \in \ell_p$ olsun ve $x = (x_n)$ dizisini de

$$x_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] \quad (n, k \in \mathbb{N}) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde, (2.1) ve (2.2) kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n x &= rt_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} \\ &= rt_n \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] + s \frac{1}{t_n} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k-1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] \\ &= t_n \left\{ t_n^{-1} y_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] \right\} - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] \\ &= y_n + t_n \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] - \frac{1}{t_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] \\ &= y_n + t_n \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] - t_n \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \left(\prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} \right) t_k y_k \right] \\ &= y_n \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $\tilde{T}x = y$ olması demektir. $y \in \ell_p$ olduğundan $\tilde{T}x \in \ell_p$ bulunur. Yani, herhangi bir $y \in \ell_p$ için bir $x \in \ell_p(\tilde{T})$ mevcuttur ki bu da $\tilde{T}$ - dönüşümünün örten olduğunu gösterir.

Son elde ettiğimiz eşitliğe, $\|\cdot\|_{\ell_p}$ normunu uygulayarak

$$\|y\|_{\ell_p} = \left\| \tilde{T}x \right\|_{\ell_p} = \|x\|_{\ell_p(\tilde{T})}$$

eşitliğini elde ederiz. O halde $\tilde{T}$ - dönüşümü normu korur. Bu durumda $\tilde{T}$ bir izometridir.

Ayrıca, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ ve ℓ_p dizi uzayları lineer izomorfiktir.

Teorem 2.4. $1 \leq p < \infty$ ve $p \neq 2$ için $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı bir iç çarpım uzayı değildir. Dolayısıyla bir Hilbert uzayı da değildir. $p = 2$ alırsak $\ell_2(\tilde{T})$ dizi uzayı bir Hilbert uzayı olur.

İspat. $p \neq 2$ için $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının bir iç çarpım uzayı olmadığını sadece $\ell_2(\tilde{T})$ dizi uzayının bir iç çarpım uzayı ve Hilbert uzayı olduğunu göstermeliyiz. Teorem 2.2 den biliyoruz ki $\ell_2(\tilde{T})$ uzayı $\|x\|_{\ell_2(\tilde{T})} = \|\tilde{T}x\|_{\ell_2}$ normuyla bir Banach uzayıdır ve bu norm her $x \in \ell_2(\tilde{T})$ için

$$\|x\|_{\ell_2(\tilde{T})} = \langle x, x \rangle_{\ell_2(\tilde{T})}^{1/2} = \left\langle \tilde{T}x, \tilde{T}x \right\rangle_{\ell_2}^{1/2} = \|\tilde{T}x\|_{\ell_2}$$

iç çarpımından elde edilebilir. Dolayısıyla, $\ell_2(\tilde{T})$ dizi uzayı bir Hilbert uzayıdır. Şimdi,

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{rt_0} & , \quad n = 0 \\ \frac{1}{r} \sum_{k=0}^1 \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} t_k \prod_{i=k}^n \frac{1}{t_i^2} \right] & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ve

$$v_n = \begin{cases} \frac{1}{rt_0} & , \quad n = 0 \\ \frac{1}{r} \sum_{k=0}^1 \left[(-1)^k \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} t_k \prod_{i=k}^n \frac{1}{t_i^2} \right] & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

olmak üzere $u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ dizilerini göz önüne alalım. Bu taktirde bu dizilerin $\tilde{T}$ - dönüşümü yardımıyla

$$\tilde{T}u = (1, 0, 0, \dots) \text{ ve } \tilde{T}v = (1, -1, 0, 0, \dots)$$

dizilerini elde ederiz. Ayrıca,

$$\tilde{T}(u + v) = (2, 0, 0, 0, \dots) \text{ ve } \tilde{T}(u - v) = (0, 2, 0, 0, \dots)$$

olup,

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}(u + v)\|_{\ell_p} = 2 \\ \|u - v\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}(u - v)\|_{\ell_p} = 2 \\ \|u\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}u\|_{\ell_p} = 2^{1/p} \\ \|v\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}v\|_{\ell_p} = 2^{1/p} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan elde edilen bu normlar paralelkenar eşitliğinde yazıldığında sadece $p = 2$ durumunda eşitliğin sağlandığı $p \neq 2$ için $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının paralelkenar eşitliğini sağlamadığı sonucu çıkar. O halde bu norm bir iç çarpımdan elde edilemez. Bu nedenle $p \neq 2$ için $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı bir Banach uzayı iken bir Hilbert uzayı değildir.

