

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ
KÖTHE – TOEPLITZ DUALLERİ

Yüksek Lisans Tezi
Hediye YAŞAR

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz Ve Fonksiyonlar Teorisi
Danışman: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

NİSAN-2016

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ
KÖTHE – TOEPLITZ DUALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hediye YAŞAR

(131121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 19 .04. 2016

Tezin Savunulduğu Tarih: 15. 04. 2016

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

Diğer Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN

NİSAN-2016

ÖNSÖZ

Kızmaz [10] “On Certain Sequence Spaces” adlı çalışmasında $\Delta^m l_\infty$, $\Delta^m c$ ve $\Delta^m c_0$ dizi uzaylarını tanımlayarak bu uzayların bazı özelliklerini inceledi. Bu dizi uzayları Et ve Çolak (1992) tarafından pozitif bir m tam sayısı için genelleştirilerek $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları elde edilmiş ve bu uzaylar arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

$p = (p_k)$ pozitif reel sayıların keyfî bir dizisi olmak üzere $l_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ dizi uzayları Maddox [14] tarafından tanımlanmıştır.

Daha sonra Ahmad ve Mursaleen [1], $\Delta^m l_\infty(p)$, $\Delta^m c(p)$ ve $\Delta^m c_0(p)$ dizi uzaylarını tanımlayıp bazı özelliklerinden bahsetmişlerdir.

Son olarak Et ve Başarır [4], $\Delta^m l_\infty(p)$, $\Delta^m c(p)$ ve $\Delta^m c_0(p)$ dizi uzaylarını tanımlayıp, $\Delta^m l_\infty(p)$ dizi uzayının α -dualini vermişlerdir.

Bu çalışmada biz; Bektaş [3] tarafından incelenen $\Delta^m c(p)$ ve $\Delta^m c_0(p)$ dizi uzaylarının α -dualine ve $\Delta^m l_\infty(p)$ dizi uzayının β - ve γ - dualine yer verdik.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ'a ve bu çalışmanın oluşumunda gerekli bütün imkanlarını sağlayan ve her konuda desteğini gördüğüm sayın Sinan ERCAN'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hediye YAŞAR

ELAZIĞ-2016



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÖZETİ	V
SUMMARY	VII
SEMBOLLER.....	VII
I. BÖLÜM	1
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
II. BÖLÜM.....	5
BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI.....	5
III. BÖLÜM	10
BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ KÖTHER-TOEPLITZ DUALLERİ	10
KAYNAKLAR.....	17
ÖZGEÇMİŞ	19

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde ; $\Delta^l_\infty(p)$, $\Delta^c(p)$ ve $\Delta^{co}(p)$ fark dizi uzayları tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde ; $\Delta^m l_\infty(p)$ ve $\Delta^m c(p)$ uzaylarının Köthe- Toeplitz dualleri ve $\Delta^m co(p)$ ve $\Delta^m c(p)$ uzaylarının mutlak Köthe – Toeplitz dualleri tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fark dizi uzayları, α -dual, β -dual, γ -dual.



SUMMARY

Köthe-Teoplitz Duals of Difference Sequence Spaces

This study includes three parts. In the first part; basic definitions and theorems are given. In the second part; $\Delta^l_\infty(p)$, $\Delta^l_c(p)$ and $\Delta^l_{c_0}(p)$ difference sequence spaces are defined. In the third part; Köthe- Toeplitz duals of $\Delta^m_\infty(p)$ and $\Delta^m_c(p)$ are defined and also given Köthe-Toeplitz duals of $\Delta^m_{c_0}(p)$ and $\Delta^m_c(p)$ are given.

Keyword: Difference Sequence Spaces, α -dual, β -dual, γ -dual.



SEMBOLLER

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi,
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi,
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi,
w	: Kompleks terimli bütün diziler uzayı,
l_∞	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı,
c	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı,
c_0	: Kompleks terimli sıfır dizileri uzayı,
X^α	: X' in α -dualı ,
X^β	: X' in β - dualı,
X^γ	: X' in γ - dualı,
$\overline{X}$	: X cümlesinin kapanışı.

I. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1: [15] $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun. $+$: $X \times X \rightarrow X$ ve $\cdot$: $K \times X \rightarrow X$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyorsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzay denir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$L1) x+y = y+x$$

$$L2) (x+y) + z = x + (y+z)$$

$$L3) \text{ Her } x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$L4) \text{ Her bir } x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in X \text{ vardır.}$$

$$L5) 1x = x$$

$$L6) \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$L7) (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$L8) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

dir.

Tanım 1.2:[11] X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|$: $X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ ve her α skaleri için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N3) \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$N4) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Tanım 1.3:[18] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $x = (x_n)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en az $N=N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq N$ iken $\|x_n - a\| < \varepsilon$ kalıyorsa $x = (x_n)$ dizisine norma göre $a \in X$ 'e yakınsaktır denir.

Tanım 1.4:[15] $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve $x = (x_n)$ de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $m, n \geq N$ için $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$) olacak şekilde bir N mevcut ise (x_n) dizisine $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.5:[11] $X \neq \emptyset$ bir cümle ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Eğer d aşağıdaki şartları sağlıyorsa d 'ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. Her $x, y, z \in X$ için

$$M 1) d(x, y) \geq 0$$

$$M 2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M 3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M 4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

dir.

Tanım 1.6:[15] w bütün $x = (x_k)$ kompleks dizilerinin cümlesi olsun. w 'nın herhangi bir alt uzayına dizi uzayı denir.

Teorem 1.7:[15] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve (x_n) , X 'de yakınsak herhangi bir dizi olsun. Bu taktirde (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Tanım 1.8:[15] (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X uzayındaki her Cauchy dizisi X 'deki bir noktaya yakınsıyorsa, X 'e tam metrik uzay denir.

Tanım 1.9:[15] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

Tanım 1.10:[11] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $x = (x_n)$ bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq M$ olacak şekilde en az bir $M \in \mathbb{R}^+$ varsa $x = (x_n)$ dizisine sınırlı dizi denir.

Teorem 1.11:[11] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y , X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Y 'nin X lineer uzayının bir alt uzayı olması için gerek ve yeter şart her $y_1, y_2 \in Y$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ için $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y$ olmasıdır.

Teorem 1.12:[11] (X, d) bir metrik uzay $M \subset X$ ve $\overline{M}$, M 'nin kapanışını gösterebilir. $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde M 'de bir (x_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

Teorem 1.13:[11] Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y 'nin X 'de kapalı olmasıdır.

Tanım 1.14:[6] X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k: X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightarrow \tau_k(x) = x_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümleri sürekli ise X 'e bir BK- uzayı denir.

Tanım 1.15:[8] $X \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bir dizi uzayı olsun. $x = (x_k) \in X$ ve $y = (y_k) \in X$ olmak üzere $x \cdot y = (x_k \cdot y_k) \in X$ oluyorsa, yani X noktasal çarpma işlemine göre kapalı ise X 'e bir dizi cebiri denir.

Tanım 1.16:[9] $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani her $x \in X$ için $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T 'ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alır.

Tanım 1.17:[15] Eğer X ve Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ve Y uzaylarına denk uzaylar denir. Bu durumda X 'den Y 'ye bir lineer izometri vardır.

Tanım 1.18:[15] X ve Y topolojik uzaylar olsun. $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir, örten, sürekli ve f^{-1} 'de sürekli ise f 'e X 'den Y 'ye bir homeomorfizm denir.

$f: X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ise f ve f^{-1} açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olarak denk uzaylar olur.

