

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ SIRALI İSTATİSTİKLER ÜZERİNE

116 683

Sinan ÇALIK

T.C. YÖKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

116683

ELAZIĞ
2002

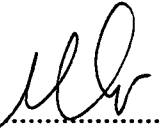
T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

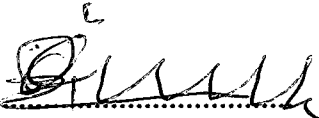
ÇOK DEĞİŞKENLİ SIRALI İSTATİSTİKLER ÜZERİNE

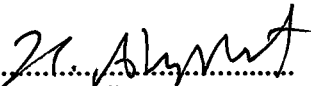
Sinan ÇALIK

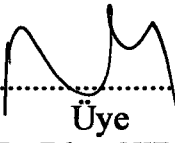
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

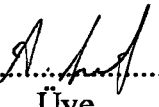
Bu Tez, 27.06.2021.....Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu İle Başarılı/Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.


.....
Danışman
Y.Doç.Dr. Mehmet GÜNGÖR


.....
Üye
Prof.Dr. Salih ÖZÇELİK


.....
Üye
Doç.Dr. Z.Hakan AKPOLAT


.....
Üye
Y.Doç.Dr. Erkan OKTAY


.....
Üye
Y.Doç.Dr. Ayşegül GÖKHAN

ÖZET

Doktora Tezi

ÇOK DEĞİŞKENLİ SIRALI İSTATİSTİKLER ÜZERİNE

Sinan ÇALIK

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2002, Sayfa: 46

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, çok değişkenli sıralı istatistiklerin tanımı verilmiş ve bunların dağılım ve yoğunluk fonksiyonları ifade edilmiştir. Ayrıca bağımsız fakat aynı dağılımlı olması gerekmeyen tesadüfi değişkenlerin sıralı istatistiklerin dağılımını, bağımsız ve aynı dağılımlı tesadüfi değişkenler türünden veren teorem, çok değişkenli hale genelleştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, çok değişkenli tesadüfi vektörler için bazı genel sıralamalar incelenmiştir.

Son bölümde, çok değişkenli ekstrem değer dağılımları ve iki değişkenli bazı üstel dağılımların fonksiyonları ile ilgili örnekler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Çok değişkenli sıralı istatistikler, sıralamalar, limiting dağılımı, çok değişkenli ekstremler, tesadüfi vektörler.

SUMMARY

Ph.D Thesis

ON THE MULTIVARIATE ORDER STATISTICS

Sinan ÇALIK

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

2002, Page : 46

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter, the definition of multivariate order statistics is given and the distribution functions and density function of multivariate order statistics are expressed. Furthermore, the theorem related to distribution of order statistics of i.n.n.i.d. (independent not necessarily identically distributed) random variables to that of order statistics of i.i.d. (independent and identically distributed) random variables is generalized for multivariate case.

In the third chapter, some general orderings for multivariate random vectors are examined.

In the last chapter, some examples related to multivariate extreme value distributions and the functions of some bivariate exponential distributions are given.

KEY WORDS: Multivariate order statistics, orderings, limiting distribution, multivariate extremes, random vectors.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜNGÖR 'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Saygılarımı sunarım.

Ayrıca tezin hazırlanmasında yardımcı olan değerli meslektaşım Yunus BULUT'a teşekkür ederim.

Sinan ÇALIK

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	I
SUMMARY.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
SİMGELER LİSTESİ.....	V
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
2. ÇOK DEĞİŞKENLİ SIRALI İSTATİSTİKLER.....	12
2.1. Giriş.....	12
2.2. Çok Değişkenli Sıralı İstatistiklerin Tanımı.....	12
2.3. Çok Değişkenli Sıralı İstatistiklerin Dağılım ve Yoğunluk Fonksiyonları...	14
2.3.1. İki Değişkenli Sıralı İstatistiklerin Dağılım Fonksiyonu.....	16
2.3.2. İki Değişkenli Sıralı İstatistiklerin Yoğunluk Fonksiyonu.....	17
2.4. Çok Değişkenli Dağılım Fonksiyonu.....	22
2.5. Çok Değişkenli i.n.n.i.d. Tesadüfi Vektörler.....	23
3. ÇOK DEĞİŞKENLİ SIRALAMALAR.....	26
3.1. Çok Değişkenli Genel Sıralamalar.....	26
3.1.1. Genel Sıralamalarda Dağılımlar.....	27
3.2. Normlarla Tesadüfi Vektörlerin Sıralaması.....	30
3.2.1. İki Değişkenli Normlarla Sıralanmış İstatistiklerin Dağılımları.....	32
3.2.2. Normlarla Sıralanmış İstatistiklerin Marjinal Dağılımları.....	34
3.2.3. İki Yada Çok Değişkenli Normlarla Sıralanmış İstatistiklerin Bileşik Dağılımları.....	34
3.3. Çok Değişkenli Genel ψ Sıralamalar.....	35
4. ÇOK DEĞİŞKENLİ EKSTREMLER.....	38
4.1. Çok Değişkenli Ekstremler.....	38
4.2. İki Değişkenli Üstel Dağılımların Fonksiyonları.....	40
4.3. Çok Değişkenli Dağılımlarda Bağımlı Fonksiyon.....	42
KAYNAKLAR.....	45

SİMGELER LİSTESİ

d.f.	: Dağılım fonksiyonu
i.i.d.	: Bağımsız ve aynı dağılımlı
i.n.n.i.d.	: Bağımsız fakat aynı dağılımlı olması gerekmeyen
r.v.	: Tesadüfi değişken
<u>n</u>	: Norm anlamında denklik



1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. (Olasılık yoğunluk fonksiyonu)

$f(x)$, reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. $a, b \in R$ ve $a \leq b$ iken

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$$

ifadesinde $f(x)$ 'e X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu denir [Freund and Walpole, 1980].

Tanım 1.2. (Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu)

X ve Y sürekli tesadüfi değişkenleri, xy düzleminin herhangi bir A bölgesinde tanımlı olsun. X ve Y tesadüfi değişkenlerinin A bölgesinde olma olasılığını veren

$$P\{(X,Y) \in A\} = \iint_A f(x,y) dx dy$$

eşitliğindeki $f(x,y)$ fonksiyonuna (X,Y) tesadüfi değişkenin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu denir [Freund and Walpole, 1980].

Tanım 1.3. (Kümülatif dağılım fonksiyonu)

X , olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan bir tesadüfi değişken olsun. Herhangi bir x reel değeri için X 'in kümülatif dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

eşitliği ile ifade edilir [Rees, 1987].

Tanım 1.4. (Bileşik dağılım fonksiyonu)

X ve Y sürekli tesadüfi değişkenler olsun. Bunların bileşik dağılım fonksiyonu,

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

eşitliği ile ifade edilir [Freund and Walpole, 1980].

Tanım 1.5. (Sıralı istatistikler)

$\xi_1, \dots, \xi_n$, n tane tesadüfi değişken olsun. Eğer $\xi_1, \dots, \xi_n$ 'lerin meydana gelme sırası ile değil, büyüklüklerinin sırası ile ilgilenilirse n birimli bir örneğin sıralı istatistiği

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n} \quad (1.1)$$

olarak ifade edilir.

$X_{r:n}$, r -inci sıralı istatistik ve $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ tesadüfi vektörüne de sıralı istatistikler denilir. $X_{1:n}$ örnek minimumu ve $X_{n:n}$ örnek maksimumudur. Bundan dolayı

$$X_{1:n} = \min(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1.2)$$

ve

$$X_{n:n} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1.3)$$

yazılabilir. Bazen r -inci sıralı istatistik

$$Z_{r:n}(x_1, \dots, x_n) = z_r \quad (1.4)$$

şeklinde de verilebilir. Burada $z_1 \leq \dots \leq z_n$, $x_1, \dots, x_n$ 'lerin reel değerlerinin artan sırada düzenlenmiş değerleridir. Buradan

$$X_{r:n} = Z_{r:n}(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (1.5)$$

olur [Reiss, 1989].

Tanım 1.6. (Sıralı istatistiklerin örnek dağılım fonksiyonu)

$(-\infty, t]$ aralığındaki x_i verilerinin frekansı, $\sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, t]}(x_i)$ olarak ifade edilir.

$z_1 \leq \dots \leq z_n$ ile $x_1, \dots, x_n$ 'lerin sıralanmış değerlerini göstermek üzere

$$z_r \leq t \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, t]}(x_i) \geq r \quad (1.6)$$

ifadesi yazılabilir. (1.6) 'dan

$$\{X_{r,n} \leq t\} = \left\{ \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, t]}(\xi_i) \geq r \right\} \quad (1.7)$$

eşitliği yazılabilir ve böylece

$$P\{X_{r,n} \leq t\} = P\left\{ \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, t]}(\xi_i) \geq r \right\} = P\{F_n(t) \geq r/n\} \quad (1.8)$$

olur. Burada F_n örnek dağılım fonksiyonu,

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, t]}(\xi_i)$$

ile tanımlanır [Reiss, 1989].

Tanım 1.7. (Bağımlı örneklerde sıralı istatistikler)

$C_1, C_2, \dots, C_n$ olasılık uzayında alınan keyfi olaylar olsun. O zaman

$$\begin{aligned} P\left\{ \bigcup_{i=1}^n C_i \right\} &= \sum_{i=1}^n P\{C_i\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P\{C_{i_1} \cap C_{i_2}\} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P\{C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}\} \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} P\{C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_n}\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

yazılır ve

$$S_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P\{C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k}\} \quad (1.10)$$

olarak alınırsa

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^n C_i\right\} = 1 - P\left\{\bigcap_{i=1}^n \bar{C}_i\right\} \quad (1.11)$$

olur. Burada $\bar{C}_i$; C_i 'nin tümleyenidir. (1.9)'dan

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^n \bar{C}_i\right\} = 1 - P\left\{\bigcup_{i=1}^n C_i\right\} = \sum_{i=0}^n (-1)^i S_{i,n} \quad (1.12)$$

yazılabilir. Burada $S_{0,n} = 1$ dir [Galambos, 1987].

Tanım 1.8. (Tek değişkenli bağımlı sıralı istatistiklerin dağılımı)

Tanım 1.7'deki ifadeler $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ olaylarının herhangi bir alt cümlesine benzer biçimde tam olarak genelleştirilebilir. Onların alt ve üst sıralı istatistiklere uygulanması, cümlelerin yeterli bir seçimiyle mümkündür. Gerçekten eğer

$$C_i(x) = \{X_i \leq x\} \quad (1.13)$$

$$\bar{C}_i(x) = \{X_i > x\}$$

ise

$$F_{X_{r:n}}(x) = P\{X_{r:n} \leq x\} = P\{m_n(x) \geq r\} = P\{\underline{m}_n(x) \leq n - r\} \quad (1.14)$$

ve

$$F_{X_{n-r+1:n}}(x) = P\{X_{n-r+1:n} \leq x\} = P\{\underline{m}_n(x) < r\} \quad (1.15)$$

yazabiliriz. Burada $m_n(x)$ ve $\underline{m}_n(x)$ sırasıyla örnekte meydana gelen $i = 1, \dots, n$ C_i ve $\bar{C}_i$ 'lerin sayısıdır. Aralarında

$$m_n(x) + \underline{m}_n(x) = n \quad (1.16)$$

ilişkisi vardır. $C_i(x)$ ve $\bar{C}_i(x)$, sırayla $S_{i,n}(x)$ ve $\bar{S}_{i,n}(x)$ ile tanımlanır [Galambos, 1987].

