

**T.C**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VARYASYON HESABININ MİNİMAL YÜZEYLERE**  
**UYGULANMASI**

**Muhlis ÇETİN**  
**(121121112)**

**Anabilim Dalı : Matematik**

**Programı : Uygulamalı Matematik**

**Danışman : Prof.Dr. M. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)**

**ARALIK-2014**

T.C  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VARYASYON HESABININ MİNİMAL YÜZEYLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhlis ÇETİN

(121121112)

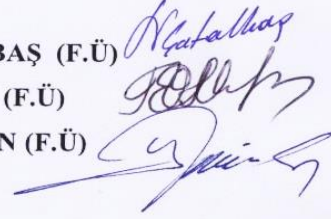
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02 Aralık 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 19 Aralık 2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. M. Necdet ÇATALBAŞ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Doç. Dr. Mehmet GÜRCAN (F.Ü)



ARALIK-2014

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yol gösteren ve yardımcı olan sayın hocam; Prof. Dr. M. Necdet ÇATALBAŞ' a, Doç. Dr. Reşat YILMAZER' e ve diğer saygı değer hocalarıma teşekkür eder, saygılar sunarım.

**Muhlis ÇETİN**  
**ELAZIĞ-2014**

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖNSÖZ .....                                                                       | II  |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                 | III |
| ÖZET .....                                                                        | V   |
| SUMMARY .....                                                                     | VI  |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                                                            | VII |
| 1. GİRİŞ .....                                                                    | 1   |
| 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR .....                                                 | 3   |
| 3. VARYASYONLAR HESABI .....                                                      | 8   |
| 3.1. Fonksiyonel .....                                                            | 8   |
| 3.2. Fonksiyonelde Bağımsız Değişkenin Varyasyonu .....                           | 8   |
| 3.3. Fonksiyonelin Varyasyonu .....                                               | 10  |
| 3.4. Fonksiyonelin Varyasyonunun Tanımının İkinci Şekli .....                     | 11  |
| 3.5. Varyasyon Kuralları .....                                                    | 12  |
| 3.6. Fonksiyonelin İkinci varyasyonu .....                                        | 13  |
| 3.7. Maksimum ve Minimum .....                                                    | 14  |
| 3.8. Varyasyon Hesabının Temel Teoremi .....                                      | 15  |
| 3.9. Bir Bağımlı ve Bir Bağımsız Değişken Olduğu Durumlarda Varyasyon Hesabı .    | 16  |
| 3.10. Birden Fazla Bağımlı Değişken Olduğu Durumlarda Varyasyon Hesabı .....      | 21  |
| 3.11. Birden Fazla Bağımsız Değişken Olduğu Durumda Varyasyon Hesabı .....        | 21  |
| 4. VARYASYON HESABININ MİNİMAL YÜZEYLERE UYGULANMASI .....                        | 23  |
| 4.1. Minimal Yüzeyler .....                                                       | 23  |
| 4.2. Proteinlerde Regüler İkincil Yapı .....                                      | 23  |
| 4.2.1. Temel Protein Yapısına Bir Giriş .....                                     | 24  |
| 4.2.2. Helisoid .....                                                             | 24  |
| 4.2.2.1. 1.Temel Formun İlginç Bir Özelliği .....                                 | 26  |
| 4.2.2.2. Bir Minimal Yüzeyin Alternatif Tanımı .....                              | 27  |
| 4.2.3. Minimal Yüzeyler ve Protein Yapısı .....                                   | 28  |
| 4.2.4. Helisler Üzerinde Geodezikler .....                                        | 29  |
| 4.3. Euler - Lagrange Denklemleri ve Helislerle İlgili Enerji Fonksiyonları ..... | 30  |
| 4.3.1. Başlangıç .....                                                            | 30  |

|          |                                                                             |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.3.1.1. | $\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i}$ İntegrali .....                 | 31        |
| 4.3.1.2. | $\frac{\partial  \tilde{\gamma}' }{\partial \varepsilon_i}$ İntegrali ..... | 32        |
| 4.3.2.   | Normal Yöndeki Varyasyonu.....                                              | 33        |
| 4.3.3.   | Binormal Yöndeki Varyasyonu.....                                            | 34        |
| 4.4.     | Sonuç.....                                                                  | 35        |
|          | <b>KAYNAKLAR.....</b>                                                       | <b>37</b> |
|          | <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>                                                        | <b>38</b> |

## ÖZET

### VARYASYON HESABININ MİNİMAL YÜZEYLERE UYGULANMASI

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır.

İkinci bölümde: tezin temel tanımları verilmiştir.

Üçüncü bölümde: Fonksiyonel, bir fonksiyonelin birinci ve ikinci varyasyonu, Euler - Lagrange denklemi, Brakistokron problemi, birden fazla bağımlı ve bağımsız değişken olduğu durumlarda varyasyon hesabı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Minimal yüzeyler ve Proteinlerde regüler ikincil yapıya yer verilmiş, helislerle ilgili enerji fonksiyonları karakterize edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Fonsiyonel, Euler – Lagrange denklemi ve Minimal yüzeyler

## **SUMMARY**

### **MINIMAL SURFACES APPLICATION OF CALCULUS OF VARIATION**

This study is consisted of four chapters:

In the first chapter the , introduction of thesis is given.

In the second chapter, basic definitions are given.

In the third chapter , Functionals, the first and the second Variations of A Functional, Euler - Lagrange Equation, Brakistokron Problem, Calculus of Variations in the case of depend and independend many of variables are researched.

In the fourth chapter , Minimal Surfaces ,Regular Secondary Structures In Proteins and Energy Functionals Associated with Helices are expressed.

**Key Words :** Functional, Euler - Lagrange Equation, Minimal Surfaces

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1. Bir $f(t)$ fonksiyonunun $\Delta f$ artışı, $df$ diferansiyeli ve $f$ türevi. ....                                              | 3  |
| Şekil 3.1. Sıfırıncı mertebeden yakın eğriler .....                                                                                        | 9  |
| Şekil 3.2. Birinci mertebeden yakın eğriler .....                                                                                          | 9  |
| Şekil 3.3. $\varphi x$ fonksiyonunun $(x_0^*, x_1^*)$ aralığında aldığı değerler .....                                                     | 16 |
| Şekil 3.4. Varyasyon hesaplarında bulmaya çalıştığımız yol etrafında sapmalar ve bunların $I[y(x)]$ fonksiyoneline etkisi hesaplanır. .... | 17 |
| Şekil 3.5. Brakistokron Eğrisi.....                                                                                                        | 19 |
| Şekil 4.1. Protein yapısı .....                                                                                                            | 24 |
| Şekil 4.2. $\alpha$ -helis .....                                                                                                           | 25 |
| Şekil 4.3. Helisoid.....                                                                                                                   | 26 |
| Şekil 4.4. Bir sabun köpüğü sarmalı .....                                                                                                  | 28 |





## 1. GİRİŞ

Varyasyon hesabı, matematiksel analizin bir bölümüdür. İlk problem Yunanlılar tarafından ele alınan izoperimetrik problemlerdir. Bu problem, varyasyon hesabının bazı formları kullanılarak çözülmüştür. Bu problem, ışık akışının bir ortamdan diğerine geçiş problemi olup Fermat tarafından çözülmüştür.

Daha sonra 1687 de Newton ve 1696 da Jean ve Jacque Bernoulli kardeşler varyasyon hesabında ilk problemler olan Brakistokron problemi ve izoperimetrik problemlerin çözümleri ile uğraşmışlardır. Daha sonra Euler ( 1707-1783 ) in bu konudaki esas çalışmaları ile varyasyonlar hesabı matematiğin bağımsız bir bölümü haline gelmiştir.

Bir veya daha fazla değişkene bağlı fonksiyonların ekstremum değerinin bulunması diferansiyel hesabın konusudur. Varyasyonlar hesabında ise fonksiyonelleri ekstremum yapan fonksiyonlar aranılır.

Basit terimlerle varyasyon hesabı 1-boyutlu standart hesapla karşılaştırılabilir. Yani  $x \in R$  için bir değişkenli  $y = f(x)$  fonksiyonu şeklindedir. Kabul edelim ki  $y = f(x)$   $C^1[a, b]$  sınıfından olsun. Bunun anlamı  $x \in R$  olarak aldığımızda sürekli ve diferansiyellenebilirdir. Burada bazı  $x_i \in R$  noktalarında birinci ve ikinci türevleri kullanarak fonksiyonun lokal ve global ekstremumlarını araştırabiliriz. Benzer şekilde varyasyon hesabı

$$E[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1.1)$$

şeklindedir.  $F(x, y(x), y'(x))$  fonksiyonun da  $x$  bağımsız değişkenli bir fonksiyon,  $y(x)$   $x$  e bağlı bir fonksiyon ve  $y'(x)$   $x$ 'e göre birinci türevdir.  $y(x)$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı tüm  $C^1$  sınıfından fonksiyonların  $D$  bölgesindedir. Burada herhangi  $y(x) \in D$  için  $y(a) = A$  veya  $y(b) = B$  dir. Birinci ve ikinci türevleri kullanılarak  $y(x) \in D$  bölgesinde bu fonksiyonelin lokal ve global ekstremumları araştırılabilir. Bu metot tipik varyasyon hesabının uygulamasıdır.

Matematikte bilindiği üzere düzlemde iki nokta arasındaki en kısa mesafe iki noktayı birleştiren doğrudur. Oysa söz konusu iki nokta, örneğin bir küre yüzeyindeyse en kısa mesafe artık doğru olmayacak ama ne olacaktır? Ya da düzlemde iki noktayı birleştiren doğru gerçekten en kısa olanı mıdır? Veya bir eğrinin biçimi ne olmalıdır ki

eğrinin bir eksen etrafında  $360^\circ$  döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı minimum olsun. Ya da bir küre içine yerleştirilecek maksimum hacimli prizmanın kenarları ne olmalıdır? Bunun gibi daha pek çok sorunun yanıtı varyasyon hesabı ile verilebilir.

Varyasyon hesabı fizikte de çok önemli bir konuma sahiptir. Zira herhangi bir sistemin dengede veya kararlı halde olması için gerekli koşulların bilinmesi ancak ve ancak varyasyon hesabı ile mümkündür.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

### Tanım 2.1.

Değer bölgesi  $R$  reel eksenine ya da  $C$  kompleks düzleminde bulunan bir operatöre fonksiyonel denir[1].

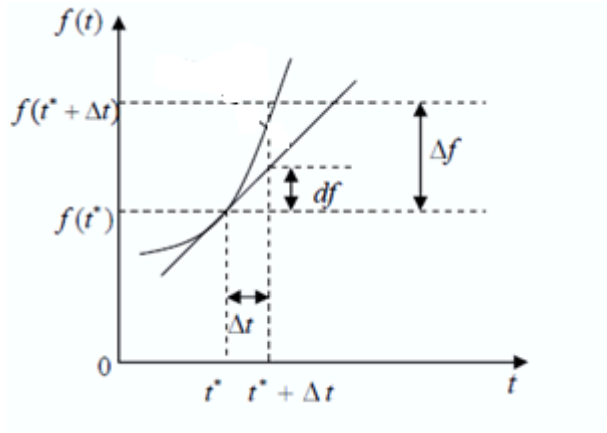
### Tanım 2.2.