Tanım 1.19:[7] $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ şeklinde

tanımlanan sayılara binom katsayıları denir. Eğer n ve k birer doğal sayı ise $n \leq k$ için

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!n!} \text{ ve } n > k \text{ için } \binom{k}{n} = 0 \text{ dır.}$$

Tanım 1.20:[15] $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ olmak üzere sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsayan dizi uzayları sırasıyla

$$l_{\infty} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu uzaylar $\|x\|_{\infty} = \sup_k |x_k|$ normu ile birlikte birer normlu uzaydır, hatta birer

Banach uzayıdır.

Tanım 1.21:[8] X bir dizi uzayı olsun.

$$X^\alpha = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \quad \forall x \in X \text{ için} \right\}$$

$$X^\beta = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak}, \quad \forall x \in X \text{ için} \right\}$$

$$X^\gamma = \left\{ a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| < \infty, \quad \forall x \in X \text{ için} \right\}$$

X^α , X^β ve X^γ ya sırasıyla X 'in α -, β -, γ - duali denir. Ayrıca α -dualine Mutlak Köthe-Toeplitz duali ve β -dualine Köthe-Toeplitz duali denir. X^α , X^β ve X^γ birer dizi uzayı olup $\phi \subset X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ dir. $\eta = \alpha, \beta$ veya γ olmak üzere $X \subset Y$ ise $Y^\eta \subset X^\eta$ dir. $X^{\alpha\alpha} = (X^\alpha)^\alpha$ yazacağız.

I. BÖLÜM

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Tanım 2.1:[10] Verilen herhangi bir $x \in w$ dizisi için $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ olsun. X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $\Delta X = \{x \in w: \Delta x \in X\}$ şeklinde tanımlanan dizi uzaylarına “fark dizi uzayları” denir. X yerine l_∞ , c ve c_0 dizi uzayları yazılarak Δl_∞ , Δc ve Δc_0 fark dizi uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta l_\infty = \{x \in w: \Delta x \in l_\infty\}$$

$$\Delta c = \{x \in w: \Delta x \in c\}$$

$$\Delta c_0 = \{x \in w: \Delta x \in c_0\}.$$

Bu dizi uzayları $\|x\| = |x_1| + \sup_k |\Delta x_k|$ normu ile birlikte birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.2:[5] $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli herhangi bir dizi olsun. $m \in \mathbb{N}$,

$\Delta^0 x_k = x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$, $\Delta^m x_k = \Delta(\Delta^{m-1} x_k)$ ve $\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$ olmak üzere;

$$\Delta^m(l_\infty) = \{x = (x_k): \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in l_\infty\}$$

$$\Delta^m(c) = \{x = (x_k): \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in c\}$$

$$\Delta^m(c_0) = \{x = (x_k): \Delta^m x = (\Delta^m x_k) \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımlayalım. Bu taktirde $\Delta^m(l_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ dizi uzayları birer lineer uzaydır. Aynı zamanda bu uzaylar;

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x_k\|_\infty$$

normu ile birer normlu uzay, hatta birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.3:[12] $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların keyfi bir dizisi olsun. Verilen herhangi bir $x \in w$ dizisi için $l_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ dizi uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$l_\infty(p) = \left\{ x \in w: \sup_k |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

$$c(p) = \left\{ x \in w: \exists l \in \mathbb{C} \text{ için } |x_k - l|^{p_k} \rightarrow 0 \right\}$$

$$c_o(p) = \left\{ x \in w : |x_k|^{p_k} \rightarrow 0 \right\}$$

Bu dizi uzayları $M = \max(1, \sup p_k)$ olmak üzere $\|x\| = \sup_k |x_k|^{p_k/M}$ normu ile birer normlu uzaydır.