Tanım 1.9. (Bağımlı sıralı istatistiklerin maksimumunun dağılımı)

(1.15) ifadesinde $r = 1$ için

$$F_{X_{n:n}}(x) = P\{X_{n:n} \leq x\} = P\{\underline{m}_n < 1\} = P\{\underline{m}_n(x) = 0\} \quad (1.17)$$

ve Teorem 1.1’de yerine konursa

$$\sum_{i=0}^{2s+1} (-1)^i \bar{S}_{i,n}(x) \leq F_{X_{n:n}}(x) \leq \sum_{i=0}^{2s} (-1)^i \bar{S}_{i,n}(x) \quad (1.18)$$

olur. Burada $\bar{S}_{i,n}(x)$, C_i ’nin yerine $\bar{C}_i$ aldığımız zaman (1.10) ’daki değerlerdir. (1.18)’de her iki taraf ayrı ayrı $n = 2s + 1$ ve $n = 2s$ için denk olur ve genel durumda maksimumun cdf’sini verir.

i.i.d. durumu için

$$\bar{S}_{i,n}(x) = \binom{n}{i} [1 - F(x)]^i$$

ve $2s = n$ için

$$F_{X_{n:n}}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} [1 - F(x)]^i = \{1 - [1 - F(x)]\}^n = F^n(x)$$

olur [Galambos, 1987].

Tanım 1.10. (Bağımlı sıralı istatistiklerin minimumunun dağılımı)

(1.14) ifadesinde $r = 1$ için

$$F_{X_{1:n}}(x) = P\{X_{1:n} \leq x\} = P\{m_n(x) \geq 1\} = 1 - P\{m_n(x) = 0\} \quad (1.19)$$

olur ve bu ifade Teorem 1.1’de yerine yazılırsa örneğin minimumunun cdf’si için verilen sınırlar, $n = 2s + 1$ ve $n = 2s$ için

$$\sum_{i=0}^{2s+1} (-1)^i S_{i,n}(x) \leq 1 - F_{X_{1:n}}(x) \leq \sum_{i=0}^{2s} (-1)^i S_{i,n}(x) \quad (1.20)$$

ifadeleri yazılabilir.

i.i.d. durumu için

$$S_{k,n}(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P\{\xi_{i_1} \leq x, \xi_{i_2} \leq x, \dots, \xi_{i_k} \leq x\} = \binom{n}{k} F^k(x) \quad (1.21)$$

olduğundan r -inci sıralı istatistik için Teorem 1.2 ve (1.14)'den

$$\begin{aligned} F_{X_{r,n}}(x) &= P\{m_n(x) \geq r\} = \sum_{t=r}^n \sum_{i=0}^{n-t} (-1)^i \binom{i+t}{t} S_{i+t,n} \\ &= \sum_{t=r}^n \sum_{i=0}^{n-t} (-1)^i \binom{i+t}{t} \binom{n}{i+t} F^{i+t}(x) \\ &= \sum_{t=r}^n \binom{n}{t} F^t(x) \sum_{i=0}^{n-t} (-1)^i \binom{n-t}{i} F^i(x) \\ &= \sum_{t=r}^n \binom{n}{t} F^t(x) [1 - F(x)]^{n-t} \end{aligned} \quad (1.22)$$

olur [Galambos, 1987].

Tanım 1.11. (Örnek maksimumun limiting dağılım fonksiyonları)

Dejenere olmayan dağılımlarda her x için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(a_n + b_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) = H(x)$$

ifadesi yazılır ve

- i) Frechet : $H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \alpha > 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$
- ii) Weibull : $H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \alpha > 0 \text{ ise} \\ \exp[-(-x)^{-\alpha}], & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$
- iii) Gumbel : $H_{3,0}(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad -\infty < x < \infty \text{ ise}$

dağılımları örnek maksimumun limiting dağılım fonksiyonlarıdır [Galambos, Lechner, Simiu and Macri, 1994].

Tanım 1.12. (Örnek minimumun limiting dağılım fonksiyonları)

Dejenere olmayan dağılımlarda her x için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(c_n + d_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - [1 - F(c_n + d_n x)]^n = L(x)$$

eşitliği yazılır ve

$$\text{i) Frechet : } L_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(-x)^{-\alpha}] & , \quad x < 0, \quad \alpha > 0 \text{ ise} \\ 1 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$\text{ii) Weibull : } L_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^\alpha) & , \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$\text{iii) Gumbel : } L_{3,0}(x) = 1 - \exp[-\exp(x)], \quad -\infty < x < \infty \text{ ise}$$

dağılımları örnek minimumun limiting dağılım fonksiyonlarıdır [Galambos, Lechner, Simiu and Macri, 1994].

Tanım 1.13. (n sıralı istatistiklerin bileşik yoğunluk fonksiyonu)

$-\infty < x_{1:n} < x_{2:n} < \dots < x_{n:n} < \infty$ için sıralı istatistiğin bileşik yoğunluk fonksiyonu

$$f_{1,2,\dots,n}(x_{1:n} < x_{2:n} < \dots < x_{n:n}) = n! \prod_{i=1}^n f(x_{i:n})$$

olarak ifade edilir [David, 1981].

Tanım 1.14. (i -inci sıralı istatistiklerin marjinal yoğunluk fonksiyonu)

$X_{i:n}$ 'nin marjinal yoğunluk fonksiyonu, $1 \leq i \leq n$ ve $-\infty < x_{i:n} < \infty$ için

$$f_{i:n}(x_{i:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x_{i:n})]^{i-1} [1 - F(x_{i:n})]^{n-i} f(x_{i:n})$$

olarak ifade edilir [Gibbons, 1971].

Tanım 1.15. (İki sıralı istatistiğin bileşik yoğunluk fonksiyonu)

$X_{i:n}$ ve $X_{j:n}$ 'nin bileşik yoğunluk fonksiyonu, $1 \leq i < j \leq n$ ve $-\infty < x_{i:n} < x_{j:n} < \infty$ için

$$f_{i,j:n}(x_{i:n}, x_{j:n}) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(x_{i:n})]^{i-1} [F(x_{j:n}) - F(x_{i:n})]^{j-i-1} [1 - F(x_{j:n})]^{n-j} f(x_{i:n}) f(x_{j:n})$$

olarak elde edilir [Balakrishnan and Cohen, 1991].

Tanım 1.16. (Halka)

$\mathcal{H}$ boş olmayan bir kümeler ailesi olsun. Eğer $A \in \mathcal{H}$ ve $B \in \mathcal{H}$ olması, $A \Delta B$ ve $A \cap B$ kümeleride $\mathcal{H}$ ailesinin elemanları olmasını gerektiriyorsa, $\mathcal{H}$ ailesine bir halka denir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.1.17. (Kümeler cebiri)

Birimli bir kümeler halkasına kümeler cebiri denir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.18. (Borel kümesi)

Eğer bir B kümesi, kapalı veya açık kümelerin sonlu yada sayılabilir sayıda birleşim ve kesişimleriyle elde edilmişse, bu kümeye Borel kümesi denir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.19. (σ -halka)

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ kümeler dizisi bir halkadan seçildiğinde

$$S = \bigcup_n A_n$$

kümesi de halkanın bir elemanı oluyorsa bu halkaya σ -halkası adı verilir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.20. (σ -cebiri, δ -cebiri)

Birim elemanlı σ -halkasına σ -cebiri, birim elemanlı δ -halkasına da δ -cebiri denir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.21. (δ -halka)

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ kümeler dizisi bir halkadan seçildiğinde

$$D = \bigcap_n A_n$$

kümesi de halkanın bir elemanı oluyorsa bu halkaya δ -halkası adı verilir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.22. (Borel cebiri)

δ -cebiri (yada aynı şey demek olan) σ -cebiri yerine çoğu kez Borel cebiri yada kısaca B-cebiri adı verilir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.23. (Dış ölçüm)

Alt sınır, A kümesinin $B_n \in S_m$ kümelerinin sonlu yada sayılabilir ailelerinin oluşturduğu bütün örtüleri üzerinden alınmak üzere

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup_n B_n} \sum_n m(B_n)$$

sayısına, $A \subseteq E$ kümesinin dış ölçümü denir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.24. (İç ölçüm)

$$\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A)$$

sayısına, $A \subseteq E$ kümesinin iç ölçümü denir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Tanım 1.25. (Lebesgue ölçümü)

Eğer $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ ise $A \subseteq E$ kümesine (lebesgue anlamında) ölçülebilirdir denilir. A ölçülebiliyorsa $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ ortak değerini $\mu(A)$ ile gösterilir ve buna A kümesinin (Lebesgue) ölçümü denilir [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Teorem 1.1. $n \geq 2$ olsun. O zaman $0 \leq s \leq \left\| n - \frac{1}{2} \right\|$ için

$$\sum_{i=0}^{2s+1} (-1)^i S_{i,n} \leq P\{m_n = 0\} \leq P = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \bar{C}_i \right\} \leq \sum_{i=0}^{2s} (-1)^i S_{i,n}$$

dir. Burada m_n ; meydana gelen C_i 'lerin sayısıdır ve $\|x\|$; x 'in tam kısmı anlamındadır [Galambos, 1987].

Teorem 1.2. $\{m_n = t\}$ olayının olasılığı $S_{i,n}$ 'nin $(i = t, t+1, \dots, n)$ terimleri türünden

$$P\{m_n = t\} = \sum_{i=0}^{n-t} (-1)^i \binom{i+t}{t} S_{i+t,n}$$

yazılabilir [Galambos, 1987].

Teorem 1.3. (i.i.d. sıralı istatistiklerin kümülatif dağılım fonksiyonu)

$X_{r:n}$, F ortak dağılım fonksiyonlu n tane $\xi_1, \dots, \xi_n$, i.i.d. tesadüfi değişkenlerin r -inci sıralı istatistiği olsun. O zaman her t için

$$P\{X_{r:n} \leq t\} = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} F^i(t) [1 - F(t)]^{n-i} \quad (1.23)$$

dir.

Özel olarak $X_{1:n}$ minimumun ve $X_{n:n}$ maksimumun kümülatif dağılım fonksiyonları sırasıyla

$$P\{X_{n:n} \leq t\} = F^n(t) \quad (1.24)$$

ve

$$P\{X_{1:n} \leq t\} = 1 - [1 - F(t)]^n \quad (1.25)$$

olarak yazılabilir [Reiss, 1989].

Teorem 1.4. (i.n.n.i.d. tesadüfi değişkenler)

$X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ i.n.n.i.d. tesadüfi değişkenlerinin sıralı istatistikleri ve F_i , ξ_i 'nin d.f.' si olsun. O zaman her B Borel cümlesi için

$$P\{(X_{1:n}, \dots, X_{n:n}) \in B\} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{k^n}{n!} \sum_{|S|=k} P\{(X_{1:n}^S, \dots, X_{n:n}^S) \in B\}$$

olur. Burada toplam, $\{1, 2, \dots, n\}$ 'nin k elemanlı tüm S alt kümeleri üzerinden alınır.

Bununla birlikte $X_{1:n}^S \leq \dots \leq X_{n:n}^S$,

$$F^S = |S|^{-1} \sum_{i \in S} F_i$$

ortak dağılım fonksiyonlu n tane i.i.d. tesadüfi değişkenin sıralı istatistiklerini göstermektedir. [Reiss, 1989].

Teorem 1.5. (Radon-Nikodym Teoremi)

Eğer $(R, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı ve Q (sonlu) tümüyle $\mathfrak{F}$ de toplamsal küme fonksiyonu öyleki $P(E)=0$ olan her $E \in \mathfrak{F}$ kümesi için $Q(E)=0$ ise o zaman bir $g(e)$ tesadüfi değişkeni mevcuttur öyle ki her $E \in \mathfrak{F}$ için

$$Q(E) = \int_E g(e) dP$$

olur. Burada eğer $g(e)$ ve $h(e)$ iki tesadüfi değişkenler ise o zaman $P(g(e) \neq h(e))=0$ dır [Wilks, 1962].

2. ÇOK DEĞİŞKENLİ SIRALI İSTATİSTİKLER

2.1. Giriş

Çok değişkenli sıralı istatistikler; marjinal sıralamalar göz önüne alınarak tanımlanabilir. Konu böyle bir kısıtlama ile tek değişkenli sıralı istatistiklere dönüştürülmüş olacaktır. Çok değişkenli sıralı istatistiklerdeki inceleme, tek değişkenli sıralı istatistiklerdeki kadar ayrıntılı olmaz. Ancak F dağılım fonksiyonlu i.i.d. tesadüfi vektörlerin çok değişkenli maksimum durumu tek değişkenliye benzer olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca Teorem 1.4 'deki i.n.n.i.d. tesadüfi değişkenleri, çok değişkenli duruma genelleştirilmiştir.

