

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE
KARARLILIK PROBLEMLERİ

Ahu ERCAN

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

OCAK-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE
KARARLILIK PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Ahu ERCAN
(132121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03 Ocak 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Ocak 2018

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU (GOP.Ü)

: Prof.Dr. Yaşar BOLAT (K.Ü)

: Prof.Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

: Doç.Dr. Erdal BAŞ (F.Ü)

OCAK-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde daima yanımda olan her konuda yardımlarını esirgemeyen, emeğini her zaman üzerinde hissettiğim, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

FF.17.01 numaralı proje ile doktora tezime katkılarından dolayı FÜBAP'a teşekkür ederim.

Ayrıca, yaşamım boyunca hep yanımda olan desteklerini benden hiç esirgemeyen çok değerli aileme ve çok kıymetli eşime teşekkürlerimi sunarım.

Ahu ERCAN

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR	14
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	14
3. DÖNÜŞÜM OPERATÖRÜ	22
3.1. Sturm-Liouville Operatörleri İçin Dönüşüm Operatörü	22
3.2. Dönüşüm Operatörleri İçin Uygulamalar	23
3.3. Yarı Eksende Parseval Eşitliği	30
4. DİRAC OPERATÖRÜNÜN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TANIMLAN- MASININ KARARLILIĞI	41
4.1. Bir Boyutlu Dirac Operatörü	41
4.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektruma Göre İfadesi	43
4.3. İki Spektruma Göre Kararlılık Problemlerinin Tanımlanması ..	45
4.4. Çözüm Fonksiyonlarının Kararlılığı	50
5. BESSEL TİPLİ TEKİLLİĞE SAHİP STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK TEORİSİ	60
5.1. Kararlılık Probleminin Tanımlanması	60
5.2. Kararlılık Teoremleri	62
6. DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN KARARLILIK PROBLEMİ	71
6.1. Kararlılık Probleminin Tanımlanması	71
6.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektruma Göre İfadesi	73
7. SONUÇ	83
8. KAYNAKLAR	84

ÖZET

Bu tez çalışması diferansiyel operatörlerin kararlılık teorisine önemli katkılar sağlayacaktır. Bu çalışmada ele alınan problemler için sonlu sayıda özdeğerler çakışığında spektral fonksiyonlar ve özfonksiyonlar farkı için sonlu sınırlar elde edilmesi amaçlanmıştır. Kullandığımız yöntem ilk olarak T.I. Ryabushko tarafından [60] regüler Sturm-Liouville probleminin kararlılığını göstermek için uygulanmıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde regüler ve singüler Sturm-Liouville operatörü, Dirac ve Difüzyon operatörlerinin spektral teorisinin (ters ve düz problemler) tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde diferansiyel operatörler için dönüşüm operatörünün önemli uygulamaları verilmiştir.

T.I. Ryabushko tarafından verilen yöntem bu tez çalışmasının orjinal bölümleri olan dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde farklı denklemlere uygulanmış olup sırasıyla bu bölümler aşağıda açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde Dirac operatörü için kararlılık problemi tanımlanıp, iki spektruma göre normlaştırıcı sayılarının formülü verilerek kararlılık teoremleri ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde Bessel tipli singülerliğe sahip Sturm-Liouville operatörleri için Dirichlet sınır şartlarına sahip problem ele alınmıştır. Bu problem için iki spektruma göre kararlılık teoremleri verilmiştir.

Altıncı bölümde ise ayırık sınır şartlarına sahip Difüzyon denklemi incelenmiştir. Bu problemin normlaştırıcı sayılarının iki spektruma göre ifadesi verilir, kararlılık teoremleri ispatlanmıştır.

Yedinci bölümde ise tez çalışmasının sonuçları değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kararlılık, Normlaştırıcı sayılar, Spektral fonksiyon, Dirac operatörü, Difüzyon denklemi, Singüler Sturm-Liouville.

SUMMARY

The Stability Problems in Spectral Theory of Differential Operators

This thesis will provide important contributions to the theory of the stability of differential operators. For the problems considered in this thesis, when the eigenvalues coincide the finite numbers, it is aimed to obtain the finite bounds for the difference between the spectral functions and eigenfunctions. The method which used was applied firstly by T.I. Ryabushko [60] to demonstrate the stability of regular Sturm-Liouville problems. This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter, the history of the spectral theory of regular and singular Sturm-Liouville operator, Dirac and Diffusion operators is given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems which are frequently used in spectral theory of differential operators are given.

In the third chapter, important applications of the transformation operator for the differential operators are given.

This method was applied in the fourth, fifth and sixth sections which are the original parts. Following results were obtained respectively.

In the fourth chapter the problem of stability for Dirac operators is defined and the formula explaining the norming constants respect to two spectra is given. The stability theorems have been proved.

In the fifth chapter the problem for Sturm-Liouville operators with Bessel type singularity with Dirichlet boundary conditions have been considered. The stability theorem according to two spectra is given for this problem.

In the sixth chapter, Diffusion equation with discrete boundary conditions is considered. The formula explaining the norming constants of this problem respect to two spectra is given. The stability theorems have been proved.

In the seventh chapter the results of the thesis are evaluated.

Keywords: Stability, Norming constant, Spectral function, Dirac Operator, Diffusion equation, Singular Sturm-Liouville.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı singeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{L}_2[a, b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{H}$	: Hilbert uzayı
$\mathbb{R}^n$	: n - boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler
α_n	: n . normlaştırıcı sayı
φ_n	: n . özfonksiyon
λ_n	: n . özdeğer
$K(x, y)$	: Çekirdek fonksiyonu
$\rho(\lambda)$	: Spektral fonksiyon
Var	: Total salınım

1. GİRİŞ

Bu tezde Fransız matematikçiler Charles-François Sturm (1803-1855) ve Joseph Liouville'den (1809-1882) ismini alan sınır değer problemlerinin bir sınıfı üzerine yoğunlaşacağız. Bu matematikçiler 1836 ve 1837 yıllarında çıkarılan bir dizi makalede Sturm-Liouville sınır değer problemlerinin pek çok özelliğini ortaya koydular. Bu kısımda sınır değer probleminin bu sınıfı hakkında kısaca bilgi verelim.

Kuantum mekaniğinin yanı sıra klasik fizikte de pek çok özdeğer problemi

$$(p(x)y'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))y(x) = 0 \quad (1.1)$$

biçimindeki diferansiyel denklem sınıfı ve (a, b) aralığı üzerindeki

$$\begin{aligned} a_1y(a) + a_2y'(a) &= 0, \\ b_1y(b) + b_2y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

sınır koşullarıyla tanımlanır. (1.1) denklemi Sturm-Liouville diferansiyel denklemi olarak bilinir ve (1.1) denklemi (1.2) sınır koşullarıyla Sturm-Liouville sınır değer problemi olarak adlandırılır.

Bir takım uygulamalı bilimlerde özellikle de bazı fizik problemlerinde önemli bir yere sahip olan, diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, düz spektral problemler ve ters spektral problemler olarak iki ana kola ayrılır.

Düz spektral problemler, verilen operatörün spektrumunun ve özfonksiyonlarının aranması ve verilen bir fonksiyonun operatörün özfonksiyonlarına göre dağılımının incelenmesidir. Spektral analizin ters problemleri ise spektral verilerden operatörün oluşturulması ile ilgilenmektedir. Burada spektral verilerle özdeğerler, normlaştırıcı sayılar ve spektral fonksiyon kastedilmektedir. Ters problemlerle ilgili bazı çalışmalarda, spektral karakteristiklerin operatörü tek şekilde belirlediğini gösteren teklik teoremleri verilmiş; bazılarında ise spektral karakteristiklere göre operatörün nasıl elde edilebileceği araştırılmıştır.

Spektral analizin bir dalı olan inverse (ters) problemler fiziğin birçok alanında kullanılmaktadır.

Buna örnek olarak, klasik fizikte telin titreşim denklemini ele alabiliriz. $p(x)$, telin x noktasındaki gerilimini; $\rho(x)$ kütle yoğunluğunu göstermek üzere, dalga denklemindeki

$y(x)$ genliği

$$(p(x)y'(x))' + \lambda \rho(x)y(x) = 0 \quad (1.3)$$

diferansiyel denklemini sağlar ki bu klasik fizikte (1.1) biçimindeki diferansiyel denkleme iyi bir örnektir.

Diğer bir örnek ise kuantum mekaniğinde bir boyutlu, zamandan bağımsız Schrödinger denklemini

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0 \quad (1.4)$$

şeklinde olup, burada q potansiyel fonksiyona, λ özdeğere, y partikül modunda eneiye karşılık gelir. $y(x)$, x noktasındaki dalga genliğini ifade eder. Görülmektedir ki (1.4) denklemini (1.1) denkleminin $p(x) = \rho(x) = 1$ alındığı özel durumudur. Aslında Liouville dönüştümü kullanılarak herhangi ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem (1.1) formuna dönüştürülebilir [17], [26].

Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan bu alandaki ilk alışma V.A. Ambartsumyana [2] aittir. 1929 yılında V.A. Ambartsumyan Sturm-Liouville operatörler için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1.1. $q(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon ve $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0, \quad (0 < x < \pi) \quad (1.5)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \quad (1.6)$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$) ise $q(x) \equiv 0$ 'dır.

Bu çalışmadan sonra ters problemler teorisinde farklı yöntemler ve farklı problemler ortaya çıkmıştır. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi G. Borg'a [3] aittir. Bu sonuç aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 1.2. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ (1.5) diferansiyel denklemini ve

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (1.7)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (1.8)$$

sınır koşullarıyla verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ (1.5) diferansiyel denklemini ve

$$y'(0) - h_1y(0) = 0, \quad (h \neq h_1) \quad (1.9)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirler. Burada h, h_1 ve H sonlu reel sayılardır. Ayrıca, Borg aynı çalışmasında bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirlenmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. Bu yüzden V.A. Ambartsumyan'ın sonucu istisnai bir durum olarak düşünülmektedir.

İkinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde en önemli çalışmalardan biri Marchenko tarafından elde edilmiştir. Marchenko 1950 yılında yapmış olduğu çalışmasında [42] ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır. $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (1.5) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları ise bu operatörün öz-fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

sayılarına verilen operatörün normlaştırıcı sayıları

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonuna ise bu operatörün spektral fonksiyonu denir. Marchenko yukarıda bahsedilen çalışmasında Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca bu çalışmada $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli koşul verilmiştir.

1951 yılında I.M. Gelfand ve B.M. Levitan [14], $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları vermişlerdir. Ayrıca bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi için etkili bir yöntem vermişlerdir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ dizilerine göre bulunması için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normlaştırıcı sayıları olması için aşağıda verilen

klasik asimptotik formüllerin sağlanması için gerek ve yeter şart olması şeklindedir.

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \dots + \frac{a_{[\frac{m}{2}]}}{n^{2[\frac{m}{2}]+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2[\frac{m}{2}]+1}}, \\ \alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \dots + \frac{b_{[\frac{m}{2}]}}{n^{2[\frac{m}{2}]+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2[\frac{m}{2}]+1}}\end{aligned}$$

burada $a_0 = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right)$ şeklindedir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \frac{\tau_n^2}{n^2} < \infty$, eğer m tek sayı ise $\sum \tau_n^2 < \infty$ ve $\sum \frac{\gamma_n^2}{n^2} < \infty$ olur.

Fakat bu çalışmalarda ters problemin iki spektruma göre tam çözümü verilmemiştir. İki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G. Gasyimov'un [38] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ normlaştırıcı sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h_2}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \quad (1.10)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod_{k=0}^{\infty}$ sembolü sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanının bulunmadığını gösterir. (1.10) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.10) formülünden faydalananarak $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ sayılarının asimptotik ifadesi bulunur ve [38] çalışmasının sonuçlarından faydalananarak $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Yani bu çalışmada iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşullar aşağıdaki gibi verilir:

- 1) $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri çaprazlaşır (sıralıdır), yani

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \dots$$

- 2) λ_n ve μ_n özdeğerleri $a_0 \neq a'_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \\ \sqrt{\mu_n} &= n + \frac{a'_0}{n} + \frac{a'_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll [58] ve H.E. Moses [48] tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0, \infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M.G. Gasy-mov ve B.M. Levitan [11] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly = By' + Q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \quad (1.11)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0, \quad (1.12)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0, \quad (H \neq H_1) \quad (1.13)$$

sınır değer problemleri ele alınmıştır. Bu takdirde $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$, (1.11) denkleminin

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü ve $\rho(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ monoton artan fonksiyonu (1.11)-(1.12) probleminin spektral fonksiyonu olsun. Her $f(x) \in L_2(0, \infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f^T(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(\lambda) - F_n(\lambda))^2 d\rho(\lambda) = 0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty f^T(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda) d\rho(\lambda)$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Teorem 1.3. $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (1.11)-(1.12) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerek ve yeterdir.

1) $g(x) \in L_2(0, \infty)$ sonlu keyfi vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g^T(x) s(x, \lambda) dx, \quad s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^\infty G^2(\lambda) d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ olur.

2)

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^\infty c(x, \lambda) c^T(y, \lambda) d\left(\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\right), \quad c(x, \lambda) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \lambda x) / \lambda \\ \sin \lambda x / \lambda \end{pmatrix}$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x, 0) = F_{21}(x, 0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x, y) \equiv F(x, y)$ türevelere sahiptir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M.G. Gasy-mov ve T.T. Dzhabiev tarafından yapılan [9] çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır.

Teorem 1.4. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^\infty$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^\infty$ dizileri sırası ile (1.11)-(1.12) ve (1.11), (1.13) problemlerinin özdeğerleri ise

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H_2}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^\infty ' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod_{k=-\infty}^\infty '$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir.

Teorem 1.5. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[0, \pi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve k . mertebeden türevleri $L^2(0, \pi)$ 'de olmak üzere $\{\lambda_n\}_{-\infty}^\infty$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^\infty$ dizileri sırası ile (1.11)-(1.12) ve (1.11), (1.13) problemlerinin spektrumları olması için gerek ve yeter şart

1) $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ sayılarının çaprazlaşması yani;

$$\lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \dots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$$

2) $\alpha \neq \beta$, $0 < \alpha, \beta < \pi$, $\sum_{n=-\infty}^\infty |\alpha_{n,k}|^2 < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^\infty |\beta_{n,k}|^2 < \infty$ serileri yakınsak

olmak üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k},$$

$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanmasıdır.

Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülerize izin hesaplanması, periyodik ve antiperiyodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, $2n$ mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile [24, 36, 54, 62–64, 69] çalışmalarında incelenmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular [4, 5, 7, 21–23, 57, 59, 67, 72] çalışmalarında incelenmiştir.

1965 yılında M.G. Gasymov'un yapmış olduğu çalışmada [10]

$$-y''(x) + \left\{ q(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right\} y = \lambda y \quad (1.14)$$

diferansiyel denklemi ve $H_1 \neq H_2$ olmak üzere

$$y(0) = 0, \quad (1.15)$$

$$y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0, \quad (1.16)$$

$$y'(\pi) + H_2 y(\pi) = 0 \quad (1.17)$$

sınır koşullarıyla verilen sınır değer problemleri incelenmiş ve bu problemler için iki spektruma göre ters problemin çözümü aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 1.6. l pozitif tamsayı, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ ve $\mu_0, \mu_1, \dots$ dizilerinin sırasıyla (1.14)-(1.16) ve (1.14), (1.15), (1.17) problemlerin özdeğerleri olması için:

- 1) $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizilerinin çaprazlaşması,
- 2) $a \neq b$ ve $\sum |a_n|^2$ ve $\sum |b_n|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\lambda_n = \left(n + \frac{l}{2}\right)^2 + a + a_n,$$

$$\mu_n = \left(n + \frac{l}{2}\right)^2 + b + b_n$$

asimptotik formüllerinin sağlanması,

3) $\sum |c_n|^2$ serisi yakınsak olmak üzere

$$\mu_n - \lambda_n = b - a + \frac{c_n}{n}$$

koşullarının sağlanması gerekli ve yeterli şarttır.

1985 yılında M.G. Gasymov ve R.Kh. Amirov çalışmasında [13]

$$-y''(x) + \left\{ q(x) + \frac{A}{x} \right\} y = \lambda y \quad (1.18)$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0) = 0, \quad (1.19)$$

$$y'(\pi) + h_1 y(\pi) = 0, \quad (1.20)$$

$$y'(\pi) + h_2 y(\pi) = 0, \quad (h_1 \neq h_2) \quad (1.21)$$

sınır koşullarıyla verilen diferansiyel operatörü incelemiş ve bu diferansiyel operatör için iki spektruma göre ters problemin çözümü ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 1.7. $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

2) $\lambda_n = \left(n + \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi} \ln \left(n + \frac{l}{2}\right) + 2c_0 + a_n$,

$$\mu_n = \left(n + \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{A}{\pi} \ln \left(n + \frac{l}{2}\right) + 2c'_0 + a'_n$$

asimptotik formülleri sağlansın, burada $c_0 \neq c'_0$ ve $\{a_n\}$ ve $\{a'_n\}$ dizileri $\sum |a_n|^2$ ve $\sum |a'_n|^2$ serileri yakınsak olacak biçimindeki dizilerdir.

O halde $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ (1.18)-(1.20) probleminin, $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ ise (1.18), (1.19), (1.21) probleminin spektrumlarıdır ve

$$h_1 - h_2 = \pi (c'_0 - c_0)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $q(x)$ sürekli fonksiyonu ve h_1, h_2 reel sayıları vardır.