Tanım 2.4: $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların keyfî bir dizisi olsun. $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere Ahmad ve Mursaleen [1]

$$\Delta l_\infty(p) = \left\{ x \in w : \Delta x \in l_\infty(p) \right\}$$

$$\Delta c(p) = \left\{ x \in w : \Delta x \in c(p) \right\}$$

$$\Delta c_o(p) = \left\{ x \in w : \Delta x \in c_o(p) \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar.

$$m \in \mathbb{N}, \Delta^0 x = (x_k), \Delta^m(x) = \Delta^m(x_k) = (\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}), \Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere Et ve Başarır[4]

$$\Delta^m l_\infty(p) = \left\{ x \in w : \Delta^m x \in l_\infty(p) \right\}$$

$$\Delta^m c(p) = \left\{ x \in w : \Delta^m x \in c(p) \right\}$$

$$\Delta^m c_o(p) = \left\{ x \in w : \Delta^m x \in c_o(p) \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar. Ayrıca $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ olmak üzere $Dx = (0, 0, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$ şeklinde tanımlanan $D : \Delta^m l_\infty(p) \rightarrow \Delta^m l_\infty(p)$ operatörü $\Delta^m l_\infty(p)$ üzerinde bir lineer operatördür. Dahası $D[\Delta^m l_\infty(p)] = D\Delta^m l_\infty(p)$

$$= \left\{ x = (x_k) : x \in \Delta^m l_\infty(p), x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0 \right\}$$

uzayı $\Delta^m l_\infty(p)$ 'nin bir alt uzayıdır. Burada da

$$\Delta^m : D\Delta^m l_\infty(p) \rightarrow l_\infty(p)$$

$$x \rightarrow \Delta^m(x) = y = (\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}) \dots (1)$$

şeklinde tanımlanan Δ^m lineer, birebir ve örten bir dönüşümdür.

Teorem 2.5: [4] Pozitif $p = (p_k)$ dizisi için

$$i) [\Delta^m \ell_\infty(p)]^t = D_1(p) = \bigcap_{N=2}^{\infty} \left\{ a : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} < \infty \right\}$$

$$\text{ii)} \left[\Delta^m \ell_\infty(p) \right]^{\text{aa}} = D_2(p) = \bigcup_{N=2}^{\infty} \left\{ a : \sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \right]^{-1} < \infty \right\}$$

dir.

$$(\text{Keyfi } y_j \text{ için } k-m < 1 \text{ iken } \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} y_j = 0 \text{ almak uygundur.})$$

İspat:

$$\text{i)} a \in D_1(P) \text{ ve } x \in \Delta^m \ell_\infty(p) \text{ olsun. } N > \max \left\{ 1, \sup_n |\Delta^m x_n|^{p_n} \right\} \text{ seçelim.}$$

Keyfi $N > 1$ ($k = 2m, 2m+1, \dots$) için

$$\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} > \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} N^{1/p_j} \geq 1 \text{ olduğundan ve en az sabit bir } M \text{ için}$$

$$|\Delta^{m-j} x_j| \leq M \quad (1 \leq j \leq m) \text{ olduğundan } a \in D_1(p) \text{ ise}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} x_j| < \infty$$

elde edilir.

Bu taktirde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left(\left| \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} \Delta^m x_j + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{k-j-1}{m-j} \Delta^{m-j} x_j \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} x_j| < \infty \end{aligned}$$

dir.

Tersine $a \notin D_1(p)$ olsun. En az bir $N > 1$ tamsayı için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} = \infty$$

elde ederiz. x dizisini $x_k = \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j}$ ($k = m+1, m+2, \dots$ için) şeklinde tanımlayabiliriz.

Bu taktirde $x \in \Delta^m \ell_\infty(p)$ ve $\sum_k |a_k x_k| = \infty$ olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz.

Buradan $a \notin [\Delta^m \ell_\infty(p)]^{\text{a}}$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

ii) $a \in D_2(p)$ olsun. i) den $x \in [\Delta^m \ell_\infty(p)]^k = D_1(p)$ olduğunu biliyoruz. En az bir $N > 1$

için

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \right]^{-1} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \\ &\leq \sup_{k \geq m+1} \left\{ |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \right]^{-1} \right\} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} < \infty \end{aligned}$$

elde ederiz.