Çok değişkenli sıralamalar için; istatistikte genel sıralamalardan bahsedilecek sonra bu kavramların kullanılması için bir çalışma verilecektir. Klasik sıralı istatistikler, çok değişkenli dağılımlara genelleştirilmiştir. Normlarla tesadüfi vektörlerin sıralaması hakkında bir çalışmadan bahsedilmiştir. Ayrıca genel ψ sıralama hakkında da bilgi verilmiştir.

Son olarak, tek değişkenli $X_{n,n}$ maksimumun limiting dağılım fonksiyonunun Frechet, Weibull ve Gumbel tipi dağılım fonksiyonu olduğu belirtilmiştir. Çok değişkenli haldeki durum çok daha karmaşıktır. İki boyutlu bazı üstel dağılımların çeşitli fonksiyonları verilmiştir. Ayrıca bağımlı fonksiyon vasıtasıyla iki değişkenli bazı üstel dağılımların kümülatif dağılım fonksiyonları için örnekler verilmiştir.

2.2. Çok Değişkenli Sıralı İstatistiklerin Tanımı

Bu bölümdeki ilişkiler ve aritmetik işlemler daima bileşenler türünden incelenecektir.

Yani, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ verildiğinde

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \text{ olması } i = 1, 2, \dots, m \text{ için } x_i < y_i \quad (2.2.1)$$

ve

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m) \quad (2.2.2)$$

olarak ele alınacaktır.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ m -boyutlu n tane tesadüfi vektör olsun. Burada $\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,m})'$ dir. $\xi_{1,j}, \xi_{2,j}, \dots, \xi_{n,j}$, j -inci bileşenlerin sıralanmış değerleri

$$X_{1n}^{(j)} \leq X_{2n}^{(j)} \leq \dots \leq X_{nn}^{(j)} \quad (2.2.3)$$

olarak ifade edilebilir. (1.4)' de tanımlandığı gibi Z_{rn} dönüşümü kullanılarak

$$X_{rn}^{(j)} = Z_{rn}(\xi_{1,j}, \xi_{2,j}, \dots, \xi_{n,j}) \quad (2.2.4)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$\mathbf{X}_{rn} = (X_{rn}^{(1)}, X_{rn}^{(2)}, \dots, X_{rn}^{(m)}) \quad (2.2.5)$$

olarak ifade edilebilir. (2.2.1) 'de tanımlandığı gibi

$$\mathbf{X}_{1n} \leq \mathbf{X}_{2n} \leq \dots \leq \mathbf{X}_{nn} \quad (2.2.6)$$

olur. Burada,

$$\mathbf{X}_{1n} = (X_{1n}^{(1)}, X_{1n}^{(2)}, \dots, X_{1n}^{(m)}) \quad (2.2.7)$$

m -değişkenli örnek minimumu ve

$$\mathbf{X}_{nn} = (X_{nn}^{(1)}, X_{nn}^{(2)}, \dots, X_{nn}^{(m)}) \quad (2.2.8)$$

m - değişkenli örnek maksimumdur.

Burada dikkat edilmelidir ki X_{jn} ; $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ' lerin birisine eşit değildir.

Ayrıca (1.7)'de ifade edildiği gibi

$$P\{ \mathbf{X}_{rn} \leq \mathbf{t} \} = P\left\{ \sum_{i=1}^n (1_{(-\infty, t_1]}(\xi_{i,1}), \dots, 1_{(-\infty, t_m]}(\xi_{i,m})) \geq \mathbf{r} \right\} \quad (2.2.9)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\mathbf{t}=(t_1,t_2,\dots,t_m)$ ve $\mathbf{r}=(r,r,\dots,r)$ 'dir. tesadüfi değişkeninin herhangi $X_{rn}^{(j)}$ bir alt sınıfına (2.2.9) 'u genişletmek kolaydır. Bu durum $I \subset \{(j,r): j=1,2,\dots,m \text{ ve } r=1,2,\dots,n\}$ için

$$P\{X_{rn}^{(j)} \leq t_{j,r}, (j,r) \in I\} = P\left\{\sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, t_{j,r}]}(\xi_{i,j}) \geq r, (j,r) \in I\right\} \quad (2.2.10)$$

olarak ifade edilebilir. Benzer bir sonuç

$$X_{n(1):n(1)}^{(1)}, X_{n(2):n(2)}^{(2)}, \dots, X_{n(m):n(m)}^{(m)}$$

örnek maksimalar içinde sağlanabilir.

2.3. Çok Değişkenli Sıralı İstatistiklerin Dağılım ve Yoğunluk Fonksiyonları

(2.2.9) ve (2.2.10)'den $X_{rn}^{(j)}$ sıralı istatistiklerinin bileşik dağılım fonksiyonu $N_1, N_2, \dots, N_k$, "hücre frekans vektörleri" ne yaklaşımı çok terimli olasılıklar yoluyla kanıtlanabileceği açıktır. Burada $N_j = \sum_{i=1}^n 1_{R_j}(\xi_i)$ ve $R_1, R_2, \dots, R_k$, m -öklid uzayının bir bölünmesidir ve

$$P\{N_1 = i_1, N_2 = i_2, \dots, N_k = i_k\} = \frac{n! P_1^{i_1} P_2^{i_2} \dots P_k^{i_k}}{i_1! i_2! \dots i_k!} \quad (2.3.1)$$

dir. Burada $i_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^k i_j = n$ ve $p_j = P\{\xi_1 \in R_j\}$ dir.

$\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ i.i.d. tesadüfi vektörler olsun. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'nin X_{nn} örnek maksimumu için (1.22)' nin bir genişlemesi

$$P\{X_{nn} \leq \mathbf{t}\} = F^n(\mathbf{t}) \quad (2.3.2)$$

olarak yazılabilir. Bu,

$$\begin{aligned}
P\{X_{n:n} \leq t\} &= P\{X_{n:n}^{(1)} \leq t_1, \dots, X_{n:n}^{(m)} \leq t_m\} \\
&= P\{\max\{\xi_{1,1}, \dots, \xi_{n,1}\} \leq t_1, \dots, \max\{\xi_{1,m}, \dots, \xi_{n,m}\} \leq t_m\} \\
&= P\{\xi_1 \leq t, \dots, \xi_n \leq t\} = F^n(t)
\end{aligned}$$

olarak açıklanabilir. Benzer şekilde $X_{1:n}$ örnek minimumu için

$$= P\{X_{1:n} > t\} = G^n(t) \quad (2.3.3)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $G^n(t) = P\{\xi > t\}$ ' dir. $m = 2$ için

$$G(x, y) = P\{\xi > (x, y)\} = 1 - F_1(x) - F_2(y) + F(x, y) \quad (2.3.4)$$

olur. Böylece

$$F(x, y) = 1 - (1 - F_1(x)) - (1 - F_2(y)) + G(x, y)$$

dir. (1.25) ile (2.3.3)'ün birlikte dönüşümüyle

$$P\{X_{1:n} \leq (x, y)\} = 1 - (1 - F_1(x))^n - (1 - F_2(y))^n + G^n(x, y) \quad (2.3.5)$$

ifadesi yazılabilir.

Eğer f, F 'nin bir yoğunluğuysa ve $m = 2$ ise $n \geq 2$ için $X_{n:n} = (X_{n:n}^{(1)}, X_{n:n}^{(2)})$ örnek maksimumun yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{(n,n)} = nF^{n-1}f + n(n-1)F^{n-2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \quad (2.3.6)$$

olur.

$X_{1:n} = (X_{1:n}^{(1)}, X_{1:n}^{(2)})$ örnek minimumun yoğunluk fonksiyonu ise

$$nG^{n-1}f + n(n-1)G^{n-2} \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \quad (2.3.7)$$

ile verilir.

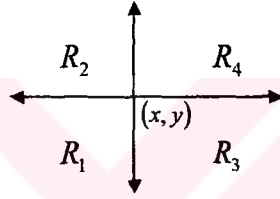
2.3.1. İki Değişkenli Sıralı İstatistiklerin Dağılım Fonksiyonu

$X_{rn}^{(j)}$ sıralı istatistiğin tam bileşik dağılım fonksiyonu çok terimli vektörler yoluyla elde edilebilir. Burada $X_{rn}^{(1)}$ ve $X_{rn}^{(2)}$ bileşik dağılımı detaylı bir şekilde incelenecektir.

$i=1, \dots, n$ olmak üzere $\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$, F ortak dağılım fonksiyonlu ve F_i marjinali tesadüfi vektörleri $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ gibi alalım. Burada $F(x, y) = P\{\xi \leq (x, y)\}$, $F_1(x) = P\{\xi_1 \leq x\}$ ve $F_2(y) = P\{\xi_2 \leq y\}$ ' dir.

$$\begin{aligned} R_1 &= (-\infty, x] \times (-\infty, y], & R_2 &= (-\infty, x] \times (y, \infty) \\ R_3 &= (x, \infty) \times (-\infty, y], & R_4 &= (x, \infty) \times (y, \infty) \end{aligned}$$

bölgeleri



şeklinde gösterilebilir. Bu bölgelerdeki

$$G_i = P\{\xi \in R_i\}$$

olarak ifade edilebilir. Buradan

$$F(x, y) = G_1(x, y), \quad F_1(x) = G_1(x, y) + G_2(x, y), \quad F_2(y) = G_1(x, y) + G_3(x, y)$$

ifadeleri yazılabilir ve

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= F(x, y), & G_2(x, y) &= F_1(x) - F(x, y), & G_3(x, y) &= F_2(y) - F(x, y) \\ G_4(x, y) &= 1 - F_1(x) - F_2(y) + F(x, y) \end{aligned}$$

dir. R_j 'de ξ_i ' nin frekansı N_j ile tanımlanırsa

$$N_j = \sum_{i=1}^n 1_{R_j}(\xi_i)$$

olur. (1.7)' den

$$\begin{aligned}
& P\{X_{rn}^{(1)} \leq x, X_{sn}^{(2)} \leq y, N_1 = t\} \\
&= P\left\{\sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x]}(\xi_{i,1}) \geq r, \sum_{i=n}^n 1_{(-\infty, y]}(\xi_{i,2}) \geq s, N_1 = t\right\} \\
&= P\{N_1 + N_2 \geq r, N_1 + N_3 \geq s, N_1 = t\} \\
&= \sum_{k=r}^n \sum_{l=s}^n P\{N_1 = t, N_2 = k - t, N_3 = l - t\}
\end{aligned}$$

elde edilir. (N_1, N_2, N_3, N_4) çok terimli tesadüfi vektörün olasılıklarını toplayarak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 2.3.1. $X_{rn}^{(1)}$ ve $X_{sn}^{(2)}$ 'nin $F_{(r,s);n}$ dağılım fonksiyonu

$$F_{(r,s);n} = \sum_{k=r}^n \sum_{l=s}^n \sum_{t=\max(k+l-n, 0)}^{\min(k,l)} \frac{n! G_1^t G_2^{k-t} G_3^{l-t} G_4^{n-k-l+t}}{t! (k-t)! (l-t)! (n-k-l+t)!}$$

ile verilir.

2.3.2. İki Değişkenli Sıra İstatistiklerin Yoğunluk Fonksiyonu

$F_{(r,s);n}$ için $\frac{\partial^2 F_{(r,s);n}}{\partial x \partial y}$ gösterimi kullanılabilir. F bir yoğunluk fonksiyonuna sahip

ise $F_{(r,s);n}$ 'nin yoğunluk fonksiyonunun mevcut olduğu ispatlanacaktır. Her B Borel cümlesi için

$$\begin{aligned}
P\{(X_{rn}^{(1)}, X_{sn}^{(2)}) \in B\} &\leq \sum_{i,j=1}^n P\{(\xi_{i,1}, \xi_{j,2}) \in B\} \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \int f_1(x) f_2(y) dx dy + \sum_{i=1}^n \int f(x, y) dx dy
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $f_1 = \int f(\cdot, v) dv$ ve $f_2 = \int f(u, \cdot) du$, F_1 ve F_2 'nin yoğunluklarıdır.