Literatürde Bessel potansiyelli singüler diferansiyel operatörlerle ilgili bir çok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan önemlilerinden biri Yurkoya [72] aittir. V.A. Yurko bu çalışmasında özellikle potansiyelin singülerite noktası, aralığın herhangi bir iç noktası olduğunda bu tip operatörler için ters problemlerin çözümlerini vermiştir.

$$-y''(x) + \left\{ q(x) + \frac{\nu^2 - 1/4}{(x - \gamma)^2} \right\} y = \lambda y, \quad (\lambda = \rho^2), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (1.22)$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Burada $x = \gamma$ noktası $(0, \pi)$ aralığının herhangi bir iç noktasıdır. (1.22) diferansiyel denklemi için

$$y'(\pi) + h_0 y(\pi) = 0,$$

$$y'(\pi) + h_1 y(\pi) = 0$$

sınır koşullarının ürettiği operatör L olsun. V.A. Yurko bazı çalışmalarında L operatörü için ters problemin ne şekilde konulacağını incelemiş ve bu tip ters problemlerin çözümünde Weyl fonksiyonu kavramından ve Z.L. Leibenzon yönteminden yararlanarak ilgili teoremleri ispatlamıştır. Bessel tipli tekilliğe sahip potansiyeller için ters problemler farklı yöntemlerle H. Koyunbakan ve E.S. Panakhov [27], Hidrojen atomu denklemleri için E.S. Panakhov ve R. Yılmaz [70], Dirac denklemler sistemi için Ü. İç [24], tekile sahip Sturm-Liouville diferansiyel operatörü için E. Baş [53] ve singüler Dirac operatörü için ters problemler M. Şat [64] tarafından incelenmiştir.

G. Sh. Guseinov [16] çalışmasında $p(x) \in W_2^1(0, \pi)$, $q(x) \in L_2(0, \pi)$ olmak üzere

$$-y''(x) + (2\lambda p(x) + q(x))y(x) = \lambda^2 y(x)$$

regüler diferansiyel denklemini ele almıştır. Guseinov bu çalışmasında verilen başlangıç koşullarını sağlayan çözümler için bir integral gösterimin varlığını ispatlamış ve integral gösterilimindeki çekirdek fonksiyonun sağladığı bir takım özellikleri elde etmiştir. Difüzyon denklemi için ters ve düz problemler [12, 15, 51, 65] çalışmalarında incelenmiştir.

Yukarıda bahsedildiği gibi Sturm-Liouville sınır değer problemleri ya kendisinin spektral fonksiyonundan ya da saçılım verilerinden tamamiyle elde edilebilir. Bu elde etme süreci oldukça etkilidir. Bilhassa bu süreç ele alınan sınır değer probleminin spektral fonksiyonu ve saçılım verileri için gerek ve yeter şartları bulmamızı sağlar. Bu şartlar simetrik sınır değer probleminin verilen tüm μ 'ler için kendisinin $\rho(\mu)$ spektral fonksiyonundan tek şekilde belirlenebileceğini gösterir. Bu durum sınır değer problemlerinin saçılım verilerinden elde edilmesi için de aynıdır.

Aynı zamanda ters problemin fiziksel anlamı ne spektral fonksiyondan ne de saçılım verilerinden tamamiyle bilinemez. Ters kuantum saçılım probleminde bu durum açıkça görülür. Aslında bu problemde λ^2 parametresi sistemin enerjisiyle doğru orantılıdır. Böylece saçılım verilerini elde edebilmek için tüm λ değerleri için keyfi yüksek enerjili partiküllerle çalışma yapılmalıdır. Fakat enerji değerleri sonlu olmasına rağmen yeterince büyük enerji değerleri için saçılım süreci $V(x) = \frac{\hbar^2}{2M}q(x)$ potansiyeline sahip Schrödinger denklemi ile daha fazla açıklanamaz. Böylece belirli bir enerjiden başlayarak keyfi yüksek enerjili partiküllerle çalışma yapılsa bile ancak süreçle ilgili bilgi

elde edilebilir ki bu durumunda oluşturmak istediğimiz denklemle hiçbir ilgisi yoktur. Dolayısıyla temel bir soru şu şekildedir: Eğer spektral fonksiyon veya saçılım verileri sadece spektral parametre değerlerinin sonlu aralığında yaklaşık olarak bilinirse $q(x)$ fonksiyonu veya genel anlamda sınır değer problemi hakkında ne ölçüde bilgi elde edilebilir? Bu soruya cevap verebilmek için şu soruyu cevaplamalıyız: Ele aldığımız iki sınır değer probleminin spektral fonksiyonları veya saçılım verileri sonlu aralık üzerinde değişen λ^2 parametresi için çok az farklı ise iki sınır değer problemi birbirinden ne ölçüde farklıdır? Bu problemler hakkında önceden hiçbir koşul verilmiyorsa o halde bu problemler birbirlerinden istenildiği kadar farklılaştırılabilir. Örneğin herhangi sınır değer problemi için $q(x) \geq N$ ve $h > 0$ olsun. Bu problemlere karşılık gelen spektral fonksiyonlar $\mu < N$ için çakışsınlar. Böylece spektral fonksiyonlar $(-\infty, N)$ aralığı üzerinde çakışsınlar. O halde ters problemlerin kararlılığı hakkındaki anlamlı bir soru şu şekildedir: $h + \int_0^x |q(t)| dt$ için bazı eşitliklerin önceden bilinmesi şartıyla eğer iki sınır değer problemlerinin spektral fonksiyonları λ^2 spektral parametresinin değerlerinin verilen aralığında çok az farklı olduklarında iki sınır değer problemleri birbirinden ne kadar farklı olabilir?

Kuantum saçılım teorisinde ters problemler için kararlılık problemini benzer şekilde formüle edebiliriz. Yaklaşım teorisi için aynı olan sorularla bu soruların benzerliğine dikkat edelim. Örneğin Fourier serisinin sonlu kısmı bilinen fonksiyon hakkında ne söyleyebiliriz veya ilk bir kaç Fourier katsayısı sıfıra eşit olan fonksiyon hakkında ne söylenebilir? Bu soruya cevap vermek için fonksiyonun bir kaç türevinin sınırlı olması gibi fonksiyonun belirli bir fonksiyon sınıfına ait olduğunu kabul etmek gereklidir.

Spektral teoride kararlılık problemleri günümüzde regüler ve singüler operatörler için [8, 45, 47, 50, 55, 60, 61, 66, 71] çalışmalarında incelenmiştir.

Bu tezde spektral teoride kararlılık problemleri ile ele alınan iki sınır değer problemlerinin sonlu adette özdeğerleri çakıştığında bu problemlerin spektral fonksiyonlarının total salınımı ve özfonksiyonları farkı için sonlu sınırlar elde edilmesi amaçlanmaktadır. T.I. Ryabushko [60] çalışmasında regüler Sturm-Liouville problemi için kararlılık teoremlerini incelemiştir. Bu çalışmada yazar $q_1(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$y''(x) + q_1(x)y(x) = \lambda^2 y(x) \quad (1.23)$$

denklemini ve

$$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (1.24)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \quad (1.25)$$

sınır koşullarıyla oluşan problemleri ele almıştır. (1.23)-(1.24) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_{1,m}^2\}$ ve (1.23), (1.25) probleminin özdeğerleri ise $\{\mu_{1,m}^2\}$ olsun.

$q_2(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$y''(x) + q_2(x)y(x) = \lambda^2 y(x) \quad (1.26)$$

denklemini (1.24) ve (1.25) sınır koşulları ile ele alınsın. $\{\lambda_{2,m}^2\}$ ve $\{\mu_{2,m}^2\}$ sırasıyla (1.24), (1.26) ve (1.25), (1.26) problemlerinin özdeğerleri olsun.

$w(\lambda, x)$ (1.23) denkleminin

$$w(\lambda, 0) = 1, \quad w'(\lambda, 0) = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. O halde (1.23)-(1.24) probleminin normlaştırmacı sayıları

$$\alpha_{1,k} = \int_0^\pi w^2(\lambda_{1,k}, x)$$

ve spektral fonksiyonu

$$\rho_1(\mu) = \sum_{\lambda_{1,k}^2 < \mu} \frac{1}{\alpha_{1,k}}$$

şeklinde. Bu çalışmada $\alpha_{1,k}$ sayılarının $\{\lambda_{1,m}^2\}$ ve $\{\mu_{1,m}^2\}$ özdeğerleri ile ifadesi

$$\alpha_{1,k} = \frac{4\pi (\lambda_{1,k}^2 - \mu_{1,k}^2)}{k^2 (k + \frac{1}{2})^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2) (\lambda_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2)}{n^2 (n + \frac{1}{2})^2}$$

formülü ile verilir.

Benzer şekilde (1.24), (1.26) probleminin normlaştırmacı sayıları $\alpha_{2,k}$ ve spektral fonksiyonu

$$\rho_2(\mu) = \sum_{\lambda_{2,k}^2 < \mu} \frac{1}{\alpha_{2,k}}$$

olmak üzere $\alpha_{2,k}$ sayılarının iki spektruma göre ifadesi

$$\alpha_{2,k} = \frac{4\pi (\lambda_{2,k}^2 - \mu_{2,k}^2)}{k^2 (k + \frac{1}{2})^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2) (\lambda_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2)}{n^2 (n + \frac{1}{2})^2}$$

şeklinde verilir. Bu çalışmada yazar yukarıda verilen bilgiler ışığında aşağıdaki önemli lemma ve teoremleri vermiştir.

Lemma 1.1. Eğer $q'(x) \in L_1(0, \pi)$, $|\lambda| > \sigma(x)$ ve $\text{Im } \lambda \geq 0$ ise bu takdirde

$$\left| (w(\lambda, x) - \cos \lambda x) e^{i\lambda x} \right| \leq \frac{\sigma(x)}{|\lambda| - \sigma(x)},$$

$$\left| \left(w(\lambda, x) - \cos \lambda x - \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x q(t) dt \right) e^{i\lambda x} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|^2} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{-1}(x) + \frac{\sigma^2(x)}{1 - \frac{\sigma(x)}{|\lambda|}} \right\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(t)| dt, \quad \sigma_{-1}(x) = \int_0^x |q'(t)| dt$$

şeklindedir.

Lemma 1.2. $n > 3\sigma(\pi)$ için

$$\lambda_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{\int_0^\pi q(t) dt}{(2n+1)\pi} + \frac{M_n}{n^2},$$

$$\mu_{n+1} = n + \frac{\int_0^\pi q(t) dt}{2\pi n} + \frac{\tilde{M}_n}{n^2}$$

asimptotik formülleri geçerlidir. Burada $q_0 = \max_{0 \leq x \leq \pi} |q(x)|$ olmak üzere

$$|M_n| \leq \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{-1}(\pi) + 5\sigma^2(\pi) \right\},$$

$$|\tilde{M}_n| \leq \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} \sigma_{-1}(\pi) + \frac{1}{4} q_0 + 5\sigma^2(\pi) \right\}$$

şeklindedir. Bu çalışmanın esas teoremi ise aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.8. $\{\lambda_{j,k}^2\}$ ve $\{\mu_{j,k}^2\}$ ($j = 1, 2$) özdeğerleri $N > 3\beta(\pi)$ iken $k = 1, 2, \dots, N+1$ için $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$ ve $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ olacak şekilde çakışsınlar. Bu takdirde

$$\tilde{M} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} \beta_{-1}(\pi) + \frac{1}{4} q_0 + 5\beta^2(\pi) \right\}$$

ve

$$q_0 = \max_{j=1,2} \max_{0 \leq x \leq \pi} |q_j(x)|$$

olmak üzere $k > N + 1$ ve $N \geq 7\sqrt{\tilde{M}}$ için

$$\max_{k < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}} \right| < \frac{65\tilde{M} \left(1 + \frac{2}{N}\right)}{2N^2} e^{\frac{33\tilde{M} \left(1 + \frac{2}{N}\right)}{N^2}}$$

ve

$$Var \{ \rho_1(\mu) - \rho_2(\mu) \} < \frac{65\tilde{M} \left(1 + \frac{2}{N}\right)}{2N^2} e^{\frac{33\tilde{M} \left(1 + \frac{2}{N}\right)}{N^2}} \rho_1 \left(\frac{N^2}{4} \right)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Aynı çalışmada çözüm fonksiyonlarının kararlılığına ilişkin diğer önemli bir teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 1.9. Teorem 1.8'in koşulları altında $N \geq 7\sqrt{\tilde{M}}$ için çözüm fonksiyonları her $0 \leq \lambda^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{N}{2} \right)^2$ aralığında

$$\begin{aligned} |w_1(\lambda, x) - w_2(\lambda, x)|^2 &< \frac{1}{N} \left[1 + \frac{2}{N} \beta \left(\frac{2}{N} \right) \exp \left\{ 2\beta_1 \left(\frac{2}{N} \right) \right\} \right] \\ &\times \exp \left\{ 2 \left[\beta_1(x) - \beta_1 \left(x + \frac{1}{\lambda} \right) \right] \right\} 49x\tilde{M} \left(1 + \frac{2}{N} \right) \\ &\times \exp \left\{ \frac{33\tilde{M} \left(1 + \frac{2}{N} \right)}{N^2} \right\} \exp \{ 2\beta_1(x) \} + 48\beta(x) \exp \left\{ \frac{4\beta(x)}{N} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlarlar. Burada $\beta(x)$ azalmayan sürekli keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^x |q(t)| dt \leq \beta(x), \quad \beta_1(x) = \int_0^x \beta(t) dt$$

bağıntılarını sağlar.

Bu tez çalışmasında Dirac operatörü, Bessel tipli tekiliğe sahip Sturm-Liouville operatörü ve Difüzyon denklemi için T.I. Ryabushko [60] ve V.A. Marchenko, K.V. Maslov'un [45] çalışmalarından faydalanılarak kararlılık problemleri incelendi. Kararlılık problemleri ile özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar için belirli şartlar altında spektral fonksiyonlar ve özfonksiyonlar farkı için sonlu sınırlar elde edildi. Aynı zamanda normlaştırıcı sayıların iki spektruma göre ifadesini veren formüller elde edildi.

2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sunulan tezde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli kavramlar, teoremler ve örnekler verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı denir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için,

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.

5) $1x = x$

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [30].

Tanım 2.1.2. X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için,

M1) $d(x, y) \geq 0$

M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [30].

Tanım 2.1.3. Bir (X, d) metrik uzayında bir (x_n) dizisini ele alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [30].

Örnek 2.1.5. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $l_\infty = \{x = (x_n) \in K^\infty \mid (x_n) \text{ sınırlı}\}$ uzayı ve $x = (x_n), y = (y_n) \in l_\infty$ olmak üzere

$$d_\infty(x, y) = \{\sup |x_k - y_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

metriğine göre bir metrik uzaydır. $l_\infty, C[a, b], \mathbb{R}^n$ gibi uzaylar tam uzaylardır. Fakat $\mathbb{Q}$ tam değildir.

Tanım 2.1.6. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: X \rightarrow K \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonu X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

- N1) $\|x\| \geq 0, (x \in X)$
- N2) $\|x\| = 0 \iff x = \theta, (x \in X)$
- N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, (\alpha \in K, x \in X)$
- N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (x, y \in X)$ [30].

Tanım 2.1.7. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında aldığımız her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya tam veya Banach uzayı adı verilir [30].

Tanım 2.1.8. (Hilbert Uzayı) Herhangi $x, y, z, \dots$ elemanlar cümlesini H ile göstere-
lim.

- 1) H lineer kompleks (reel) uzaydır.
- 2) H 'da bulunan her (x, y) eleman çiftine bu elemanların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen karmaşık (reel) bir sayı karşılık gelir. Bu iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar.

- a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$
- b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,$
- c) $\forall \lambda \in \mathbb{C} (\mathbb{R})$ için $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$

d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3) $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.

4) Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur.

Yani H sonsuz boyutludur.

(1), (2) ve (3) aksiyomları sağlanıyorsa H uzayına üniter Hilbert uzayı denir. (1), (2), (3) ve (4) özellikleri sağlanıyor ise H uzayına soyut Hilbert uzayı veya kısaca Hilbert uzayı denir.

Başka bir ifade ile tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [28].

Tanım 2.1.9. $a < t < b$ olmak üzere $L_2[a, b]$ uzayı

$$L_2[a, b] = \left\{ f(t) : \int_a^b (f(t))^2 dt < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada reel durumda $\overline{g(t)} = g(t)$ şeklindedir [30].

Tanım 2.1.10. (Operatör) Tanım ve değer cümlesi bir vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [30].

Tanım 2.1.11. (Lineer Operatör) E_x ve E_y iki reel lineer topolojik uzay olsun. Değer bölgesi E_y 'de bulunan ve E_x 'de tanımlı $y = Ax$ operatörünü göz önüne alalım. A operatörü için,

1) $x_1, x_2 \in E_x$ olmak üzere $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$

2) λ bir skaler olmak üzere $\forall x \in E_x$ için $A(\lambda x) = \lambda Ax$

şartları sağlanıyorsa A operatörüne lineer operatör denir [30].

Tanım 2.1.12. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun.

$$\|Lx\| \leq c \|x\|$$

olacak biçimde bir $c > 0$ reel sayısı varsa, L operatörüne sınırlıdır denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise L operatörünün normu denir [30].

Tanım 2.1.13. (Süreklili Operatör) X ve Y normlu uzaylar $L : X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|Lx - Lx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa L operatörü $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir [30].

Tanım 2.1.14. (Adjoint Operatör) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^* : H_1 \rightarrow H_2$ operatörü

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$$

şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L 'nin adjointi denir. Eğer $L^* = L$ ise L 'ye self-adjoint operatör denir [30].

Tanım 2.1.15. (Dönüşüm Operatörü) E lineer topolojik uzay, A ve B , $A : E \rightarrow E$, $B : E \rightarrow E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 'ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

- i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,
- ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir ve $X_{A,B}$ ile gösterilir [33].

Lemma 2.1.16. E uzayında A , B ve C lineer operatörleri ve E_1 , E_2 , E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A ve B operatörler çifti için $X_{A,B}$ dönüşüm operatörü

$$X_{A,B} : E_2 \rightarrow E_3$$

şeklinde, B ve C operatörler çifti için $X_{B,C}$ dönüşüm operatörü ise

$$X_{B,C} : E_1 \rightarrow E_2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda A ve C operatörler çifti için $X_{A,C}$ dönüşüm operatörü

$$X_{A,C} : E_1 \rightarrow E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A,C} = X_{A,B}X_{B,C}$$

formülü ile ifade edilir.

Lemma 2.1.17. (Fourier İntegral Teoremi) $f(x)$ parçalı sürekli, parçalı türevlenebilir ve mutlak integrallenebilir yani $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ olsun. Bu takdirde

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w(t-x) dt$$

eşitliği vardır. Ayrıca $\cos w(t-x)$, w 'nin çift fonksiyonu ve $\sin w(t-x)$, w 'nin tek fonksiyonu olduğunda

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w(t-x) dt$$

ve

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin w(t-x) dt$$

sağlanır [74].