Bir  $f$  fonksiyonunun artışı  $\Delta f$  ile gösterilir ve

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanımdan  $\Delta f$  in  $t$  bağımsız değişkenine ve  $\Delta t$  bağımsız değişken artışına bağlı olduğu görülür.  $\Delta f(t, \Delta t)$  bir fonksiyonun artışı olarak yazılabilir [2].



Şekil 2.1. Bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $\Delta f$  artışı,  $df$  diferansiyeli ve  $f$  türevi.

### Tanım 2.3.

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun artımı

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

dir ve

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x$$

şeklinde gösterilir.  $A(x)$ ,  $\Delta x$  e bağlı değildir.  $\Delta x \rightarrow 0$  için  $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$  ise  $\Delta x$  e göre lineer olan  $A(x)\Delta x$  e  $f(x)$  fonksiyonunun diferansiyeli denir,  $df$  ile gösterilir.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x) = f'(x)$$

den

$$df = f'(x)dx$$

bulunur.

Benzer şekilde  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin artımı

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y] - I[y(x)]$$

dir.

$$\Delta I = L[y(x), \delta y] + \beta[y(x), \delta y] \cdot \max|\delta y|$$

şeklinde gösterilir.  $L[y(x), \delta y]$ ,  $\delta y$  nin lineer bir fonksiyoneli.  $\max|\delta y| \rightarrow 0$  için  $\beta[y(x), \delta y] \rightarrow 0$  ise  $\Delta I$  artımının,  $\delta y$  ye göre lineer kısmı olan,  $L[y(x), \delta y]$  ye,  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin birinci varyasyonu denir [2].

#### Tanım 2. 4.

Eğer  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin ikinci varyasyonu varsa

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y] - I[y(x)]$$

artımı,  $L_1[\delta y]$  lineer bir fonksiyoneli,  $L_2[\delta y]$  kuadrik bir fonksiyoneli olduğuna göre,  $\delta y \rightarrow 0$  ve  $\beta \rightarrow 0$  için

$$\Delta I = L_1[\delta y] + \frac{1}{2}L_2[\delta y] + \beta\|\delta y\|^2$$

şeklinde gösterilebilir.  $L_2[\delta y]$  kuadrik fonksiyoneli  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin ikinci varyasyonudur [2].

#### Tanım 2.5.

$I \subseteq R$  bir açık aralık olmak üzere  $\alpha: I \rightarrow E^n$  şeklinde diferensiyellenebilir ( $C^\infty$  sınıfından) bir  $\alpha$  dönüşümüne  $E^n$  de bir eğri adı verilir [3].

**Tanım 2.6.**

$\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğri olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birim teğet vektör alanı  $T(s)$ , asli normal vektör alanı  $N(s)$  ve binormal vektör alanı  $B(s)$  olsun.  $T(s), N(s), B(s)$  vektörlerine  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğri için  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri denir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir [3].

**Tanım 2.7.**

$\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğri olsun.

$$K : I \rightarrow R$$

$$s \rightarrow K(s) = \| T'(s) \|$$

fonksiyonuna birinci eğrilik fonksiyonu adı verilir.  $K(s)$  reel sayısına da  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği denir [3].

**Tanım 2.8.**

$\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları  $T, N, B$  olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow R$$

$$s \rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin burulma fonksiyonu denir.  $\tau(s)$  sayısına da eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki burulması denir [3].

**Tanım 2.9.**

$\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin tanjant doğruları sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa  $\alpha$  ya bir silindirik helis (genel helis) denir.

$\alpha(s)$  nin bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart  $\frac{\tau}{k}$  nin sabit olmasıdır [8].

**Tanım 2.10.**

$E^n$  n-boyutlu Öklid uzayında  $(n - 1)$  boyutlu bir yüzey veya  $(n - 1)$  yüzey diye  $E^n$  deki boş olmayan bir M cümlesine denir öyleki, bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset E^n \mid f: U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} R, f(x) = c, \overrightarrow{\Delta f} \neq 0 \}$$

biçiminde tanımlanır.

$E^2$  de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir.  $E^3$  de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir.  $E^n$  de bir  $(n - 1)$  yüzey,  $n > 3$  olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [3].

**Tanım 2.11.**

$E^{n+1}$  de bir M hiperyüzeyi üzerinde geodezik denen eğri öyle bir parametrik eğridir ki bu eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M ye ortogonaldır. Yani

$$\alpha : I \rightarrow M$$

ise  $\ddot{\alpha}(t) \in T_M^\perp(\alpha(t)), \forall t \in I$  dir [3].

**Tanım 2.12.**

Verilen bir eğrinin verilen bir  $d$  doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeye dönel yüzey denir. Verilen doğruya dönel yüzeyin ekseni ya da dönme ekseni, döndürülen eğriye de dönel yüzeyin üretici denir. Üreticin konumlarından her birine dönel yüzeyin meridyeni denir [4].

**Tanım 2.13.**

$A \subset R, f: A \rightarrow R$  bir fonksiyon ve  $a \in A$  olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ise  $f$  fonksiyonu  $a$  noktasında süreklidir denir [5].

**Tanım 2.14.**

$f: A \subset R \rightarrow R$  bir fonksiyon,  $x_0 \in A$  ve  $x_0, A$ 'nın bir yığılma noktası olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti mevcut ise  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında türevlenebilirdir denir [5].

**Tanım 2.15.**

Türevi  $f(x)$  veya diferansiyeli  $f(x)dx$  olan  $F(x)$  ifadesine  $f(x)$  fonksiyonunun belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

ile gösterilir. Burada  $c$  ye integrasyon sabiti denir [5].

**Tanım 2.16.**

$f: [a, b] \rightarrow R$  fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx = I$$

ise  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında integrallenebilirdir, veya Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve bu integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir [5].

**Tanım 2.17.**

$A \subset R$ ,  $f: A \rightarrow R$  bir fonksiyon ve  $a$ ,  $A$  kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri  $A - \{a\}$  kümesine ait olan ve  $a$  noktasına yakınsayan her  $(x_n)$  dizisi için elde edilen  $f(x_n)$  görüntü dizisi aynı bir  $L$  sayısına yakınsıyorsa  $L$  sayısına  $f$  fonksiyonunun  $a$  noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir [5].

### 3.VARYASYONLAR HESABI

#### 3.1. Fonksiyonel

Tanım bölgesi bir  $X$  vektör uzayında, değer bölgesi ise  $X$  in bir  $K$  skaler cisminde bulunan lineer bir  $f$  operatörüne bir lineer fonksiyonel denir.  $X$  reel ise  $K = R$  ve  $X$  kompleks ise  $K = C$  olmak üzere,

$$f: D(f) \rightarrow K$$

yazılır.

#### Örnek 1.

$(0,1)$  aralığında sürekli fonksiyonların cümlesi  $C[0,1]$  olsun.

$$I[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx$$

integrali  $\{y(x)\}$  cümlesinde tanımlı bir fonksiyoneldir. Burada her  $\{y(x)\}$  fonksiyonuna karşı bir sayısal değer bulunur.

Örneğin;

$$y(x) = 1 \text{ için } I[1] = \int_0^1 1 dx = 1$$

$$y(x) = e^x \text{ için } I[e^x] = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

elde edilir.

Ayrıca  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  şeklinde birden fazla bağımsız değişkenin fonksiyonundan bahsedildiği gibi  $I = I[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$  şeklinde birden fazla fonksiyona bağlı fonksiyonellerden ve

$$I = I[z_1(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

$$I = I[z_1(x_1, x_2, \dots, x_n), z_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, z_m(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

şeklinde birden fazla değişkene bağlı fonksiyonları içeren fonksiyonellerden de bahsedilebilir.

#### 3.2. Fonksiyonelde Bağımsız Değişkenin Varyasyonu

$y = f(x)$  fonksiyonunda bağımsız değişkenin artımı  $\Delta x$  ile gösterilir.

$$\Delta x = x - x_1$$

dir.



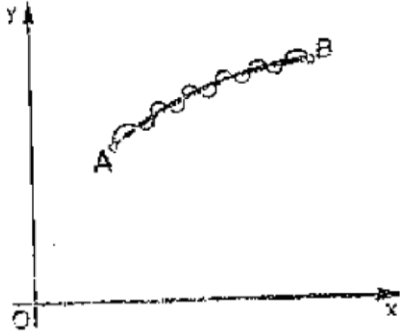
$I[y(x)]$  fonksiyoneliinde ise  $y(x)$  bağımsız değişkenin artımına  $y(x)$  in varyasyonu denir.  $\delta y$  ile gösterilir ve

$$\delta y = y(x) - y_1(x)$$

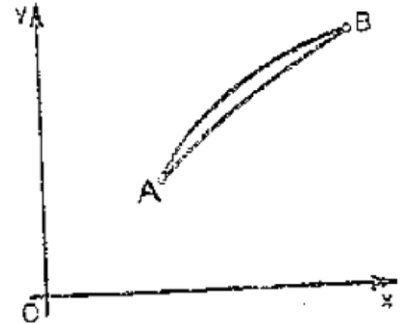
dir.  $y_1(x)$  eğrisi  $y(x)$  eğrisine ne kadar yakın alınırsa  $\delta y$  o kadar küçük olur. Fakat bu tanım her zaman yeterli değildir.  $y(x)$  ve  $y_1(x)$  eğrilerinin hangi hallerde birbirine yakın olacağını daha açık belirtmek gerekir.

$y(x) - y_1(x)$  farkının mutlak değerinin, fonksiyonun tanımlı olduğu bütün  $x$  değeri için küçük olması, yani bu fonksiyonların koordinat bakımından birbirine yakın olması halinde fonksiyonlar birbirine sıfırıncı mertebeden yakındır denir. ( şekil 3.1 ) de görüldüğü gibi

Yalnız koordinat bakımından yakın değil aynı zamanda aynı  $x$  değerine karşı gelen noktaların teğetlerinin doğrultularınında birbirine yakın olması halinde bu fonksiyonların yakınlığından bahsedilmesi daha uygundur. ( şekil 3.2 ) de görüldüğü gibi böyle bir problemde yalnız  $y(x) - y_1(x)$  farkının küçük olması değil  $y'(x) - y'_1(x)$  farkının



Şekil 3.1. Sıfırıncı mertebeden yakın eğriler



Şekil 3.2. Birinci mertebeden yakın eğriler

mutlak değerinin de küçük olması gerekir. Eğriler birbirine birinci mertebeden yakındır denir. Bazı hallerde fonksiyonların birbirine yakın olduğunu kabul etmek için

$$y(x) - y_1(x), y'(x) - y'_1(x), y''(x) - y''_1(x), \dots, y^{(n)}(x) - y_1^{(n)}(x)$$

farkının mutlak değerinin istenildiği kadar küçük olması gerekir. O zaman bu eğriler birbirine  $n$ .ci mertebeden yakındır denir.