Böylece B, lebesgue ölçümü sıfır ise $P\{(X_{rn}^{(1)}, X_{sn}^{(2)}) \in B\} = 0$ ve bundan dolayı Radom-Nikodym teoremi $F_{(r,s);n}$ 'nin bir (lebesgue) yoğunluğa sahip olduğunu ifade eder.

m -öklid uzayında hemen hemen her $x=(x_1, \dots, x_m)$ 'de lebesgue integrallenebilir her g fonksiyonu için

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2h)^{-m} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \dots \int_{x_m-h}^{x_m+h} g(z) dz = g(x) \quad (2.3.8)$$

dır.

Yardımcı Teorem 2.3.1

Eğer $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ iki değişkenli i.i.d. tesadüfi vektörleri f ortak yoğunluğa sahip ise negatif faktöriyeler içeren terimleri sıfırla değiştirilmek şartıyla $(X_{r,n}^{(1)}, X_{s,n}^{(2)})$ tesadüfi vektörü,

$$\begin{aligned} f_{(r,s)n} = n! \sum_{t=0}^n \frac{G_1^t}{t!} & \left[G_2^{r-1-t} G_3^{s-1-t} G_4^{n-r-s+t+1} f \big/ (r-1-t)!(s-1-t)!(n-r-s+t+1)! \right. \\ & + G_2^{r-2-t} G_3^{s-1-t} G_4^{n-r-s+t+1} G_5 G_6 \big/ (r-2-t)!(s-1-t)!(n-r-s+t+1)! \\ & + G_2^{r-2-t} G_3^{s-2-t} G_4^{n-r-s+t+2} G_5 G_8 \big/ (r-2-t)!(s-2-t)!(n-r-s+t+2)! \\ & + G_2^{r-1-t} G_3^{s-1-t} G_4^{n-r-s+t} G_6 G_7 \big/ (r-1-t)!(s-1-t)!(n-r-s+t)! \\ & \left. + G_2^{r-1-t} G_3^{s-2-t} G_4^{n-r-s+t+1} G_7 G_8 \big/ (r-1-t)!(s-2-t)!(n-r-s+t+1)! \right] \end{aligned}$$

yoğunluğa sahiptir. $G_1, \dots, G_4$ fonksiyonları yukarıda tanımlanmıştır. Burada

$$\begin{aligned} G_5(x, y) &= \int_{-\infty}^x f(u, y) du, & G_6(x, y) &= \int_y^{\infty} f(x, v) dv \\ G_7(x, y) &= \int_x^{\infty} f(u, y) du, & G_8(x, y) &= \int_{-\infty}^y f(x, v) dv \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $\sum_{t=0}^n, \sum_{t=0}^{\min(r,s)-1}$ ile değiştirilmiş olabilir. Bununla birlikte

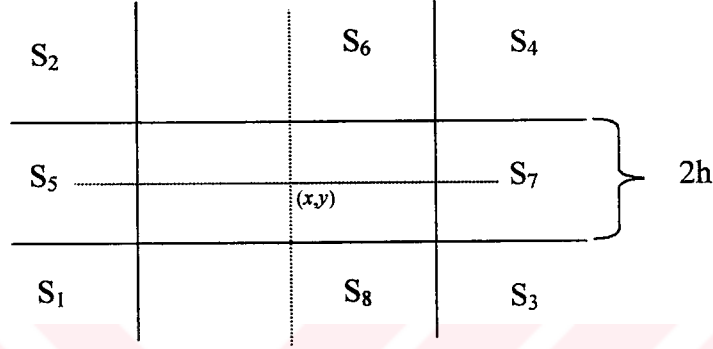
$$G_6(x, y) = f_1(x) - G_8(x, y) \text{ ve } G_7(x, y) = f_2(y) - G_5(x, y)$$

dir.

İspat: $S_{0,h}(x,y) = (x-h, x+h] \times (y-h, y+h]$ alalım. (2.3.8)' e göre hemen hemen tüm (x,y) için $h \rightarrow 0$ giderken

$$(2h)^{-2} P\{(X_{r,n}^{(1)}, X_{s,n}^{(2)}) \in S_{0,h}(x,y)\} \rightarrow f_{(r,s),n}(x,y) \quad (2.3.9)$$

olduğunu göstermek yeterli olur. $P\{(X_{r,n}^{(1)}, X_{s,n}^{(2)}) \in S_0\}$ olasılığını hesaplamak için



tasviri kullanılacaktır. $N_j = \sum_{i=1}^n 1_{S_j}(\xi_i)$ ve $q_j = P\{\xi \in S_j\} = \int_{S_j} f(u,v) du dv$, $0 \leq j \leq 8$

olsun. Burada $j = 1, \dots, 4$ için $h \rightarrow 0$ giderken $q_j \rightarrow G_j$ gider. (2.3.8)' i uygulayarak hemen hemen her yerde $j = 5, \dots, 8$ için $h \rightarrow 0$ giderken

$$(2h)^{-2} q_0 \rightarrow f \quad \text{ve} \quad (2h)^{-1} q_j \rightarrow G_j \quad (2.3.10)$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$h^{-2} P\{N_0 \geq 2\} \rightarrow 0 \quad h^{-2} P\left\{N_0 = 1 \quad \sum_{j=5}^8 N_j \geq 1\right\} \rightarrow 0$$

ve $h \rightarrow 0$ giderken

$$h^{-2} P\left\{N_0 = 0 \quad \sum_{j=5}^8 N_j \geq 2\right\} \rightarrow 0$$

ve hemen hemen her yerde

$$(2h)^{-2} \left[P \left\{ (X_{rn}^{(1)}, X_{sn}^{(2)}) \in S_0, \quad N_0 = 1, \quad N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 0 \right\} \right. \quad (2.3.11)$$

$$\left. + P \left\{ (X_{rn}^{(1)}, X_{sn}^{(2)}) \in S_0, \quad N_0 = 1, \quad \sum_{j=5}^8 N_j < 2 \right\} \right] \rightarrow f_{(r,s);n}$$

olduğunu ispatlamak yeterli olur. (1.7) 'yi uygulayarak

$$\begin{aligned} \{ (X_{rn}^{(1)}, X_{sn}^{(2)}) \in S_0 \} &= \{ x-h < X_{rn}^{(1)} \leq x+h, \quad y-h < X_{sn}^{(2)} \leq y+h \} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x-h]}(\xi_{i,1}) < r \leq \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x+h]}(\xi_{i,1}), \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, y-h]}(\xi_{i,2}) < s \leq \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, y+h]}(\xi_{i,2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$= \{ N_1 + N_2 + N_5 < r \leq N_1 + N_2 + N_5 + N_0 + N_5 + N_8, \quad$$

$$N_1 + N_3 + N_8 < s \leq N_1 + N_3 + N_8 + N_0 + N_5 + N_7 \}$$

olduğu çıkar. Böylece $t = 0, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} &\{ (X_{rn}^{(1)}, X_{sn}^{(2)}) \in S_0, \quad N_0 = 1, \quad N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 0, \quad N_1 = t \} \\ &= \{ N_1 + N_2 < r \leq N_1 + N_2 + 1, \quad N_1 + N_3 < s \leq N_1 + N_3 + 1, \\ &\quad N_0 = 1, \quad N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 0, \quad N_1 = t \} \quad (2.3.13) \\ &= \{ N_0 = 1, \quad N_1 = t, \quad N_2 = r - 1 - t, \quad N_3 = s - 1 - t, \\ &\quad N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = 0 \} \end{aligned}$$

yazılır. (2.3.12) ile daima $t = 0, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} &\left\{ (X_{rn}^{(1)}, X_{sn}^{(2)}) \in S_0, \quad N_0 = 0, \quad \sum_{j=5}^8 N_j \leq 2, \quad N_1 = t \right\} \\ &= \{ N_0 = 0, \quad N_1 + N_2 + N_5 = r - 1, \quad N_1 + N_3 + N_8 = s - 1 \\ &\quad N_6 + N_8 = 1, \quad N_5 + N_7 = 1, \quad N_1 = t \} \\ &= \{ N_0 = 0, \quad N_1 = t, \quad N_2 = r - 2 - t, \quad N_3 = s - 1 - t, \\ &\quad N_7 = 0, \quad N_8 = 0, \quad N_5 = 1, \quad N_6 = 1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{N_0 = 0, \quad N_1 = t, \quad N_2 = r - 2 - t, \quad N_3 = s - 2 - t, \\
& \quad N_6 = 0, \quad N_7 = 0, \quad N_5 = 1, \quad N_8 = 1\} \\
& + \{N_0 = 0, \quad N_1 = t, \quad N_2 = r - 1 - t, \quad N_3 = s - 1 - t, \\
& \quad N_5 = 0, \quad N_8 = 0, \quad N_6 = 1, \quad N_7 = 1\} \quad (2.3.14) \\
& + \{N_0 = 0, \quad N_1 = t, \quad N_2 = r - 1 - t, \quad N_3 = s - 2 - t, \\
& \quad N_5 = 0, \quad N_6 = 0, \quad N_7 = 1, \quad N_8 = 1\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (2.3.8), (2.3.13) ve (2.3.14)' den elde edilir.

Örnek maksimumun özel durumunda ($r = n, s = n$), iki değişkenli (2.1.4) 'ün bir genişlemesi

$$f_{(n,n):n} = nF^{n-1}f + (n-1)F^{n-2}G_5G_8 \quad (2.3.15)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
G_5(x, y) &= \int_{-\infty}^x f(u, y) du = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)(x, y) \\
G_8(x, y) &= \int_{-\infty}^y f(x, v) dv = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)(x, y)
\end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir.

Tekrar $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, F dağılım ve f yoğunluk fonksiyonlu bir tesadüfi vektör olsun. $f_1(x) = \int f(x, v) dv$ ve $f_2(y) = \int f(u, y) du$ marjinal yoğunlukları

$$F_1(x|y) = P\{\xi_1 \leq x | \xi_2 = y\} = G_5(x, y) / f_2(y)$$

ve

$$F_2(y|x) = P\{\xi_2 \leq y | \xi_1 = x\} = G_8(x, y) / f_1(x)$$

şartlı dağılım fonksiyonları olsun. Böylece (2.3.15)' den

$$f_{(n,n):n}(x, y) = nF^{n-1}(x, y)f(x, y) + n(n-1)F^{n-2}(x, y)F_1(x|y)F_2(y|x)f_1(x)f_2(y) \quad (2.3.16)$$

yazılabilir.

2.4. Çok Değişkenli Dağılım Fonksiyonu

Burada çok değişkenli dağılım fonksiyonu hakkında bazı genel sonuçlar verilecektir. Önce çok değişkenli dağılım fonksiyonunun aşağıdaki üç özelliği sağlandığı bilinmektedir.

- a) F sağdan süreklidir; yani $x_n \downarrow x_0$ ise $F(x_n) \downarrow F(x_0)$ dır.
- b) F normludur; yani $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$ ve her $i = 1, \dots, m$ için $x_{n,i} \uparrow \infty$ ise $F(x_n) \uparrow 1$; $x_n \geq x_{n+1}$ ve $i \in \{1, \dots, m\}$ için $x_{n,i} \downarrow -\infty$ ise $F(x_n) \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$ 'dir.
- c) F , Δ -monotondur; yani tüm $a = (a_1, \dots, a_m)$ ve $b = (b_1, \dots, b_m)$ için

$$\Delta_a^b F := \sum_{t \in \{0,1\}^m} (-1)^{m - \sum_{i=1}^m t_i} F(b_1^{t_1} a_1^{1-t_1}, \dots, b_m^{t_m} a_m^{1-t_m}) \geq 0 \quad (2.4.1)$$

olur. Eğer Q , F 'ye ait olasılık ölçümü ise

$$Q(a, b] = \Delta_a^b F$$

olur.

Yardımcı Teorem 2.4.1.

F , marjinal dağılım fonksiyonları F_i , $i = 1, \dots, m$ olan m değişkenli bir dağılım fonksiyonu olsun. Her x, y için

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{i=1}^m |F_i(x_i) - F_i(y_i)| \quad (2.1.28)$$

olur.