Tanım 2.1.18. $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ 'lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [52].

Tanım 2.1.19. $D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x, \lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise, λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [36].

Tanım 2.1.20. $\{\lambda_n\}$ 'ler L operatörünün özdeğerleri ve $y(x, \lambda_n)$ 'ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b \{y_1^2(x, \lambda_n) + y_2^2(x, \lambda_n)\} dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [36].

Tanım 2.1.21. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının herhangi bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [25].

Tanım 2.1.22. $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ 'ye tam fonksiyon denir. e^z , $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır [25].

Tanım 2.1.23. $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $f(z)$ 'ye W 'de sınırlı fonksiyon denir [25].

Tanım 2.1.24. (Liouville Teoremi) Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur [25].

Tanım 2.1.25. $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$ 'nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) = 0$, $f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n -katlı sıfırı diye adlandırılır [25].

Tanım 2.1.26. $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0 'da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0 'a $f(z)$ 'nin ayırık singüler (aykırı) noktası denir [25].

Tanım 2.1.27. z_0 , $f(z)$ fonksiyonunun ayırık bir singüler noktası olsun.

i) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ 'nin kutup noktası (kutup yeri) denir.

iii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse z_0 noktasına $f(z)$ 'nin esas aykırı noktası denir [25].

Teorem 2.1.28. (Riemann Lebesgue Teoremi) f sonlu veya sonsuz I aralığı üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(u) \sin \lambda u du = 0$$

eşitliği geçerlidir [39].

Tanım 2.1.29. $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r 'ler için

$$M(r) < \exp(r^\mu)$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$ 'nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir [68].

Teorem 2.1.30. (Hadamard Teoremi) Mertebesi $\rho \in (0, 1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m , $f(z)$ 'nin orjindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n \geq 1}$ ise $f(z)$ 'nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir [32].

Tanım 2.1.31. (O ve o sembolleri) $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ve $X \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir limit noktası ve $f(x)$ X kümesi üzerinde tanımlı olsun. Buna göre $x \in X$, $x \rightarrow a$ iken $f(x) = o(1)$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyleki $\forall x \in \cup_\delta(a) \cap X$ için $|f(x)| < \varepsilon$ kalır. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır. Eğer $\forall x \in \cup_\delta(a) \cap X$ için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $x \in X$, $x \rightarrow a$ iken $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır [68].

Teorem 2.1.32. (Leibniz Formülü) Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu, $\{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \leq t \leq d$ için

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

dir. Bu teoremin sonucu olarak; $a(t)$ ve $b(t)$, (c, d) aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + b'(t) f(b(t), t) - a'(t) f(a(t), t).$$

Teorem 2.1.33. (Düzgün Yakınsaklık) $\sum f_k$ bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_k$ serisi A üzerinde düzgün yakınsak olması için

gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > m \geq n_0$ ve her $x \in A$ için $\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır [25].

Tanım 2.1.34. (Mutlak Yakınsaklık) Terimleri $\sum f_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden oluşan $\sum |f_k|$ serisi yakınsak ise $\sum f_k$ serisi mutlak yakınsaktır denir. Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır [25].

Tanım 2.1.35. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Cauchy-Bunjakowski eşitsizliği denir [68].

Tanım 2.1.36. (Sınırlı Salınlı Fonksiyon) $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınlı olması için gerek ve yeter şart $[a, b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin mevcut olmasıdır [4].

Tanım 2.1.37. (Total Salınım) Eğer $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sınırlı salınlı ise o halde f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde total salınımı [4]

$$V_f(a, b) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \mid P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, [a, b] \text{'nin bir parçalanmasıdır.} \right\}$$

Örnek 2.1.38. $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan olsun. O halde $[a, b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \{f(x_i) - f(x_{i-1})\} = f(x_n) - f(x_0) \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

olur. Böylece f sınırlı salınlıdır ve total salınımı $V_f(a, b) = f(b) - f(a)$ olur.

Tanım 2.1.39. $0 \leq x \leq \infty$ yarı ekseninde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu bazı sınırlı aralıklar dışında sıfırlanıyorsa kompakt desteğe sahiptir denir [46].

3. DÖNÜŞÜM OPERATÖRÜ

Bu bölümde, tanımı ve özellikleri ikinci bölümde verilmiş olan Sturm-Liouville problemi için dönüşüm operatörünün teorik uygulaması verilecektir.

3.1. Sturm-Liouville Operatörleri İçin Dönüşüm Operatörü

$q(x)$ ve $p(x)$ reel değerli integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$A \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad B \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri göz önüne alınsın.

$E, f(x) \in C^1[0, x], (0 \leq x < \infty)$ fonksiyonlarından oluşan reel değerli bir uzay, h_1 ve h_2 sonlu reel sayılar, E_1 ve E_2 ise sırasıyla

$$f'(0) = h_1 f(0),$$

$$f'(0) = h_2 f(0)$$

sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlardan oluşan E 'nin alt uzayları olsun.

Teorem 3.1.1. $X = X_{A,B} : E_1 \rightarrow E_2$ dönüşüm operatörü $f(x) \in E_1$ için

$$X\{f(x)\} = f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t) dt \quad (3.1.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda (3.1.1) operatörünün $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - q(x) K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - p(x) K(x, t), \quad (3.1.2)$$

$$K(x, x) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2} \int_0^x (q(s) - r(s)) ds, \quad (3.1.3)$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial t} - h_1 K \right] \Big|_{t=0} = 0 \quad (3.1.4)$$

probleminin çözümüdür. Tersine eğer $K(x, t)$, (3.1.2)-(3.1.4) probleminin çözümü ise (3.1.1) ifadesi ile tanımlı X operatörü A ve B çifti için bir dönüşüm operatörüdür. Ayrıca A operatöründe $q(x) = 0$ ise dönüşüm operatörü aşağıdaki şekildedir

$$X\{\cos \sqrt{\lambda} x\} = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt.$$

3.2. Dönüşüm Operatörü İçin Uygulamalar

$q(x)$ her sonlu aralıkta integrallenebilir, sonlu reel değerli keyfi bir fonksiyon olmak üzere, $0 < x < \infty$ yarı ekseninde tanımlı

$$L[y] = -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y$$

Sturm-Liouville diferansiyel ifadesi ele alınsın. $L[y] \in L^2(0, \infty)$ ve $y(x)$ sonlu fonksiyonlarından oluşan manifold üzerinde tanımlı bu diferansiyel ifade

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

sınır koşulu ile birlikte $L^2(0, \infty)$ uzayında bir L simetrik operatörünü oluşturur. $q(x)$ potansiyel, h sınır parametresi olmak üzere L operatörü $L(h, q)$ ile gösterilsin.

$$L[w] = \mu w \quad (3.2.1)$$

denkleminin

$$w(\mu, 0) = 1, \quad w'(\mu, 0) = h \quad (3.2.2)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $w(\mu, x)$ olsun. Her $f(x) \in L^2(0, \infty)$ fonksiyonları için

$$E_f(\mu) = \int_0^\infty f(x) w(\mu, x) dx,$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty E_f(\mu) w(\mu, x) d\rho(\mu)$$

açılımları sağlanmak üzere L operatörüne en az bir $\rho(\mu)$, $(\rho(-\infty) = 0)$ azalmayan fonksiyonu karşılık geldiği bilinmektedir [73]. Bu integraller sırasıyla $L^2(0, \infty)$, $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ uzaylarındaki metriklere göre yakınsaktırlar. Ayrıca her $f(x), g(x) \in L^2(0, \infty)$ fonksiyon çifti için

$$\int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^\infty E_f(\mu) \overline{E_g(\mu)} d\rho(\mu) \quad (3.2.3)$$

Parseval eşitliği sağlanır. Burada $\rho(\mu)$ fonksiyonuna L operatörünün spektral fonksiyonu denir. Her spektral fonksiyon L operatörünü bire bir olarak tanımlar. Yani spektral fonksiyona göre $q(x)$ potansiyeli ve h parametresi bire bir olarak tanımlanır [14], [42].

A keyfi negatif olmayan bir sayı, $\alpha(0) = 0$ olmak üzere $\alpha(x)$ azalmayan keyfi sürekli fonksiyon olsun. V_α^A cümlesi ile

$$|h| < A, \quad \int_0^x |q(t)| dt \leq \alpha(x), \quad 0 < x < \infty$$

şartlarını sağlayan tüm $L(h, q)$ operatör cümlesi gösterilsin. $L_j(h_j, q_j)$ ($j = 1, 2$) operatörleri V_α^A cümlesine ait olsun. Bu problemlere karşılık gelen $w_1(\mu, x)$, $w_2(\mu, x)$ çözümleri dönüşüm operatöründen faydalanılarak

$$w_2(\mu, x) = w_1(\mu, x) + \int_0^x K_2^1(x, t) w_1(\mu, t) dt$$

integral denklemiyle ifade edilebilir ve tersine

$$w_1(\mu, x) = w_2(\mu, x) + \int_0^x K_1^2(x, t) w_2(\mu, t) dt$$

şeklinde gösterilebilir. Daha sade bir ifadeyle sırasıyla bu dönüşüm operatörlerinin görüntüsünü

$$\begin{aligned} w_2 &= (I + K_2^1) w_1, \\ w_1 &= (I + K_1^2) w_2 \end{aligned}$$

şeklinde göstermek mümkündür.

Burada $K_2^1(x, t)$ ve $K_1^2(x, t)$ çekirdekleri x ve t değişkenlerine göre mutlak sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca

$$K_i^j(x, x) = h_i - h_j + \frac{1}{2} \int_0^\infty (q_i(s) - q_j(s)) ds, \quad (i, j = 1, 2, i \neq j)$$

bağıntısı mevcuttur. Sadelik için

$$w_{1,2}(\mu, x) = w_1(\mu, x) - w_2(\mu, x); \quad h_{1,2} = h_1 - h_2$$

$$q_{1,2}(x) = q_1(x) - q_2(x); \quad \rho_{1,2}(\mu) = \rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)$$

$$K_{1,2}(x, t) = K_1(x, t) - K_2(x, t)$$

gösterimleri kullanılmak üzere burada spektral fonksiyonların farkından faydalanarak $w_{1,2}(\mu, x)$ ve $K_{1,2}(x, x)$ fonksiyonlar farkı için Lemmalar verilecektir.

Lemma 3.2.1. Her λ ve x için

$$I_j(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu, x) d\rho_j(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt, \quad (j = 1, 2)$$

integrali mevcuttur ve

$$w_{1,2}(\lambda, x) = - \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \quad (3.2.4)$$

eşitliği sağlanır [45].

İspat $j = 1$ için

$$\begin{aligned} I_1(\lambda, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\mu, x) d\rho_1(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} (K_2^1 w_1)(\mu, x) d\rho_1(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Eş yakınsaklığa ilişkin teoremden dolayı (3.2.5)'deki birinci integral mevcuttur ve Fourier integral teoremi ile $\frac{1}{2}w_1(\lambda, x)$ 'e eşittir. (3.2.5)'deki ikinci integralin ise

$$(K_2^1 w_1) \in L_{\rho_1}^2, \quad \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \in L_{\rho_1}^2$$

özelliklerinden mutlak yakınsak olduğu görülür. (3.2.3) Parseval eşitliği kullanılarak

$$w_1(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\mu, x) d\rho_1(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt$$

yazılabilir. Burada son eşitliğin her iki tarafı $K_2^1(x, t)$ ile çarpılıp 0'dan x 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (K_2^1 w_1)(\mu, x) d\rho_1(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt &= (K_2^1 w_1)(\lambda, x) \\ &= w_2(\lambda, x) - w_1(\lambda, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$I_1(\lambda, x) = w_2(\lambda, x) - \frac{1}{2}w_1(\lambda, x) \quad (3.2.6)$$

eşitliği elde edilir. $j = 2$ için

$$\begin{aligned} I_2(\lambda, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu, x) d\rho_2(\mu) \int_0^x w_2(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu, x) d\rho_2(\mu) \int_0^x (K_1^2 w_2)(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \end{aligned}$$

yazılabilir. $I_2(\lambda, x)$ fonksiyonu için de eş yakınsaklığa ilişkin teoremden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
I_2(\lambda, x) &= \frac{w_1(\lambda, x)}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu, x) d\rho_2(\mu) \int_0^x \int_0^t K_1^2(t, \tau) w_2(\mu, \tau) w_1(\lambda, t) d\tau dt \\
&= \frac{w_1(\lambda, x)}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu, x) d\rho_2(\mu) \int_0^x w_2(\mu, \tau) d\tau \int_{\tau}^x K_1^2(t, \tau) w_1(\lambda, t) dt \\
&= \frac{w_1(\lambda, x)}{2} + \frac{1}{2} \left(\int_{\tau}^x K_1^2(t, \tau) w_1(\lambda, t) dt \right)_{\tau=x} \\
&= \frac{w_1(\lambda, x)}{2}
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. (3.2.6) ve (3.2.7) eşitlikleri birlikte ele alındığında Lemma 3.2.1'in ispatı tamamlanır.

Lemma 3.2.2. Her kompleks λ ve $0 < x < \infty$ için

$$\begin{aligned}
w_{1,2}^2(\lambda, x) &= h_{1,2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) - w_1(\lambda, x) w_2(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\
&+ \int_0^x q_{1,2}(t) dt \\
&\times \int_0^{\infty} \frac{w_1(\lambda, t) w_2(\lambda, t) w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) - w_1(\lambda, x) w_2(\lambda, x) w_1(\mu, t) w_2(\mu, t)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu)
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

eşitliği sağlanır [45].

İspat (3.2.1) denkleminin (3.2.2) koşulunu sağlayan çözümü için

$$\int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt = \frac{w_1'(\lambda, x) w_1(\mu, x) - w_1'(\mu, x) w_1(\lambda, x)}{\mu - \lambda}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifade (3.2.4) formülünün sağ kısmında yerine konulursa

$$w_{1,2}(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu, x) \frac{w_1'(\mu, x) w_1(\lambda, x) - w_1'(\lambda, x) w_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Benzer eşitliği $w_{2,1}(\lambda, x)$ fonksiyonuna göre yazmak için (3.2.9) denkleminin sağ kısmında w_1 ve w_2 fonksiyonlarının yerlerini değiştirmek ve $\rho_{1,2}(\mu)$ fonksiyonunu ise $\rho_{2,1}(\mu)$ ile değiştirmek gereklidir. Fakat $w_{2,1} = -w_{1,2}$ ve $\rho_{1,2} = -\rho_{2,1}$ olduğundan elde edilen yeni denklem

$$w_{1,2}(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\mu, x) \frac{w_2'(\mu, x) w_2(\lambda, x) - w_2'(\lambda, x) w_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \tag{3.2.10}$$

bağıntısına denktir. $\text{Im } \lambda \neq 0$ olsun. Bu durumda her $0 < x < \infty$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2(\mu, x) w_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_j(\mu), \quad (j = 1, 2) \tag{3.2.11}$$

integralleri mevcuttur. Gerçekten $w_2(\mu, x)$ ve $w_1(\mu, x)$, $0 \leq x < \infty$ için μ 'ye göre sınırlı fonksiyonlardır (operatör dönüşümlerinin görüntüsünden elde edilir). $\mu < 0$ için bu dönüşümlerin görüntüsünden $|w_j(\mu, x)| < Ce^{\sqrt{|\mu|x}}$ elde edilir. Burada C , μ 'den bağımsız bir sabittir fakat [34, 42] çalışmalarından bilindiği üzere

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\rho_j(\mu) - \frac{2}{\pi} \sqrt{\mu} \right) = \rho_j(-\infty) - h_j$$

ve her $x \geq 0$ için

$$\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{|\mu|x}} d\rho_j(\mu)$$

integrali mevcuttur. Buradan (3.2.11) integralinin varlığı ve dolayısıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2(\mu, x) w_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu)$$

integralinin varlığı elde edilir. Böylece (3.2.9) ve (3.2.10)'daki her terimi integrallemek mümkün olur. (3.2.9)'dan (3.2.10)'u çıkarırsak

$$\begin{aligned} 0 = & w_1(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2(\mu, x) w_1'(\mu, x) w_1(\lambda, x) - w_1(\mu, x) w_2'(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & + w_{1,2}(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_1(\mu, x) w_2'(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & - (w_1'(\lambda, x) - w_2'(\lambda, x)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2(\mu, x) w_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

elde edilir. (3.2.10) denklemini $w_{1,2}(\lambda, x)$ ile (3.2.12) denklemini ise $w_2(\lambda, x)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} w_{1,2}^2(\lambda, x) = & \{w_1'(\lambda, x) w_2(\lambda, x) - w_2'(\lambda, x) w_1(\lambda, x)\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_1(\mu, x) w_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & - w_1(\lambda, x) w_2(\lambda, x) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_1'(\mu, x) w_2(\mu, x) - w_2'(\mu, x) w_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

elde edilir. (3.2.1) denkleminin (3.2.2) koşulundan w_1 ve w_2 fonksiyonları için

$$w_1'(\lambda, x) w_2(\lambda, x) - w_2'(\lambda, x) w_1(\lambda, x) = h_{1,2} + \int_0^x q_{1,2}(t) w_1(\lambda, t) w_2(\lambda, t) dt$$

eşitliği sağlanır. Buna göre (3.2.13) denklemini

$$\begin{aligned} w_{1,2}^2(\lambda, x) = & h_{1,2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) - w_1(\lambda, x) w_2(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & + \int_0^x q_{1,2}(t) w_1(\lambda, t) w_2(\lambda, t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_1(\mu, x) w_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & - w_1(\lambda, x) w_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{1,2}(\mu)}{\mu - \lambda} \int_0^x q_{1,2}(t) w_1(\mu, t) w_2(\mu, t) dt \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Son eşitlikte integralleme sırasını değiştirerek $\text{Im } \lambda \neq 0$ için Lemma 3.2.2'nin ispatı elde edilir.