Tersine $a \notin D_2(p)$ olsun. Her $N > 1$ tamsayısı için

$$\sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \right]^{-1} = \infty$$

buluruz.

Keyfi y_j için $\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} y_j = 0$ ($k < m+1$) olduğunu hatırlayalım.

Buradan

$$|a_{k(s)}| \left[\sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} s^{1/p_j} \right]^{-1} > s^{m+1} \quad (s=m+1, m+2, \dots)$$

olacak şekilde $k(s) \geq m+1$ tamsayılarının kesin artan bir $(k(s))$ dizisi vardır

x dizisini;

$$x_k = \begin{cases} |a_{k(s)}|^{-1} & (k = k(s)) \\ 0 & (k \neq k(s)) \end{cases} \quad (k = m+1, m+2, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde her $N > m+1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} &\leq \sum_{s=m+1}^{\infty} |a_{k(s)}|^{-1} \sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \\ &\leq \sum_{s=m+1}^{N-1} |a_{k(s)}|^{-1} \sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \\ &\quad + \sum_{s=N}^{\infty} |a_{k(s)}|^{-1} \sum_{j=1}^{k(s)-m} \binom{k(s)-j-1}{m-1} s^{1/p_j} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $x \in [\Delta^m \ell_\infty(p)]^k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{N=1}^{\infty} 1 = \infty$ bulunur. Dolayısıyla

$a \notin [\Delta^m \ell_\infty(p)]^{aa}$ olur. Bu da ispatı tamamlar.



III. BÖLÜM

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARININ KÖTHE-TOEPLITZ DUALLERİ

Bu bölümde $\Delta^m \ell_\infty(p)$ ve $\Delta^m c(p)$ uzaylarının Köthe Toeplitz duallerini ve $\Delta^m c_o(p)$ ve $\Delta^m c(p)$ uzaylarının mutlak Köthe-Toeplitz duallerini inceledik.

Teorem 3.1. [3] Pozitif $p=(p_k)$ dizisi için

$$D_o^a(p) = \bigcup_{N=2}^{\infty} \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{-1/p_j} < \infty \right\}$$

ve

$$D_o^{aa}(p) = \bigcap_{N=2}^{\infty} \left\{ a \in w : \sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{-1/p_j} \right]^{-1} < \infty \right\}$$

olmak üzere;

$$\text{i) } \left[\Delta^m c_o(p) \right]^a = D_o^a(p)$$

$$\text{ii) } \left[\Delta^m c_o(p) \right]^{aa} = D_o^{aa}(p) \text{ dir.}$$

(Keyfi y_j için $k-m < 1$ iken $\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} y_j = 0$ almak uygundur.)

İspat: (i) $a \in D_o^a(p)$ ve $x \in \Delta^m c_o(p)$ olsun. Bu taktirde N , $D_o^a(p)$ de sayı olmak üzere $\sup_{k > k_0} \left| \Delta^m x_k \right|^{p_k} \leq N^{-1}$ olacak şekilde bir k_0 tamsayısı vardır.

$$M = \max_{1 \leq k \leq k_0} \left| \Delta^m x_k \right|^{p_k}, \quad n = \min_{1 \leq k \leq k_0} p_k, \quad L = (M+1)N \quad \text{ve} \quad y \text{ dizisini, } y_k = x_k L^{-1/n}$$

($k=1,2,\dots$) şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $\sup_{k > k_0} \left| \Delta^m y_k \right|^{p_k} \leq N^{-1}$ olduğunu göstermek

kolaydır. Keyfi $N > 1$ ve $(k = 2m, 2m+1, \dots)$ için $\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{-1/p_j} > \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-1} N^{-1/p_j}$

olduğundan $a \in D_o^a(p)$ olması $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} \left| \Delta^{m-j} y_j \right| < \infty$ olmasını gerektirir.

Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= L^{1/n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k y_k| \\
&= L^{1/n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left(\sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} \Delta^m y_j + \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{k-j-1}{m-j} \Delta^{m-j} y_j \right) \\
&\leq L^{1/n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{-1/p_j} + L^{1/n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^{m-j} y_j| < \infty
\end{aligned}$$

dir. Böylece $a \in [\Delta^m c_o(p)]^a$ elde ederiz. Bu nedenle $D_o^a(p) \subset [\Delta^m c_o(p)]^a$ olur.

Tersine, $a \notin D_o^a(p)$ olsun. Bu taktirde $k(1)=1$ ve

$$M_s^m = \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} (s+1)^{-1/p_j} > 1 \quad (s = 1, 2, \dots)$$

olacak şekilde tamsayıların kesin artan bir $(k(s))$ dizisini tanımlayabiliriz. x dizisini

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} \binom{k-j-1}{m-1} (l+1)^{-1/p_j} + \sum_{j=k(s)}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} (s+1)^{-1/p_j} \\
&(k(s) \leq k \leq k(s+1)-1; \quad s=1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde;

$$|\Delta^m x_k|^{p_k} = \frac{1}{s+1} \quad (k(s) \leq k \leq k(s+1)-1; \quad s=1, 2, \dots) \text{ olur. Buradan } x \in \Delta^m c_o(p) \text{ ve}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \geq \sum_{s=1}^{\infty} 1 = \infty \text{ yani } a \notin [\Delta^m c_o(p)]^a \text{ olduğunu elde ederiz.}$$

ii) $N=2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned}
E_N^1 &= \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{-1/p_j} < \infty \right\} \\
F_N^1 &= \left\{ a \in w : \sup_{k \geq m+1} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{-1/p_j} \right]^{-1} < \infty \right\}
\end{aligned}$$

tanımlayalım. İyi bilinen bir sonuçtan (bakınız [12] Lemma 4(iv)) $(E_N^1)^e = F_N^1$ ($N=2, 3, \dots$)

olduğunu gösterebiliriz. Bunun ispatı standarttır ve bu nedenle bırakılmıştır.

Teorem 3.2:[3] Herhangi bir pozitif $p = (p_k)$ dizisi için

$$\left[\Delta^m c(p) \right]^\alpha = D^\alpha(p) = D_0^\alpha(p) \cap \left\{ a \in w: \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} < \infty \right\}$$

dir.

İspat: $a \in D^\alpha(p)$ ve $x \in \Delta^m c(p)$ olsun. Bu taktirde $\left| \Delta^m x_k - l \right|^{p_k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) olacak şekilde kompleks bir l sayısı vardır. $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = x_k + l(-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} \quad (k=1,2,\dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde Teorem 3.1 (i) den ve $a \in D^\alpha(p)$ olduğundan

$y \in \Delta^m c_0(p)$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} |\Delta^{m-j} y_j| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^m \binom{k-j-1}{m-j} |\Delta^m y_j| + |\ell| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} < \infty$$

dır.

$a \in [\Delta^m c(p)]^u$ olsun. Bu takdirde $[\Delta^m c(p)]^u \subset [\Delta^m c_0(p)]^u$ olduğundan Teorem 3.1 (i) den $[\Delta^m c_0(p)] = D_0^\alpha(p)$ dir. Dolayısıyla $a \in D_0^\alpha(p)$ elde edilir.

$$x_k = (-1)^m \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} \quad (k=1,2,\dots)$$

şeklinde tanımlanan x dizisi $\Delta^m c(p)$ de olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} < \infty$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3:[3] Her pozitif $p=(p_k)$ dizisi için

$$D_{\infty}^{\beta}(p) = \bigcap_{N>1} \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \text{ yakınsak ve } \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} N^{1/p_j} < \infty \right\}$$

$$D_{\infty}^{\gamma}(p) = \bigcap_{N>1} \left\{ a \in w : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \right| < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} N^{1/p_j} < \infty \right\}$$

ve $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ ($k=1,2,\dots$) olmak üzere

$$i) [D\Delta^m l_{\infty}(p)]^{\beta} = D_{\infty}^{\beta}(p)$$

$$ii) [D\Delta^m l_{\infty}(p)]^{\gamma} = D_{\infty}^{\gamma}(p)$$

dir.