İspat : Q , F 'ye ait olasılık ölçümü olsun.

$$B_i = \begin{cases} (x_i, y_i] & , \text{ eğer } x_i \leq y_i \\ (y_i, x_i] & , \text{ eğer } x_i > y_i \end{cases}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| &\leq \left| \sum_{i=1}^m [F(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_m)] - [F(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_m)] \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^m Q \left(\left(\prod_{j=1}^{i-1} X(-\infty, y_j] \right) \times B_i \times \left(\prod_{j=i+1}^m X(-\infty, x_j] \right) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^m |F_i(x_i) - F_i(y_i)|
\end{aligned}$$

olur.

2.5. Çok Değişkenli i.n.n.i.d. Tesadüfi Vektörler

Çalışmamızın bu kısmında Teorem 1.4 'ü m-boyutlu i.n.n.i.d. tesadüfi vektörlere genelleştireceğiz. İşlemlerin anlaşılması için önce Teorem 1.4 'ü $n=3$ için ifade edelim.

$$P\{(X_{13}, X_{23}, X_{33}) \in B\} = \sum_{k=1}^3 (-1)^{3-k} \frac{k^3}{3!} \sum_{|S|=k} P\{(X_{13}^S, X_{23}^S, X_{33}^S) \in B\} \quad (2.5.1)$$

olur. $\{1,2,3\}$ kümesinin bütün $k=1,2,3$ elemanlı S alt kümeleri $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$ olacaktır. Buna göre (2.5.1) eşitliği

$$\begin{aligned}
P\{(X_{13}, X_{23}, X_{33}) \in B\} &= \frac{1^3}{3!} [P\{(X_{13}^{\{1\}}, X_{23}^{\{1\}}, X_{33}^{\{1\}}) \in B\} + P\{(X_{13}^{\{2\}}, X_{23}^{\{2\}}, X_{33}^{\{2\}}) \in B\} \\
&\quad + P\{(X_{13}^{\{3\}}, X_{23}^{\{3\}}, X_{33}^{\{3\}}) \in B\}] - \frac{2^3}{3!} [P\{(X_{13}^{\{1,2\}}, X_{23}^{\{1,2\}}, X_{33}^{\{1,2\}}) \in B\} \\
&\quad + P\{(X_{13}^{\{1,3\}}, X_{23}^{\{1,3\}}, X_{33}^{\{1,3\}}) \in B\} + P\{(X_{13}^{\{2,3\}}, X_{23}^{\{2,3\}}, X_{33}^{\{2,3\}}) \in B\}] \\
&\quad + \frac{3^3}{3!} [P\{(X_{13}^{\{1,2,3\}}, X_{23}^{\{1,2,3\}}, X_{33}^{\{1,2,3\}}) \in B\}] \quad (2.5.2)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
F^{\{1\}} &= \sum_{i \in \{1\}} F_i = F_1, \quad F^{\{2\}} = \sum_{i \in \{2\}} F_i = F_2, \quad F^{\{3\}} = \sum_{i \in \{3\}} F_i = F_3 \\
F^{\{1,2\}} &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \{1,2\}} F_i = \frac{1}{2} (F_1 + F_2), \quad F^{\{1,3\}} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \{1,3\}} F_i = \frac{1}{2} (F_1 + F_3) \\
F^{\{2,3\}} &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \{2,3\}} F_i = \frac{1}{2} (F_2 + F_3), \quad F^{\{1,2,3\}} = \frac{1}{3} \sum_{i \in \{1,2,3\}} F_i = \frac{1}{3} (F_1 + F_2 + F_3)
\end{aligned} \quad (2.5.3)$$

olur. Buna göre, (2.5.2) ve (2.5.3) ifadelerinden ve $t \in R$ olmak üzere $t = (t, t, t)$ için

$$\begin{aligned}
 P\{(X_{13}, X_{23}, X_{33}) \in B\} &= P\{(X_{13}, X_{23}, X_{33}) \leq t\} = \frac{1^3}{3!} [(F_1(t))^3 + (F_2(t))^3 + (F_3(t))^3] \\
 &\quad - \frac{2^3}{3!} \left[\left(\frac{F_1(t) + F_2(t)}{2} \right)^3 + \left(\frac{F_1(t) + F_3(t)}{2} \right)^3 + \left(\frac{F_2(t) + F_3(t)}{2} \right)^3 \right] \\
 &\quad + \frac{3^3}{3!} \left[\left(\frac{F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)}{3} \right)^3 \right] \\
 &= F_1(t)F_2(t)F_3(t)
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

olarak elde edilir.

Şimdi Teorem 1.4 'ün genelleştirmesini verelim.

Teorem 2.5.1. m -boyutlu $\xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{1,m}), \dots, \xi_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,m})$ i.n.n.i.d. tesadüfi vektörlerinin sıralı istatistikleri, $X_{1n} \leq X_{2n} \leq \dots \leq X_{nn}$ ve F_i, ξ_i 'nin v -inci bileşeninin marjinal d.f. 'si olsun. B , m -boyutlu genel Borel kümesi olmak üzere

$$P\{(X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}) \in B\} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{k^n}{n!} \sum_{|S|=k} P\{(X_{1n}^S, X_{2n}^S, \dots, X_{nn}^S) \in B\}$$

eşitliği yazılır.

Bu teoremden, $t = (t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)})$, $t^{(v)} \in R$ olmak üzere $t^{(v)} = (t^{(v)}, t^{(v)}, \dots, t^{(v)})$, $X^{(v)} = (X_{1n}^{(v)}, \dots, X_{nn}^{(v)})$, $1 \leq v \leq m$ alınarak ve tesadüfi vektörlerin bileşenlerinin bağımsızlığından,

$$\begin{aligned}
 P\{(X_{1n}, \dots, X_{nn}) \in B\} &= P\{(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)}) \in B\} \\
 &= \prod_{v=1}^m P\{X^{(v)} \in B\} \\
 &= \prod_{v=1}^m P\{X^{(v)} \leq t^{(v)}\}
 \end{aligned}$$

$$= \prod_{v=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{k^n}{n!} \sum_{|S|=k} P\{ (X_{1n}^{(v),S}, X_{2n}^{(v),S}, \dots, X_{nn}^{(v),S}) \leq t^{(v)} \} \right\}$$

ifadesi elde edilir.

$n = 3, m = 2$ alınarak bu ifade,

$$\begin{aligned} & P\{ (X_{13}, X_{23}, X_{33}) \in B \} \\ &= \left\{ \frac{1^3}{3!} \left[(F_1(t^{(1)}))^3 + (F_2(t^{(1)}))^3 + (F_3(t^{(1)}))^3 \right] \right. \\ &\quad - \frac{2^3}{3!} \left[\left(\frac{F_1(t^{(1)}) + F_2(t^{(1)})}{2} \right)^3 + \left(\frac{F_1(t^{(1)}) + F_3(t^{(1)})}{2} \right)^3 + \left(\frac{F_2(t^{(1)}) + F_3(t^{(1)})}{2} \right)^3 \right] \\ &\quad \left. + \frac{3^3}{3!} \left(\frac{F_1(t^{(1)}) + F_2(t^{(1)}) + F_3(t^{(1)})}{3} \right)^3 \right\} \left\{ \frac{1^3}{3!} \left[(F_1(t^{(2)}))^3 + (F_2(t^{(2)}))^3 + (F_3(t^{(2)}))^3 \right] \right. \\ &\quad - \frac{2^3}{3!} \left[\left(\frac{F_1(t^{(2)}) + F_2(t^{(2)})}{2} \right)^3 + \left(\frac{F_1(t^{(2)}) + F_3(t^{(2)})}{2} \right)^3 + \left(\frac{F_2(t^{(2)}) + F_3(t^{(2)})}{2} \right)^3 \right] \\ &\quad \left. + \frac{3^3}{3!} \left(\frac{F_1(t^{(2)}) + F_2(t^{(2)}) + F_3(t^{(2)})}{3} \right)^3 \right\} \\ &= \{ F_1(t^{(1)}) F_2(t^{(1)}) F_3(t^{(1)}) \} \{ F_1(t^{(2)}) F_2(t^{(2)}) F_3(t^{(2)}) \} = \prod_{v=1}^2 \prod_{i=1}^3 F_i(t^{(v)}) \quad (2.5.5) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 2.5.1. $m=1$ için tesadüfi değişkenler sırası ile i.n.n.i.d. ve i.i.d. olması durumunda (2.5.5) ifadesi, $F_1(t)F_2(t)F_3(t)$ ve $F^3(t)$ olarak elde edilir. Bu durumda Teorem 2.5.1, özel hallerde tek değişkenli durumlara indirgenir.

3. ÇOK DEĞİŞKENLİ SIRALAMALAR

3.1. Çok Değişkenli Genel Sıralamalar

Bir A cümlesinde α ikili ilişki; bir yansıma (tüm $x \in A$ için $x\alpha x$ gibi) A 'da bir yarı sıralı; A 'da yarı sıralı bir geçişme ($x\alpha y, y\alpha z$ ise $x\alpha z$ gibi) ise bir ön sıralı, A 'da bir ön sıralı bir ters simetrik ($x\alpha y, y\alpha x$ ise $x = y$ gibi) ise bir kısmi sıralı ve A 'da kısmi sıralı karşılaştırılabilir (tüm $x, y \in A$ için $x\alpha y$ yada $y\alpha x$ gibi) ise bir tam sıralı olarak adlandırılmıştır.

R^1 reel eksenindeki sıra, bir tam sıralıdır. R^m 'deki örneklerde olduğu gibi burada da $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in R^m$ alınarak işlemler yapılacaktır.

- a) **Çoğunluk sıralama:** Eğer bileşenlerin en az yarısında $a_i \leq b_i$ ise $(a_1, \dots, a_m) \alpha (b_1, \dots, b_m)$ tanımlar. Çoğunluk sıralaması R^m 'de bir tam yarı sıralıdır. Bununla birlikte bu sıralama ne geçişmeli nede ters simetiktir.
- b) **Pareto sıralama:** Eğer $a_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$ ise $(a_1, \dots, a_m) \alpha (b_1, \dots, b_m)$ tanımlanır. Pareto sıralaması, kısmi sıralıdır (fakat tam sıralı değildir).
- c) **p-norm sıralama:** $p > 0$ için eğer $\sum_{i=1}^n |a_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |b_i|^p$ ise $(a_1, \dots, a_m) \alpha (b_1, \dots, b_m)$ tanımlanır. Bu sıra daima ters simetrik olmayan tam bir ön sıralıdır.
- d) **Sup-norm sıralama:** Eğer $\max(|a_1|, \dots, |a_m|) \leq \max(|b_1|, \dots, |b_m|)$ ise $(a_1, \dots, a_m) \alpha (b_1, \dots, b_m)$ tanımlanır. Bu sıra daima ters simetrik olmayan tam bir ön sıralıdır.

- e) **Sözlükteki sıralama:** Eğer $a_1 < b_1$ yada $a_1 = b_1, a_2 < b_2$ yada $a_1 = b_1, a_2 = b_2$, yada $a_3 < b_3$ yada $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_{m-1} < b_{m-1}$ yada $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_{m-1} = b_{m-1}, a_m < b_m$ yada $a_i = b_i, i = 1, \dots, m$ ise $(a_1, \dots, a_m) \underline{\alpha} (b_1, \dots, b_m)$ tanımlanır. Sözlükteki sıralama R^m de bir tam sıralamadır.