Şimdi ise $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ için Lemmayı ispatlayalım. Ayrıca (3.2.4) ve (3.2.8) eşitliklerinin genelleştirilmesi olarak bilinen farklı bir formülü $w_{1,2}(\lambda, x)$ için yazalım. Bunun için $I = (a, b)$ herhangi bir aralık CI ise bu aralığın eksene tamamlayıcısı olsun. (3.2.9) ve (3.2.10) formüllerinin yerine sırasıyla

$$\begin{aligned} w_{1,2}(\lambda, x) &= - \int_I w_2(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \\ &\quad + \int_{CI} w_2(\mu, x) \frac{w_1'(\mu, x) w_1(\lambda, x) - w_1'(\lambda, x) w_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{1,2}(\lambda, x) &= - \int_I w_1(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x w_2(\mu, t) w_2(\lambda, t) dt \\ &\quad + \int_{CI} w_1(\mu, x) \frac{w_2'(\mu, x) w_2(\lambda, x) - w_2'(\lambda, x) w_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Lemma 3.2.2'nin ispatında benzer dönüşümler yapılarak

$$\begin{aligned} w_{1,2}^2(\lambda, x) &= \\ &= w_2(\lambda, x) \int_I w_2(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x w_1(\mu, t) w_1(\lambda, t) dt \\ &\quad - w_1(\lambda, x) \int_I w_1(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x w_2(\mu, t) w_2(\lambda, t) dt \\ &\quad + h_{1,2} \int_{CI} \frac{w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) - w_1(\lambda, x) w_2(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ &\quad + \int_0^x q_{1,2}(t) dt \\ &\quad \times \int_{CI} \frac{w_1(\lambda, t) w_2(\lambda, t) w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) - w_1(\lambda, x) w_2(\lambda, x) w_1(\mu, t) w_2(\mu, t)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $\rho_{1,2}(\mu)$ spektral fonksiyonlar farkından faydalanarak $K_{1,2}(x, x)$ çekirdek fonksiyonlar farkının görüntüsüne ilişkin formülü veren aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.2.3. Her $0 < x < \infty$ için

$$K_{1,2}(x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$R_N(x) = \int_{-\infty}^N w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu)$$

fonksiyonu ele alınsın. Lemma 3.2.2'nin ispatında not edildiği gibi bu integral mevcuttur ve aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} R_N(x) &= \int_{-\infty}^N w_1(\mu, x) [w_1(\mu, x) + (K_2^1 w_1)(\mu, x)] d\rho_1(\mu) \\ &\quad - \int_{-\infty}^N w_2(\mu, x) [w_2(\mu, x) + (K_1^2 w_2)(\mu, x)] d\rho_2(\mu) \\ &= \int_{-\infty}^N w_1(\mu, x) w_1(\mu, x) d\rho_1(\mu) - \int_{-\infty}^N w_2(\mu, x) w_2(\mu, x) d\rho_2(\mu) \\ &\quad + \int_{-\infty}^N w_1(\mu, x) (K_2^1 w_1)(\mu, x) d\rho_1(\mu) - \int_{-\infty}^N w_2(\mu, x) (K_1^2 w_2)(\mu, x) d\rho_2(\mu). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Spektral çekirdeğin asimptotik davranışına ilişkin [34] teoremden dolayı

$$\int_{-\infty}^N w_1(\mu, x) w_1(\mu, x) d\rho_1(\mu) - \int_{-\infty}^N w_2(\mu, x) w_2(\mu, x) d\rho_2(\mu)$$

farkı $N \rightarrow \infty$ iken her $0 < x < \infty$ için sıfıra yakınsaktır. Eş yakınsaklığa ilişkin teoremden dolayı (3.2.14)'ün sağ tarafında kalan iki terimde limite sahiptir ve bu limitler sırasıyla $\frac{1}{2}K_2^1(x, x)$ ve $\frac{1}{2}K_1^2(x, x)$ şeklindedir. Bu yüzden her $0 < x < \infty$ için $N \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \lim R_N(x) &= \int_{-\infty}^N w_1(\mu, x) w_2(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \\ &= \frac{1}{2} (K_2^1(x, x) - K_1^2(x, x)) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca

$$\frac{1}{2} (K_2^1(x, x) - K_1^2(x, x)) = -h_{1,2} - \frac{1}{2} \int_0^x q_{1,2}(t) dt = -K_{1,2}(x, x)$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.2.3'ün ispatı tamamlanır.

3.3. Yarı Eksende Parseval Eşitliği

Bir Sturm-Liouville operatörünün tanım aralığı sonsuz veya yarı sonlu ise ve potansiyel fonksiyonu $q(x)$ sonlu aralık üzerinde toplanabilir değilse bu şartların ikisi veya herhangi biri sağlandığı takdirde Sturm-Liouville operatörüne singülerdir denir.

Bu kısımda singüler Sturm-Liouville problemi için Parseval eşitliği incelenecektir. $q(x)$, sonlu $0 < x < b$ aralığı üzerinde sürekli olmak üzere $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlanan

$$-y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \quad (3.3.1)$$

denklemini ele alınsın. α keyfi reel sayı olmak üzere $y(x, \lambda)$ (3.3.1) denkleminin

$$y(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad y'(0, \lambda) = -\cos \alpha \quad (3.3.2)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Açıktır ki $y(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$y(0, \lambda) \cos \alpha + y'(0, \lambda) \sin \alpha = 0 \quad (3.3.3)$$

sınır şartını sağlar.

b keyfi pozitif sayı ve β keyfi bir reel sayı olmak üzere (3.3.3) sınır şartına

$$y(b, \lambda) \cos \beta + y'(b, \lambda) \sin \beta = 0 \quad (3.3.4)$$

şartını da ekleyerek (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4) problemini ele alalım. Bu problem regüler Sturm-Liouville problemi olup $\lambda_{n,b}$ bu problemin özdeğerleri ve $y_{n,b}(x) = y(x, \lambda_{n,b})$ (3.3.2) başlangıç şartını sağlayan bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. $f(x) \in L^2(0, b)$ olsun. Bu problemin normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_{n,b}^2 = \int_0^b y_{n,b}^2(x) dx$$

ve normalleştirilmiş özfonksiyonları

$$v_n(x) = \frac{1}{\alpha_{n,b}} y_{n,b}(x)$$

şeklinde olup Parseval eşitliği ile

$$\int_0^b f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} \left(\int_0^b f(x) y_{n,b}(x) dx \right)^2 \quad (3.3.5)$$

formülüne sahibiz.

Eğer monoton artan bir merdiven fonksiyonu

$$\rho_b(\lambda) = \begin{cases} \sum_{0 < \lambda_{n,b} < \lambda} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} & , \lambda > 0 \\ - \sum_{\lambda < \lambda_{n,b} < 0} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} & , \lambda \leq 0 \end{cases}$$

formülü ile verilirse (3.3.5) eşitliği

$$F(\lambda) = \int_0^b f(x) y(x, \lambda) dx$$

olmak üzere

$$\int_0^b f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\rho_b(\lambda) \quad (3.3.6)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.3.1), (3.3.3) singüler problemi için Parseval eşitliği (3.3.6) eşitliğinde $b \rightarrow \infty$ iken elde edilir. Bu kısmı sonlandırmak için aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 3.3.1. Herhangi pozitif N sayısı için λ 'ların her sonlu aralığında

$$\begin{aligned} V_{-N}^N \{\rho_b(\lambda)\} &= \sum_{-N < \lambda_{n,b} < N} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} \\ &= \rho_b(N) - \rho_b(-N) \\ &< A \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

olacak şekilde b 'den bağımsız pozitif sabit bir $A = A(N)$ sayısı mevcuttur. $\rho_b(\lambda)$ fonksiyonunun total salınımı b 'ye göre düzgün sınırlıdır.

İspat İlk olarak $\sin \alpha \neq 0$ durumu ele alınsın. $y(x, \lambda)$ fonksiyonu $-N \leq \lambda \leq N$ ve $0 \leq x \leq a$ (a keyfi sabit pozitif sayı) aralığında sürekli olduğundan ve $y(0, \lambda) = \sin \alpha$ şartından $|\lambda| < N$ için

$$\left(\frac{1}{h} \int_0^h y(x, \lambda) dx \right)^2 > \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \quad (3.3.8)$$

şartı sağlanacak şekilde pozitif küçük bir h sayısı vardır.

Eğer (3.3.6) denklemindeki fonksiyon

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 \leq x < h \\ 0, & x \geq h \end{cases}$$

şeklinde seçilirse o halde (3.3.8) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_0^h f_h^2(x) dx &= \frac{1}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h y(x, \lambda) dx \right\}^2 d\rho_b(h) \\
&\geq \int_{-N}^N \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h y(x, \lambda) dx \right\}^2 d\rho_b(h) \\
&> \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \int_{-N}^N d\rho_b(h) \\
&= \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \{ \rho_b(N) - \rho_b(-N) \}
\end{aligned}$$

buradan (3.3.7) eşitliği elde edilir.

$\sin \alpha = 0$ durumu içinse (3.3.6) Parseval eşitliğindeki fonksiyonu

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}, & 0 \leq x < h \\ 0, & x \geq h \end{cases}$$

seçersek buradan (3.3.7) eşitliği elde edilir. Lemma 3.3.1'in ispatı tamamlanır.

Şimdi Lemma 3.3.1'i ve Stieltjes integral işareti altında limite geçme hakkındaki teoremi kullanarak (3.3.1)-(3.3.3) problemi için Parseval eşitliğini türetelim.

İlk olarak $f_n(x)$ fonksiyonları $n < b$ için $0 \leq x \leq b$ aralığının dışında sıfırlansın. $f_n(x)$ fonksiyonları ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun ve (3.3.3) sınır koşulunu sağlasın. (3.3.6) Parseval eşitliği uygulanarak

$$\int_0^n f_n^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(\lambda) d\rho_b(\lambda) \quad (3.3.9)$$

elde edilir. Burada

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f_n(x) y(x, \lambda) dx$$

şeklindedir.

$f_n(x)$ ve $y(x, \lambda)$ fonksiyonları (3.3.3) sınır koşulunu sağladığından ve $f_n(x)$ 'ler b noktasının komşuluğunda sıfıra özdeş olduğundan Green özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
F_n(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^b f_n(x) \{y''(x, \lambda) - q(x) y(x, \lambda)\} dx \\
&= -\frac{1}{\lambda} \int_0^b y(x, \lambda) \{f_n''(x) - q(x) f_n(x)\} dx
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece keyfi ve sonlu $N > 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_{|\lambda|>N} F_n^2(\lambda) d\rho_b(\lambda) &\leq \frac{1}{N^2} \int_{|\lambda|>N} \left(\int_0^b y(x, \lambda) \{f_n''(x) - q(x) f_n(x)\} dx \right)^2 d\rho_b(\lambda) \\
&< \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^b y(x, \lambda) \{f_n''(x) - q(x) f_n(x)\} dx \right)^2 d\rho_b(\lambda) \\
&= \frac{1}{N^2} \int_0^b \{f_n''(x) - q(x) f_n(x)\}^2 dx
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.9) ve son eşitsizlikten

$$\left| \int_0^n f_n^2(x) dx - \int_{-N}^N F_n^2(\lambda) d\rho_b(\lambda) \right| < \frac{1}{N^2} \int_0^n \{f_n''(x) - q(x) f_n(x)\}^2 dx \quad (3.3.10)$$

olduğu görülür. Lemma 3.3.1'den $\{\rho_b(\lambda)\}$ ($-N \leq \lambda \leq N$) monoton fonksiyonlar cümlesi sınırlıdır. Böylece $\rho_b(\lambda)$ fonksiyonlarının $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonuna yakınsaması için bir $\{b_k\}$ dizisi seçilebilir. (3.3.10) eşitsizliğinde b_k 'lara göre limit alınırsa

$$\left| \int_0^n f_n^2(x) dx - \int_{-N}^N F_n^2(\lambda) d\rho(\lambda) \right| \leq \frac{1}{N^2} \int_0^n \{f_n''(x) - q(x) f_n(x)\}^2 dx$$

elde edilir. Son olarak $N \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^n f_n^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(\lambda) d\rho(\lambda)$$

bulunur ki bu eşitlik ise yukarıda verilen şartları sağlayan fonksiyonlar için Parseval eşitliğidir.

Şimdi $f(x)$ keyfi karesi integrallenebilen bir fonksiyon olsun, yani $f(x) \in L^2(0, \infty)$ olsun. Yukarıda verilen şartları sağlayan $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlarının bir dizisi mevcut olsun. Yani $f_n(x)$ fonksiyonları $[0, n]$ aralığının dışında sıfırlansın, (3.3.3) şartını sağlasın

ve sürekli ikinci mertebeden türevlere sahip olsunlar. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \{f(x) - f_n(x)\}^2 dx = 0$$

olur. $n, m \rightarrow \infty$ iken

$$\int_0^{\infty} \{f_n(x) - f_m(x)\}^2 dx \rightarrow 0$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(\lambda) - F_m(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_n(x) - f_m(x)\}^2 dx \rightarrow 0$$

eşitliğine sahibiz.

Böylece $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonuna göre karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı konusu tamamlanıyor. Buradan $F(\lambda)$ limit fonksiyonunun varlığı ve

$$\int_0^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\rho(\lambda)$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı açıktır.

Şimdi son olarak

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x) y(x, \lambda) dx$$

fonksiyonlarının $n \rightarrow \infty$ iken $F(\lambda)$ fonksiyonuna ortalama olarak yakınsadığını göstermeliyiz.

$g(x)$ karesi integrallenebilen diğer bir fonksiyon olsun. $G(\lambda)$ ise f 'den $F(\lambda)$ 'nın oluşturulduğu yolla $g(x)$ 'den oluşturulsun. Dolayısıyla

$$\int_0^{\infty} (f(x) - g(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\lambda) - G(\lambda))^2 d\rho(\lambda)$$

olduğu açıktır.

Şimdi $0 \leq x \leq n$ için $f(x) = g(x)$ ve $x > n$ için $g(x) = 0$ alınarak $n \rightarrow \infty$ iken

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F(\lambda) - F_n(\lambda))^2 d\rho(\lambda) = \int_n^{\infty} f^2(x) dx \rightarrow 0$$

elde edilir ki bu ise $F_n(\lambda)$ 'nın $F(\lambda)$ 'a ortalama olarak yakınsak olduğunu gösterir.

Böylelikle aşağıda ifadesi verilen teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 3.3.1. $f(x) \in L^2(0, \infty)$ olsun. $f(x)$ ve $F(\lambda)$ fonksiyonlarına bağlı olmayan monoton artan bir $\rho(\lambda)$ fonksiyonu vardır öyleki

$$\int_0^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\rho(\lambda)$$

eşitliği sağlar.

Burada $\rho(\lambda)$ fonksiyonuna spektral fonksiyon denir. Bilinir ki $\rho(\lambda)$ tek olmak zorunda değildir.

$F(\lambda)$ fonksiyonu

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x) y(x, \lambda) dx$$

sürekli fonksiyonlar dizisinin ortalama karesel limitidir, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = 0.$$

Kısalık açısından

$$F(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) y(x, \lambda) dx$$

ile gösterilir.

$f(x), g(x) \in L^2(0, \infty)$ uzayından iki fonksiyon olsunlar. $F(\lambda)$ ve $G(\lambda)$ ise sırasıyla bu fonksiyonların Fourier dönüşümleri olsun. O halde $f(x) \pm g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerinin $F(\lambda) \pm G(\lambda)$ olduğu açıktır. Bu sebeple

$$\int_0^{\infty} (f(x) + g(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\lambda) + G(\lambda))^2 d\rho(\lambda),$$

$$\int_0^{\infty} (f(x) - g(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (F(\lambda) - G(\lambda))^2 d\rho(\lambda)$$

yazılabilir. Burada üstteki eşitlikten alttaki eşitlik çıkarılırsa

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (3.3.11)$$

genelleştirilmiş Parseval eşitliği elde edilir.