Teorem 2.5. $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzayı bir Banach uzayıdır fakat bir Hilbert uzayı değildir.

İspat. Teorem 2.4 ün ispatında verilen $u = (u_n)$ ve $v = (v_n)$ dizileri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\|u + v\|_{\ell_\infty(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}(u + v)\|_{\ell_\infty} = 2 \\ \|u - v\|_{\ell_\infty(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}(u - v)\|_{\ell_\infty} = 2 \\ \|u\|_{\ell_\infty(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}u\|_{\ell_\infty} = 1 \\ \|v\|_{\ell_\infty(\tilde{T})} &= \|\tilde{T}v\|_{\ell_\infty} = 1\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler kullanıldığında paralelkenar eşitliğinin sağlanmadığı görülür:

$$\|u + v\|_{\ell_\infty(\tilde{T})}^2 + \|u - v\|_{\ell_\infty(\tilde{T})}^2 = 8 \neq 4 = 2 \left(\|u\|_{\ell_\infty(\tilde{T})}^2 + \|v\|_{\ell_\infty(\tilde{T})}^2 \right)$$

Buradan $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzayı bir iç çarpım uzayı ve Hilbert uzayı değildir.

Lemma 2.6. $a_n > 0$ olmak üzere $\prod_n (1 + a_n)$ çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum a_n$ serisinin yakınsak olmasıdır [17].

Teorem 2.7. $1 \leq p < q < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T}) \subset \ell_q(\tilde{T})$ olup kapsama kesindir.

İspat. $1 \leq p < q < \infty$ ve $x \in \ell_p(\tilde{T})$ olsun. Bu taktirde $\tilde{T}x \in \ell_p$ olup $\ell_p \subset \ell_q$ kapsaması göz önüne alınırsa $\tilde{T}x \in \ell_q$ elde edilir ki bu da $x \in \ell_q(\tilde{T})$ olması demektir. O halde $\ell_p(\tilde{T}) \subset \ell_q(\tilde{T})$ olur. Ayrıca, $\ell_p \subset \ell_q$ kapsaması kesin olduğu için $x \in \ell_q \setminus \ell_p$ olacak şekilde bir $x = (x_n)$ dizisi mevcuttur. $y = (y_n)$ dizisini

$$y_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} t_k x_k \right] \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde, her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{T}_n y = x_n$ eşitliğini elde ederiz ki bu da $\tilde{T}y = x$ olması demektir. $x \in \ell_q \setminus \ell_p$ olduğundan $\tilde{T}y \in \ell_q \setminus \ell_p$ dir. O halde, $\ell_p(\tilde{T}) \subset \ell_q(\tilde{T})$ kapsaması kesindir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.8. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T}) \subset \ell_\infty(\tilde{T})$ olup kapsama kesindir.

İspat. $1 \leq p < \infty$ ve $x \in \ell_p(\tilde{T})$ olsun. O halde $\tilde{T}x \in \ell_p$ dir. $\ell_p \subset \ell_\infty$ kapsamasından $\tilde{T}x \in \ell_\infty$ elde edilir. Bu da $x \in \ell_\infty(\tilde{T})$ olması demektir ki buradan $\ell_p(\tilde{T}) \subset \ell_\infty(\tilde{T})$ kapsamasını elde ederiz. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için, $y = (y_n)$ dizisini

$$y_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} t_k \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} \right] \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n y &= r t_n y_n + s \frac{1}{t_n} y_{n-1} \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $\tilde{T}y \in \ell_\infty \setminus \ell_p$ dir. Buradan $y \in \ell_\infty(\tilde{T}) \setminus \ell_p(\tilde{T})$ bulunur. O halde, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T}) \subset \ell_\infty(\tilde{T})$ kapsaması kesindir.

Teorem 2.9. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\ell_p \subset \ell_p(\tilde{T})$ olup kapsama kesindir.

İspat. Herhangi bir $x \in \ell_p$ için $\|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} \leq K \cdot \|x\|_{\ell_p}$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısının mevcut olduğunu göstermeliyiz.