Şimdi sürekli çok değişkenli bir dağılımdan $\xi_j = (\xi_{1,j}, \dots, \xi_{m,j})$, $j = 1, \dots, n$ tesadüfi örnek için klasik sıralı istatistiklerin çok değişkenli bir genelleştirilmesi tanımlanacaktır. Burada $i = 1, \dots, m$ ve her bir j için $\xi_{i,j}$, f_i olasılık yoğunluk fonksiyonu ve F_i kümülatif dağılım fonksiyonuna sahiptir. $f, (\xi_{1,j}, \dots, \xi_{m,j})$, $j = 1, \dots, n$ 'lerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu tanımlasın. Böyle bir tesadüfi örnek ve R^m de verilen $\underline{\alpha}$ sırası (yarı sıralı, ön sıralı, kısmi sıralı, tam sıralı) için $Y_j = (Y_{1,j}, \dots, Y_{m,j})$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'lerin bir j -inci sıralı istatistiği; eğer Y_j tam $(j-1)$ $\xi_i \neq \xi_k$ için $\xi_i \underline{\alpha} \xi_k$ olan bir ξ_i oluyorsa tanımlanır. Bu tanımda Y_j sıralı istatistiğini diğer $(n-j)$ ξ_i ile mukayese etmemek gereklidir. Bununla birlikte sadece $\underline{\alpha}$ ilişkisi tam sıralı olduğunda Y_j ($\xi_{i,j}$ 'lerin sürekliliğinden dolayı) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'lerin j -inci sıralı istatistiği denilebilir. g_j, Y_j 'den oluşan $(Y_{1,j}, \dots, Y_{m,j})$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $h_{i,j}, Y_{i,j}$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

3.1.1. Genel Sıralamalarda Dağılımlar

R^m 'de bir $\underline{\alpha}$ sıralaması için $g_1, \dots, g_n$ 'ler elde edilir. $s_1, \dots, s_m > 0$ için

$$P\{t_1 \leq Y_{1,j} \leq t_1 + s_1, \dots, t_m \leq Y_{m,j} \leq t_m + s_m\} \\ g_j(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m s_i + o\left(\prod_{i=1}^m s_i\right), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1.1)$$

yazılır. Burada $\lim_{s_1, \dots, s_m \rightarrow 0^+} o\left(\prod_{i=1}^m s_i\right) = 0$ 'dır.

$(t_1 \leq \xi_{1,j} \leq t_1 + s_1, \dots, t_m \leq \xi_{m,j} \leq t_m + s_m)$ olayı, $E_j(s_1, \dots, s_m)$ olarak tanımlanır.

ξ_i 'nin değişebilir ve sürekliliğinden dolayı (3.1.1) 'den keyfi j ve herhangi bir $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P\{[Y_j = \xi_k | E_k(s_1, \dots, s_m)] \times P\{E_k(s_1, \dots, s_m)\} \\ = n \left[f(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m S_i + o\left(\prod_{i=1}^m S_i\right) \right] P\{Y_j = \xi_r | E_r(s_1, \dots, s_m)\} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

olarak yazılabilir. Özellikle $r = n$ için

$$P\{Y_j = \xi_n | E_r(s_1, \dots, s_m)\} = P\{\xi_n | E_n(s_1, \dots, s_m) \text{ şartıyla, tam } (j-1)\xi_i, i \neq n\} \quad (3.1.3)$$

yazılabilir. $\prod_{i=1}^m s_i$ ile (3.1.1) ve (3.1.2) 'yi bölersek ve $s_1, \dots, s_m \rightarrow 0^+$ olarak (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) 'den

$$g_j(t_1, \dots, t_m) = n f(t_1, \dots, t_m) P\{\xi_n | \xi_n = (t_1, \dots, t_m) \text{ şartıyla, tam } (j-1)\xi_i, i \neq n\}$$

ve ξ_i birbirinin yerine geçebilirliğinden,

$$\begin{aligned} g_j(t_1, \dots, t_m) = n \binom{n-1}{j-1} f(t_1, \dots, t_m) P\{\xi_i \underline{\alpha}(t_1, \dots, t_m), \quad i = 1, \dots, j-1, \\ \xi_i \underline{\alpha}(t_1, \dots, t_m), \quad i = j, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

elde edilir. Denklem (3.1.4),

$$P\{\xi_i \underline{\alpha}(t_1, \dots, t_m), \quad i = 1, \dots, j-1, \xi_i \underline{\alpha}(t_1, \dots, t_m), \quad i = j, \dots, n-1\}$$

gelecek kısımdaki örneklerde hesaplandığı gibi verilen bir $\underline{\alpha}$ sırası için hesaplanmış olunan g_j için genel bir ifade verilebilir.

Aşağıdaki örneklerin her birinde g_j , (3.1.4) 'den elde edilir.

Örnek 3.1.1. $m=1$ ise bir değişkenli j -inci sıralı istatistik için reel eksen üzerinde söz konusu sıralamaları göz önüne alalım. O zaman

$$g_j(t) = n \binom{n-1}{j-1} f_1(t) [1 - F_1(t)]^{n-j} F_1^{j-1}(t) \quad j = 1, \dots, n$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.1.2. Sözlükteki sıralama için ise

$$g_j(t_1, \dots, t_m) = n \binom{n-1}{j-1} f(t_1, \dots, t_m) [1 - F_1(t_1)]^{n-j} F_1^{j-1}(t) \quad j = 1, \dots, n$$

ifadesi yazılabilir.

Örnek 3.1.3. Pareto sıralaması için

$$g_j(t_1, \dots, t_m) = n \binom{n-1}{j-1} f(t_1, \dots, t_m) \left[\prod_{i=1}^m F_i(t_i) \right]^{j-1} \left[1 - \prod_{i=1}^m F_i(t_i) \right]^{n-j} \quad j = 1, \dots, n$$

ifadesi yazılabilir

Örnek 3.1.4. Çoğunluk sıralaması için $m=3$, $n=3$ ve $j=2$ alınırsa

$$g_2(t_1, t_2, t_3) = 6 f(t_1, t_2, t_3) [F_1(t_1)F_2(t_2) + F_1(t_1)F_3(t_3) + F_2(t_2)F_3(t_3) - 2F_1(t_1)F_2(t_2)F_3(t_3)] \\ [1 - F_1(t_1)F_2(t_2) - F_1(t_1)F_3(t_3) - F_2(t_2)F_3(t_3) + 2F_1(t_1)F_2(t_2)F_3(t_3)]$$

eşitliği elde edilir.

Uygulama 3.1.1. ξ_1 ve ξ_2 her biri $(0,1)$ 'de düzgün olarak dağılmış

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$

bileşik yoğunluk fonksiyonlu iki tesadüfi değişken olsun. $n=5$ birimlik bir örnek için sözlükteki medyanın bileşik yoğunluk fonksiyonu Örnek 3.1.2 'den

$$g_3(t_1, t_2) = 5 \binom{4}{2} [t_1 + t_2] [1 - t_1]^2 t_1^2, \quad 0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq 1 \quad (3.1.5)$$

dir. $Y_{2,3}$ 'ün $h_{2,3}$ yoğunluk fonksiyonu (3.1.5) 'den

$$h_{2,3}(t_2) = \int_0^1 g_3(t_1, t_2) dt_1 = t_2 + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t_2 \leq 1$$

olarak elde edilir. Ayrıca $Y_{2,3}$ 'ün ilk kartili ξ_2 için 0.25 'e karşılık olarak 0.309 olur.

3.2. Normlarla Tesadüfi Vektörlerin Sıralaması

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı olsun. Burada Ω ; w noktalarının boş olmayan bir cümlesi, $\mathfrak{F}$, Ω nın alt kümelerinin σ -cismi ve P ; $\{\Omega, \mathfrak{F}\}$ 'de tanımlanmış olasılık ölçümüdür. $\|\cdot\|$, R^m reel öklid uzayında tanımlanmış normu, $\mathfrak{R}^m$, R^m 'in alt kümelerinin Borel σ -cebiri tanımlayalım. $\xi(w)$, $w \in \Omega$ 'dan R^m 'e dönüşen tesadüfi vektör ($m=1$ için tesadüfi değişken) olsun. $B \in \mathfrak{R}^m$ için $\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$ dir. Sürekli tesadüfi vektörlerin bir sınıfı Ξ olsun. Eğer w sabit ise o zaman $\xi = \xi(w)$, $\mathfrak{R}^m$ 'in bir noktası ve $\xi \in R^m$ 'in normu $\|\xi(w)\|$ ile tanımlayalım. $\|\xi(w)\|$, $w \in \Omega$ tesadüfi değişken olmadığı açıktır. Gerçekten

$$\{w : \|\xi(w)\| \leq x\} = \{w : \|\xi(w)\| \in S(0, x)\} \in \mathfrak{F}$$

dir. Burada $S(0, x) = \{y \in R^m : \|y\| \leq x\} \in R^m$ dir. Eğer ξ , Ξ ye ait tesadüfi vektörlerin bazı sınıflarının bir elemanı ise $\xi \in \Xi$ notasyonu kullanılabilir.

Tanım 3.2.1. ξ_1, ξ_2 tesadüfi vektörler eğer her bir $w \in \Omega$ için $\|\xi_1(w)\| = \|\xi_2(w)\|$ ise norm anlamında denk olduğu söylenir. “Norm anlamında denkliği” ifade etmek için $\xi_1 \underline{n} \xi_2$ notasyonu kullanılabilir. $\underline{n}$, bir denklik bağıntısıdır.

Ξ_1, Ξ 'nin alt sınıfı öyle ki Ξ 'nin elemanı $\mathfrak{I}$ 'ye ait olan sürekli dağılıma sahiptir. O zaman herhangi bir $\xi_1(w) \in \Xi_1$ ve $\xi_2(w) \in \Xi_1$ için

$$P\{w : \|\xi_1(w)\| = \|\xi_2(w)\|\} = 0$$

dır. Yani Ξ_1 'in herhangi iki yada daha fazla elemanları, bir olasılıkla norm anlamında farklıdır.

Tanım 3.2.2. ξ_1 ve $\xi_2, (\Omega, \mathfrak{I}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış tesadüfi vektörler olsun. ξ_1 , eğer her bir $w \in \Omega$ için $\|\xi_1(w)\| \leq \|\xi_2(w)\|$ ise bir norm anlamında ξ_2 'den daha küçük olduğu söylenir. “Norm anlamında küçüktür” ifade etmek için $\xi_1 \alpha \xi_2$ notasyonu kullanılabilir. α bağıntısı kısmi sıralı bir bağıntıdır.

Tanım 3.2.3. ξ_1 ve ξ_2 tesadüfi vektörleri için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanıyorsa

- 1) $P\{w \in \Omega_1 : \xi_1(w) \underline{n} \xi_2(w)\} = 0$
- 2) Ω_1 de $\xi_1 \alpha \xi_2$ yada $\xi_2 \alpha \xi_1$

Ω_1 'de bir norm anlamında karşılaştırılabilir vektörler olduğu söylenir. Burada Ω_1 , Ω 'nın herhangi bir alt kümesidir.

Şimdi $\xi_1 = \xi_1(w), \xi_2 = \xi_2(w), \dots, \xi_n = \xi_n(w), w \in \Omega$ sürekli F dağılım fonksiyonlu i.i.d. tesadüfi vektörler olsun. Benzer şekilde $\xi_i \in \Xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ 'dir. Herhangi bir $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$\Omega = A \cup A_r^1 \cup A_r^2 \cup \dots \cup A_r^n$$

olsun. Burada $r = 1, \dots, n$ için

$$A_r^k = \{ \mathbf{w} : \|\xi_1(\mathbf{w})\|, \|\xi_2(\mathbf{w})\|, \dots, \|\xi_n(\mathbf{w})\| \text{ 'ler farklıdır ve} \\ \|\xi_k(\mathbf{w})\|, \|\xi_1(\mathbf{w})\|, \dots, \|\xi_n(\mathbf{w})\| \text{ 'ler arasında } r\text{-inci en küçüktür.} \}$$

dir.

$$A = \{ \mathbf{w} : \text{iki yada daha fazla } \|\xi_1(\mathbf{w})\|, \dots, \|\xi_n(\mathbf{w})\| \text{ değişkenlerin} \\ \text{büyüklükleri denktir.} \}$$

olayını tanımlasın.