Teorem 3.3.2. (Açılım Teoremi) $f(x) \in L^2(0, \infty)$ ve $0 \leq x < \infty$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda)$$

integrali her sonlu aralıkta x 'e göre düzgün ve mutlak yakınsak olsun. Bu takdirde

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat $g(x)$, sonlu $[0, n]$ aralığı dışında sıfırlanan sürekli bir fonksiyon olsun. O halde (3.3.11) eşitliği

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \left\{ \int_0^n g(x) y(x, \lambda) dx \right\} d\rho(\lambda)$$

şeklinde yazılabilir. Mutlak yakınsaklıktan son integraldeki integrasyon sırası değiştirilebilir. Yani

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_0^n g(x) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right\} dx$$

yazılır. Sürekli $g(x)$ fonksiyonu keyfi seçildiğinden, $f(x)$ fonksiyonu ve $\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda)$

ifadesi sürekli olduğundan

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) y(x, \lambda) d\rho(\lambda)$ ifadesinin sürekliliği integralin düzgün yakınsaklık kabulünden anlaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3. (Eş Yakınsaklık Teoremi) $f(x)$, $L_2(0, \infty)$ uzayında keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$w(\sqrt{\mu}, f) = \int_0^{\infty} f(x) w(\sqrt{\mu}, x) dx$$

ve

$$C_f(\mu) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \sqrt{\mu} x dx$$

integralleri sırasıyla $L^2_\rho(-\infty, \infty)$ ve $L_2(0, \infty)$ uzaylarında norm anlamında yakınsaktırlar. O halde her $b > 0$ için

$$\int_{-\infty}^0 w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu)$$

integrali $x \in [0, b]$ aralığında düzgün ve mutlak yakınsar. Ayrıca

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b} \left| \int_{-\infty}^N w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^N C_f(\mu) \cos \sqrt{\mu} x d\sqrt{\mu} \right| = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$u_M(x, t) = \int_{-M}^M w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) w(\sqrt{\mu}, t) d\rho(\mu) \quad (3.3.12)$$

fonksiyonu

$$u_{xx} - q(x)u = u_{tt} - q(t)u$$

diferansiyel denklemini ve

$$u(x, 0) = f_M(x), \quad u_t(x, 0) = hf_M(x)$$

başlangıç koşullarını sağlar. Burada

$$f_M(x) = \int_{-M}^M w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu)$$

şeklinde. Böylece Rieman formülünü kullanılarak ve

$$u_M(x, t) = u_M(t, x)$$

eşitliği dikkate alınarak $W(x, t, u)$ çekirdek fonksiyonu kendi değişkenlerine göre sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $u_M(x, t)$ fonksiyonu

$$u_M(x, t) = \frac{f_M(x+t) - f_M(|x-t|)}{2} + \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, u) f_M(u) du \quad (3.3.13)$$

formunda gösterilebilir. Şimdi (3.3.12) eşitliğinin her iki tarafına $w(\sqrt{\mu}, t)$ fonksiyonunu $\cos \sqrt{\mu} t$ 'ye dönüştüren dönüşüm operatörü uygulanırsa

$$\int_{-M}^M w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) \cos \sqrt{\mu} t d\rho(\mu) = u_M(x, t) + \int_0^t L(t, \xi) u_M(x, \xi) d\xi$$

elde edilir. Bu son eşitlikten sonsuz kere diferansiyellenebilen kompakt desteğe sahip tüm çift $g(t)$ fonksiyonları için

$$\int_{-M}^M C_g(\mu) w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) = \int_0^\infty g(t) \left\{ u_M(x, t) + \int_0^t L(t, \xi) u_M(x, \xi) d\xi \right\} dt \quad (3.3.14)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $M \rightarrow \infty$ olsun. Teorem 2.1.35 ile $f_M(x)$ dizisi $L_2[0, \infty)$ uzayında norm anlamında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak olur. Böylece (3.3.13) ve (3.3.14) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty C_g(\mu) w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) \\ &= \int_0^\infty g(t) \left\{ \frac{f_M(x+t) - f_M(|x-t|)}{2} + A_1(x, t) \right\} dt \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \int_{|x-t|}^{x+t} W(x, t, \xi) f(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^t L(t, \xi) \left\{ \frac{f_M(x+\xi) - f_M(|x-\xi|)}{2} + \int_{|x-\xi|}^{x+\xi} W(x, \xi, n) f(n) dn \right\} d\xi \end{aligned}$$

şeklinde. $W(t, x, \xi)$ ve $L(t, \xi)$ kendi değişkenlerine göre sınırlı fonksiyonlar olduğundan Cauchy-Bunjakowski eşitsizliği ile tüm $t \in [0, b]$ için

$$\sup_{0 \leq x \leq b} |A_1(x, t)| \leq C_1 t^{1/2} \left\{ \int_0^\infty |f(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2} \quad (3.3.16)$$

geçerlidir. Dönüşüm operatörünün varlığından $\mu \in (-\infty, 0]$ aralığında

$$\sup_{0 \leq x \leq b} |w(\sqrt{\mu}, x)| \leq C \exp b\sqrt{\mu}$$

eşitsizliği düzgün şekilde sağlanır. Sonuç olarak

$$\int_{-\infty}^0 w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu)$$

integrali $x \in [0, b]$ aralığında düzgün ve mutlak şekilde yakınsar. Ayrıca

$$A_2(x, t) = \int_{-\infty}^0 w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) [\cos \sqrt{\mu}t - 1] d\rho(\mu) \quad (3.3.17)$$

fonksiyonu tüm $t \in [0, b]$ için

$$\sup_{0 \leq x \leq b} |A_2(x, t)| \leq C_2 t \quad (3.3.18)$$

eşitsizliğini sağlar. Fourier integralleri için konvolüsyon teoremleri ile

$$\int_0^\infty g(t) \frac{f_M(x+t) - f_M(|x-t|)}{2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C_f(\mu) C_g(\mu) \cos \sqrt{\mu} x d\sqrt{\mu}$$

yazılabilir. O halde (3.3.15) eşitliği

$$\begin{aligned} & \int_{0^+}^\infty C_g(\mu) w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C_f(\mu) C_g(\mu) \cos \sqrt{\mu} x d\sqrt{\mu} \\ & + C_g(0) \int_{-\infty}^{0^+} w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) \\ & = \int_0^\infty g(t) A_3(x, t) dt \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $A_3(x, t) = A_1(x, t) - A_2(x, t)$ şeklindedir. Ayrıca (3.3.16) ve (3.3.18) eşitliklerinden

$$\sup_{0 \leq x \leq b} |A_3(x, t)| \leq C_3 t^{1/2}, \quad (0 \leq t \leq b) \quad (3.3.20)$$

olduğu açıktır. (3.3.19) eşitliğinde

$$g(t) = g_N(t) = \frac{2 \sin Nt}{\pi t} \varphi\left(\frac{t}{a}\right), \quad (0 < a < b)$$

alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{N^2} w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^{N^2} C_f(\mu) \cos \sqrt{\mu} x d\sqrt{\mu} \\ & = (1 - C_{g_N}(0)) \int_{-\infty}^{0^+} w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin Nt}{t} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) A_3(x, t) dt \\ & - \int_{0^+}^\infty w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) [S_\varphi(a(\sqrt{\mu} + N)) - S_\varphi(a(\sqrt{\mu} - N))] d\rho(\mu) \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C_f(\mu) \cos \sqrt{\mu} x [S_\varphi(a(\sqrt{\mu} + N)) - S_\varphi(a(\sqrt{\mu} - N))] d\sqrt{\mu} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$S_{\varphi}(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) - 1}{t} \sin \mu t dt$$

şeklindedir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki her bir terimi ayrı ayrı inceleyelim. $\varphi(x)$ fonksiyonu sonsuz kere diferansiyellenebilen $\varphi(0) = 1$ şartını sağlayan fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} (1 - C_{g_N}(0)) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \varphi(a^{-1}t)}{t} \sin Nt dt \end{aligned}$$

eşitliğinden Riemann-Lebesgue teoremi ile $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - C_{g_N}(0)) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak birinci terim $N \rightarrow \infty$ iken $x \in [0, b]$ aralığında sıfıra gider. Üçüncü ve dördüncü terimlerde

$$\sup_{\substack{0 \leq x \leq b \\ 0 \leq \mu < \infty}} |w(\sqrt{\mu}, x)| \leq \infty, \quad |\cos \sqrt{\mu} x| < 1, \quad |S_{\varphi}(\mu)| \leq \frac{C_{\varphi}}{1 + \mu^2}$$

eşitsizlikleri dikkate alınarak $x \in [0, b]$ aralığında sıfıra yakınsar.

Son olarak ikinci terimde (3.3.20) eşitsizliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq b} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\sin Nt}{t} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) A_3(x, t) dt \right| &\leq \frac{C_3}{\pi} \int_0^a t^{-1/2} dt \\ &= \frac{2C_3\sqrt{a}}{\pi} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b} \left| \int_{-\infty}^{N^2} w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^N C_f(\mu) \cos \sqrt{\mu} x d\sqrt{\mu} \right| \leq \frac{2C_3\sqrt{a}}{\pi}$$

burada a yeterince küçük seçilirse

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b} \left| \int_{-\infty}^{N^2} w(\sqrt{\mu}, f) w(\sqrt{\mu}, x) d\rho(\mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^N C_f(\mu) \cos \sqrt{\mu} x d\sqrt{\mu} \right| = 0$$

elde edilir ki buda elde etmek istediğimiz sonuçtur.

4. DİRAC OPERATÖRÜNÜN İKİ SPEKTRUMA GÖRE TANIMLANMASININ KARARLILIĞI

Bu kısımda Dirac operatörü için ayrık sınır koşullarıyla tanımlanmış kararlılık problemi ele alınacaktır. Dirac operatörünün spektral teorisi hakkında kısa bir özet verilecek olup detaylı bilgiye [36] kaynağından ulaşılabilir. Bu kısımda Dirac denkleminden türetilen sınır değer problemi için normlaştırıcı sayılarının iki spektruma göre ifadesi ve kararlılık teoremleri verilecektir.

4.1. Bir Boyutlu Dirac Operatörü

$p_{i,k} (i, k = 1, 2) [0, \pi]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$L(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x) = p_{21}(x)$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B \frac{d}{dx} + L(x) - \lambda I \right) y = 0 \quad (4.1.1)$$

denklemini iki adet birinci mertebeden

$$\begin{aligned} y_2'(x) + p_{11}(x) y_1(x) + p_{12}(x) y_2(x) &= \lambda y_1(x), \\ -y_1'(x) + p_{21}(x) y_1(x) + p_{22}(x) y_2(x) &= \lambda y_2(x) \end{aligned}$$

adi diferansiyel denklem sistemine denktir.

Burada $V(x)$ potansiyel fonksiyon, m parçacığın kütlesi olmak üzere $p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0$ ve $p_{11}(x) = V(x) + m$, $p_{22}(x) = V(x) - m$ iken relativistik kuantum teorisinde (4.1.1) sistemi 1-boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu uzayın her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \\ \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır. $y = Hz$ olacak şekilde (4.1.1) denkleminde bazı işlemler uygulanırsa

$$B \frac{dz}{dx} + \left(H^{-1} B \frac{d}{dx} H + H^{-1} L H \right) z = \lambda z \quad (4.1.2)$$

denklemini elde edilir. Burada $Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$ matrisi hesaplanırsa

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x) - p_{22}(x)}$$

ve

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre (4.1.1) denklemini

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \quad (4.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin 1. kanonik formu denir.

Şimdi $izQ(x) = p(x) + r(x) = 0$ olacak şekilde bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin. Bazı işlemler yapılarak

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x (p_{11}(z) + p_{22}(z)) dz$$

elde edilir. Buna göre (4.1.2) denklemini

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \quad (4.1.4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin 2. kanonik formu denir. (4.1.3) ve (4.1.4) denklemlerine (4.1.1) sisteminin kanonik formları denir. (4.1.1) denklem sisteminin spektral teorisinin çeşitli sorunlarını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin, özdeğerlerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışı araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (4.1.1) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken, (4.1.3) kanonik denkleminde faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (4.1.1) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (4.1.4) kanonik denkleminde faydalanmak kolaylık sağlar.

(4.1.3) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$ $[0, \pi]$ aralığında tanımlanmış reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} y_2' + (p(x) - \lambda) y_1 &= 0, \\ y_1' - (r(x) - \lambda) y_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} y_2(0) \cos \alpha + y_1(0) \sin \alpha &= 0, \\ y_2(\pi) \cos \beta + y_1(\pi) \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

sınır problemi ele alınsın. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x, \lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda_1) \\ y_2(x, \lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1 'e özdeğer, buna karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ 'e özvektör fonksiyon denir.

Lemma 4.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x, \lambda_1)$ ve $z(x, \lambda_2)$ özvektör fonksiyonları ortogonaldır. Yani

$$\int_0^\pi y_1(x, \lambda_1) z_1(x, \lambda_2) + y_2(x, \lambda_1) z_2(x, \lambda_2) dx = 0$$

olur.

Lemma 4.1.2. (4.1.5)-(4.1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

4.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektruma Göre İfadesi

$p_i(x)$ ve $q_i(x)$ ($i = 1, 2$) fonksiyonları $C^1[0, \pi]$ sınıfından, reel değerli fonksiyonlar

$$Q_i(x) = \begin{pmatrix} p_i(x) & q_i(x) \\ q_i(x) & -p_i(x) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ve λ spektral parametre olmak üzere

$$L_1 y = B y' + Q_1(x) y = \lambda y, \quad (4.2.1)$$

Dirac denklemiyle $[0, \pi]$ kapalı aralığı üzerinde

$$\begin{aligned} y_1(0) \cos \alpha + y_2(0) \sin \alpha &= 0, \\ y_1(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

ve

$$\begin{aligned} y_1(0) \cos \beta + y_2(0) \sin \beta &= 0, \\ y_1(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

sınır şartlarıyla tanımlanan özdeğer problemleri ele alınsın. Burada $0 \leq \alpha \leq \pi$ ve $0 \leq \beta \leq \pi$, $\alpha \neq \beta$ şartıyla alınan reel sabitlerdir.

(4.2.1)-(4.2.2) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_{1,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ ve (4.2.1), (4.2.3) probleminin özdeğerleri ise $\{\mu_{1,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri olsun.

(4.2.2) ve (4.2.3) sınır koşulları ile

$$L_2 y = B y' + Q_2(x) y = \lambda y \quad (4.2.4)$$

denklemini ele alalım. (4.2.2), (4.2.4) probleminin özdeğerlerini $\{\lambda_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ ile (4.2.3), (4.2.4) probleminin özdeğerlerini $\{\mu_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ ile gösterelim.

(4.2.1) ve (4.2.4) denklemlerinin

$$\varphi_1(\lambda, 0) = \sin \alpha, \quad \varphi_2(\lambda, 0) = -\cos \alpha \quad (4.2.5)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri sırasıyla $\varphi(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda, x) \\ \varphi_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$ ve

$\tilde{\varphi}(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1(\lambda, x) \\ \tilde{\varphi}_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$ fonksiyonları olsun.

$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ ve β_2 reel sabitler olmak üzere özdeğerler için asimptotik formüller

$$\lambda_{1,n} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.2.6)$$

$$\mu_{1,n} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.2.7)$$

$$\lambda_{2,n} = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.2.8)$$

$$\mu_{2,n} = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.2.9)$$

formundadır [11].

(4.2.1)-(4.2.2) probleminin normlaştırıcı sayıları ve spektral fonksiyonu sırasıyla $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a_{1,n} = \int_0^\pi \{\varphi_1^2(\lambda_{1,n}, x) + \varphi_2^2(\lambda_{1,n}, x)\} dx, \quad \rho_1(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_{1,n} < \lambda} \frac{1}{a_{1,n}} & , \lambda \geq 0 \\ - \sum_{\lambda < \lambda_{1,n}} \frac{1}{a_{1,n}} & , \lambda < 0 \end{cases}$$

şeklinde dir.

Benzer şekilde (4.2.2), (4.2.4) probleminin normlaştırıcı sayıları ve spektral fonksiyonu sırasıyla $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a_{2,n} = \int_0^\pi \{\tilde{\varphi}_1^2(\lambda_{1,n}, x) + \tilde{\varphi}_2^2(\lambda_{1,n}, x)\} dx, \quad \rho_2(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_{2,n} < \lambda} \frac{1}{a_{2,n}} & , \lambda \geq 0 \\ - \sum_{\lambda < \lambda_{2,n}} \frac{1}{a_{2,n}} & , \lambda < 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Spektral verilere göre potansiyel fonksiyonun elde edilmesi problemi ters problem olarak adlandırılır. Kanonik Dirac operatörü için ters problemin iki spektruma göre çözümünü Gasymov and Dzhabiev tarafından [9] çalışmasında verilmiştir. O halde bu çalışmadan faydalanarak (4.2.1)-(4.2.2) ve (4.2.2), (4.2.4) problemlerinin normlaştırıcı sayılarının iki spektruma göre ifadesi sırasıyla

$$a_{1,n} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\mu_{1,n} - \lambda_{1,n}} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n}}{\mu_{1,k} - \lambda_{1,n}}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$a_{2,n} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\mu_{2,n} - \lambda_{2,n}} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n}}{\mu_{2,k} - \lambda_{2,n}}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

formülleri ile verilir [9]. Burada $\prod'$ sembolü $k = n$. terimin sonsuz çarpımdan çıkarıldığını göstermektedir.

4.3. İki Spektruma Göre Kararlılık Problemlerinin Tanımlanması

Bu kısımda hem (4.2.1)-(4.2.2); (4.2.2), (4.2.4) problemlerinin özdeğerleri hem de (4.2.1), (4.2.3); (4.2.3), (4.2.4) problemlerinin özdeğerleri kendi aralarında $2N+2$ sayıda çakıştığında L_1 ve L_2 operatörlerinin farkı için bazı eşitsizlikler elde etmeye çalışacağız. İlk kararlılık teoremini aşağıdaki şekilde verelim.

Teorem 4.3.1. $\{\lambda_{j,k}\}$ ve $\{\mu_{j,k}\}$ ($j = 1, 2$) özdeğerleri $2N + 2$ adette çakışsınlar öyleki sırasıyla $k = 1, 2, \dots, N + 1$ için $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$; $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ ve $k = -1, -2, \dots, -N - 1$ için $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$; $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ olsun. O halde sırasıyla $\lambda > 0$ için $k > N + 1$, $n < \frac{N}{2}$ ve $\lambda < 0$ için $k < -N - 1$, $n > -\frac{N}{2}$ şartları altında $N \geq 2K$, $N \geq 2\tilde{K}$ iken

$$\begin{aligned} \text{Var} \quad \{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\} &< \begin{cases} Ae^A \rho_1\left(\frac{N}{2}\right) & , \lambda > 0 \\ \tilde{A}e^{\tilde{A}} \rho_2\left(-\frac{N}{2}\right) & , \lambda < 0 \end{cases} \\ -\infty < \lambda < \frac{N}{2} & \\ -\frac{N}{2} < \lambda < \infty & \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

eşitsizlikleri söz konusudur. Burada

$$K = \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \tilde{K} = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$A = \frac{2\left(K + \tilde{K}\right)\left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N}$$

ve

$$\tilde{A} = \frac{(2K + 2\tilde{K}) \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N}$$

şeklindedir.