## Örnek 2.

$[0, \pi]$  aralığında  $y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$  ( $n$  yeterince küçük) eğrisi ile  $y_1(x) = 0$  eğrisi birbirine sıfırıncı mertebeden yakındır. Çünkü

$$|y(x) - y_1(x)| = \left| \frac{\sin n^2 x}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

ve

$$|y'(x) - y_1'(x)| = n |\cos n^2 x|$$

dir.  $n$  yeterince büyük alındığında  $|y(x) - y_1(x)|$  çok küçük olmakla beraber

$$|y'(x) - y_1'(x)| \text{ büyüktür.}$$

### 3.3. Fonksiyonelin Varyasyonu

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun artımı

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

dir ve

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x$$

şeklinde gösterilir.  $A(x)$ ,  $\Delta x$  e bağlı değildir.  $\Delta x \rightarrow 0$  için  $\beta(x, \Delta x)\Delta x \rightarrow 0$  ise  $\Delta x$  e göre lineer olan  $A(x)\Delta x$  e  $f(x)$  fonksiyonunun diferansiyeli denir.  $df$  ile gösterilir.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x) = f'(x)$$

den

$$\Delta f = f'(x)dx$$

bulunur. Benzer şekilde  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin artımı

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y] - I[y(x)]$$

dir.

$$\Delta I = L[y(x), \delta y] + \beta[y(x), \delta y] \max|\delta y|$$

şeklinde gösterilir.  $L[y(x), \delta y]$ ,  $\delta y$  nin lineer bir fonksiyonelidir.  $\max|\delta y| \rightarrow 0$  için  $\beta[y(x), \delta y] \rightarrow 0$  ise  $\Delta I$  artımının  $\delta y$  ye göre lineer kısmı olan  $L[y(x), \delta y]$  ye  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin birinci varyasyonu denir.  $\delta I$  ile gösterilir. Genellikle birinci varyasyon için sadece fonksiyonelin varyasyonu deyimi kullanılır.

### Örnek 3.

$$I[y(x)] = \int_a^b y(x) dx$$

fonksiyoneli göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}\Delta I &= I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)] \\ &= \int_a^b [y(x) + \delta y(x)] dx - \int_a^b y(x) dx = \int_a^b \delta y(x) dx \\ \Delta I &= \int_a^b \delta y(x) dx\end{aligned}$$

dir.  $\Delta I$  fonksiyoneli  $\delta y$  ye göre lineerdir.

$$\delta I = \int_a^b \delta y(x) dx$$

şeklindedir.

### 3.4. Fonksiyonelin Varyasyonunun Tanımının İkinci Şekli

$\alpha$  bir parametre olmak üzere  $f(x + \alpha \Delta x)$  fonksiyonunun  $\alpha$  ya göre birinci türevinin  $\alpha = 0$  için aldığı değer  $f(x)$  fonksiyonunun diferansiyelini verir. Bileşke fonksiyonların türev kuralından kolayca

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x = df(x)$$

olduğu görülebilir. Aynı şekilde birden fazla bağımsız değişkene bağlı

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonunun diferansiyeli

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n)|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i} \Delta x_i = df$$

şeklinde tanımlanır.

Bir fonksiyonun diferansiyeli ile bir fonksiyonelin varyasyonu tanımlarının benzerliğinden faydalananarak  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin varyasyonu  $I[y(x) + \alpha \delta y]$  nin  $\alpha$  ya göre türevinin  $\alpha = 0$  için aldığı değer olarak hesaplanabilir.  $\delta I$  varyasyonu tanımından  $\Delta I$  artımı

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y] - I[y(x)]$$

$$\Delta I = L[y(x), \alpha \delta y] + \beta[y(x), \alpha \delta y] |\alpha| \max|\delta y|$$

şeklinde gösterilmişti.  $I[y(x) + \alpha \delta y]$  nin  $\alpha$  ya göre türevinin  $\alpha = 0$  için aldığı değer

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y) + \beta(y, \alpha \delta) |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(y, \alpha \delta y)}{\alpha} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta(y, \alpha \delta) |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha}\end{aligned}$$

şeklindedir.  $L(y, \alpha \delta y)$  fonksiyoneli  $\delta y$  ye göre liner olduğundan

$$L(y, \alpha \delta y) = \alpha L(y, \delta y)$$

yazılabilir.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta(y, \alpha \delta) |\alpha| \max |\delta y|}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta(y, \alpha \delta) \max \delta y = 0$$

dir. Buradan

$$\lim_{\Delta \alpha} \frac{\Delta I}{\Delta \alpha} = \lim_{\alpha} \frac{\Delta I}{\alpha} = L(y, \delta y)$$

elde edilir. Sonuç olarak  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin 1.varyasyonu

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} I[y(x) + \alpha \delta y]_{\alpha} = 0$$

şeklinde tanımlanır. Eğer bir fonksiyonelin esas lineer artımı anlamında varyasyonu varsa türev anlamındaki varyasyonu da vardır, yani bir parametreye göre türevin başlangıçtaki değeri de vardır. Bu iki kavram aynı sonucu verir.

#### Örnek 4.

$$I[y(x)] = \int_a^b y^2(x) dx$$

fonksiyonelinin birinci varyasyonu

$$\delta I = 2 \int_a^b y(x) \delta y(x) dx$$

şeklinde bulunur. Şimdi aynı fonksiyonelin ikinci varyasyonu hesaplanırsa

$$I[y(x) + \alpha \delta y] = \int_a^b [y(x) + \alpha \delta y]^2 dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} I[y(x) + \alpha \delta y] = 2 \int_a^b (y + \alpha \delta y) \delta y dx$$

$$\partial I = \frac{\partial}{\partial \alpha} I[y(x) + \alpha \delta y]_{\alpha} = 2 \int_a^b y \delta y dx$$

elde edilir.

### 3.5. Varyasyon Kuralları

Varyasyon hesabında diferansiyel hesapta bilinen kurallar uygulanır.

$F_1[y(x)]$  ve  $F_2[y(x)]$ ,  $\{y(x)\}$  fonksiyonlar cümlesinde tanımlı iki fonksiyonel olsun.

$$\begin{aligned}\delta[F_1 \mp F_2] &= \delta F_1 \mp \delta F_2 \\ \delta[F_1 \cdot F_2] &= F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1 \\ \delta \left[ \frac{F_1}{F_2} \right] &= \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} \\ \delta[F^n] &= nF^{n-1} \delta F\end{aligned}$$

şeklinde varyasyon kuralları yazılabilir.

### 3.6. Fonksiyonelin İkinci varyasyonu

Eğer  $x$  ve  $y$  ye bağlı  $I[x, y]$  fonksiyonelinde  $x$  sabit alındığında  $y$  nin lineer bir fonksiyoneli,  $y$  sabit alındığında  $x$  in lineer bir fonksiyoneli elde ediliyorsa  $I[x, y]$  fonksiyoneli bilineer bir fonksiyoneldir.  $I[x, y]$  fonksiyoneli bilineer ise

$$\begin{aligned}I[\alpha_1 x + \alpha_2 x_2, y] &= \alpha_1 I[x_1, y] + \alpha_2 I[x_2, y] \\ I[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] &= \beta_1 I[x, y_1] + \beta_2 I[x, y_2]\end{aligned}$$

şeklindedir. Bilineer fonksiyonelde  $y = x$  alınırsa  $I[x, x]$  kuadrik fonksiyoneli elde edilir.  $I[x, x] > 0$  ve  $x$ 'in herhangi bir değeri için sıfır olmuyorsa  $I[x, x]$  belli bir pozitif kuadrik fonksiyoneldir.

#### Örnek 5.

$$I[x, y] = \int_a^b A(t)x(t)y(t)dt$$

fonksiyoneli  $A(t)$  nin sabit sürekli bir fonksiyon olması halinde bilineer bir fonksiyoneldir ve

$$I[x, x] = \int_a^b A(t)x^2(t)dt$$

kuadrik bir fonksiyoneldir.  $t \in (a, b)$  için  $A(t) > 0$  ise kuadrik fonksiyonel pozitif ve belirlidir.

Eğer  $I[x, y]$  fonksiyonelinin ikinci varyasyonu varsa

$$\Delta I = I[y + \delta y] - I[y]$$

artımı  $L_1[\delta y]$  lineer bir fonksiyonel  $L_2[\delta y]$  kuadrik bir fonksiyonel olduğuna göre  $\delta y \rightarrow 0$  ve  $\beta \rightarrow 0$  için

$$\Delta I = L_1(\delta y) + \frac{1}{2}L_2(\delta y) + \beta \|\delta y\|^2$$

şeklinde gösterilebilir.  $L_2(\delta y)$  kuadrik fonksiyoneli  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin ikinci varyasyonudur ve  $\delta^2 I$  şeklinde gösterilir. Bir fonksiyonelin ikinci varyasyonu varsa bir tek şekilde belirlenir.

### Örnek 6.

$$I[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

fonksiyonelinin ikinci varyasyonu isteniliyor.

$\alpha$  bir parametre olmak üzere  $I[y(x) + \alpha \delta y]$  yi

$$\varphi(\alpha) = I[y(x) + \alpha \delta y]$$

şeklinde  $\alpha$  nın bir fonksiyonu olarak düşünülürse  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin birinci varyasyonu,  $\varphi(\alpha)$  fonksiyonunun  $\alpha$  ya göre türevinin  $\alpha = 0$  için aldığı değer olarak tanımlanmıştı. İkinci varyasyonu ise  $\varphi(\alpha)$  fonksiyonunun  $\alpha$  ya göre ikinci mertebe türevinin  $\alpha = 0$  için aldığı değer olarak tanımlanır.

$$\delta^2 I = \left| \frac{d^2 \varphi(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = 0$$

şeklinde gösterilir. Bu tanım şekli integral tipi fonksiyonel için uygundur. Örneğin

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx$$

dir.

$$y + \alpha \delta y = u, \quad y' + \alpha \delta y' = v$$

ile gösterilir ise

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \delta y + \frac{\partial f}{\partial v} \delta y' \right] dx$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} = \int_a^b \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \delta y'^2 \right] dx$$

$$\delta^2 I = \int_a^b \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right] dx$$

elde edilir.

### 3.7. Maksimum ve Minimum

Eğer  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin  $y = y_0(x)$  eğrisine yeteri derecede yakın eğriler için, aldığı değer, daima  $I[y_0(x)]$  değerinden daha küçük ise  $I[y(x)]$  fonksiyoneli  $y = y_0(x)$  eğrisi boyunca bir maksimum değer alır. O halde

$$\Delta I = I[y(x)] - I[y_0(x)] \leq 0$$

ve yalnız  $y = y_0(x)$  için  $\Delta I = 0$  ise  $I[y(x)]$  fonksiyoneli  $y = y_0(x)$  eğrisi boyunca bir mutlak maksimum değer alır denir.

$I[y(x)]$  fonksiyonelinin  $y = y_0(x)$  eğrisi boyunca minimum olması halinde ise  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin  $y_0(x)$ , eğrisine yeter derecede yakın eğriler boyunca aldığı değer,  $y_0(x)$  için aldığı  $I[y_0(x)]$  değerinden daha büyüktür.

$$\Delta I = I[y(x)] - I[y_0(x)] \geq 0$$

ve yalnız  $y_0(x)$  için  $\Delta I = 0$  olur.

Eğer  $y_0(x)$  eğrisine komşu olan bütün eğriler  $y_0(x)$  eğrisine sıfıncı mertebeden yakın ise böyle bir maksimum – minimuma kuvvetlidir denir.  $y_0(x)$  eğrisine komşu olan bütün eğriler, yakınlık anlamında birinci mertebeden yakın ise yani bütün yakın eğriler yalnız koordinat bakımından değil aynı zamanda eğim bakımından da yakın olursa, o zaman bu maksimum – minimuma zayıftır denir. Ekstremumun kuvvetli veya zayıf olması bir ekstremumun gerek şartının ispatında önemli değildir. Ancak ekstremum için yeterlik şartı araştırılırken gerekir.