$1 \leq p \leq \infty$ ve $x \in \ell_p$ olsun. Ayrıca, $(t_n) \in c \setminus c_0$ dir. Bu bilgiler göz önüne alınırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \leq M$ ve $\frac{1}{t_n} \leq N$ olacak şekilde $M, N > 0$ sayıları mevcuttur. O halde,

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_\infty(\tilde{T})} &= \sup_n \left| \tilde{T}_n x \right| \\ &= \sup_n \left| r t_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right| \\ &\leq (|r| M + |s| N) \sup_n |x_n| \\ &= \|x\|_{\ell_\infty} (|r| M + |s| N) \end{aligned}$$

dir. Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} &= \left(\sum_n \left| \tilde{T}_n(x) \right|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_n \left| r t_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_n |rt_n x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_n \left| s \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right|^p \right)^{1/p} \\
&\leq |r| M \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{1/p} + |s| N \left(\sum_n |x_{n-1}|^p \right)^{1/p} \\
&= \|x\|_{\ell_p} (|r| M + |s| N)
\end{aligned}$$

elde edilir. $K = (|r| M + |s| N)$ olmak üzere $1 \leq p \leq \infty$ için $\|x\|_{\ell_p(\tilde{T})} \leq K \cdot \|x\|_{\ell_p}$ eşitsizliği elde edilir ki bu da $\ell_p \subset \ell_p(\tilde{T})$ kapsamasının sağlandığını gösterir.

Şimdi de kapsamanın kesin olduğunu gösterelim.

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < t_n < 1$ olmak üzere $t = (t_n)$ dizisini alalım. $1 \leq p < \infty$ ve $s = -r$ olsun. Genel terimi $x_n = \prod_{j=0}^n \frac{1}{t_j^2}$ olan $x = (x_n)$ dizisini alalım. Her $j \in \mathbb{N}$ için $1/t_j > 1$ olduğundan $x \notin \ell_p$ dir. Buna karşılık $\tilde{T}x = \left(\frac{r}{t_0}, 0, 0, 0, \dots \right) \in \ell_p$ bulunur ki bu da $x \in \ell_p(\tilde{T})$ olması demektir.

Her $j \in \mathbb{N}$ için $t_j = \sqrt{\frac{j+1}{j+2}} < 1$ olsun. Bu taktirde $\frac{1}{t_j^2} = 1 + \frac{1}{j+1}$ dir. $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1}$ serisi ıraksak olup Lemma 2.6 dan $\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{t_j^2}$ çarpımının da ıraksak olduğunu buluruz. Genel terimi $x_n = \prod_{j=0}^n \frac{1}{t_j^2}$ olan $x = (x_n)$ dizisini alalım. Bu taktirde $x \notin \ell_{\infty}$ dir. Ayrıca $s = -r$ olmak üzere $\tilde{T}x = \left(\frac{r}{t_0}, 0, 0, 0, \dots \right) \in \ell_{\infty}$ elde edilir ki bu $x \in \ell_{\infty}(\tilde{T})$ olması demektir.

(ii) $1 \leq p < \infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1$ olsun. $x = (1, 1, 1, \dots)$ ve $s = -r$ olsun. $x \notin \ell_p$ olduğu açıktır. Ayrıca, $\tilde{T}x = (r, 0, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ olup $x \in \ell_p(\tilde{T})$ dir.

$x_n = n+1$ olmak üzere $x = (x_n)$ dizisini alalım. $x \notin \ell_{\infty}$ olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1$ ve $s = -r$ olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{T}_n x = r$ elde edilir. O halde, $x \in \ell_{\infty}(\tilde{T})$ dir.

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n > 1$ ve $t_n = \frac{n+2}{n+1} > 1$ olsun. Ayrıca $p = 1$ ve $s = -r$ olsun. Genel terimi $x_n = \frac{1}{n+2}$ olan $x = (x_n)$ dizisini alalım. $x \notin \ell_1$ dir. O halde

$$\tilde{T}_n x = \begin{cases} r & , \quad n = 0 \\ \frac{r}{(n+1)(n+2)} & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Bu taktirde, $\tilde{T}x \in \ell_1$ bulunur ki bu da $x \in \ell_1(\tilde{T})$ olması demektir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = \frac{n+2}{n+1}$ ve $s = -r$ olsun. $x_n = n+1$ olmak üzere $x = (x_n)$ dizisini alalım. $x \notin \ell_\infty$ dir. Fakat $\tilde{T}x = (r \cdot \frac{3n+4}{n+2}) \in \ell_\infty$ dir. O halde, $x \in \ell_\infty(\tilde{T})$ dir.

Sonuç olarak, $x \in \ell_p(\tilde{T}) \setminus \ell_p$ olacak şekilde bir eleman mevcut olduğundan $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere verilen $\ell_p \subset \ell_p(\tilde{T})$ kapsaması kesindir.

Teorem 2.10. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ℓ_∞ ve $\ell_p(\tilde{T})$ uzayları birbirini kapsamazlar.