İspat Spektral fonksiyonlar arasındaki fark

$$\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_{1,n} < \lambda} \left(\frac{1}{a_{1,n}} - \frac{1}{a_{2,n}} \right) & , \lambda \geq 0 \\ \sum_{\lambda < \lambda_{1,n}} \left(\frac{1}{a_{2,n}} - \frac{1}{a_{1,n}} \right) & , \lambda < 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada spektral fonksiyonlar farkının total salınımı için sırasıyla $\lambda_0 < \lambda_{N+2}$ ve $\lambda_{-N-2} < \lambda_{\tilde{0}}$ için

$$\begin{aligned} Var_{-\infty < \lambda < \lambda_0} \{ \rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda) \} &\leq \begin{cases} \max_{\lambda_n < \lambda_0} \left| 1 - \frac{a_{1,n}}{a_{2,n}} \right| \rho_1(\lambda_0) & , \lambda \geq 0 \\ \max_{\lambda_{\tilde{0}} < \lambda_n} \left| 1 - \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} \right| \rho_2(\lambda_{\tilde{0}}) & , \lambda < 0 \end{cases} \\ \lambda_{\tilde{0}} < \lambda < \infty \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

eşitsizliklerine sahibiz. Spektral fonksiyonlar arasındaki farkı değerlendirmek için (4.3.2) denkleminin sağ tarafındaki mutlak değeri hesaplamalıyız. Bu teoremi iki aşamada ispatlayacağız. İlk olarak pozitif özdeğerler için yani $\lambda_0 < \lambda_{N+2}$ için $k > N+1$ ve $n < \frac{N}{2}$ koşulları altında spektral fonksiyonların total salınımını hesaplayacağız. $\lambda_0 < \lambda_{N+2}$ için

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{a_{1,n}}{a_{2,n}} \right| = \max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \prod_{k=N+2}^{\infty} \frac{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})}{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})} \right| \quad (4.3.3)$$

eşitliğine sahibiz. Bu durumda sadece pozitif özdeğerler çakışmaktadır, yani $k = 1, 2, \dots, N+1$ için $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$ ve $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ olur. Burada

$$\Psi_1(\lambda_n) = \prod_{k=N+2}^{\infty} \frac{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})}{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})}$$

sonsuz çarpımı ele alınsın. O halde

$$\begin{aligned} \ln \Psi_1(\lambda_n) &= \sum_{k=N+2}^{\infty} \ln \left(\frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=N+2}^{\infty} \ln \left(\frac{\mu_{2,k} - \lambda_{2,n}}{\mu_{1,k} - \lambda_{1,n}} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |\ln \Psi_1(\lambda_n)| &\leq \sum_{k=N+2}^{\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right) \right| \\ &\quad + \sum_{k=N+2}^{\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right) \right| \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülür. Burada $k > N + 1$, $n < \frac{N}{2}$ için

$$\left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| < 1, \quad \left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| < 1$$

eşitsizliği açıkça görülmektedir. $|z| < 1$ için

$$\ln(1 - z) \leq \frac{|z|}{1 - |z|}$$

eşitsizliği geçerlidir. O halde (4.3.4) denklemi için

$$\begin{aligned} |\ln \Psi_1(\lambda_n)| &< \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{\left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| \right)} \\ &+ \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{\left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| \right)} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

eşitsizliğine sahibiz. (4.2.6), (4.2.7), (4.2.8) ve (4.2.9) özdeğerlerin asimptotik değerlerinden $k > N + 1$, $n < \frac{N}{2}$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| &= \left| \frac{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\lambda_{2,k} \left(1 - \frac{\lambda_{1, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{\lambda_{2, N+2}} \right)} \right| \\ &< \frac{K \left(N + \frac{3}{2} \right)}{\left(k - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{N}{2} + 1 \right)} < \frac{K \left(1 + \frac{3}{2N} \right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4N} + \frac{1}{2N^2} \right)} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

ve

$$\left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| = \left| \frac{\frac{\beta_1 - \beta_2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\mu_{1,k} \left(1 - \frac{\lambda_{2, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{\mu_{1, N+2}} \right)} \right| < \frac{\tilde{K} \left(1 + \frac{3}{2N} \right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4N} + \frac{1}{2N^2} \right)} \quad (4.3.7)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.3.6) ve (4.3.7) eşitsizlikleri (4.3.5) denkleminde yerine konulursa

$$|\ln \Psi_1(\lambda_n)| < \frac{\frac{K \left(1 + \frac{3}{2N} \right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4N} + \frac{1}{2N^2} \right)}}{\left(1 - \frac{K \left(1 + \frac{3}{2N} \right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4N} + \frac{1}{2N^2} \right)} \right)} + \frac{\frac{\tilde{K} \left(1 + \frac{3}{2N} \right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4N} + \frac{1}{2N^2} \right)}}{\left(1 - \frac{\tilde{K} \left(1 + \frac{3}{2N} \right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4N} + \frac{1}{2N^2} \right)} \right)}$$

elde edilir. Burada $N \geq 2K$, $N \geq 2\tilde{K}$ için

$$\begin{aligned}
|\ln \Psi_1(\lambda_n)| &< \frac{\frac{2K(1+\frac{3}{2N})}{N}}{1 - \frac{2K(1+\frac{3}{2N})}{N}} + \frac{\frac{2\tilde{K}(1+\frac{3}{2N})}{N}}{1 - \frac{2\tilde{K}(1+\frac{3}{2N})}{N}} \\
&< \frac{\frac{2K(1+\frac{3}{2N})}{N}}{1 - \frac{2K(1+\frac{3}{2N})}{2K}} + \frac{\frac{2\tilde{K}(1+\frac{3}{2N})}{N}}{1 - \frac{2\tilde{K}(1+\frac{3}{2N})}{2\tilde{K}}} \\
&< \frac{2(K + \tilde{K}) \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.3.3) eşitliğinden

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{a_{1,n}}{a_{2,n}} \right| < \exp \frac{2(K + \tilde{K}) \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N} - 1$$

yazılabilir. Üstel fonksiyonun seriye açılımı kullanılarak veya $e^z - 1 < ze^z$ eşitsizliğinden

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{a_{1,n}}{a_{2,n}} \right| < \frac{2(K + \tilde{K}) \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N} e^{\frac{2(K + \tilde{K}) \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N}} \quad (4.3.8)$$

eşitsizliği geçerlidir. (4.3.2) ve (4.3.8) denklemleri birlikte incelenirse $\lambda \geq 0$ için

$$Var_{-\infty < \lambda < \frac{N}{2}} \{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\} < \rho_1 \left(\frac{N}{2} \right) \frac{2(K + \tilde{K}) \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N} e^{\frac{2(K + \tilde{K}) \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N}}$$

denklemini elde edilir. Böylece teoremin birinci kısmının ispatı tamamlandı.

İkinci aşamada benzer işlemleri özdeğerlerin negatif olduğu durum için yapacağız. O halde $\lambda < 0$ için spektral fonksiyonlar farkını ele alalım. Burada $k = -1, -2, \dots, -N-1$ için $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$ ve $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ olsun. (4.3.2) denkleminde

$$\max_{n > -\frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} \right| = \max_{n > -\frac{N}{2}} \left| 1 - \prod_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})}{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})} \right| \quad (4.3.9)$$

yazılabilir. Burada

$$\Psi_2(\lambda_n) = \prod_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})}{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})}$$

fonksiyonu tanımlansın. Eğer pozitif özdeğerler için yukarıda yaptığımız işlemlerin benzerleri tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
|\ln \Psi_2(\lambda_n)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \left| \ln \left(1 - \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right) \right| \\
&\quad + \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \left| \ln \left(1 - \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right) \right|
\end{aligned}$$

bulunur. $k < -N - 1$ ve $n > -\frac{N}{2}$ için

$$\left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| < 1, \quad \left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| < 1$$

geçerli olup buradan

$$|\ln \Psi_2(\lambda_n)| < \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{\left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right|}{1 - \left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right|} + \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{\left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right|}{1 - \left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right|} \quad (4.3.10)$$

eşitsizliği açıkça görülür. Şimdi özdeğerlerin asimptotik formülü ile

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| &= \left| \frac{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\lambda_{1,k} \left(1 - \frac{\lambda_{2, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{\lambda_{1, -N-2}}\right)} \right| \\ &< \frac{K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{\left(-k - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N}{2} + 3\right)} < \frac{K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)} \end{aligned}$$

ve

$$\left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| = \left| \frac{\frac{\beta_1 - \beta_2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\mu_{2,k} \left(1 - \frac{\lambda_{1, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{\mu_{2, N+2}}\right)} \right| < \frac{\tilde{K} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler (4.3.10)'da yerine konulursa

$$\begin{aligned} |\ln \Psi_2(\lambda_n)| &< \frac{\frac{K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)}}{\left(1 - \frac{K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)}\right)} + \frac{\frac{\tilde{K} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)}}{\left(1 - \frac{\tilde{K} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)}\right)} \\ &< \frac{\frac{2K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N}}{1 - \frac{2K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N}} + \frac{\frac{2\tilde{K} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N}}{1 - \frac{2\tilde{K} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N}} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $N \geq 2K$, $N \geq 2\tilde{K}$ için

$$\begin{aligned} |\ln \Psi_2(\lambda_n)| &< \frac{\frac{2K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N}}{1 - \frac{2K \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{2K}} + \frac{\frac{2\tilde{K} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N}}{1 - \frac{2\tilde{K} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{2\tilde{K}}} \\ &< \frac{\left(2K + 2\tilde{K}\right) \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada üstel fonksiyonun seriye açılımından faydalanılarak

$$\begin{aligned} \max_{n > -\frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} \right| &< \exp \left\{ \frac{\left(2K + 2\tilde{K}\right) \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N} \right\} - 1 \\ &< \frac{\left(2K + 2\tilde{K}\right) \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N} e^{\frac{(2K+2\tilde{K})(1+\frac{5}{2N})}{N}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur. (4.3.2) denklemi ve son eşitsizlikten (4.3.1) denklemi $\lambda < 0$ durumu için elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.4. Çözüm Fonksiyonlarının Kararlılığı

(4.2.1)-(4.2.2) probleminin çözümünü $\varphi(\lambda, x)$ ve (4.2.3), (4.2.4) probleminin çözümünü $\psi(\lambda, x)$ ile gösterelim. Bu kısımda çözüm fonksiyonları arasındaki farkın toplamının normu için bir sınır elde ettiğimiz teoremin ifade ve ispatını aşağıdaki şekilde vereceğiz.

Teorem 4.4.1. Teorem 4.3.1'in şartları altında ve pozitif özdeğerler için $0 \leq \lambda \leq \frac{N}{2}$ ve negatif özdeğerler için $-\frac{N}{2} \leq \lambda < 0$ durumunda sırasıyla

$$\begin{aligned} & |(\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2| \leq \\ & \begin{cases} 8 \exp \left\{ 4\lambda (\sigma_1(x) + \sigma_2(x)) - 4\lambda \left(\sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) + \sigma_2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right\} A e^A \rho_1\left(\frac{N}{2}\right) & , \lambda > 0 \\ 8 \exp \left\{ 4\lambda (\sigma_1(x) + \sigma_2(x)) - 4\lambda \left(\sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) + \sigma_2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right\} \tilde{A} e^{\tilde{A}} \rho_2\left(-\frac{N}{2}\right) & , \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$\sigma_j(x) = \int_0^x d\tau \int_0^\tau |p_j(s) + q_j(s)| ds, \quad (j = 1, 2)$$

şeklindedir. Teorem 4.4.1'in ispatını vermeden önce ispat sürecinde kullanılacak olan gerekli bilgi ve Lemmaları verelim.

$\varphi(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda, x) \\ \varphi_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$ ve $\psi(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda, x) \\ \psi_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$ fonksiyonları sırasıyla (4.2.1) ve (4.2.4) denklemlerinin

$$\varphi_1(\lambda, 0) = \sin \alpha, \quad \varphi_2(\lambda, 0) = -\cos \alpha, \quad (4.4.1)$$

$$\psi_1(\lambda, 0) = \sin \beta, \quad \psi_2(\lambda, 0) = -\cos \beta \quad (4.4.2)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $K(x, t)$ ve $H(x, t)$, 2×2 boyutlu ve sürekli diferansiyellenebilir karesel matrisler olmak üzere dönüşüm operatörü yardımıyla

$$\varphi(\lambda, x) = \psi(\lambda, x) + \int_0^x K(x, t) \psi(\lambda, t) dt,$$

$$\psi(\lambda, x) = \varphi(\lambda, x) + \int_0^x H(x, t) \varphi(\lambda, t) dt$$

eşitlikleri yazılabilir [39]. Yukarıda $\psi(\lambda, x)$ ve $\varphi(\lambda, x)$ çözümlerini birbirine dönüştüren operatörü kısaca $I + K$ ve $I + H$ ile gösterelim. Yani

$$\varphi = (I + K) \psi,$$

$$\psi = (I + H) \varphi$$

olsun. $K(x, t)$ çekirdeği

$$BK'_x(x, t) - Q_1(x) K(x, t) = K(x, t) Q_2(t) - K'_t(x, t) B$$

denklemini ve

$$Q_1(x) + BK(x, x) = Q_2(x) + K(x, x) B,$$

$$K(x, 0) B \psi(\lambda, 0) = 0$$

sınır koşullarını sağlar.

$$BK(x, x) - K(x, x) B = Q_1(x) - Q_2(x),$$

$$BH(x, x) - H(x, x) B = Q_2(x) - Q_1(x)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Lemma 4.4.1. $I_j(\lambda, x) = \begin{pmatrix} I_j^1(\lambda, x) \\ I_j^2(\lambda, x) \end{pmatrix}$, ($j = 1, 2$), 2×1 boyutlu matris olmak üzere $Im\lambda \neq 0$ olacak şekilde tüm λ 'lar için

$$I_j(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu, x) d\rho_j(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt, (j = 1, 2)$$

eşitliği sağlanır. Öyleki $\rho_{1,2}(\mu) = \rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)$ olmak üzere çözüm fonksiyonları farkı için

$$\varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt \quad (4.4.3)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat İlk olarak $j = 1$ için

$$\begin{aligned} I_1(\lambda, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, x) d\rho_1(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} (H\varphi)(\mu, x) d\rho_1(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

integralleri göz önüne alımsın. Eş yakınsaklık teoremleri ile (4.4.4) denklemindeki ilk integral mevcuttur ve $\frac{1}{2}\varphi(\lambda, x)$ eşittir. Burada $(H\varphi) \in L_{\rho_1}^2$ ve $\int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt \in L_{\rho_1}^2$ şeklindedir. O halde Dirac Denklemi için Parseval eşitliğinden $f(x) = \varphi(\lambda, x)$ alınarak

$$\varphi(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, x) d\rho_1(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt$$

yazılabilir. Burada son eşitliğin her iki tarafı $H(x, t)$ çarpılıp 0'dan x 'e integral alınırsa (4.4.4)'te ikinci integral $\psi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, x)$ eşittir. Bu durum $I_1(\lambda, x)$ fonksiyonunun varlığını ve

$$I_1(\lambda, x) = \psi(\lambda, x) - \frac{1}{2}\varphi(\lambda, x) \quad (4.4.5)$$

eşitliğini doğrular. $I_2(\lambda, x)$ fonksiyonuna tüm λ 'lar için eş yakınsaklık teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_2(\lambda, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu, x) d\rho_2(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \psi(\mu, t) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu, x) d\rho_2(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) (K\psi)(\mu, t) dt \\ &= \frac{1}{2}\varphi(\lambda, x) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu, x) d\rho_2(\mu) \int_0^x \int_0^t \varphi^T(\lambda, t) K(t, \tau) \psi(\mu, \tau) d\tau dt \\ &= \frac{1}{2}\varphi(\lambda, x) + \frac{1}{2} \left(\int_{\tau=x}^x \varphi^T(\lambda, t) K(t, \tau) dt \right)_{\tau=x} \\ &= \frac{1}{2}\varphi(\lambda, x) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

elde edilir. Burada (4.4.5) ve (4.4.6) denklemleri birlikte değerlendirilirse Lemma 4.4.1'in ispatı elde edilir.

Lemma 4.4.2. $p_{1,2}(x) = p_1(x) - p_2(x)$ ve $q_{1,2}(x) = q_1(x) - q_2(x)$ olmak üzere $Im\lambda \neq 0$ olacak şekildeki tüm λ 'lar ve $0 < x < \infty$ için

$$\begin{aligned} &(\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2 \\ &= \sin(\beta - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x) + \varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ &\quad + \left\{ \int_0^x p_{1,2}(t) \{ \varphi_1(\lambda, t) \psi_1(\lambda, t) - \varphi_2(\lambda, t) \psi_2(\lambda, t) \} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^x q_{1,2}(t) \{ \psi_1(\lambda, t) \varphi_2(\lambda, t) + \psi_2(\lambda, t) \varphi_1(\lambda, t) \} dt \right\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{1,2}(\mu)}{\mu - \lambda} \\
& \quad \times \left\{ \int_0^x p_{1,2}(t) \{ \varphi_1(\mu, t) \psi_1(\mu, t) - \varphi_2(\mu, t) \psi_2(\mu, t) \} dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^x q_{1,2}(t) \{ \psi_1(\mu, t) \varphi_2(\mu, t) + \psi_2(\mu, t) \varphi_1(\mu, t) \} dt \right\}
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Lemma 4.4.1'in yardımıyla tüm λ 'lar için

$$I_j(\lambda, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, x) d\rho_j(\mu) \int_0^x \psi^T(\lambda, t) \psi(\mu, t) dt, \quad (j = 1, 2)$$

ve

$$\psi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \psi^T(\lambda, t) \psi(\mu, t) dt$$

eşitliklerine sahibiz. (4.2.1) denklemi (4.4.1) sınır koşullarıyla ele alınırsa

$$\int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt = \frac{\varphi_1(\mu, x) \varphi_2(\lambda, x) - \varphi_2(\mu, x) \varphi_1(\lambda, x)}{\lambda - \mu} \tag{4.4.8}$$

denklemi elde edilir. (4.4.8) denklemini (4.4.3)'te yerine koyarak

$$\begin{aligned}
& \varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x) = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu, x) \{ \varphi_1(\mu, x) \varphi_2(\lambda, x) - \varphi_2(\mu, x) \varphi_1(\lambda, x) \}}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu)
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

formülüne sahibiz. Benzer eşitlik $\psi(\lambda, x)$ için

$$\begin{aligned}
& \varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x) = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\mu, x) \{ \psi_1(\mu, x) \psi_2(\lambda, x) - \psi_2(\mu, x) \psi_1(\lambda, x) \}}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu)
\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (4.4.9) denkleminden (4.4.10) eşitliği çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu, x) \varphi_1(\mu, x) - \varphi(\mu, x) \psi_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\
&+ \{ \varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x) \} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\mu, x) \psi_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\
&- \varphi_1(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu, x) \varphi_2(\mu, x) - \varphi(\mu, x) \psi_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\
&+ \{ \psi_1(\lambda, x) - \varphi_1(\lambda, x) \} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\mu, x) \psi_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu)
\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

sonucuna ulaşılır. (4.4.10) ve (4.4.11) denklemlerini sırasıyla $(\varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x))^T$ ve $\psi^T(\lambda, x)$ soldan çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \{\varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x)\}^T \{\varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x)\} = \\ & \frac{1}{\mu - \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi^T(\lambda, x) \varphi(\mu, x) - \psi^T(\lambda, x) \varphi(\mu, x)\} \\ & \times \{\psi_1(\mu, x) \psi_2(\lambda, x) - \psi_2(\mu, x) \psi_1(\lambda, x)\} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