### 3.8. Varyasyon Hesabının Temel Teoremi

$\varphi(x)$  fonksiyonu  $(x_0, x_1)$  aralığında sürekli, türe ve sahip bir fonksiyon ise aynı aralıkta sürekli ve sürekli bir türe ve sahip,  $x_0$  ve  $x_1$  için sıfır olan,  $|\delta y| < \varepsilon$  şartını sağlayan bütün  $\delta y$  fonksiyonları için

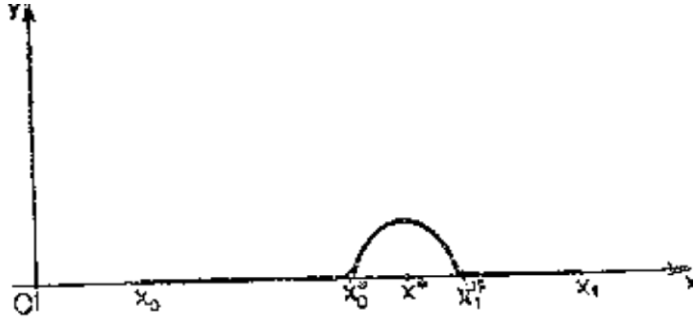
$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) \delta y dx = 0$$

şartının sağlanabilmesi için  $x_0 \leq x \leq x_1$  aralığında  $\varphi(x) = 0$  olması gerekir.

#### İspat:

$\varphi(x)$  fonksiyonunu,  $(x_0, x_1)$  aralığının bir noktasında sıfırdan farklı kabul edelim. Fonksiyon bu aralıkta sürekli bir fonksiyon olduğu için  $(x_0, x_1)$  aralığı için de bu noktayı içine alan bir  $(x_0^*, x_1^*)$  aralığında  $\varphi(x)$  fonksiyonun mutlak değeri  $\eta$  gibi bir sayıdan büyük kalacaktır.

Örneğin ( şekil 3.3 ) deki gibi  $\varphi(x)$  fonksiyonu  $(x_0^*, x_1^*)$  aralığında pozitif değerler alsın.



**Şekil 3.3.**  $\varphi(x)$  fonksiyonunun  $(x_0^*, x_1^*)$  aralığında aldığı değerler

Eğer  $\delta y$  fonksiyonu  $(x_0^*, x_1^*)$  de sabit işaretli ve bu aralığın dışında sıfır olacak şekilde seçilirse  $\varphi(x)\delta y$  fonksiyonunda  $(x_0^*, x_1^*)$  aralığında sabit işaretli ve aralığın dışındaki değerler için sıfır olur. Görülüyor ki teoremden verilen şartları sağlayan her  $\delta y$  fonksiyonuna karşılık integrallerin sıfır olması için

$$\varphi(x) = 0$$

olması gerekir.

### Örnek 7.

$$\delta y = \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0^* & \text{için} & \delta y = 0 \\ x_0^* \leq x \leq x_1^* & \text{için} & \delta y = k(x - x_0^*)^2(x_1^* - x)^2 \\ x_1^* \leq x \leq x_1 & \text{için} & \delta y = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım.  $\delta y$  fonksiyonu  $(x_0, x_1)$  aralığında birinci mertebeden türeve sahip bir fonksiyondur.  $|\delta y| < \varepsilon$  olması için  $k$  yı uygun seçmek mümkündür.

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) \delta y dx \right| &\geq |k| \eta \int_{x_0^*}^{x_1^*} (x - x_0^*)^2 (x_1^* - x)^2 dx \\ &= |k| \eta \frac{(x_1^* - x_0^*)^5}{30} \neq 0 \end{aligned}$$

dır. Sonucun sıfır olması için  $\varphi(x) = 0$  olması gerekir.

### 3.9. Bir Bağımlı ve Bir Bağımsız Değişken Olduğu Durumlarda Varyasyon Hesabı

Bu tür varyasyon hesabı

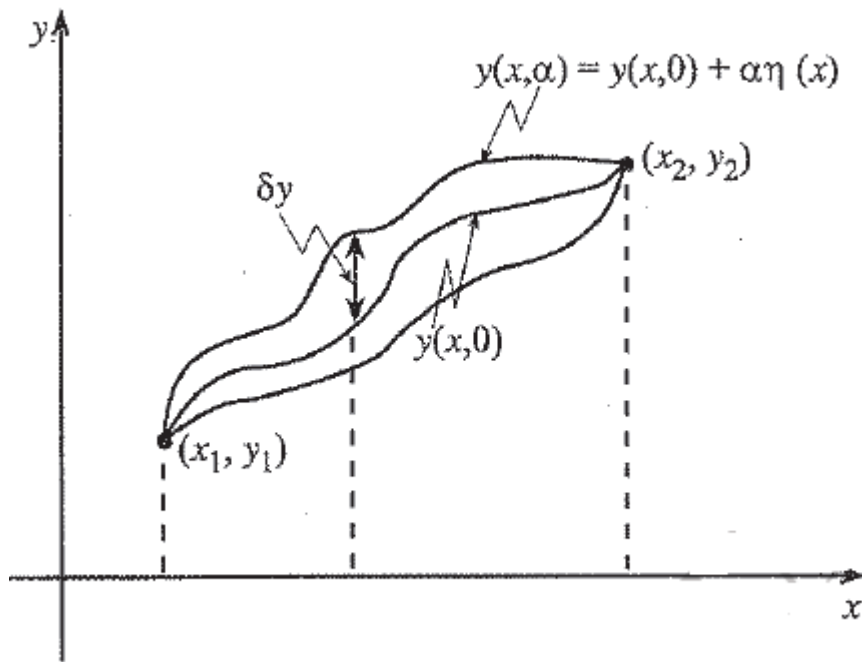
$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx \quad (3.9.1)$$



şeklinde verilmiş bir integrali ekstremum (maksimum veya minimum) yapan  $y(x)$  fonksiyonunun bulunmasını içerir. İntegral  $f$ ,  $y$ ,  $y'$  ve  $x$  değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. İntegralin kendisi olan  $I$  ise bulunması istenen  $y(x)$  fonksiyonuna bağlı olduğundan fonksiyonel olarak adlandırılır ve

$$I[y(x)] \quad (3.9.2)$$

şeklinde yazılır. Bu problemin amacı (şekil 3.4) 'de gösterildiği gibi  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktalarından geçen bir çok muhtemel  $y(x)$  fonksiyonundan  $I$  değerini ekstremum yapanın bulunmasıdır. Çoğu uygulamalarda aranılan ekstremum minimum olacaktır.



**Şekil 3.4.** Varyasyon hesaplarında bulmaya çalıştığımız yol etrafında sapmalar ve bunların  $I[y(x)]$  fonksiyoneline etkisi hesaplanır.

(şekil 3.4) de iki mümkün integrasyon yolu gösterilmiştir. Aslında sonsuz tane böyle yol vardır. Verilen herhangi bir  $x$  noktasında bunlardan bir tanesi ile gerçek yol arasındaki farka  $y$ 'nin varyasyonu (değişimi) denir, ve  $\delta y$  ile gösterilir. Bu varyasyon doğal olarak  $x$ 'e bağlı olacağından  $\eta(x)$  ile gösterilir. Varyasyon büyüklüğü  $\alpha$  gibi küçük bir skaler parametre ile belirtilirse  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  noktaları arasındaki rastgele bir fonksiyon

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x) + 0(\alpha^2) \quad (3.9.3)$$

şeklinde parametrelendirilebilir.  $y(x, \alpha = 0)$  ise  $I$  integralini ekstremum yapan aranılan fonksiyondur. Bu fonksiyona göre varyasyon ise

$$\delta y = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha \eta(x) \quad (3.9.4)$$

olacaktır. Bu tanımla  $I$  integrali,  $\alpha$  parametresine bağlı olarak

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y_x(x, \alpha), x) dx \quad (3.9.5)$$

şeklinde yazılır. Artık bu fonksiyonelin ekstremum değeri diferansiyel hesaptakine benzer şekilde  $\alpha$  parametresine göre

$$\left| \frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.9.6)$$

şartı ile bulunur. Varyasyon hesabının birinci şartı uç noktalarda varyasyonun

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (3.9.7)$$

şeklinde sıfır olmasıdır. İkinci şart ise  $\eta(x)$  fonksiyonunun türevlenebilir bir fonksiyon olmasıdır. Böylece  $I$ 'nin  $\alpha$  ya göre türevi

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} \right] dx \quad (3.9.8)$$

olarak bulunur. (3.9.3) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(x, \alpha)}{\partial \alpha} &= \eta(x), \\ \frac{\partial y_x(x, \alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.9.9)$$

yazabiliriz. Bu durumda denklem (3.9.8)

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{d\eta(x)}{dx} \right] dx \quad (3.9.10)$$

şeklini alır. İntegraldeki ikinci ifade kısmi integrasyon ile hesaplanırsa

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{d\eta(x)}{dx} dx = \left[ \frac{\partial f}{\partial y_x} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) dx \quad (3.9.11)$$

bulunur. Uç noktalarda varyasyon sıfır olduğunda ilk terimin katkısı yoktur. Sonuç olarak denklem (3.9.6)

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \eta(x) dx = 0 \quad (3.9.12)$$

şeklini alır.  $\eta(x)$  varyasyonu keyfi olduğundan bu denklemin sağlanması ancak parantez içindeki ifadenin sıfır olması ile mümkündür. Bu bize Euler denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0 \quad (3.9.13)$$

denklemini verir. Bu durumu özetlenirse varyasyon hesabı bize  $I[y(x)]$  fonksiyonelinin ekstremum yapan fonksiyonun sağladığı ikinci dereceden bir diferansiyel denklemi verir.

İntegralin uç noktalarında varyasyon sıfır olduğundan (3.9.5) integralindeki integranta neticeyi etkilemeden her zaman

$$\frac{df(y, y_x, x)}{dx} \quad (3.9.14)$$

gibi tam türev eklenir. Bundan dolayı Euler denklemi birçok değişik şekilde yazılabilir. Bunların en uygun olanı

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( f - y_x \frac{df}{dy_x} \right) = 0$$

şeklindedir.

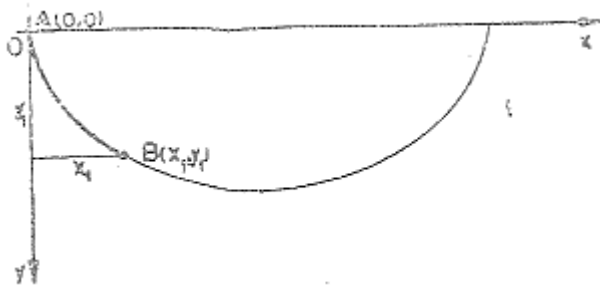
### Örnek 8.

Brakistokron Problemi ( İki noktayı birleştiren en kısa zaman eğrisinin bulunması )

Düşey düzlemde aynı düşey doğrultuda olmayan bir A noktasından, daha aşağıda bir B noktasına giden, sürtünmesiz kayarak hareket ettiği kabul edilen maddesel bir noktanın A dan B ye en kısa zamanda varabilmesi için takip ettiği yol nedir?