İspat. $t_i = \sqrt{\frac{i+1}{i+2}}$ olsun. $x = (x_n) = \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{t_i^2} \right)$ dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde $x \notin \ell_\infty$ dir. $s = -r$ olsun. Buradan $\tilde{T}x = (r\sqrt{2}, 0, 0, 0, \dots)$ elde edilir ki bu da $x \in \ell_p(\tilde{T})$ olması demektir.

Şimdi de $x = (x_n) = ((-1)^n)$ dizisini alalım. Bu taktirde $x \in \ell_\infty$ dir. Burada $r = 1$ ve $s = -1$ olmak üzere

$$\tilde{T}_n x = \begin{cases} t_0 & , \quad n = 0 \\ (-1)^n \left(t_n + \frac{1}{t_n} \right) & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\left| (-1)^n \left(t_n + \frac{1}{t_n} \right) \right| > 1$ olduğu açıktır ki $\sum_n \left| \tilde{T}_n x \right|^p$ serisi iraksak olur. O halde $x \notin \ell_p(\tilde{T})$ elde edilir. Bu da verilen iki uzayın birbirini kapsamadıklarını gösterir.

3. $\ell_p(\tilde{T})$ Dizi Uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ Dualleri

Bu bölümde, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ ve $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duallerini inceleyeceğiz.

Lemma 3.1. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde $A \in (\ell_p : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in F} \sum_k \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \right|^q < \infty \quad (3.1)$$

olmasıdır [18].

Lemma 3.2. $A \in (\ell_1 : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_k \sum_n |a_{nk}| < \infty \quad (3.2)$$

olmasıdır [18].

Lemma 3.3. $A \in (\ell_\infty : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart $q = 1$ için (3.1) eşitliğinin sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.4. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde $A \in (\ell_p : c)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \quad (3.3)$$

ve

$$\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_n a_{nk} \text{ mevcut} \quad (3.4)$$

olmasıdır [18].

Lemma 3.5. $A \in (\ell_1 : c)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty \quad (3.5)$$

ve (3.4) ifadesinin sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.6. $A \in (\ell_\infty : c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.4) ifadesinin ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \right| \quad (3.6)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.7. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O halde $A \in (\ell_p : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.3) eşitsizliğinin sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.8. $A \in (\ell_1 : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.5) eşitsizliğinin sağlanmasıdır [18].

Lemma 3.9. $A \in (\ell_\infty : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $q = 1$ için (3.3) eşitsizliğinin sağlanmasıdır [18].

Teorem 3.10. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda $\ell_p(\tilde{T})$ uzayının α -duali

$$\hat{d}_1(r, s) = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{K \in F} \sum_k \left| \sum_{n \in K} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} t_k a_n \right|^q < \infty \right\}$$

cümlesidir.

İspat. Herhangi bir $a = (a_n) \in \omega$ dizisini alalım. $x = (x_n)$ dizisini (2.2) deki gibi alırsak

$$\begin{aligned} a_n x_n &= a_n \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} t_k y_k \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} t_k a_n \right] y_k \\ &= \sum_{k=0}^n b_{nk}(r, s) y_k \\ &= (By)_n, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $B = (b_{nk}(r, s))$,

$$b_{nk}(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} t_k a_n & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanır.

O halde, "Her $x = (x_n) \in \ell_p(\check{T})$ için $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_p$ için $By \in \ell_1$ olmasıdır" ifadesi elde edilir. Lemma 3.1 den faydalanarak

$$(\ell_p(\check{T}))^\alpha = \hat{d}_1(r, s)$$

sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.11. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $\hat{d}_2(r, s)$ ve $\hat{d}_3(r, s)$

$$\begin{aligned}\hat{d}_2(r, s) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_n \sum_k \left| \sum_{i=k}^n \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_i \right|^q < \infty \right\}, \\ \hat{d}_3(r, s) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_i \text{ her } k \in \mathbb{N} \text{ için mevcut} \right\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $(\ell_p(\check{T}))^\beta = \hat{d}_2(r, s) \cap \hat{d}_3(r, s)$ ve $(\ell_p(\check{T}))^\gamma = \hat{d}_2(r, s)$ dir.

İspat. Herhangi bir $a = (a_n) \in \omega$ dizisini alalım. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n a_k \left\{ \sum_{i=0}^k \left[\frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{k-i} \prod_{j=i}^k \frac{1}{t_j^2} t_i y_i \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k \right\} a_i y_k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n c_{ik}(r, s) a_i y_k \\ &= \sum_{k=0}^n d_{nk}(r, s) y_k \\ &= (Dy)_n \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada $D = (d_{nk}(r, s))$, her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{ik}(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_{nk}(r, s) = \begin{cases} \sum_{i=k}^n c_{ik}(r, s) a_i & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklindedir.