ve

$$\begin{aligned} 0 = & \psi^T(\lambda, x) \varphi_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu, x) \varphi_1(\mu, x) - \varphi(\mu, x) \psi_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & + \psi^T(\lambda, x) \{\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x)\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\mu, x) \psi_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & - \psi^T(\lambda, x) \varphi_1(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\mu, x) \varphi_2(\mu, x) - \varphi(\mu, x) \psi_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & + \psi^T(\lambda, x) \{\psi_1(\lambda, x) - \varphi_1(\lambda, x)\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\mu, x) \psi_2(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

olur. (4.4.12) denkleminde (4.4.13) denklemi çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & (\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2 = \\ & \{\varphi_1(\lambda, x) \psi_2(\lambda, x) - \varphi_2(\lambda, x) \psi_1(\lambda, x)\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & + \varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1(\mu, x) \varphi_2(\mu, x) - \psi_2(\mu, x) \varphi_1(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

elde edilir. Şimdi (4.2.1) denklemi (4.4.1) ve (4.4.2) sınır koşulları ile ele alınsın. (4.2.1)

ve (4.2.4) denklemleri

$$\begin{aligned} & \varphi_2' + \{p_1(x) - \lambda\} \varphi_1 + q_1(x) \varphi_2 = 0, \\ & -\varphi_1' + q_1(x) \varphi_1 - \{p_1(x) + \lambda\} \varphi_2 = 0, \\ & \psi_2' + \{p_2(x) - \lambda\} \psi_1 + q_2(x) \psi_2 = 0, \\ & -\psi_1' + q_2(x) \psi_1 - \{p_2(x) + \lambda\} \psi_2 = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada yukarıdaki denklemler sırasıyla $-\psi_1$, $-\psi_2$, φ_1 , φ_2 çarpılıp taraf tarafa toplanırsa ve 0'dan x 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \psi_2(\lambda, x) \varphi_1(\lambda, x) - \varphi_2(\lambda, x) \psi_1(\lambda, x) = \\
& \sin(\beta - \alpha) + \int_0^x (p_1(x) - p_2(x)) \{ \varphi_1(\lambda, x) \psi_1(\lambda, x) - \varphi_2(\lambda, x) \psi_2(\lambda, x) \} dx \\
& + \int_0^x (q_1(x) - q_2(x)) \{ \psi_1(\lambda, x) \varphi_2(\lambda, x) + \psi_2(\lambda, x) \varphi_1(\lambda, x) \} dx \quad (4.4.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.4.15) eşitliği (4.4.14) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2 = \\
& \sin(\beta - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x) + \varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\
& + \int_0^x p_{1,2}(t) \{ \varphi_1(\lambda, t) \psi_1(\lambda, t) - \varphi_2(\lambda, t) \psi_2(\lambda, t) \} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\
& + \int_0^x q_{1,2}(t) \{ \psi_1(\lambda, t) \varphi_2(\lambda, t) + \psi_2(\lambda, t) \varphi_1(\lambda, t) \} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\
& + \varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{1,2}(\mu)}{\mu - \lambda} \int_0^x p_{1,2}(t) \{ \varphi_1(\mu, t) \psi_1(\mu, t) - \varphi_2(\mu, t) \psi_2(\mu, t) \} \\
& + \varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_{1,2}(\mu)}{\mu - \lambda} \int_0^x q_{1,2}(t) \{ \psi_1(\mu, t) \varphi_2(\mu, t) + \psi_2(\mu, t) \varphi_1(\mu, t) \} dt
\end{aligned}$$

formülü bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Şimdi Lemma 4.4.2'yi $Im\lambda \rightarrow 0$ iken tüm λ 'lar için ispat edelim. Çünkü $(\varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x))$ için yeni bir formüle ihtiyacımız var. Elde edilecek olan formüller (4.4.3) ve (4.4.7) eş zamanlı denklemlerinin genelleştirilmiş halleridir. $I = (a, b)$ herhangi bir aralık ve CI bu aralığın eksene tamamlayıcı aralığı olsun. (4.4.9) ve (4.4.10) formüllerinin yerine sırasıyla

$$\begin{aligned}
& \varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x) = \\
& - \int_I \psi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt \\
& + \int_{CI} \psi(\mu, x) \frac{\varphi_1(\mu, x) \varphi_2(\lambda, x) - \varphi_2(\mu, x) \varphi_1(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda, x) = \\
& - \int_I \varphi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \psi^T(\lambda, t) \psi(\mu, t) dx \\
& + \int_{CI} \varphi(\mu, x) \frac{\psi_1(\mu, x) \psi_2(\lambda, x) - \psi_2(\mu, x) \psi_1(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 4.4.2'nin ispatına benzer işlemler yapılarak (4.4.7) formülü elde edilir. Şimdi bu bilgiler ışığında esas teoremimizin ispatını verelim.

Teorem 4.4.1'in İspatı

(4.2.1) denkleminin (4.4.1) şartını sağlayan çözümleri aşağıdaki integral denklemlerini sağlarlar, [36]

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda, x) &= \sin(\lambda x + \alpha) + \int_0^x \{p_1(s) \varphi_1(s) + q_1(s) \varphi_2(s)\} \sin \lambda(x-s) ds \\ &\quad + \int_0^x \{q_1(s) \varphi_1(s) - p_1(s) \varphi_2(s)\} \cos \lambda(x-s) ds, \\ \varphi_2(\lambda, x) &= -\cos(\lambda x + \alpha) - \int_0^x \{p_1(s) \varphi_1(s) + q_1(s) \varphi_2(s)\} \cos \lambda(x-s) ds \\ &\quad + \int_0^x \{q_1(s) \varphi_1(s) - p_1(s) \varphi_2(s)\} \sin \lambda(x-s) ds.\end{aligned}$$

Bu sistemler aşağıdaki şekilde ardışık yaklaşımlar metoduyla çözülebilir. Burada

$$\varphi_{1,0}(\lambda, x) = \sin(\lambda x + \alpha), \quad \varphi_{2,0}(\lambda, x) = -\cos(\lambda x + \alpha)$$

olmak üzere

$$\varphi_1(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1,n}(\lambda, x), \quad \varphi_2(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2,n}(\lambda, x)$$

şeklinde olup iterasyon yardımıyla çözüm fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\varphi_{1,n+1}(\lambda, x) &= \int_0^x \{q_1(s) \cos \lambda(x-s) + p_1(s) \sin \lambda(x-s)\} \varphi_{1,n}(\lambda, s) ds \\ &\quad + \int_0^x \{q_1(s) \sin \lambda(x-s) - p_1(s) \cos \lambda(x-s)\} \varphi_{2,n}(\lambda, s) ds, \\ \varphi_{2,n+1}(\lambda, x) &= \int_0^x \{-p_1(s) \cos \lambda(x-s) + q_1(s) \sin \lambda(x-s)\} \varphi_{1,n}(\lambda, s) ds \\ &\quad - \int_0^x \{p_1(s) \sin \lambda(x-s) + q_1(s) \cos \lambda(x-s)\} \varphi_{2,n}(\lambda, s) ds\end{aligned}$$

eşitliklerine sahibiz. O halde

$$\begin{aligned}|\varphi_{1,n+1}(\lambda, x)| &\leq \int_0^{x-\frac{1}{\lambda}} |\{p_1(s) + q_1(s)\} \varphi_{1,n}(\lambda, s)| ds \\ &\quad + \int_0^{x-\frac{1}{\lambda}} |\{p_1(s) + q_1(s)\} \varphi_{2,n}(\lambda, s)| ds \\ &\quad + \lambda \int_{x-\frac{1}{\lambda}}^x |\{p_1(s) + q_1(s)\} \varphi_{1,n}(\lambda, s)| (x-s) ds \\ &\quad + \lambda \int_{x-\frac{1}{\lambda}}^x |\{p_1(s) + q_1(s)\} \varphi_{2,n}(\lambda, s)| (x-s) ds. \quad (4.4.16)\end{aligned}$$

(4.4.16) eşitsizliğine Newton-Leibniz formülü uygulanırsa

$$|\varphi'_{1,n+1}(\lambda, x)| \leq \lambda \int_{x-\frac{1}{\lambda}}^x |\{p_1(s) + q_1(s)\} \{\varphi_{1,n}(\lambda, s) + \varphi_{2,n}(\lambda, s)\}| ds,$$

$$|\varphi_{1,n+1}(\lambda, x)| \leq \lambda \int_0^x \int_{\tau-\frac{1}{\lambda}}^{\tau} |p_1(s) + q_1(s)| |\varphi_{1,n}(\lambda, s) + \varphi_{2,n}(\lambda, s)| ds d\tau$$

elde edilir. Şimdi sırasıyla $n = 0, 1, 2$ için $\varphi_{1,n}$ fonksiyonunun terimleri yazılırsa

$$|\varphi_{1,0}(\lambda, x)| \leq 1, \quad |\varphi_{2,0}(\lambda, x)| \leq 1,$$

$$\begin{aligned} |\varphi_{1,1}(\lambda, x)| &\leq \lambda \int_0^x d\tau \int_{\tau-\frac{1}{\lambda}}^{\tau} |p_1(s) + q_1(s)| |\varphi_{1,0}(\lambda, s) + \varphi_{2,0}(\lambda, s)| ds \\ &= 2\lambda \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_{2,1}(\lambda, x)| &\leq \lambda \int_0^x d\tau \int_{\tau-\frac{1}{\lambda}}^{\tau} |p_1(s) + q_1(s)| |\varphi_{1,0}(\lambda, s) + \varphi_{2,0}(\lambda, s)| ds \\ &= 2\lambda \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_{1,2}(\lambda, x)| &\leq \int_0^x d\tau \int_{\tau-\frac{1}{\lambda}}^{\tau} |p_1(s) + q_1(s)| |\varphi_{1,1}(\lambda, s) + \varphi_{2,1}(\lambda, s)| ds \\ &= (2\lambda)^2 \int_0^x d\tau \int_{\tau-\frac{1}{\lambda}}^{\tau} |p_1(s) + q_1(s)| \left| \left(\sigma_1(s) - \sigma_1\left(s - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right| ds \\ &= \frac{(2\lambda)^2 \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right)^2}{2} \end{aligned}$$

...

$$|\varphi_{1,n}(\lambda, x)| \leq \frac{(2\lambda)^n \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right\}^n}{n!}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken

$$|\varphi_1(\lambda, x)| \leq \exp \left\{ 2\lambda \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right\} \quad (4.4.17)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$|\varphi_2(\lambda, x)| \leq \exp \left\{ 2\lambda \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right\}, \quad (4.4.18)$$

$$|\psi_1(\lambda, x)| \leq \exp \left\{ 2\lambda \left(\sigma_2(x) - \sigma_2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right\}, \quad (4.4.19)$$

$$|\psi_2(\lambda, x)| \leq \exp \left\{ 2\lambda \left(\sigma_2(x) - \sigma_2 \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \right) \right\} \quad (4.4.20)$$

eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır.

Lemma 4.4.2’de, $I = (0, \frac{N}{2})$ alınırsa

$$\begin{aligned} & (\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2 \\ = & \psi^T(\lambda, x) \int_0^{\frac{N}{2}} \psi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \varphi^T(\lambda, t) \varphi(\mu, t) dt \\ & - \varphi^T(\lambda, x) \int_0^{\frac{N}{2}} \varphi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \psi^T(\lambda, t) \psi(\mu, t) dt \\ & + \sin(\beta - \alpha) \int_{\frac{N}{2}}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x) + \varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & + \left\{ \int_0^x p_{1,2}(t) \{ \varphi_1(\lambda, t) \psi_1(\lambda, t) - \varphi_2(\lambda, t) \psi_2(\lambda, t) \} dt \right. \\ & + \left. \int_0^x q_{1,2}(t) \{ \psi_1(\lambda, t) \varphi_2(\lambda, t) + \psi_2(\lambda, t) \varphi_1(\lambda, t) \} dt \right\} \\ & \times \int_{\frac{N}{2}}^{\infty} \frac{\varphi^T(\mu, x) \psi(\mu, x)}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \\ & + \varphi^T(\lambda, x) \psi(\lambda, x) \int_{\frac{N}{2}}^{\infty} \frac{d\rho_{1,2}(\mu)}{\mu - \lambda} \\ & \times \left\{ \int_0^x p_{1,2}(t) \{ \varphi_1(\mu, t) \psi_1(\mu, t) - \varphi_2(\mu, t) \psi_2(\mu, t) \} dt \right. \\ & + \left. \int_0^x q_{1,2}(t) \{ \psi_1(\mu, t) \varphi_2(\mu, t) + \psi_2(\mu, t) \varphi_1(\mu, t) \} dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik negatif özdeğerler için $I = (-\frac{N}{2}, 0)$ alınarak yazılabilir. (4.4.17)-

(4.4.20) eşitsizliklerinden $0 \leq \lambda \leq \frac{N}{2}$ için

$$\begin{aligned} & |(\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2| \leq \\ & 8 \exp \left\{ 4\lambda \left(\sigma_1(x) - \sigma_1 \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) + \sigma_2(x) - \sigma_2 \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \right) \right\} \\ & \times \int_0^{\frac{N}{2}} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Teorem 4.4.1 vasıtasıyla $0 \leq \lambda \leq \frac{N}{2}$ için

$$\begin{aligned} & |(\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2| \leq \\ & 8 \exp \left\{ 4\lambda \left(\sigma_1(x) - \sigma_1 \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) + \sigma_2(x) - \sigma_2 \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \right) \right\} \\ & \times A e^A \rho_1 \left(\frac{N}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $-\frac{N}{2} \leq \lambda \leq 0$ aralığı için

$$\begin{aligned} & \left| (\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2 \right| \leq \\ & 8 \exp \left\{ 4\lambda \left(\sigma_1(x) + \sigma_2(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) - \sigma_2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right\} \\ & \times \int_{-\frac{N}{2}}^0 d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned}$$

eşitsizliğine sahibiz. Buradan Teorem 4.4.1 vasıtasıyla

$$\begin{aligned} & \left| (\varphi_1(\lambda, x) - \psi_1(\lambda, x))^2 + (\varphi_2(\lambda, x) - \psi_2(\lambda, x))^2 \right| \leq \\ & 8 \exp \left\{ 4\lambda \left(\sigma_1(x) + \sigma_2(x) - \sigma_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) - \sigma_2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \right) \right\} \\ & \times \tilde{A} e^{\tilde{A}} \rho_2\left(-\frac{N}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5. BESSEL TIPLİ TEKİLLİĞE SAHİP STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK TEORİSİ

Bu kısımda Bessel tipli tekilliğe sahip Sturm-Liouville operatörü için Dirichlet sınır koşullarıyla tanımlanan problem ele alınacaktır. Bu problem için özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik formülleri, normlaştırıcı sayıların iki spektruma göre ifadesini içeren bir formül ve spektral fonksiyonlara ve özfonksiyonlara göre kararlılık teoremleri verilecektir.

5.1. Kararlılık Probleminin Tanımlanması

$q_1(x)$ reel değerli fonksiyon $q_1(x) \in L^2(0,1)$ ve l negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$L_1 y = -y'' + \left(q_1(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = \lambda y, \quad 0 < x < 1 \quad (5.1.1)$$

denklemini

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (5.1.2)$$

sınır koşulları ile ele alınsın. (5.1.1)-(5.1.2) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_{1,n}\}$ olsun. Bu özdeğerler $\psi(\lambda, 1) = 0$ fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışıklıdır. Ayrıca $(a_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$, l_2 uzayında bir dizi olmak üzere

$$\lambda_{1,n} = \left(n + \frac{l}{2} \right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q_1(x) dx - l(l+1) + a_{1,n} \quad (5.1.3)$$

asimptotik formülü sağlanır [22]. L_1 operatörü $L^2(0,1)$ uzayında self adjointtir ve $\{\lambda_{1,n}\}$ ayrık spektrumuna sahiptir.

Şimdi potansiyel fonksiyonun $q \equiv 0$ olduğu yeni singüler Sturm-Liouville denklemi

$$L_0 y = -y'' + \frac{l(l+1)}{x^2} y = \lambda y \quad (5.1.4)$$

(5.1.2) Dirichlet sınır koşulları ile ele alınsın. (5.1.2), (5.1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri $\{\lambda_{0,n}\}$ olsun. $\{\lambda_{0,n}\}$ dizisi $(a_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$ olmak üzere

$$\lambda_{0,n} = \left(n + \frac{l}{2} \right)^2 \pi^2 - l(l+1) + a_{0,n} \quad (5.1.5)$$

asimptotik formülünü sağlar [5]. Şimdi normlaştırıcı sayıları tanımlamak için (5.1.1) denkleminin

$$\psi(\lambda, 1) = 0, \quad \psi'(\lambda, 1) = 1 \quad (5.1.6)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\psi(\lambda, x)$ olsun. $\lambda = \lambda_n$ Dirichlet özdeğeri olmadığı sürece $x \rightarrow 0$ iken $\psi(\lambda, x)$ fonksiyonu $(0, 1]$ üzerinde regülerdir ve $\psi(\lambda, x) = O(x^{-l})$ asimptotikğine sahiptir. (5.1.1)-(5.1.2) probleminin normlaştırıcı sayıları ve spektral fonksiyonu sırasıyla

$$\alpha_{1,n} = \int_0^1 \psi^2(\lambda_n, x) dx$$

ve

$$\rho_1(\lambda) = \sum_{\lambda_{1,n} < \lambda} \frac{1}{\alpha_{1,n}}$$

ile gösterilsin. Her $n \in \mathbb{N}$,¹ için $\alpha_{1,n}$ normlaştırıcı sayılarının iki spektruma göre ifadesi

$$\alpha_{1,n} = \frac{(n\pi)^{\frac{1}{2}} (-1)^{-n+1} j_l(\sqrt{\lambda_{1,n}})}{\lambda^{\frac{l}{2}}(\lambda_{0,n} - \lambda_{1,n})} \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_{1,m} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n}}$$

şeklinde. Burada j_l küresel Bessel fonksiyonunu göstermektedir [22].