Düşey düzlemde dik koordinat sisteminden faydalanalım. (şekil 3.5 ) daki gibi yukarıda alınan A noktası başlangıç noktası olarak, y eksenini düşey ve aşağı doğru yönde alındığında, verilen iki noktanın koordinatları  $A(0,0)$  ve  $B(x_1, y_1)$  olur.

Bu iki noktayı birleştiren herhangi bir eğrinin denklemi  $y = y(x)$  ise yolun zamana göre türevi hızı verdiği göre



Şekil 3.5. Brakistokron Eğrisi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

dir.

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad \text{ve} \quad y(0) = 0, y(x_1) = y_1$$

olur. Problemin çözümü için  $t[y(x)]$  fonksiyoneli minimum yapan ,  $y = y(x)$  fonksiyonunu belirtmek gerekir.

$f$  açık olarak  $x$ 'e bağlı değil, yalnız  $y$  ve  $y'$  ye bağlıdır. Euler denkleminin birinci integrali

$$f - y' f y' = c$$

şeklindedir.

$$f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \quad \text{ve} \quad f y' = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine konulursa

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c$$

olur. Kısaltma yapılarak

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c \quad \text{buradan} \quad y(1+y'^2) = c_1$$

bulunur.  $c_1^{-\frac{1}{2}} = c$  alınırsa

denklemde  $y' = \cot t$  dönüşümü yapıldığında

$$y = \frac{c_1}{1+\cot^2 t} = c_1 \sin^2 t = \frac{c_1}{2} (1 - \cos 2t)$$

den

$$dx = \frac{2c_1 \sin t \cos t}{\cot t} dt = 2c_1 \sin^2 t dt = c_1 (1 - \cos 2t) dt$$

$$x = c_1 \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + c_2 = \frac{c_1}{2} (2t - \sin 2t) + c_2$$

elde edilir. Eğrinin parametrik denklemi

$$x - c_2 = \frac{c_1}{2} (2t - \sin 2t)$$

$$y = \frac{c_1}{2} (1 - \cos 2t)$$

dir.  $A(0,0)$  noktasından geçme şartından  $c_2 = 0$  bulunur.

$2t = t_1$  ile gösterilir ise,

$$x = \frac{c_1}{2} (t_1 - \sin t_1)$$

$$y = \frac{c_1}{2} (1 - \cos t_1)$$

dir. Ekstremal eğrilerin parametrik denklemini verir. Yarıçapı  $\frac{c_1}{2}$  olan bir dairenin  $x$  eksenine üzerinde, kaymadan yuvarlanmasından meydana gelen sikloidin denklemini gösterir.  $c_1$  in aldığı değerlere göre değişen, bir sikloid ailesi elde edilir.

### 3.10. Birden Fazla Bağımlı Değişken Olduğu Durumlarda Varyasyon Hesabı

Denklem (3.9.1) de tanımlanan varyasyon hesabındaki  $f$  fonksiyonunun

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x) \quad (3.10.1)$$

gibi birden fazla bağımlı değişkene ve  $x$  gibi bir bağımsız değişkene bağlı olduğu durumu ele alalım. Bu durumda  $I$  fonksiyoneli

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x), y_2(x), \dots, y_{1x}(x), y_{2x}(x), \dots, x) dx \quad (3.10.2)$$

şeklinde olur. Bölüm (3.9) da görüldüğü gibi  $I$  integralini ekstremum yapan  $y_i(x, 0)$  yollarından olan sapmaları

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x) + 0(\alpha^2) \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.10.3)$$

şeklinde küçük  $\alpha$  parametresi cinsinden yazılabilir. Burada  $\eta_i$  fonksiyonları birbirinden bağımsızdır. Bu durumda uç noktalarda değişim yine

$$\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0 \quad (3.10.4)$$

şeklinde sıfır olarak alınır. (3.10.2) nin  $\alpha$  ya göre türevi alınarak  $\alpha = 0$  değeri için yazılırsa

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \frac{d\eta_i(x)}{dx} \right) dx = 0 \quad (3.10.5)$$

integrali elde edilir. İkinci terimin kısmi integrali alınıp uç noktalarından  $\eta_i(x)$  fonksiyonlarının sıfır olması şartında kullanılarak (3.10.5) integrali

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \right) \eta_i(x) dx = 0 \quad (3.10.6)$$

şeklinde yazılır.  $\eta_i(x)$  fonksiyonları keyfi ve birbirinden bağımsız olduklarından integralin sıfır olması için parantez içindeki toplamın her bir  $i$  değeri için sıfır olması gerekir. Bu da

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.10.7)$$

denklemini verir.

Sonuç olarak  $I$  integralini ekstremum yapan şartı Euler denklemi sistemine indirgenmiş olur. Denklem (3.10.7) nin en önemli uygulamalarından biri  $f$  fonksiyonunun bir klasik mekanik sisteminin Lagrange fonksiyonu olmasıdır. Bir sistemin Lagrange fonksiyonu kinetik enerji ile potansiyel enerji arasındaki fark olarak tanımlanır.

### 3.11. Birden Fazla Bağımsız Değişken Olduğu Durumda Varyasyon Hesabı

Bazen varyasyon probleminin integrantı olan  $f$  fonksiyonu bilinmeyen bir  $u$  fonksiyonuna ve üç boyutlu problemlerde olduğu gibi üç bağımsız değişkene bağlı olabilir.

Bu durumda bilinmeyen fonksiyon da bu değişkene bağlı olacağından ekstermumu bulunmak istenen fonksiyonel

$$I = \iiint f(g, g_x, g_y, g_z, x, y, z) dx dy dz \quad (3.11.1)$$

şeklinde üç katlı bir integral olur. Burada  $g_x$ ,  $x$  e göre kısmi türevi göstermektedir. Buradaki problem

$$\delta I = \left| \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.11.2)$$

şartını sağlayacak bir  $g(x, y, z)$  fonksiyonunun belirlenmesidir.  $g(x, y, z, \alpha = 0)$  aranılan fonksiyon olarak düşünölürse herhangi bir fonksiyon için

$$g(x, y, z, \alpha) = g(x, y, z, \alpha = 0) + \alpha \eta(x, y, z) \quad (3.11.3)$$

yazılabilir. Buradaki sapma fonksiyonu olan  $\eta(x, y, z)$  türevlenebilir olmalıdır. Denklem (3.11.3) ün  $\alpha$  ya göre türevi alınıp  $\alpha = 0$  yazılır ve  $\frac{\partial f}{\partial y_x} \eta_x$  gibi terimleri kısmi integrale tabi tutulup  $\eta$  fonksiyonunun sınırlarda sıfır olduğu düşünölürse  $I$  nın varyasyonunun sıfır olması şartı

$$\delta I = \iiint \left( \frac{\partial f}{\partial g} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial g_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial g_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial g_z} \right) \eta(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (3.11.4)$$

şeklinde bulunur.  $\eta(x, y, z)$  varyasyonu keyfi olduğundan parantez içindeki terim sıfır olmalıdır. Bu da üç bağımsız değişken için Euler denklemini

$$\frac{\partial f}{\partial g} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial g_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial g_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial g_z} = 0 \quad (3.11.5)$$

verir.

## 4. VARYASYON HESABININ MİNİMAL YÜZEYLERE UYGULANMASI

### 4.1. Minimal Yüzeyler

Minimal yüzeyin tanımı; minimize yüzey alanına sahip bir yüzeydir. Bu tanım varyasyon hesabının bir problemine dönüşür. Bir minimal yüzey

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = g(x, y)\}$$

şeklindeki bir yüzeydir. Bu yüzey  $z = g(x, y)$  yüzeyleri arasında ki

$$S[g] = \iint F(x, y, g, g_x, g_y) dx dy = \iint \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy \quad (4.1)$$

yüzey alanı fonksiyoneli minimize eder. Burada  $g_x$  alt indis notasyonu  $g$  nin  $x$  e göre kısmi türevini belirtir. Buna bağlı Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial g_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial g_y} = 0$$

dir. Burada  $F$ , açıkça  $g$  ye bağlı değildir. Bu yüzden yukarıdaki denklem

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial g_x} + \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial g_y} = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde basitleşir. Sonra kısmi türevleri hesaplayarak, (4.2) denklemi basitleştirilerek,

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{g_x}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \right] + \frac{d}{dy} \left[ \frac{g_y}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \right] = 0$$

$$\frac{g_{xx} \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} - g_x \left[ \frac{g_x g_{xx} + g_y g_{xy}}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \right] + g_{yy} \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} - g_y \left[ \frac{g_x g_{xy} + g_y g_{yy}}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \right]}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} = 0$$

$$\frac{g_{xx}(1 + g_x^2 + g_y^2) - g_x^2 g_{xx} - g_x g_y g_{xy} + g_{yy}(1 + g_x^2 + g_y^2) - g_x g_y g_{xy} - g_y^2 g_{yy}}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} = 0$$

$$(1 + g_y^2) g_{xx} - 2 g_x g_y g_{xy} + (1 + g_x^2) g_{yy} = 0$$

olur. Bu denklem  $g$  grafiği için minimal yüzey denklemdir.

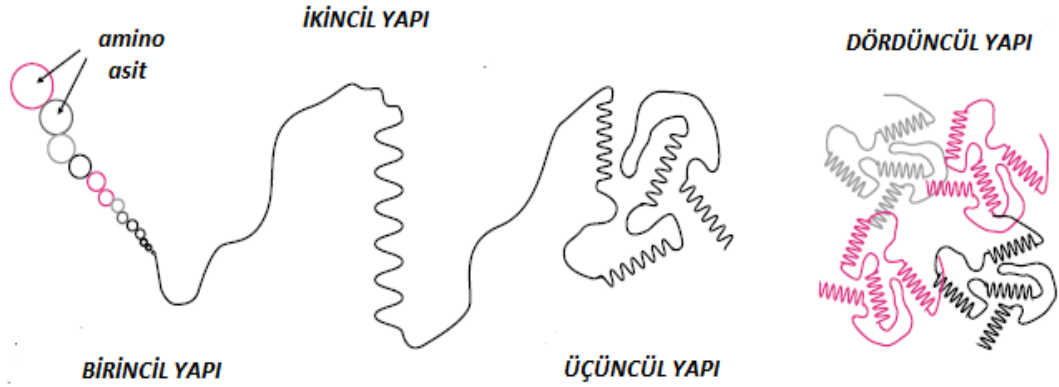
### 4.2. Proteinlerde Regüler İkincil Yapı

Yukarıdaki denklem protein yapı modeli için minimal yüzey uygulamalarının oldukça fazla olduğunu gösterir.

#### 4.2.1. Temel Protein Yapısına Bir Giriş

Bir amino asit zinciri ; aynı zamanda bir polipeptit zinciri olarak adlandırılan bir protein ve kendi yapısıyla ilgili bazı biyolojik fonksiyonlara sahiptir.

Protein yapısı dört seviye ile tanımlanabilir; birincil, ikincil, üçüncül ve dördüncül yapı. Birincil yapı aminoasit sırasını tanımlarken, ikincil yapı şekillendirilmiş zincirin küçük parçalarının yollarını tanımlar.



Şekil 4.1. Protein yapısı

Üçüncül yapı, tam bir protein zincirinin kendi boşluğuna nasıl yerleştiğini tanımlar. Dördüncül yapı, çok katlı polipeptit zincirlerinin konfigürasyonunu tanımlar.