Herhangi bir $r = 1, \dots, n$ için $Y^{r,n}$ tesadüfi vektörleri eğer $\mathbf{w} \in A_r^k$ $k = 1, 2, \dots, n$

ise

$$Y^{r,n} = Y^{r,n}(\mathbf{w}) = \xi_k$$

olarak tanımlanır. Eğer $\mathbf{w} \in A$,

$$A = \{ \mathbf{w} : \|\xi_{i_1}\| = \|\xi_{i_2}\| = \|\xi_{i_3}\| < \|\xi_{i_4}\| < \|\xi_{i_5}\| = \|\xi_{i_6}\| < \|\xi_{i_7}\| < \dots < \|\xi_{i_n}\| \}$$

ise

$$Y^{1,n} = \xi_{i_1}, Y^{2,n} = \xi_{i_2}, Y^{3,n} = \xi_{i_3}, Y^{4,n} = \xi_{i_4}, Y^{5,n} = \xi_{i_5}, Y^{6,n} = \xi_{i_6}, \dots, Y^{n,n} = \xi_{i_n}$$

olur. $Y^{1,n}, Y^{2,n}, \dots, Y^{n,n}$ tesadüfi vektörlerin Ω 'da bir norm anlamında karşılaştırılabilir olduğu ve

$$Y^{1,n} \alpha Y^{2,n} \alpha, \dots, \alpha Y^{n,n}$$

sağlandığı açıktır.

3.2.1. İki Değişkenli Normlarla Sıralanmış İstatistiklerin Dağılımları

$m = 2$ olsun F , f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}) \in R^2$,

$i = 1, 2, \dots, n$ için

$$F(x, y) = P\{ \xi_i^{(1)} \leq x, \xi_i^{(2)} \leq y \} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

dir. $h(x, y) = P\{ \|\xi_1\| \leq \|\tilde{\mathbf{x}}\| \}$ olsun. Burada $\tilde{\mathbf{x}} = (x, y) \in R^2$ 'dir.

$Y^{1:n} \alpha Y^{2:n} \alpha, \dots, \alpha Y^{nn}$ ise $Y^{1:n}, Y^{2:n}, \dots, Y^{nn}$ tesadüfi vektörlerin bağımsız olmadığı açıktır. $P(A) = 0$ iken genel anlamda bir $B \in \mathfrak{R}^2$ için

$$\begin{aligned}
 P\{Y^{r:n} \in B\} &= \sum_{k=1}^n P\{\xi_k \in B, \|\xi_k\|, \|\xi_1\|, \dots, \|\xi_n\| \text{ arasında } r\text{-inci en küçüktür.}\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{r-1} P\{\xi_k \in B, \|\xi_1\| \leq \|\xi_k\|, \|\xi_2\| \leq \|\xi_k\|, \dots, \|\xi_{r-1}\| \leq \|\xi_k\|, \\
 &\quad \|\xi_{r+1}\| > \|\xi_k\|, \dots, \|\xi_n\| > \|\xi_k\|\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{r-1} \iint_B [P\{\|\xi_1\| \leq \|\tilde{x}\|\}]^{r-1} [1 - P\{\|\xi_1\| \leq \|\tilde{x}\|\}]^{n-r} dF(x, y) \\
 &= n \binom{n-1}{r-1} \iint_B [h(x, y)]^{r-1} [1 - h(x, y)]^{n-r} dF(x, y)
 \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle $Y^{r:n}$ 'nin $1 \leq r \leq n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_r(x, y) = n \binom{n-1}{r-1} [h(x, y)]^{r-1} [1 - h(x, y)]^{n-r} f(x, y) \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) 'den

$$\iint_B [h(x, y)]^{r-1} [1 - h(x, y)]^{n-r} dF(x, y) = \left(n \binom{n-1}{r-1} \right)^{-1} \quad (3.2.2)$$

yazılabilir. (3.2.2) 'den herhangi bir $n \geq 1$ için

$$\iint_B [1 - h(x, y)]^n dF(x, y) = \frac{1}{n+1}$$

$$\iint_B [h(x, y)]^n dF(x, y) = \frac{1}{n+1}$$

yazılır.

3.2.2. Normlarla Sıralanmış İstatistiklerin Marjinal Dağılımları

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in R^2$ tesadüfi vektörler bağımsız ve aynı dağılmış ve $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. $Y^{1:n} \alpha Y^{2:n} \alpha \dots \alpha Y^{n:n}$, $Y^{i:n} = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$ $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $Y_1^{r:n}$ 'nin $f_1^{r:n}$ ve $Y_2^{r:n}$ 'nin $f_2^{r:n}$, $1 \leq r \leq n$ marjinal yoğunlukları,

$$f_1^{r:n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x, y) dy = n \binom{n-1}{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} [h(x, y)]^{r-1} [1 - h(x, y)]^{n-r} f(x, y) dy$$

$$f_2^{r:n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x, y) dx = n \binom{n-1}{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} [h(x, y)]^{r-1} [1 - h(x, y)]^{n-r} f(x, y) dx$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.2.3. İki yada Çok Değişkenli Normlarla Sıralanmış İstatistiklerin Bileşik Dağılımları

$1 \leq r < s \leq n$, $Y^{r:n} \alpha Y^{s:n}$ olsun. $B_1, B_2 \in \mathfrak{R}^2$ öyleki her hangi bir $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$, $\tilde{x}_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2$ için $\|\tilde{x}_1\| \leq \|\tilde{x}_2\|$ ve F, f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun.

Teorem 3.2.1. Yukarıdaki sözü edilen şartlar altında

$$P\{Y^{r:n} \in B_1, Y^{s:n} \in B_2\} = n(n-1) \binom{n-2}{r-1} \binom{n-r-1}{s-r-1}$$

$$\times \iiint_{B_1 \times B_2} [h(x_1, y_1)]^{r-1} [h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)]^{s-r-1} [1 - h(x_2, y_2)]^{n-s} dF(x_1, y_1) dF(x_2, y_2)$$

ve $Y^{r:n}$ ve $Y^{s:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{rs}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} n(n-1) \binom{n-2}{r-1} \binom{n-r-1}{s-r-1} [h(x_1, y_1)]^{r-1} \\ [h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)]^{s-r-1} [1 - h(x_2, y_2)]^{n-r}, & \text{eğer } \|\tilde{x}_1\| \leq \|\tilde{x}_2\| \text{ ise} \\ f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) \end{cases}$$

0 , diğer yerlerde

[Bairamov and Gebizlioğlu, 1997].

Sonuç 3.2.1. $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ olsun $Y^{r_1:n}, Y^{r_2:n}, \dots, Y^{r_k:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\|\tilde{x}_1\| < \|\tilde{x}_2\| < \dots < \|\tilde{x}_k\|$ ise

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) = \frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\dots(n-r_k)!} [h(x_1, y_1)]^{r_1-1} \\ \times [h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)]^{r_2-r_1-1} \dots [h(x_k, y_k) - h(x_{k-1}, y_{k-1})]^{r_k-r_{k-1}-1} [1 - h(x_k, y_k)]^{n-r_k} \\ \times f(x_1, y_1) f(x_2, y_2) \dots f(x_k, y_k)$$

ve diğer yerlerde ise

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) = 0$$

olarak ifade edilir.

$Y^{1:n}, Y^{2:n}, \dots, Y^{n:n}$ 'nin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k) \\ = \begin{cases} n! f(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n), & \text{eğer } \|\tilde{x}_1\| \leq \|\tilde{x}_2\| \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dir [Bairamov and Gebizlioğlu, 1997].

3.3. Çok Değişkenli Genel ψ Sıralamalar

Çok değişkenli sıralama için ψ reel değerli bir fonksiyon vasıtasıyla

$x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarının genel sırası ortaya konulabilir.

$$\psi(x) \leq \psi(y) \tag{3.3.1}$$

ise

$$x \leq_{\psi} y \tag{3.3.2}$$

yazılabilir. Böylece

$$\tilde{x}_{1:n} \leq_{\psi} \dots \leq_{\psi} \tilde{x}_{n:n} \tag{3.3.3}$$

ile orijinal verilerin ψ altında görüntüsü alınır. Bu tür sıralamayı marjinal sıralama ile mukayese etmemizin bir avantajı $\tilde{x}_{i:n}$ 'nin orijinal örneğin bir noktası olmasıdır. Örneğin $\psi(x) = \|x - x_0\|_2$ fonksiyonu göz önüne alınarak sıralanabilir.

Verilen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tesadüfi vektörleri,

$$\tilde{X}_{1:n} \leq_{\psi} \dots \leq_{\psi} \tilde{X}_{n:n} \quad (3.3.4)$$

$\psi(x) = \|x - x_0\|_2$ ile (3.3.3) 'e göre tanımlanmış ψ -sıralı istatistiği tanımlansın.

x_0 merkezli k -ıncı en büyük ψ -sıralı istatistiğin uzaklığı,

$$R_{k:n} = \|\tilde{X}_{k:n} - x_0\|_2 \quad (3.3.5)$$

ile tanımlanır. Aşıkardır ki,

$$F(x_0, \cdot) = P\{\xi \in B(x, \cdot)\} \quad (3.3.6)$$

ortak dağılım fonksiyonlu n tane bağımsız ve aynı dağılımlı tek değişkenli $\|\xi_1 - x_0\|_2, \dots, \|\xi_n - x_0\|_2$ tesadüfi değişkenlerin k -ıncı en büyük sıralı istatistikleri,

$$R_{k:n} = Z_{k:n}(\|\xi_1 - x_0\|_2, \dots, \|\xi_n - x_0\|_2) \quad (3.3.7)$$

ile ifade edilir. Burada

$$B(x_0, r) = \{x: \|x - x_0\|_2 \leq r\} \quad (3.3.8)$$

x_0 merkezli r yarıçaplı bir yuvardır. Ayrıca

$$P\{\tilde{X}_{k:n} \in B(x_0, r)\} \quad (3.3.9)$$

olasılığı, $P\{R_{k:n} \leq r\}$ 'e eşit olduğundan kolayca hesaplanabilir.

(3.3.3) 'deki yorum $\mathbf{x}_0$, k -ıncı sıralı uzaklığı, $R_{k,n}$ tesadüfi değişkenine dönüştüren ξ_0 tesadüfi vektörü ile değiştirilmiş duruma genelleştirilebilir. Şimdi sıralama, $\psi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \xi_0\|_2$ tesadüfi fonksiyona göre çıkarılabilir. Böyle bir kavramın mümkün bir uygulaması, ξ_0 tesadüfi vektörle merkezleştirilmiş

$$(n\alpha)^{-1} \sum_{i=1}^{[n\alpha]} \tilde{X}_{i:n} \quad (3.3.10)$$

şeklinde ifade edilen α -kesilmiş ortalamadır.



4. ÇOK DEĞİŞKENLİ EKSTREMLER

4.1. Çok Değişkenli Ekstremler

$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, cdf'si $F(\mathbf{x})$ olan bir ana kütleden çekilen n birimlik bir örnek olsun. Burada $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'ler m boyutlu tesadüfi vektörlerdir. ξ_i 'lerin j -inci bileşeni $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için $\xi_{i,j}$ olarak tanımlanacaktır.

Bu bölümde $\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n$ ve $\mathbf{d}_n$ vektör dizileridir. $Z_n = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$
 $W_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ sırasıyla maksimum ve minimumdur ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) \quad (4.1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n < \mathbf{c}_n + \mathbf{d}_n \mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \quad (4.1.2)$$

olur. $H(\mathbf{x})$ ve $L(\mathbf{x})$ dejenere olmayan dağılımlardır.

Eğer (4.1.1) sağlanırsa $F(\mathbf{x})$, $H(\mathbf{x})$ 'in sağ tarafından çekilen bölgeye ait olduğu söylenir. Benzer şekilde (4.1.2) sağlanırsa $F(\mathbf{x})$, $L(\mathbf{x})$ 'in sol tarafından çekilen bölgeye ait olduğu söylenir. Sonuç olarak (4.1.1) ve (4.1.2) sağlanırsa $H(\mathbf{x})$ ve $L(\mathbf{x})$ 'e, limiting dağılımı denir.

Çok boyutlu tesadüfi değişkenlerin $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 > x_1, \xi_2 > x_2, \dots, \xi_n > x_n\} \quad (4.1.3)$$

olarak tanımlanır. Burada $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'ler tesadüfi değişkenlerdir. (1.12) ifadesinden $i = 1, \dots, n$ için

$$C_i = (\xi_i \leq x_i) \quad (4.1.4)$$

ile

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \underline{S}_{i,n} \quad n \geq 2 \quad (4.1.5)$$

ve

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{S}_{n,n} \quad (4.1.6)$$

olarak alınır

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_{i,n} + (-1)^n G(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1.7)$$

yazılabilir. İki boyutlu halde

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= 1 - [1 - F_1(x_1)] - [1 - F_2(x_2)] + G(x_1, x_2) \\ &= G(x_1, x_2) - 1 + F_1(x_1) + F_2(x) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

olur.