Bu taktirde, "Her $x = (x_n) \in \ell_p(\check{T})$ için $ax = (a_n x_n) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_p$ için $Dy \in c$ olmasıdır" ifadesi elde edilir. Lemma 3.4 den

$$(\ell_p(\check{T}))^\beta = \hat{d}_3(r, s) \cap \hat{d}_4(r, s)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.7) den faydalanılarak "Her $x = (x_n) \in \ell_p(\check{T})$ için $ax = (a_n x_n) \in bs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n) \in \ell_p$ için $Dy \in \ell_\infty$ olmasıdır" ifadesi elde edilir.

Lemma 3.7 den

$$(\ell_p(\check{T}))^\gamma = \hat{d}_3(r, s)$$

sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.12. $\hat{d}_4(r, s)$ ve $\hat{d}_5(r, s)$ cümlelerini

$$\begin{aligned} \hat{d}_4(r, s) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_k \sum_n \left| \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{n-k} \prod_{j=k}^n \frac{1}{t_j^2} t_k a_n \right| < \infty \right\}, \\ \hat{d}_5(r, s) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{n,k} \left| \sum_{i=k}^n \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_i \right| < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde, $(\ell_1(\check{T}))^\alpha = \hat{d}_4(r, s)$, $(\ell_1(\check{T}))^\beta = \hat{d}_3(r, s) \cap \hat{d}_5(r, s)$ ve $(\ell_1(\check{T}))^\gamma = \hat{d}_5(r, s)$ dir.

İspat. Teorem 3.10 da Lemma 3.2 den faydalanılırsa $(\ell_1(\check{T}))^\alpha = \hat{d}_4(r, s)$ olduğu görülür.

Teorem 3.11 de Lemma 3.5 den faydalanılırsa $(\ell_1(\check{T}))^\beta = \hat{d}_3(r, s) \cap \hat{d}_5(r, s)$ olduğu kolaylıkla görülür.

Yine Teorem 3.11 de Lemma 3.8 den faydalanılırsa $(\ell_1(\check{T}))^\gamma = \hat{d}_5(r, s)$ elde edilir.

Teorem 3.13. $\hat{d}_6(r, s)$ cümlesi

$$\begin{aligned} \hat{d}_6(r, s) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left| \sum_{i=k}^n \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_i \right| \right. \\ &\quad \left. = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_i \right| < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $q = 1$ olmak üzere $(\ell_\infty(\check{T}))^\alpha = \hat{d}_1(r, s)$, $(\ell_\infty(\check{T}))^\beta = \hat{d}_3(r, s) \cap \hat{d}_6(r, s)$ ve $q = 1$ olmak üzere $(\ell_\infty(\check{T}))^\gamma = \hat{d}_2(r, s)$ dir.

İspat. Teorem 3.10 da Lemma 3.1 yerine Lemma 3.3 den faydalanılırsa $(\ell_\infty(\check{T}))^\alpha = \hat{d}_1(r, s)$, Teorem 3.11 de Lemma 3.4 yerine Lemma 3.6 dan faydalanılırsa $(\ell_\infty(\check{T}))^\beta = \hat{d}_3(r, s) \cap \hat{d}_6(r, s)$ ve yine Teorem 3.11 de Lemma 3.7 yerine Lemma 3.9 dan faydalanılırsa $q = 1$ olmak üzere $(\ell_\infty(\check{T}))^\gamma = \hat{d}_2(r, s)$ elde edilir.



4. BAZI MATRİS SINIFLARININ KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde; $\lambda \in \{\ell_p(\check{T}), \ell_1(\check{T}), \ell_\infty(\check{T})\}$, $\mu \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_1\}$ ve $1 < p < \infty$ olmak üzere $(\lambda : \mu)$ sınıflarını karakterize eden teoremler ifade edilecektir.