Bir protein matematiksel olarak, diferansiyellenebilir bir uzay eğrisi olarak düşünülecektir. Bu diferansiyellenebilir bir uzay eğrisi  $\alpha$  karbonlarına bağlıdır. Minimal yüzeylerin uygulamaları açısından, ikincil regüler yapıların en yaygın olanlarından biri olan  $\alpha$ -helislerle ilgilenilir.  $\alpha$  helisler matematiksel olarak regüler bir helis ile modellenebilir. Helisler bir helisoid yüzeyinde yatan ve bir minimal yüzey olan özel eğrilerdir.

#### 4.2.2. Helisoid

Helisoidi anlamak için,

$$\vec{x}(u, v) = (-b \sinh v \sin u, b \sinh v \cos u, bu) \quad -\infty < u, v < \infty$$

şeklinde bir parametrizasyon düşünülebilir. Burada  $b \in \mathbb{R}$  keyfi bir sabittir. Helisoidin bu parametrizasyonu ile ilişkili olan teğet vektörler,

$$\vec{x}_u = (-b \sinh v \cos u, -b \sinh v \sin u, b)$$



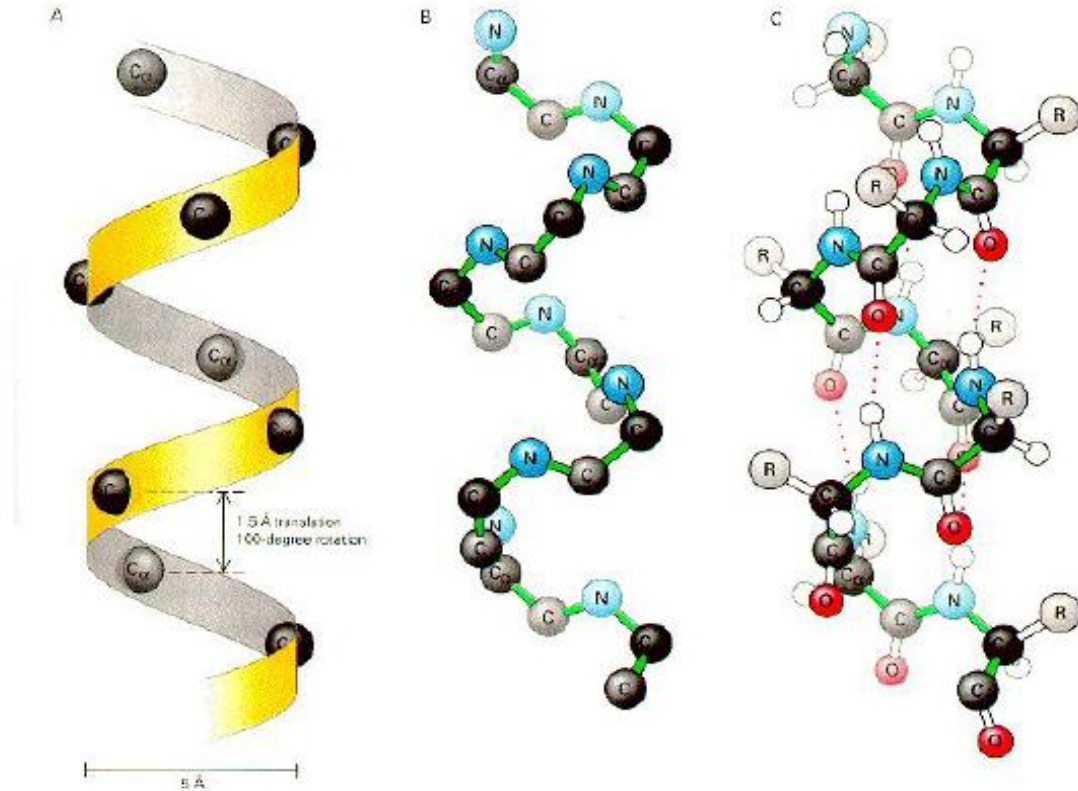
$$\vec{x}_v = (-bcoshvsinu, bcoshvcosu, 0)$$

şeklindedir.

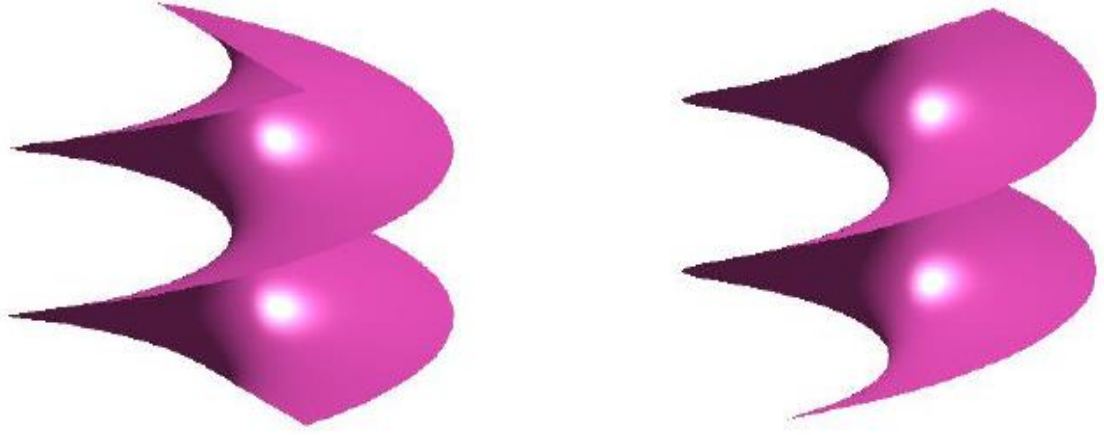
#### Uyarı 4.2.1.

Helisoid tek minimal regle yüzeydir yani helisoid düz bir doğru ailesi tarafından üretilir. Yukarıdaki parametrizasyonda üreticiler  $u = c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) dir. Burada  $c_i$  ler sabittir.

Helisoid grafikleri için uygun yüzeylerin grafikleri kısıtlandığından dolayı yukarıdaki bir minimal yüzeyin tanımı helisoid için uygun değildir. Bu tanımı anlayabilmek için geometride yüzeyler ile ilgili verilen bazı niceliklerin hesaplanması gerekir. Bu nicelikler birinci temel formun katsayılarıdır.



Şekil 4.2.  $\alpha$ -helis



Şekil 4.3. Helisoid

#### Tanım 4.2.1 (1.Temel Form)

$$\vec{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \quad R^3 \text{ de}$$

$$\vec{x}_u = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right), \quad \vec{x}_v = \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right)$$

teğet vektörleri ile parametrelendirilmiş bir regüler yüzey olsun.  $\vec{x}(u, v)$  nin 1.temel formu

$$I(du, dv) = I(du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

ile tanımlı bir kuadratik formdur. Burada,

$$E = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle, \quad F = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle, \quad G = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle$$

1.temel formun katsayılarıdır. Burada  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ,  $\vec{a}$  ile  $\vec{b}$  nin Öklid iç çarpımıdır.

#### 4.2.2.1. 1.Temel Formun İlginç Bir Özelliği

$\vec{x}$  üzerinde ki  $\vec{x}(R)$  bölgesinin yüzey alanı

$$A = \iint |I|^{1/2} du dv$$

ile verilir.

#### Uyarı 4.3.2.

Yukarıdaki özellik varyasyonlar hesabı yardımıyla bir yüzey alanı fonksiyoneli kazandırır. Fakat yukarıdaki fonksiyoneli hesaplamak tam anlamıyla mümkün değildir. Bunun yerine helisoid için seçilen parametrizasyona uygun daha spesifik bir tanım seçilecektir.

#### 4.2.2.2. Bir Minimal Yüzeyin Alternatif Tanımı

Bir minimal yüzey,  $H$  ortalama eğriliğinin her yerde sıfır olduğu bir yüzeydir. Minimal yüzeyin karakterizasyonu, fiziksel olarak uzayda verilen kapalı bir eğri ile sınırlı bir minimal yüzey alanıdır.

#### Teorem 4.2.1.

Yukarıda verilen izotermik olarak parametrelendirilmiş bir  $\vec{x}(u, v)$  regüler yüzeyi yani  $E = G, F = 0$  ile verilen bir parametrizasyon için  $x$  bir minimal yüzeydir, gerek ve yeter şart  $\vec{x}(u, v)$  yüzeyinin koordinat fonksiyonları harmoniktir. Yani ,

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = \vec{0}$$

dır. Helisoid parametrizasyonuna bağlı 1.temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} E = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle &= b^2 \sinh^2 v \cos^2 u + b^2 \sinh^2 v \sin^2 u + b^2 \\ &= b^2 \sinh^2 v + b^2 \\ &= b^2 \cosh^2 v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle &= b^2 \sinh v \cosh v \sin u \cos u - b^2 \sinh v \cosh v \sin u \cos u \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle &= b^2 \cosh^2 v \sin^2 u + b^2 \cosh^2 v \cos^2 u \\ &= b^2 \cosh^2 v \end{aligned}$$

şeklindedir.  $E = G$  ve  $F = 0$  dır.

Şimdi izotermik olarak parametrelendirilmiş helisoidin harmonik koordinat fonksiyonlara sahip olduğunu gösterelim. Helisoidin koordinat fonksiyonları

$$\vec{x}_{uu} = (b \sinh v \sin u, -b \sinh v \cos u, 0)$$

$$\vec{x}_{vv} = (-b \sinh v \sin u, b \sinh v \cos u, 0)$$

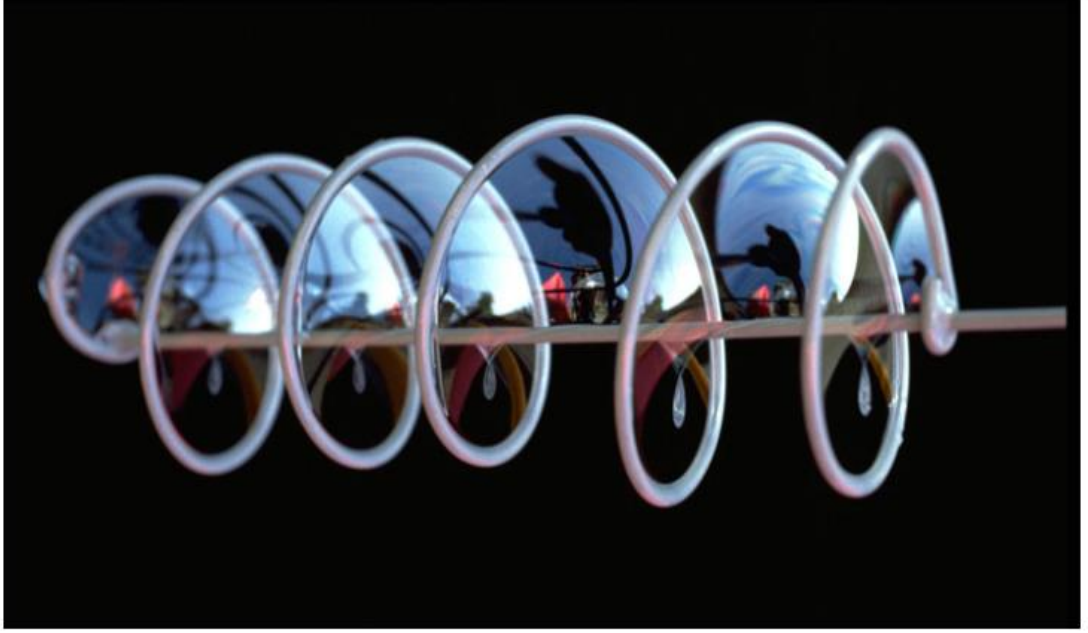
şeklindedir. Buradan

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = \vec{0}$$

olduğu görülür. Bu yüzden helisoidin bir minimal yüzey olduğu elde edilir.