İspat: i) Eğer $x \in D\Delta^m l_{\infty}(p)$ ise bu taktirde (I) den yeterince büyük k örneğin $k > m$ için;

$$x_k = \sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} y_j$$

olacak şekilde bir tek $y=(y_k) \in l_{\infty}(p)$ vardır. Bu taktirde bir $N > \max \left\{ 1, \sup_k |\Delta^m x_k|^{p_k} \right\}$

tamsayısı vardır.

$a \in D_{\infty}^{\beta}(p)$ olsun ve $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ olduğunu kabul edelim. (Literatürde $k < 0$ için

$\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = 0$ olduğu kabul edilir.) Böylece;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k x_k &= \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-j-1}{m-1} y_j \right) \\ &= (-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} y_j - R_n x_n \end{aligned} \quad (2)$$

yazabiliriz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_{k+m-1} \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} N^{1/p_j} < \infty$$

olduğundan;

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} y_j$$

serileri mutlak yakınsaktır. Dahası [10] daki Sonuç 2'den

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j}$$

serisinin yakınsaklığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} N^{1/p_j} = 0$$

olmasını gerektirir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ her } x \in D\Delta^m l_{\infty}(p)$$

için yakınsaktır. Dolayısıyla $a \in [D\Delta^m l_{\infty}(p)]^{\mathfrak{p}}$ olur.

Tersine $a \in [D\Delta^m l_{\infty}(p)]^{\mathfrak{p}}$ olsun. Bu taktirde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ her bir $x \in D\Delta^m l_{\infty}(p)$ için

yakınsaktır. Eğer $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \leq m \\ \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} & , \quad k > m \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k < \infty$$

elde ederiz. Böylece;

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j}$$

serisi yakınsak olur. Bu [10] daki Sonuç 2'den;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} N^{1/p_j} = 0$$

olmasını gerektirir.

Şimdi $a \in [D\Delta^m l_\infty(p)]^{\mathfrak{p}} - D_\infty^\beta(p)$ olsun. O halde;

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} N^{1/p_j}$$

serisi ıraksak yani,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} N^{1/p_j} = \infty$$

dır. Her k için $a_k > 0$ ya da her k için $a_k < 0$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \leq m \\ \sum_{v=1}^{k-1} \text{sgn } R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} N^{1/p_j} & , \quad k > m \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$x = (x_k) \in D\Delta^m l_\infty(p)$ olduğu açıktır. Bu taktirde $n > m$ için

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = - \sum_{k=1}^{n-m} R_{k+m-1} \Delta x_{k+m-1} - R_n x_n$$

yazabiliriz.

$$\left(\left(\sum_{v=1}^{n-1} \text{sgn } R_v \sum_{j=1}^{v-m+1} \binom{v-j-1}{m-2} N^{1/p_j} \right) \left(\sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \right)^{-1} \right) \in l_\infty$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak;

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} |R_{k+m-1}| \sum_{j=1}^k \binom{k+m-j-2}{m-2} N^{1/p_j} = \infty$$

elde ederiz. Bu da $a \in [D\Delta^m l_\infty(p)]^{\mathfrak{p}}$ olması ile çelişir. Buradan $a \in D_\infty^\beta(p)$ olur.

ii) [10] daki Sonuç 1 kullanılarak yukarıdakine benzer bir yolla gösterilebilir.

Lemma 3.4:[3] $\eta = \beta$ ve γ için

$$[D\Delta^m l_\infty(p)]^\eta = [D\Delta^m c(p)]^\eta$$

dır.