Teorem 4.1. λ, ω dizi uzayının keyfi bir alt uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu taktirde $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\check{T}) : \lambda)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$E^{(m)} = (e_{nk}^{(m)}) \in (\ell_p : c), \text{ her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (4.1)$$

ve

$$E = (e_{nk}) \in (\ell_p : \lambda) \quad (4.2)$$

olmasıdır. Burada $k, m, n \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk}^{(m)} = \begin{cases} \sum_{i=k}^m \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_{ni} & , \quad 0 \leq k \leq m \\ 0 & , \quad k > m \end{cases}$$

ve

$$e_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_{ni}$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\check{T}) : \lambda)$ ve $x = (x_k) \in \ell_p(\check{T})$ olsun. Bu taktirde bütün $m, n \in \mathbb{N}$ ler için (2.2) den faydalanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^m a_{nk} \sum_{i=0}^k \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r}\right)^{k-i} \prod_{j=i}^k \frac{1}{t_j^2} t_i y_i \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{i=k}^m \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r}\right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_{ni} y_k \\ &= \sum_{k=0}^m e_{nk}^{(m)} y_k \\ &= E_n^{(m)}(y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Ax mevcut ve $Ax \in c$ olduğundan, $E^{(m)} \in (\ell_p : c)$ olmak zorundadır. (4.3) eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $Ax = Ey$ elde edilir. $Ax \in c$ olduğundan $Ey \in c$ olur. Yani $E \in (\ell_p : c)$ elde edilir.

Tersine, (4.1) ve (4.2) şartları sağlansın ve $x \in \ell_p(\check{T})$ olsun. Bu taktirde, bütün $n \in \mathbb{N}$ ler için $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in (\ell_p(\check{T}))^\beta$ ve (4.1) ile birlikte $(e_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_p^\beta$ elde edilir. O halde Ax mevcuttur. Bu durumda (4.3) eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (4.3) eşitliğinden $Ax = Ey$ elde edilir. O halde $A \in (\ell_p(\check{T}) : \lambda)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, kullanacağımız bazı şartları aşağıda ifade edelim:

$$e_{nk}^{(m)} = \sum_{i=k}^m \frac{1}{r} \left(\frac{-s}{r} \right)^{i-k} \prod_{j=k}^i \frac{1}{t_j^2} t_k a_{ni}$$

olmak üzere

$$\sup_m \sum_{k=0}^m \left| e_{nk}^{(m)} \right|^q < \infty \quad (4.4)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e_{nk}^{(m)} \text{ mevcut her } n, k \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (4.5)$$

$$\sup_{m,k} \left| e_{nk}^{(m)} \right| < \infty \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (4.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left| e_{nk}^{(m)} \right| = \sum_{k=0}^n |e_{nk}| \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (4.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_{nk} = 0 \text{ her } k \in \mathbb{N} \text{ için} \quad (4.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |e_{nk}| = 0 \quad (4.9)$$

$$\sup_{N,K \in F} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} e_{nk} \right| < \infty \quad (4.10)$$

olarak alalım.

Teorem 4.2. $1 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\check{T}), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (4.4), (4.5) şartlarının ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.3) şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\check{T}), c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.4), (4.5) ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.3) ve (3.4) şartlarının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\check{T}), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.4), (4.5), (4.8) şartlarının ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.3) şartının sağlanmasıdır.

(iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p(\check{T}), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (4.4), (4.5) şartlarının ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.1) şartının sağlanmasıdır.

Teorem 4.3.

- (i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(\check{T}), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6) şartlarının ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.5) şartının sağlanmasıdır.
- (ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(\check{T}), c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6) ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.4) ve (3.5) şartlarının sağlanmasıdır.
- (iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(\check{T}), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6), (4.8) şartlarının ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.5) şartının sağlanmasıdır.
- (iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1(\check{T}), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6) şartlarının ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.2) şartının sağlanmasıdır.

Teorem 4.4.

- (i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(\check{T}), \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5) ve (4.7) şartlarının ve a_{nk} yerine e_{nk} ve $q = 1$ olmak üzere (3.3) şartının sağlanmasıdır.
- (ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(\check{T}), c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.7) ve a_{nk} yerine e_{nk} alınarak (3.4) ve (3.6) şartlarının sağlanmasıdır.
- (iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(\check{T}), c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.7), (4.8) ve (4.9) şartlarının sağlanmasıdır.
- (iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty(\check{T}), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.7) ve (4.10) şartlarının sağlanmasıdır.

5. $\ell_p(\check{T})$ ve $\ell_\infty(\check{T})$ DİZİ UZAYLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere birer Banach uzayı olan $\ell_p(\check{T})$ ve $\ell_\infty(\check{T})$ dizi uzaylarının bazı geometrik özelliklerini inceleyeceğiz ve bu uzayların geometrik yapıları ile ilgili bazı sonuçlar elde edeceğiz.

Çalışma boyunca $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ X Banach uzayında birim küreyi gösterecektir.

Tanım 5.1. Bir X vektör uzayının bir alt cümlesi A olsun. Her $x, y \in A$ için

$$M = \{z \in X : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

ise A cümlesi konvektir denir [2].