#### 4.2.3. Minimal Yüzeyler ve Protein Yapısı

$\alpha$ -helis ve yaygın düzenli bir ikincil yapının minimal yüzeyler olarak modellenebilmesi niçin ilginçtir? Bir tel örgü sabun çözeltilisine daldırıldığında helisoid içeren birçok minimal yüzey meydana gelir.



**Şekil 4.4.** Bir sabun köpüğü sarmalı

Yüzey bölgesi minimize edildiğinden dolayı, fiziksel olarak bu olay aynı zamanda potansiyel enerjiye bağlı yüzey gerilimini minimize eder. Sabun köpüğü genellikle potansiyel enerjiyi minimize eder. Bu durum istisnai değildir.

Protein açısından, yapı, polipeptid zincirin aminoasitleri arasındaki non-polar kuvvetler tarafından belirlenir. Düzenli ikincil yapının bir minimal yüzey üzerinde yattığını düşündürecek iki teori vardır.

Birinci teori polipeptit zincirler üzerindeki non-polar grupların kendilerini yapılandırma eğiliminde olmalarıyla ilgilidir. Bu şekilde polar çözücü ile non – polar gruplar arasındaki ara yüzey alanı küçülmüş olur. Bu polar çözücü çoğu kez suya karşılık gelir. Non-polar ve polar guruplar birbirini iter. Dolayısıyla yüzey alanı bölgesinin bir minimizasyonu gerçekleşmiş olur.

Diğer teori, minimalitenin düzenli yapılardaki baskıyı azaltmaya çalışan moleküler kuvvetlerden dolayı olduğudur.

Her iki durumda ,  $\alpha$  – helislerin helisoid üzerinde bulunduğu düşüncesini uyandırır. Üstelik protein yapısının tamamının, düzensiz bobin ve sıralarla bağlantılı minimal yüzeylerin bir kolleksiyonu üzerinde bulunduğu düşünülebilir.

Bu düzensiz bobinlerin, minimal yüzeylerin en iyi enerji konfigürasyonu için gerekli esnekliği sağladığı düşünülebilir.

#### 4.2.4. Helisler Üzerinde Geodezikler

Helislerin bir parametrizasyonu

$$\vec{c}(u) = (-bsinu, bcosu, u) \quad -\infty < u < \infty$$

olsun. Bu helislerin, aslında geodezik olduğunu yada helisoidler üzerinde minimize eğrilerin uzunluğu olduğunu ortaya çıkarır. Louie ve Samarji ye göre helisoidlerin geodezikleri

$$\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \quad \frac{d^2v}{ds^2} + \tanh\left(\frac{dv}{ds} - \frac{du}{ds}\right) = 0$$

diferansiyel denklemleri ile verilir ve diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$\sinh v(s) = A \sinh(u(s) + B)$$

$$u(s) = Cs + D$$

dir. Burada  $A, B, C$  ve  $D$  integrasyon sabitleridir. Fakat yeterince küçük  $|u|$  ve  $|v|$  için geodezik

$$v(s) = A(u(s) + B)$$

şeklindedir.

Bu yüzden helisoid üzerinde geodezikler,  $uv$ - düzlemindeki düz doğru parçalarının görüntüleridir. Bu lineer fonksiyonu dönüştürerek ve  $u = v$  alarak helisoid parametrizasyonunun

$$\vec{x}(u, v) = (-bsinhv \sin u, bsinhv \cos u, bu)$$

şeklinde basitleştğini görürüz. Yeterince küçük  $|u|$  ve  $|v|$  ile bu parametrizasyon

$$\vec{x}(u) = (-b \sin u, b \cos u, bu)$$

şeklini alır. Bu bir helisdir. Bu sonuç Öklidyen uzayda geodeziklerin lineer fonksiyon olduğu anlamına gelir. Helisler helisoid üzerindeki geodeziklerdir. Ve helisler helisoid

üzerinde yatan keyfi eğriler değildirler. Helisler protein yapısındaki enerji minimizasyonu ile ilgili olan minimize uzunluklardır.

### 4.3. Euler - Lagrange Denklemleri ve Helislerle İlgili Enerji Fonksiyonları

#### 4.3.1. Başlangıç

Görüldüğü gibi bir bilinen fonksiyon ve bilinmeyen çözümler içeren varyasyon problemleri Euler -Lagrange denklemlerinden elde edildi. Fakat ikincil düzenli protein yapıları düşünüldüğünde, helis formundaki minimize çözümler ve bilinmeyen enerji fonksiyonelinin varlığı bilinir. Bu enerji fonksiyoneli sistemin toplam serbest enerjisini tanımlayacaktır. Bu serbest enerji, çözelti ile protein etkileşiminin yanı sıra protein aminoasitleri arasında intra ve inter moleküler kuvvetleri içerebilir.

Burada bir bilinmeyen enerji fonksiyonelinin daha iyi anlamak için, protein segmentlerini temsil eden bir bilinmeyen enerji fonksiyoneli ile ilgili Euler-Lagrange denklemleri araştırılacaktır. Bu enerji fonksiyonelinin sadece uzay eğrisinin eğriliğine bağlı olduğu kabul edilecektir. Bu varsayım Feoli ye göre uygun bir varsayımdır. Bir protein zincirindeki torsiyona bağlı sonsuz küçük burulma fazla efor gerektirmez. Dolayısıyla bu sadece küçük enerji farklılıklarına sebep olur.

$\gamma, [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir eğri olsun. Yani sürekli ve minimize enerji fonksiyonu

$$E(\gamma) = \int_a^b F(K) dL = \int_a^b F(K(s)) |\gamma'(s)| ds$$

dır. Burada  $K(s)$ ,  $\gamma$  nın eğriliği yay parametresi ile parametrelendirilmiştir ve

$$K(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'(s)|^3}$$

ile verilir.

Burada dikkat edelim ki ilk notasyon  $s$  ye göre diferansiyel belirtir. Şimdi ;

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) + \varepsilon_1 \psi_1(s) \vec{T}(s) + \varepsilon_2 \psi_2(s) \vec{N}(s) + \varepsilon_3 \psi_3(s) \vec{B}(s)$$

teğetsel  $\vec{T}(s)$ , normal  $\vec{N}(s)$  ve binormal  $\vec{B}(s)$  yönündeki 3 bileşenli perturbasyon ile verilen minimize eğrinin toplam perturbasyonu olsun. Burada  $\vec{T}(s)$ ,  $\vec{N}(s)$  ve  $\vec{B}(s)$  in hepsi birim vektördür ve Frenet çatısı olarak bilinir. Ayrıca  $\varepsilon_i$  ler küçük parametrelerdir ve  $\psi_i(s)$  ler düzgün keyfi fonksiyonlardır öyle ki

$$\psi_i(a) = \psi_i(b) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Bu durumda sırayla teğet, normal ve binormal yönündeki varyasyonlara karşılık gelen

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0} = 0$$

varyasyonu düşünülebilir.

Bu metot Euler Lagrange denklemlerinin üçlü bir sistemini kazandırmalıdır.

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_i} = 0$$

durumu ihmal edilecektir. Çünkü bu varyasyon basitçe, Hill tarafından not alınmış  $\tilde{\gamma}$  eğrisinin bir yerden parametrelendirilmesine karşılık gelir. Şimdi ilk olarak

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0} = 0 \quad i = 2,3$$

genel durumuna bakılarak,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_2=0} = 0 \quad ve \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_3} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_3=0} = 0$$

varyasyonları düşünülebilir.

$\varepsilon_i = 0$  olduğunda  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  olarak sadeleştirilebilir ve basitçe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_i=0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \int_a^b F(K) dL|_{\varepsilon_i=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \int_a^b F(K) |\gamma'(s)| ds|_{\varepsilon_i=0} \\ &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i} |\tilde{\gamma}'| ds|_{\varepsilon_i=0} + \int_a^b F \frac{\partial |\gamma'|}{\partial \varepsilon_i} ds|_{\varepsilon_i=0} \end{aligned}$$

yazılabilir, fakat  $|\tilde{\gamma}'(s)|_{\varepsilon_i=0} = |\gamma| = 1$  olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_i=0} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i} ds|_{\varepsilon_i=0} + \int_a^b F \frac{\partial |\gamma'|}{\partial \varepsilon_i} ds|_{\varepsilon_i=0} \quad (4.4)$$

olarak sadeleşir. (4.4) denklemini sadeleştirmek için devam etmeden önce birkaç niteliği yalnız bırakıp sadeleştirilebilir.

#### 4.3.1.1. $\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i}$ İntegrali

$$K(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'(s)|^3} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i} &= \frac{\frac{\partial |\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{\partial \varepsilon_i} |\tilde{\gamma}'|^3 - 3 |\tilde{\gamma}'|^2 \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i} |\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{|\tilde{\gamma}'|^6} \\ &= \frac{1}{|\tilde{\gamma}'|^3} \frac{\partial |\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{\partial \varepsilon_i} - 3 \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i} \frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{|\tilde{\gamma}'|^4} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} = \frac{1}{|\tilde{\gamma}'|^3} \frac{\partial |\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} - 3 \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i} \frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{|\tilde{\gamma}'|^4} \Big|_{\varepsilon_i=0} \quad (4.5)$$

elde edilir. Fakat

$$|\tilde{\gamma}'|_{\varepsilon_i=0} = |\gamma| = 1$$

olduğundan (4.5) denklemi

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} = \frac{\partial |\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} - 3 |\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''| \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} \quad (4.6)$$

olarak sadeleşir. Fakat Hill tarafından

$$|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2 \Big|_{\varepsilon_i=0} = K^2$$

olarak hesaplanmıştır. Daha sonra (4.6) denklemi

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} = \frac{\partial |\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} - 3K \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0}$$

şeklinde sadeleşir ve

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=0} = \psi_2'' + (K^2 - \tau^2) \psi_2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_3} \Big|_{\varepsilon_3=0} = 2\tau \psi_3' - \tau' \psi_3 \quad (4.7)$$

elde edilir ki bu Hill in sonucu ile aynıdır.