Çok değişkenli ekstremlerde verilen bilginin ışığı altında iki değişkenli bazı üstel dağılımların sırasıyla F , G , H ve D fonksiyonlarını verelim.

4.2. İki Değişkenli Üstel Dağılımların Fonksiyonları

	Mardia
$F(x, y)$	$[\exp(x) + \exp(y) - 1]^{-1} + 1 - \exp(-x) - \exp(-y)$
$G(x, y)$	$[\exp(x) + \exp(y) - 1]^{-1}$
$H(x, y)$	$H_{3,0}(x)H_{3,0}(y)\exp\{[\exp(x) + \exp(y)]^{-1}\}$
$D(x, y)$	$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} - 1\right)^{-1} - 1 + x + y$
Marjinaller	$F_X(x) = 1 - \exp(-x) \quad , \quad F_Y(y) = 1 - \exp(-y)$
	Morgenstern
$F(x, y)$	$\exp(-x-y)\{1 + \alpha[1 - \exp(-x)][1 - \exp(-y)]\} + 1 - \exp(-x) - \exp(-y)$
$G(x, y)$	$\exp(-x-y)\{1 + \alpha[1 - \exp(-x)][1 - \exp(-y)]\}$
$H(x, y)$	$H_{3,0}(x)H_{3,0}(y)$
$D(x, y)$	$y_1 y_2 [1 + \alpha(1-x)(1-y)]$
Marjinaller	$F_X(x) = 1 - \exp(-x) \quad , \quad F_Y(y) = 1 - \exp(-y)$
	Gumbel I
$F(x, y)$	$\exp(-x-y+\theta xy) + 1 - \exp(-x) - \exp(-y)$
$G(x, y)$	$\exp(-x-y+\theta xy)$
$H(x, y)$	$H_{3,0}(x)H_{3,0}(y)$
$D(x, y)$	$(1-x)(1-y)\exp[\theta \log(1-x)\log(1-y)] - 1 + x + y$
Marjinaller	$F_X(x) = 1 - \exp(-x) \quad , \quad F_Y(y) = 1 - \exp(-y)$
	Gumbel II
$F(x, y)$	$\exp\left(-\left(x^m + y^m\right)^{\frac{1}{m}}\right) + 1 - \exp(-x) - \exp(-y)$
$G(x, y)$	$\exp\left(-\left(x^m + y^m\right)^{\frac{1}{m}}\right)$
$H(x, y)$	$H_{3,0}(x)H_{3,0}(y)$
$D(x, y)$	$\exp\left\{-\left[\left[-\log(1-x)\right]^m + \left[-\log(1-y)\right]^m\right]^{\frac{1}{m}}\right\} - 1 + x + y$
Marjinaller	$F_X(x) = 1 - \exp(-x) \quad , \quad F_Y(y) = 1 - \exp(-y)$
	Marshall-Olkin
$F(x, y)$	$\exp\{-x-y-\lambda \max(x, y)\} + 1 - \exp\{-(1+\lambda)x\} - \exp\{-(1+\lambda)y\}$
$G(x, y)$	$\exp\{-x-y-\lambda \max(x, y)\}$
$H(x, y)$	$H_{3,0}(x)H_{3,0}(y)$
$D(x, y)$	$\left\{(1-x)(1-y)[1 - \max(x, y)]^\lambda\right\}^{1+\lambda} - 1 + x + y$
Marjinaller	$F_X(x) = 1 - \exp[-(1+\lambda)x] \quad , \quad F_Y(y) = 1 - \exp[-(1+\lambda)y]$

Şimdi bazı iki değişkenli üstel dağılımların Limiting dağılım fonksiyonlarını elde edelim.

Örnek 4.2.1. (Mardia Dağılımı)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\log n + x_1, \log n + x_2) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left([n \exp(x_1) + n \exp(x_2) - 1]^{-1} \right. \\
 &\quad \left. + 1 - \frac{[\exp(-x_1) + \exp(-x_2)]}{n} \right)^n \\
 &= \exp \left(-\exp(-x_1) - \exp(-x_2) + \frac{1}{\exp(x_1) + \exp(x_2)} \right) \\
 &= H_{3,0}(x_1) \cdot H_{3,0}(x_2) \exp \{ [\exp(x_1) + \exp(x_2)]^{-1} \}
 \end{aligned}$$

Örnek 4.2.2. (Mongenstern Dağılımı)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\log n + x_1, \log n + x_2) \\
 &= \exp \{ -\exp(-x_1) - \exp(-x_2) \} = H_{3,0}(x_1) H_{3,0}(x_2)
 \end{aligned}$$

Örnek 4.2.3. (Gumbel I Dağılımı)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\log n + x_1, \log n + x_2) \\
 &= \exp \{ -\exp(-x_1) - \exp(-x_2) \} = H_{3,0}(x_1) H_{3,0}(x_2)
 \end{aligned}$$

Örnek 4.2.4. (Gumbel II Dağılımı)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\log n + x_1, \log n + x_2) \\
 &= \exp \{ -\exp(-x_1) - \exp(-x_2) \} = H_{3,0}(x_1) H_{3,0}(x_2)
 \end{aligned}$$

Örnek 4.2.5. (Marshall-Olkin Dağılımı)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n \left(\frac{\log n + x_1}{1 + \lambda}, \frac{\log n + x_2}{1 + \lambda} \right) \\
 &= \exp \{ -\exp(-x_1) - \exp(-x_2) \} = H_{3,0}(x_1) \cdot H_{3,0}(x_2)
 \end{aligned}$$

4.3. Çok Değişkenli Dağılımlarda Bağımlı Fonksiyon

Tanım 4.3.1. $F(x)$, $F_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) marjinali bir m boyutlu tesadüfi değişkenlerin cdf'si olsun. $F(x)$ 'in $D_F(y_1, y_2, \dots, y_m)$ bağımlı fonksiyonu

$$D_F(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ifadesiyle tanımlanır. Ayrıca

$$D_F(y_1, y_2, \dots, y_m) = F(F_1^{-1}(y_1), F_2^{-1}(y_2), \dots, F_m^{-1}(y_m))$$

olarakta yazılabilir.

Teorem 4.3.1. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $F(x)$ ortak cdf'si i.i.d. m -boyutlu vektörler olsun. O zaman a_n ve $b_n > 0$ iken $(Z_n - a_n) / b_n$ dejenere olmayan bir $H(x)$ dağılımına yakınsaması için gerek ve yeter şart her bir marjinali $H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}$ yada $H_{3,0}$ ' in sağ tarafından çekilen bölgeye ait ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_F^n(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}, \dots, y_m^{1/n}) = D_H(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

olmasıdır [Galambos, 1987]

Son olarak bazı iki değişkenli çeşitli üstel dağılımların limiting dağılımının c.d.f.'sini bağımlı fonksiyon vasıtasıyla elde edeceğiz.

Örnek 4.3.1. (Mardia Dağılımı)

$$\begin{aligned} D_H(y_1, y_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_F^n(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[y_1^{1/n} + y_2^{1/n} - 1 + \left(\frac{1}{1 - y_1^{1/n}} + \frac{1}{1 - y_2^{1/n}} - 1 \right)^{-1} \right]^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[y_1^{\frac{1}{n}} + y_2^{\frac{1}{n}} - 1 + \frac{(1 - y_1^{\frac{1}{n}})(1 - y_2^{\frac{1}{n}})}{1 - (y_1 y_2)^{\frac{1}{n}}} \right]^n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[y_1^{\frac{1}{n}} y_2^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{(1 - y_1^{\frac{1}{n}})(1 - y_2^{\frac{1}{n}})}{1 - (y_1 y_2)^{\frac{1}{n}}} \right) \right]^n \\
&= y_1 y_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\log y_1 \log y_2}{n \log(y_1 y_2)} \right]^n \\
&= y_1 y_2 \exp \left[- \frac{\log y_1 \log y_2}{\log(y_1 y_2)} \right] \\
&= y_1 y_2 \exp \left[- \left(\frac{1}{\log y_1} + \frac{1}{\log y_2} \right)^{-1} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Burada limiting dağılımının cdf'si

$$H(x_1, x_2) = D_H(H_{3,0}(x_1), H_{3,0}(x_2)) = H_{3,0}(x_1) H_{3,0}(x_2) \exp \{ [\exp(x_1) + \exp(x_2)]^{-1} \}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 4.3.2. (Mongenstern Dağılımı)

$$\begin{aligned}
D_H(y_1, y_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_F^n(y_1^{\frac{1}{n}}, y_2^{\frac{1}{n}}) \\
&= y_1 y_2
\end{aligned}$$

olur. Limiting dağılımının cdf'si ise

$$H(x_1, x_2) = D_H(H_{3,0}(x_1), H_{3,0}(x_2)) = H_{3,0}(x_1) H_{3,0}(x_2)$$

olur.

Örnek 4.3.3. (Gumbel I Dağılımı)

$$\begin{aligned}
D_H(y_1, y_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_F^n(y_1^{\frac{1}{n}}, y_2^{\frac{1}{n}}) \\
&= y_1 y_2
\end{aligned}$$

yazılır. Limiting dağılımının cdf'si

$$H(x_1, x_2) = D_H(H_{3,0}(x_1), H_{3,0}(x_2)) = H_{3,0}(x_1) \cdot H_{3,0}(x_2)$$

olur.

Örnek 4.3.4. (Gumbel II Dağılımı)

$$\begin{aligned} D_H(y_1, y_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_F^n(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}) \\ &= y_1 y_2 \end{aligned}$$

olur. Limiting dağılımının cdf'si

$$H(x_1, x_2) = D_H(H_{3,0}(x_1), H_{3,0}(x_2)) = H_{3,0}(x_1) \cdot H_{3,0}(x_2)$$

olur.

Örnek 4.3.5. (Marshall-Olkin Dağılımı)

$$\begin{aligned} D_H(y_1, y_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_F^n(y_1^{1/n}, y_2^{1/n}) \\ &= y_1 y_2 \end{aligned}$$

yazılır. Buradan limiting dağılımının cdf'si ise

$$H(x_1, x_2) = D_H(H_{3,0}(x_1), H_{3,0}(x_2)) = H_{3,0}(x_1) \cdot H_{3,0}(x_2)$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR

- Bairamov, I.G. and Gebizlioğlu, O.L., 1997, On The Ordering of Random Vectors Norm Sense, **Journal of Applied Statistical Science**, Vol. 6, No. 1, pp. 77-86.
- Balakrishnan, N. and Cohen, A.C., 1991, **Order Statistics and Inference**, Academic Press, Inc., London.
- Barnett, V., 1976, The Ordering of Multivariate Data, **J. Roy. Statist. Soc., Ser. A**, 139, 318-344.
- Corley, H.W., 1984, Multivariate Order Statistics, **Commun. Statist. Theory, Math.**, 13(10), 1299-1304.
- David, H.A., 1981, **Order Statistics**, John Wiley and Sons Inc., ABD.
- Freund, I.E. and Walpole, R.E., 1950, **Mathematical Statistics**, Third Edition., USA
- Galambos, J., 1987, **The Asymtotic Theory of Extreme Order Statistics**, 2nd ed., Malabar, Florida: Krieger.
- Galambos, J., Lechner, J., Simiu, E. and Macri, N., 1994, **Extreme Value Theory and Applications**, Kluwer Academic Publishers, Boston, London, Dardrecht.
- Gibbons, J.D., 1971, **Nonparametric Statistical Inference**, McGraw-Hill, Kogakusha Ltd., Tokyo, Japan.
- Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., 1957, **Elements of the Theory Functions and Functional Analysis**, Volume I. New York: Graylock.
- Rees, D.G., 1987, **Foundations of Statistics**, J.W. Arrowsmith Ltd., Bristol.

Reiss, R.D., 1989, **Approximate Distributions of Order Statistics**, Springer, Verlag, New York Inc., USA.