Tanım 5.2. X bir Banach uzayı ve $x, y \in S_X$ olsun. Her $\lambda \in (0, 1)$ için $x \neq y$ iken $\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1$ ise X uzayı kesin konvektir denir [19].

Bir normlu uzay Tanım 5.2 deki şartları sağlıyorsa bu taktirde uzayın tamamından ziyade o uzayın kapalı birim yuvarı veya normu kesin konvektir denir [5].

Önerme 5.3. Bir normlu uzayın kesin konveks olması için gerek ve yeter şart o uzayın iki boyutlu her bir alt uzayının kesin konveks olmasıdır [5].

Tanım 5.4. X bir Banach uzayı ve $0 < \varepsilon \leq 2$ olsun. $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise X uzayı düzgün konvektir denir [19].

Teorem 5.5. Her düzgün konveks Banach uzayı kesin konvektir [19].

Teorem 5.6. Her düzgün konveks Banach uzayı normal yapıya sahiptir [19].

Teorem 5.7. Her düzgün konveks uzay yansımalıdır [19].

Teorem 5.8. Her düzgün konveks uzay, Kadec- Klee özelliğine sahiptir [19].

Tanım 5.9. X bir Banach uzayı, $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in S_X$ olsun. Her $x, y \in S_X$ için $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olmak üzere $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ sayısı mevcut ise X uzayı lokal düzgün konveks uzaydır denir [19].

Lokal konveks bir X Banach uzayının modülü, $0 < \varepsilon \leq 2$ ve her $x \in S_X$ için

$$\delta_X(x, \varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} : y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

dir.

X Banach uzayının $\varepsilon > 0$ ve her $x \in S_X$ için $\delta_X(x, \varepsilon) > 0$ ise lokal düzgün konveks olacağı açıktır.

Her düzgün konveks Banach uzayı lokal düzgün konvektir.

Her lokal düzgün konveks Banach uzayı kesin konvektir.

Teorem 5.10. Her lokal düzgün konveks Banach uzayı Kadec- Klee özelliğine sahiptir [19].

Teorem 5.11. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı kesin konvektir.

İspat. $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x - y\| > 0$ olacak şekilde $x, y \in \ell_p(\tilde{T})$ alalım. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı üzerinde tanımlanan normdan

$$\sum_n \left| rt_n x_n + s \frac{1}{t_n} x_{n-1} \right|^p = \sum_n \left| rt_n y_n + s \frac{1}{t_n} y_{n-1} \right|^p = 1$$

elde ederiz. $\|x - y\| > 0$ eşitsizliği de $x \neq y$ olması demektir. $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının kesin konveks olduğunu göstermek için Önerme 5.3 den, bu uzayın iki boyutlu alt uzaylarını incelememiz yeterlidir. (1.4) eşitsizliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \left(|rt_0(x_0 + y_0)|^p + \left| rt_1(x_1 + y_1) + s \frac{1}{t_1}(x_0 + y_0) \right|^p \right)^{1/p} \\ &< \left[2^{p-1} \left(|rt_0 x_0|^p + \left| rt_1 x_1 + s \frac{1}{t_1} x_0 \right|^p + |rt_0 y_0|^p + \left| rt_1 y_1 + s \frac{1}{t_1} y_0 \right|^p \right) \right]^{1/p} \\ &= [2^{p-1} (\|x\| + \|y\|)]^{1/p} \\ &= [2^{p-1} \cdot 2]^{1/p} \\ &= 2 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x+y\| < 1$ olur bu da $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının kesin konveks olması demektir.

Teorem 5.12. $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzayı kesin konveks değildir.

İspat. $x \neq y$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. $x, y \in S_{\ell_\infty(\tilde{T})}$ iken $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1$ ise $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzayı kesin konvektir diyebiliriz. $x = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ ve $y = (-1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ olsun. Ayrıca $r = 1$, $s = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1$ olsun. Bu taktirde $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $x, y \in \ell_\infty(\tilde{T})$ dir. $x - y = (2, 0, 0, 0, 0, \dots)$ olup $\|x - y\| = 2 > \varepsilon$ dir. Bununla birlikte $x + y = (0, 2, 0, 0, 0, \dots)$ olup $\|x + y\| = 2$ dir. O halde $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x+y\| = 1$ elde edilir ki bu da $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzayının kesin konveks olmadığını gösterir.

Teorem 5.13. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı düzgün konvektir.