Lemma 3.5:[3]

$$\textbf{i)} \left[\Delta^m l_\infty(p) \right]^\eta = \left[D \Delta^m l_\infty(p) \right]^\eta$$

$$\textbf{ii)} \left[\Delta^m c(p) \right]^\eta = \left[D \Delta^m c(p) \right]^\eta, \quad \eta = \beta \text{ ve } \gamma$$

Sonuç 3.6:[3] X yerine l_∞ veya c alalım. Bu taktirde $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere

i)

$$\left[\Delta^m X(p) \right]^\beta = \bigcap_{N>1} \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \text{ yakınsak ve } \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} N^{1/p_j} < \infty \right\}$$

ii)

$$\left[\Delta^m X(p) \right]^\gamma = \bigcap_{N>1} \left\{ a \in w : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} N^{1/p_j} \right| < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} N^{1/p_j} < \infty \right\}$$

dir.

KAYNAKLAR

- [1]. **Ahmad Z.U. and Mursaleen (1987)**, Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps. Publ. Inst.Math. (Beograd) 42 (56) (1987), 57-61.
- [2]. **Bektaş, Ç. (2001)**, "Genelleştirilmiş Bazı Fark Dizi Uzaylar", Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [3]. **Bektaş, Ç.(2004)**, "Absolute and ordinary Köthe-Toeplitz duals of some generalized sets of difference sequences"Department of Mathematics Faculty of Sciences and Arts Fırat University.
- [4]. **Et, M. and Başarır, M.(1997)**, On some new generalized difference sequence spaces. Periodica Mathematica Hungarica 35(3), 169-175.
- [5]. **Et, M. and Çolak, R. (1995)**, "On Some Generalized Difference Sequence Spaces", Soochow J. of Math.21(4), 377-386.
- [6]. **Goes, G. ve Goes, S. (1970)**, Sequences of Bounded Variation and Sequences of Fourier Coefficients I. Math. Z. 118, 93-102.
- [7]. **Hardy, G.H. (1949)**, Divergent Series, At the clarendon Pres, Oxford.
- [8]. **Kamphthan, P. K. ve Gupta, M. (1981)**, Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker Inc. New York.
- [9]. **Kantorovich, L.V. ve Akilov, G.P. (1982)**, Functional Analysis, Pergamon Pres, Oxford.
- [10]. **Kızmaz, H. (1981)**, On certain sequence spaces, Canadian Math. Bull. 24, 169-176.
- [11]. **Kreyszig, E. (1978)**, "Introductory Functional Analysis with Applications". John Wiley and Sons, New York.
- [12]. **Lascarides C. G. and Maddox I. J. (1970)**, Matrix transformations between some classes of sequences. Proc. Cambridge Phil. Soc. 68, 99-104.
- [13]. **Lascarides C.G. (1970)**, A study of certain sequence spaces of Maddox and a generalization of a theorem of Iyer . Pacific J. Math.38, 487-500.
- [14]. **Maddox, I. J. (1967)**, Continuous and Köthe- Toeplitz duals of certain sequence spaces . Proc. Cambridge Phil.Soc. 65. 471-475.
- [15]. **Maddox, I.J. (1988)**, Elements of Functional Analysis, Cambridge the University Pres, Cambridge.

- [16]. **Malkowsky E. (1996)**, A note on the Köthe-Toeplitz duals of generalized sets of bounded and convergent difference sequences. J.Analysis 4, 81-91.
- [17]. **Simons S. (1965)**, The sequence spaces $l(pv)$ and $m(pv)$. Proc. London Math. Soc. 15, 422-436.
- [18]. **Wilansky, A. (1964)**, Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company. New York.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler:

Adı Soyadı : Hediye YAŞAR

Doğum Yeri ve Tarihi : Diyarbakır/1988

Eğitim Durumu:

Lisans Öğrenimi : Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2005-2009

Formasyon : Fırat Üniversitesi 2009/2010

İş Deneyimi:

2010 Bismil Şair Cahit Sıtkı Tarancı Anadolu Lisesi (Devam Ediyor)