#### 4.3.1.2. $\frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i}$ İntegrali

$\tilde{\gamma} = \gamma + \varepsilon_1 \psi_1 \vec{T} + \varepsilon_2 \psi_2 \vec{N} + \varepsilon_3 \psi_3 \vec{B}$  perturbed eğrisi ile başlayalım.

$$\vec{T}' = K \vec{N}$$

$$\vec{N}' = -K \vec{T} + \tau \vec{B}$$

$$\vec{B}' = -\tau \vec{N}$$

Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\tilde{\gamma}' = \gamma' + \varepsilon_1 \psi_1' \vec{T} + \varepsilon_1 \psi_1 (K \vec{N}) + \varepsilon_2 \psi_2' \vec{N} + \varepsilon_2 \psi_2 (-K \vec{T} + \tau \vec{B}) + \varepsilon_3 \psi_3' \vec{B} + \psi_3 (-\tau \vec{N})$$

dir. Burada  $T = \gamma'$  olduğundan,

$$\tilde{\gamma}' = (1 + \varepsilon_1 \psi_1' - K \varepsilon_2 \psi_2) \vec{T} + (\varepsilon_1 \psi_1 K + \varepsilon_2 \psi_2' - \varepsilon_3 \psi_3 \tau) \vec{N} + (\varepsilon_2 \psi_2 \tau + \varepsilon_3 \psi_3') \vec{B}$$

elde edilir. Burada  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  birim vektörlerdir.

$$|\tilde{\gamma}'|^2 = [1 + \varepsilon_1 \psi_1' - K \varepsilon_2 \psi_2]^2 + [\varepsilon_1 \psi_1 K + \varepsilon_2 \psi_2' - \varepsilon_3 \psi_3 \tau]^2 + [\varepsilon_2 \psi_2 \tau + \varepsilon_3 \psi_3']^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_i=0} &= 2[1 + \varepsilon_1 \psi_1' - K \varepsilon_2 \psi_2](-K \psi_2) + 2[\varepsilon_1 \psi_1 K + \varepsilon_2 \psi_2' - \varepsilon_3 \psi_3 \tau] \psi_2' + \\ &2[\varepsilon_2 \psi_2 \tau + \varepsilon_3 \psi_3'] \psi_2 \tau \end{aligned}$$



$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  olduğundan,

$$\frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_i=0} = -2K\psi_2$$

$$\frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_3} \Big|_{\varepsilon_i=0} = 2[ \varepsilon_1 \psi_1 K + \varepsilon_2 \psi_2' - \varepsilon_3 \psi_3 \tau ](-\tau \psi_3) + 2[ \varepsilon_2 \psi_2 \tau + \varepsilon_3 \psi_3' ] \psi_3'$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  olduğundan,

$$\frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_3} \Big|_{\varepsilon_i=0} = 0$$

olur.

$$\frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_i=0} = -2K\psi_2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_3} \Big|_{\varepsilon_i=0} = 0 \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i} &= \frac{1}{2|\tilde{\gamma}'|} \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_i} \\ \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} &= \frac{1}{2} \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|^2}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i=0} \end{aligned}$$

dir. (4.8) denklemi

$$\frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_i=0} = -K\psi_2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_3} \Big|_{\varepsilon_i=0} = 0 \quad (4.9)$$

şeklinde indirgenir.

#### 4.3.2. Normal Yöndeki Varyasyonu

Yukarıdaki hesaplamalar ile (4.4) denklemine geri dönülürse ve ilk olarak

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} E(\tilde{\gamma}) \Big|_{\varepsilon_i=0} = 0, \quad \int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2} ds \Big|_{\varepsilon_i=0} + \int_a^b F \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_2} ds \Big|_{\varepsilon_i=0} = 0 \quad (4.10)$$

ile verilen normal yöndeki varyasyonu düşünelim.

(4.7) ve (4.9) denklemleri (4.10) denkleminde yerine yazılırsa, yani

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=0} = \psi_2'' + (K^2 - \tau^2)\psi_2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_3} \Big|_{\varepsilon_3=0} = 2\tau\psi_3' - \tau'\psi_3$$

ve

$$\frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_i=0} = -K\psi_2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_3} \Big|_{\varepsilon_i=0} = 0$$

denklemlerini (4.10) de yerine yazarsak,

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} [ \psi_2'' + (K^2 - \tau^2)\psi_2 ] ds - \int_a^b F K \psi_2 ds = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \psi_2'' ds + \int_a^b [ (K^2 - \tau^2) \frac{\partial F}{\partial K} - FK ] \psi_2 ds = 0$$

elde edilir. Şimdi ilk terimi integre edilebilir.

$$u = \frac{\partial F}{\partial K} \quad \text{ve} \quad dv = \psi_2'' ds$$

$$du = \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K} \quad \text{ve} \quad v = \psi_2'$$

değişken değiştirmesi yapıp kısmi integrasyon alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial K} \psi_2'|_a^b - \int_a^b \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K} \psi_2' ds + \int_a^b [ (K^2 - \tau^2) \frac{\partial F}{\partial K} - FK ] \psi_2 ds = 0$$

elde edilir. (4.3) sınır şartından

$$\frac{\partial F}{\partial K} \psi_2'|_a^b = 0$$

olacağından,

$$- \int_a^b \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K} \psi_2' ds + \int_a^b [ (K^2 - \tau^2) \frac{\partial F}{\partial K} - FK ] \psi_2 ds = 0$$

bulunur. İlk terimin tekrar integrali alınırsa,

$$u = \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K} \quad \text{ve} \quad dv = \psi_2' ds$$

$$du = \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial F}{\partial K} \quad \text{ve} \quad v = \psi_2$$

değişken değiştirmesi yapıp kısmi integrasyon alınırsa,

$$- \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K} \psi_2|_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial F}{\partial K} \psi_2 ds + \int_a^b [ (K^2 - \tau^2) \frac{\partial F}{\partial K} - FK ] \psi_2 ds = 0$$

elde edilir. İlk terim (4.3) sınır şartından dolayı sıfıra eşittir. Böylece

$$\int_a^b \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial F}{\partial K} \psi_2 ds + \int_a^b [ (K^2 - \tau^2) \frac{\partial F}{\partial K} - FK ] \psi_2 ds = 0$$

$$\int_a^b [ \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial F}{\partial K} + (K^2 - \tau^2) \frac{\partial F}{\partial K} - FK ] \psi_2 ds = 0$$

elde edilir. Şimdi varyasyon hesabının temel teoremine başvurulabilir ve

$$\frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial F}{\partial K} + (K^2 - \tau^2) \frac{\partial F}{\partial K} - FK = 0 \quad (4.11)$$

elde edilir. Bu normal yöndeki toplam varyasyon bileşenlerine bağlı Euler-Lagrange denklemidir.

#### 4.3.3. Binormal Yöndeki Varyasyonu

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_3} E(\tilde{\gamma})|_{\varepsilon_i=0} = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_3} ds|_{\varepsilon_i=0} + \int_a^b F \frac{\partial |\tilde{\gamma}'|}{\partial \varepsilon_3} ds|_{\varepsilon_i=0} \quad (4.12)$$

ile verilen binormal yöndeki varyasyonu düşünelim.

(4.7) ve (4.9) u (4.12) de yerine yazarsak,

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} [ -2\tau \psi_3' - \tau' \psi_3 ] ds = 0$$

$$2 \int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \tau \psi_3' ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \tau' \psi_3 ds = 0 \quad (4.13)$$

elde edilir. İlk terimin integrali alınır

$$u = \frac{\partial F}{\partial K}, \quad du = \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K}, \quad dv = \tau \psi_3' ds, \quad v = \tau \psi_3$$

değişken değiştirmesi yapıp kısmi integrasyon alınır (4.13) denklemi

$$2 \frac{\partial F}{\partial K} \tau \psi_3 \Big|_a^b - 2 \int_a^b \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial K} \tau \right) \psi_3 ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \tau' \psi_3 ds = 0$$

şeklinde yazılır. Buradan (4.3) sınır şartından

$$2 \frac{\partial F}{\partial K} \tau \psi_3 \Big|_a^b = 0$$

elde edilir. Böylece

$$-2 \int_a^b \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial K} \tau \right) \psi_3 ds + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial K} \tau' \psi_3 ds = 0$$

olur. Burada

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial K} \tau' - 2 \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial K} \tau \right) \right] \psi_3 ds = 0$$

elde edilir. Böylece varyasyon hesabının temel teoreminden dolayı

$$\frac{\partial F}{\partial K} \tau' - 2 \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial K} \tau \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} \tau' - 2 \left[ \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K} \tau + \frac{\partial F}{\partial K} \tau' \right] = 0$$

$$2 \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial K} \tau + \frac{\partial F}{\partial K} \tau' = 0 \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu da binormal yöndeki varyasyon bileşenlerine bağlı Euler – Lagrange denklemdir.

#### 4.4. Sonuç

Bu bölümde en basit Euler Lagrange (3.9.13) denklemi olarak adlandırılan varyasyon hesabının temel sonuçları incelendi ve minimal yüzeylerle olan bağlantısı araştırıldı. Minimal yüzeyler düşünüldüğünde,  $\alpha$  – helis ile helisoid arasındaki bağlantı, en yaygın protein yapısının birimleri görüldü ve protein yapısının potansiyel serbest enerji  $E[\gamma] = \int F(K) dL$  fonksiyonlarına bağlı (4.11) ve (4.14) Euler Lagrange denklemlerinin elde edilmesi için bu bağlantı genişletildi.

$F(K)$  diferansiyel çözümlerinin türetilmesi için bu iki Euler – Lagrange denklemleri kullanılabilir. Daha detaylı incelemek için Mccoy un makalesine bakılabilir. Doğal olarak,  $E[\gamma]$  enerji fonksiyonunun minimize çözümleri olarak helis kabul edilen  $F(K)$  ya kısıtlanabilir. Bu daha ilginçtir ki  $F(K)$ ,  $E[\gamma]$  nın tek minimize çözümleri olarak

helis kabul edilir. Bu çözümler farklı bir açıdan protein yapısına ışık tutar ki bunlar araştırmanın en geçerli yoludur [ 11, 12, 14, 16 ].

## KAYNAKLAR

- [ 1 ] **Royden,H.L**1968. Real Analysis, Collier-Macmillan, Canada
- [ 2 ] **Gökhan, G.**1978. Varyasyonlar Hesabı, İstanbul
- [ 3 ] **Hacısalihoglu, H.H.** 1993. Diferansiyel Geometri. Fen Fakültesi, Ankara
- [ 4 ] **Demirok, T.** Matematik Araştırma Projesi
- [ 5 ] **Balcı, M.** 1999. Matematik Analiz 1,Ankara
- [ 6 ] **Önem, C.** 1998. Mühendislikte ve Fizikte Matematik Metotlar, İstanbul
- [ 7 ] **Bayın, S.Ş.**2000. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler,
- [ 8 ] **Izumiya, S. and Takeuchi, N.** 2002. Generic Properties of helices and Bertrand Curves Journal of Geometry, 74;97-109 .
- [ 9 ] **Irena Papst** , A Biological Application of the Calculus of Variations, Mc Master University
- [ 10 ] **M.Ashbaugh and R.Banguri**, The problem of queen dido: Overview of the subjectof isoperimetry.
- [ 11 ] **M.Barros and A.Ferrandes**, A conformal variational approach for helices in nature, Journal of Mathematical Physics **50** (2009).
- [ 12 ] **A.Feoli V.V.Nesterenko, and G.Scarpetta**,Functionals linear in curvature and statistics of helical proteins, Nuclear Physics B **705** (2005), 577-592.
- [ 13 ] **M.Giaquinta and S.Hildebrandt**,Calculus of variations, Springer, 1996.
- [ 14 ] **J.Hill,J. McCoy, and N. Thamwattana**, Energy density functions for protein structures, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **61** (2008).
- [ 15 ] **A.H.Louie and R.L.Somorjai** ,Differantial geometry of proteins: a structural and dynamical representation of patterns, Journal of Theoretical Biology (1982).
- [ 16 ] **J.McCoy**, Helices for mathematical modelling of proteins,nucleic acids and polymers, Journal of Mathemetical Analysis and Applications **347** (2008),255-2

## ÖZGEÇMİŞ

1990 Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ da tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2012 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.