İspat. $\varepsilon \in (0, 2]$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olsun. Yukarıdaki şartlar altında (1.5) kullanılırsa

$$\|x + y\|^p + \varepsilon^p \leq 2^{p-1}(1 + 1)$$

elde edilir. Buradan

$$\|x + y\|^p \leq 2^p - \varepsilon^p$$

bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned} \frac{\|x + y\|^p}{2^p} &\leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} \\ &= 1 - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}\right] \\ &\leq 1 - \delta \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.14. $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzayı düzgün konveks değildir.

İspat. $x = (1, 1, 1, 0, 0, \dots)$, $y = (1, 1, -1, 0, 0, \dots) \in \ell_\infty(\tilde{T})$ ve $\varepsilon = 1$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 1$ ve $r = 1$, $s = 0$ olsun. Bu taktirde $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| = 2 > 1 = \varepsilon$ elde ederiz. $\|(x + y)/2\| = 1$ olduğu için $\ell_\infty(\tilde{T})$ dizi uzayı düzgün konveks değildir.

Teorem 5.15. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı lokal düzgün konveks uzayıdır.

İspat. Her düzgün konveks Banach uzayı lokal düzgün konveks ve $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı düzgün konveks olduğu için, $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı lokal düzgün konveksdir.

Teorem 5.16. $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı normal yapıya sahiptir.

İspat. Teorem 5.6 ve Teorem 5.13 ü kullanarak istenen sonucu elde ederiz

Teorem 5.17. $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı yansımalıdır.

İspat. Teorem 5.7 ve Teorem 5.13 kullanılarak $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayının yansımali olduğu görülür.

Teorem 5.18. $\ell_p(\tilde{T})$ dizi uzayı Kadec- Klee özelliğine sahiptir.

İspat. Teorem 5.8 ve Teorem 5.13 den faydalanılarak ispat elde edilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] **Maddox, I.J.**, 1970. Elements of functional analysis, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory functional analysis with applications, John Wiley & Sons, New York.
- [3] **Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P.**, 1982, Functional Analysis, Pergamon Press, Oxford.
- [4] **Musayev, B. ve Alp, M.**, 2000. Fonksiyonel analiz, Balcı Yayınları, Ankara.
- [5] **Meggison, R.E.**, 1998. An introduction to Banach space theory, Springer, New York.
- [6] **Bynum, W.L.**, 1980, Normal structure coefficients for Banach spaces, Pacific J. Math., **86**, 427-436.
- [7] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients, Math. Zeift., **118**, 93-102.
- [8] **Kamthan, P.K. and Gupta, M.**, 1981. Sequence spaces and series, Marcel Dekker Inc., New York and Basel.
- [9] **Koshy, T.**, 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley & Sons. Inc., Canada.
- [10] **Kara, E.E.**, 2013. Some topological and geometrical properties of new Banach sequence spaces, J. Inequal. Appl., **38**, 15.
- [11] **Candan, M. and Kara, E.E.**, 2015. A study on topological and geometrical characteristics of new Banach sequence spaces, Gulf J. of Math., **3(4)**, 67- 84.
- [12] **Candan, M.**, 2015. A new approach on the spaces of generalized Fibonacci difference null and convergent sequences, Math. Aeterna, **1(5)**, 191-210.

- [13] **Kara, E.E. and İlkan, M.**, 2015. On some Banach sequence spaces derived by a new band matrix, British J. Math. Comput. Sci., **9**, 141-159.
- [14] **Zeren, S. and Bektaş, Ç.**, 2017. On topological properties of spaces obtained by the double band matrix, Open Mathematics, (baskıda)
- [15] **Kızmaz, H.**, 1981. On certain sequence spaces, Can. Math. Bull., **24(2)**, 169-176.
- [16] **Kirişçi, M. and Başar, F.**, 2010. Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix, Comput. Math. Appl., **60(5)**, 1299-1309.
- [17] **Knopp, K.**, 1990. Theory and application on infinite series, Blackie and Son limited, London and Glasgow.
- [18] **Stieglitz, M. and Tietz, H.**, 1977. Matrix transformationen von folgenraumen eine ergebnis ubersicht, Mathematische Zeitschrift, **154**, 1-16.
- [19] **Agarwal, R.P., O'Regan, D. and Sahu, D.R.**, 2009. Fixed point theory for Lipschitzian- type mappings with applications, Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Elazığ'da doğdum. İlköğretim ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2004 yılında başladığım İnönü Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü' nü 2008 yılında tamamladım. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimime başladım ve 2012 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora öğrenimime başladım ve halen devam etmekteyim. 2009 yılında Elazığ' da matematik öğretmeni olarak göreve başladım ve bu göreve halen devam etmekteyim.