(Bazı $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = \lambda_{0,k}$ olduğunda, $\frac{j_l(\sqrt{\lambda_{1,n}})}{\lambda_{0,k} - \lambda_n}$ kesrinin yerini $-\frac{j'_l(\sqrt{\lambda_{0,k}})}{2\sqrt{\lambda_{0,k}}}$ limit ifadesi almalıdır.)¹

Diğer taraftan $q_2(x)$ reel değerli ve $L^2(0, 1)$ sınıfından bir fonksiyon olmak üzere

$$L_2 y = -y'' + \left(q_2(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) y = \lambda y, \quad 0 < x < 1 \quad (5.1.7)$$

Sturm-Liouville denklemi (5.1.2) Dirichlet sınır koşullarıyla ele alınsın. (5.1.2), (5.1.7) probleminin özdeğerleri $\{\lambda_{2,n}\}$ olsun. L_2 operatörü $L^2(0, 1)$ üzerinde self-adjointtir ve

$$\lambda_{2,n} = \left(n + \frac{l}{2} \right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q_2(x) dx - l(l+1) + a_{2,n} \quad (5.1.8)$$

asimptotik formülünü sağlayan ayırık spektruma sahiptir. Burada $(a_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$, l_2 uzayına ait bir dizidir.

(5.1.7) denkleminin (5.1.6) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\varphi(\lambda, x)$ ile gösterilsin. O halde (5.1.2), (5.1.7) probleminin normlaştırıcı sayıları ve spektral fonksiyonu sırasıyla

$$\alpha_{2,n} = \int_0^1 \varphi^2(\lambda_n, x) dx$$

ve

$$\rho_2(\lambda) = \sum_{\lambda_{2,n} < \lambda} \frac{1}{\alpha_{2,n}}$$

şeklinde verilir. $\alpha_{2,n}$ normlaştırıcı sayılarının iki spektruma göre ifadesi ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha_{2,n} = \frac{(n\pi)^{\frac{1}{2}} (-1)^{-n+1} j_l(\sqrt{\lambda_{2,n}})}{\lambda^{\frac{l}{2}} (\lambda_{0,n} - \lambda_{2,n})} \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_{2,m} - \lambda_{2,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{2,n}}$$

ile gösterilir.

5.2. Kararlılık Teoremleri

Bu kısımda iki spektra göre spektral fonksiyonlar ve çözüm fonksiyonları için kararlılık teoremleri verilecektir. Daha detaylı ifade etmek gerekirse sırasıyla (5.1.1)–(5.1.2) ve (5.1.2), (5.1.7) problemlerinin $\{\lambda_{1,m}\}$ ve $\{\lambda_{2,m}\}$ özdeğerleri $N+1$ sayıda çakıştığında bu problemlerin spektral fonksiyonlarının total salınımı ve çözüm fonksiyonları farkı için bazı sınırlar elde edilir. Elde edilen sonuçlar ile bu problemlerin kararlı oldukları görülür. Aynı zamanda bu kısımda özfonksiyonların asimptotiğine ilişkin bir lemma verilecektir.

Lemma 5.2.1. $q'(x) \in L_1(0, 1)$ olsun. $|\sqrt{\lambda}| > \sigma(x)$ ve $\text{Im } \sqrt{\lambda} \geq 0$ için

$$\left| \left(\psi(\lambda, x) + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}} \right) e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)} \right| \leq \frac{\sigma(x)}{|\sqrt{\lambda}| (|\sqrt{\lambda}| - \sigma(x))} \quad (5.2.1)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \left(\psi(\lambda, x) + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos \sqrt{\lambda}(1-x)}{\lambda} \int_x^1 \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \right) e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)} \right| \\ & < \frac{1}{|\lambda|^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \sigma_{-1}(x) + \frac{\sigma^2(x)}{1 - \frac{\sigma(x)}{|\sqrt{\lambda}|}} \right) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

eşitsizlikleri sağlar. Burada

$$\sigma(x) = \int_x^1 \left| q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right| dt, \quad \sigma_{-1}(x) = \int_x^1 \left| q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right|' dt$$

şeklinde dir.

İspat (5.1.1) denkleminin (5.1.6) koşulunu sağlayan $\psi(\lambda, x)$ fonksiyonu

$$\psi(\lambda, x) = -\frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \psi(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt$$

integral denklemini sağlar. (5.2.1) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için

$$\tau(\lambda, x) = \left\{ \psi(\lambda, x) + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}} \right\} e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)}, \quad (\text{Im } \sqrt{\lambda} \geq 0)$$

fonksiyonu ele alınsın. $\tau(\lambda, x)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned}
\tau(\lambda, x) &= \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \left(\tau(\lambda, t) e^{-i\sqrt{\lambda}(1-t)} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\quad \times \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)} dt \\
&= \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \tau(\lambda, t) e^{i\sqrt{\lambda}(t-x)} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&\quad - \frac{1}{\lambda} \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda}(t-x) \sin \sqrt{\lambda}(1-t) e^{i\sqrt{\lambda}(t-x)} \\
&\quad \times e^{i\sqrt{\lambda}(1-t)} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

integral denklemini sağladığı açıktır. Burada

$$m(\lambda, x) = \max_{0 \leq x \leq t} |\tau(\lambda, t)|$$

fonksiyonu tanımlansın ve

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}(t-x)} \right| &< \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}, \quad (t > x \geq 0, \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \geq 0), \\
\left| \cos \sqrt{\lambda}(1-x) e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)} \right| &< 1, \quad (\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \geq 0)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri göz önüne alınsın [60]. Yukarıdaki eşitsizliklerden (5.2.3) eşitliği

$$m(\lambda, x) \leq m(\lambda, x) \frac{\int_x^1 \left| q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right| dt}{|\sqrt{\lambda}|} + \frac{\int_x^1 \left| q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right| dt}{|\lambda|}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Böylece $|\sqrt{\lambda}| > \sigma(x)$ için (5.2.1) denklemi elde edilir.

Şimdi (5.2.2) denklemini ispatlayalım. Bunun için

$$-\int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-t)}{\sqrt{\lambda}} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt$$

integrali ele alınsın. Trigonometrik fonksiyonların özelliğinden bu integral

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\lambda} \int_x^1 \left\{ \cos \sqrt{\lambda}(1-x) - \cos \sqrt{\lambda}(2t-x-1) \right\} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&= \frac{\cos \sqrt{\lambda}(1-x)}{2\lambda} \int_x^1 \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda} \int_x^1 \cos \sqrt{\lambda}(2t-x-1) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (5.2.4) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_x^1 \cos \sqrt{\lambda} (2t - x - 1) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&= \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (2t - x - 1)}{2\sqrt{\lambda}} \Big|_x^1 \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda} (2t - x - 1) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right)' dt.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik (5.2.4)'te yerine konulursa ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& - \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t - x)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1 - t)}{\sqrt{\lambda}} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&= \frac{\cos \sqrt{\lambda} (1 - x)}{2\lambda} \int_x^1 \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&\quad - \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1 - x)}{4\lambda^{3/2}} \left(q_1(1) + l(l+1) + q_1(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\lambda^{3/2}} \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda} (2t - x - 1) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right)' dt \\
&< \frac{\cos \sqrt{\lambda} (1 - x)}{2\lambda} \int_x^1 \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{4\lambda^{3/2}} \int_x^1 \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (2t - x - 1) + \sin \sqrt{\lambda} (1 - x) \right\} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right)' dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu son eşitsizlik (5.2.3) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
\tau(\lambda, x) &= \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t - x)}{\sqrt{\lambda}} \tau(\lambda, t) e^{i\sqrt{\lambda}(t-x)} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&\quad - \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t - x)}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1 - t)}{\sqrt{\lambda}} e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&< \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t - x)}{\sqrt{\lambda}} \tau(\lambda, t) e^{i\sqrt{\lambda}(t-x)} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \\
&\quad + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)}}{4\lambda^{3/2}} \int_1^x \left\{ \sin \sqrt{\lambda} (1 - x) + \sin \sqrt{\lambda} (2t - x - 1) \right\} \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right)' dt \\
&\quad + \frac{\cos \sqrt{\lambda} (1 - x)}{2\lambda} e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)} \int_x^1 \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Son olarak (5.2.1) denkleminin sonucu kullanılırsa

$$\left| \left\{ \psi(\lambda, x) + \frac{\sin \sqrt{\lambda} (1 - x)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos \sqrt{\lambda} (1 - x)}{2\lambda} \int_x^1 \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \right\} e^{i\sqrt{\lambda}(1-x)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{m(\lambda, x)}{|\sqrt{\lambda}|} \int_x^1 \left| q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right| dt + \frac{1}{2|\lambda|^{3/2}} \int_x^1 \left| q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right|' dt \\
&< \frac{1}{|\lambda|^{3/2}} \left\{ \frac{\sigma^2(x)}{1 - \frac{\sigma(x)}{|\sqrt{\lambda}|}} + \frac{1}{2} \sigma_{-1}(x) \right\}
\end{aligned}$$

istenen eşitsizlik elde edilir. Böylece Lemma 5.2.1'in ispatı tamamlanır.

Şimdi bu kısmın esas teoremlerinden biri olan spektral fonksiyonlara göre kararlılık teoreminin ifade ve ispatını verelim.

Teorem 5.2.1. (5.1.1)–(5.1.2) ve (5.1.2), (5.1.7) problemlerinin $\{\lambda_{j,m}\}, (j = 1, 2)$ özdeğerleri $N + 1$ sayıda çakışsın, yani $m = 1, 2, \dots, N + 1$ için $\lambda_{1,m} = \lambda_{2,m}$ olsun. O halde $m > N + 1, n < \frac{N}{2}$ ve $N \geq 2\sqrt{A}$ için

$$Var_{-\infty < \lambda < \frac{N}{2}} \{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\} < \rho_1\left(\frac{N}{2}\right) \frac{8A\left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2} e^{\frac{3A\left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{N^2 \pi^2}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$A = \int_0^1 |q_2(t) - q_1(t)| dt + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

şeklinde dir.

İspat Spektral fonksiyonlar arasındaki fark

$$\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_{1,n}} \left(1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}}\right)$$

şeklinde olup burada

$$1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} = 1 - \frac{j_l(\sqrt{\lambda_{1,n}})(\lambda_{0,n} - \lambda_{2,n})}{j_l(\sqrt{\lambda_{2,n}})(\lambda_{0,n} - \lambda_{1,n})} \prod_{m \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{1,m} - \lambda_{1,n})(\lambda_{0,m} - \lambda_{2,n})}{(\lambda_{2,m} - \lambda_{2,n})(\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n})}$$

şeklinde dir. Total salınının tanımından $\lambda_0 < \lambda_{N+2}$ için

$$\begin{aligned}
Var_{-\infty < \lambda < \lambda_0} \{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\} &\leq \max_{\lambda_n < \lambda_0} \left|1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}}\right| \sum_{\lambda_n < \lambda_0} \frac{1}{\alpha_{1,n}} \\
&= \rho_1(\lambda_0) \max_{\lambda_n < \lambda_0} \left|1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}}\right| \quad (5.2.5)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece $\lambda_0 < \lambda_{N+2}$ için spektral fonksiyonların total salınınını değerlendirebilmek için (5.2.5) denkleminin sağ tarafındaki mutlak değer fonksiyonu ele alınmalıdır. Yani $\lambda_0 < \lambda_{N+2}$ için

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left|1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}}\right| = \max_{n < \frac{N}{2}} \left|1 - \prod_{m=N+2}^{\infty} \frac{(\lambda_{1,m} - \lambda_{1,n})(\lambda_{0,m} - \lambda_{2,n})}{(\lambda_{2,m} - \lambda_{2,n})(\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n})}\right| \quad (5.2.6)$$

eşitliği ele alınsın. Burada $\Psi(\lambda_n)$ ile

$$\Psi(\lambda_n) = \prod_{m=N+2}^{\infty} \frac{(\lambda_{1,m} - \lambda_{1,n})(\lambda_{0,m} - \lambda_{2,n})}{(\lambda_{2,m} - \lambda_{2,n})(\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n})}$$

sonsuz çarpımı gösterilsin. O halde

$$\begin{aligned} |\ln \Psi(\lambda_n)| &= \left| \sum_{m=N+2}^{\infty} \ln \left(\frac{\lambda_{1,m} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{2,m} - \lambda_{2,n}} \right) + \sum_{m=N+2}^{\infty} \ln \left(\frac{\lambda_{0,m} - \lambda_{2,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n}} \right) \right| \\ &\leq \sum_{m=N+2}^{\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,m}}{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,n}} \right) \right| + \sum_{m=N+2}^{\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n}} \right) \right| \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

olduğu kolaylıkla görülür. $m > N + 1$ ve $n < \frac{N}{2}$ için

$$\left| \frac{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,m}}{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,n}} \right| < 1 \text{ ve } \left| \frac{\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n}} \right| < 1$$

eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır. Diğer taraftan $|z| < 1$ için

$$\ln(1 - z) < \frac{|z|}{1 - |z|}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla görülür. Son eşitsizlik göz önüne alınarak (5.2.7) eşitsizliği

$$|\ln \Psi(\lambda_n)| < \sum_{m=N+2}^{\infty} \frac{\left| \frac{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,m}}{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,m}}{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,n}} \right| \right)} + \sum_{m=N+2}^{\infty} \frac{\left| \frac{\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n}} \right| \right)} \quad (5.2.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (5.1.3), (5.1.5) ve (5.1.8) denklemleri ile verilen özdeğerlerin asimptotik formülleri kullanılarak $m > N + 1$ ve $n < \frac{N}{2}$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,m}}{\lambda_{2,m} - \lambda_{1,n}} \right| &< \frac{\left| \int_0^1 \{q_2(t) - q_1(t)\} dt + a_{2,m} - a_{1,m} \right|}{\left| \lambda_{2,m} \left(1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{2,m}} \right) \right|} \\ &< \frac{\left| \int_0^1 \{q_2(t) - q_1(t)\} dt + a_{2,m} - a_{1,m} \right|}{\left| \lambda_{2,m} \left(1 - \frac{\lambda_{1, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{\lambda_{2, N+2}} \right) \right|} \\ &< \frac{4A \left(1 + \frac{l+3}{2N} \right)^2}{3\pi^2 N^2 \left(1 + \frac{5l+13}{3N} + \frac{(5l+7)(l+3)}{3N^2} \right)} \\ &< \frac{4A \left(1 + \frac{l+3}{2N} \right)^2}{3\pi^2 N^2} \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_{2,n} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{0,m} - \lambda_{1,n}} \right| &< \left| \frac{\int_0^1 \{q_2(t) - q_1(t)\} dt + a_{2,n} - a_{1,n}}{\lambda_{0,m} \left(1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{0,m}}\right)} \right| \\ &< \frac{4A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2} \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Diğer taraftan (5.2.9) ve (5.2.10) eşitsizlikleri (5.2.8)'de yerine konulursa $N \geq 2\sqrt{A}$ için

$$\begin{aligned} |\ln \Psi(\lambda_n)| &< 2 \frac{\frac{4A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2}}{1 - \frac{4A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2}} < \frac{\frac{4A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2}}{1 - \frac{4A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 4A}} \\ &< \frac{8A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik (5.2.6) denklemiyle birlikte ele alınırsa

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} \right| < e^{\frac{8A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2}} - 1$$

olduğu kolaylıkla görülür. Üstel fonksiyonun seriye açılımından faydalanılarak son eşitsizlik

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} \right| < \frac{8A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2} e^{\frac{3A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{N^2 \pi^2}} \quad (5.2.11)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Son olarak (5.2.5) ve (5.2.11) denklemleri birlikte düşünülürse Teorem 5.2.1'in ispatı tamamlanmış olur.

Sırasıyla (5.1.1) ve (5.1.7) denklemlerinin (5.1.6) şartını sağlayan çözümleri $\psi(\lambda, x)$ ve $\varphi(\lambda, x)$ olmak üzere (5.1.1)–(5.1.2) ve (5.1.2), (5.1.7) problemlerinin çözümlerinin kararlılığını gösteren teoremin ifade ve ispatı aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.2.2. Teorem 5.2.1'in şartları altında ve $0 \leq \lambda \leq \frac{N}{2}$ için

$$\begin{aligned} |\psi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, x)|^2 &< \frac{4x}{N} \exp \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1 \left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) + \sigma_2(x) - \sigma_2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \{ \beta_1(x) + \beta_2(x) \} \\ &\quad \times \rho_1 \left(\frac{N}{2} \right) \frac{8A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{3\pi^2 N^2} e^{\frac{3A \left(1 + \frac{l+3}{2N}\right)^2}{N^2 \pi^2}} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\beta_i(x) = \int_1^x \left| q_i(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right| dt + |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| (1-x), \quad (i = 1, 2)$$

ve

$$\sigma_i(\tau) = \int_x^1 \int_\tau^1 \left| \left(q_i(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt d\tau, \quad (i = 1, 2)$$

şeklindedir.

İspat Çözüm fonksiyonlarının farkının karesi için

$$\begin{aligned} [\psi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, x)]^2 &= \varphi(\lambda, x) \int_0^{\frac{N}{2}} \varphi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \psi(\mu, t) \psi(\lambda, t) dt \\ &\quad - \psi(\lambda, x) \int_0^{\frac{N}{2}} \psi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \varphi(\mu, t) \varphi(\lambda, t) dt \\ &\quad + \int_0^x q_{1,2}(t) dt \\ &\quad \times \int_{\frac{N}{2}}^\infty \frac{\{\psi(\lambda, t) \varphi(\lambda, t) \psi(\mu, x) \varphi(\mu, x) - \psi(\lambda, x) \varphi(\lambda, x) \psi(\mu, t) \varphi(\mu, t)\}}{\mu - \lambda} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

eşitliğine sahibiz ([45], 3.21 verildi). Burada $I = (a, b)$ aralığı yerine $I = (0, \frac{N}{2})$ alındı.

$\psi(\lambda, x)$ ve $\varphi(\lambda, x)$ çözümleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, x) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-1)}{\sqrt{\lambda}} + \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \psi(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt, \\ \varphi(\lambda, x) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-1)}{\sqrt{\lambda}} + \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \varphi(\lambda, t) \left(q_2(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt \end{aligned}$$

formundadır [67]. Bu çözümler için $k(\lambda, x) = \min\left(x, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ olmak üzere

$$|\psi(\lambda, x)| \leq k(\lambda, x) \exp \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}, \quad \lambda > 0 \quad (5.2.14)$$

$$|\varphi(\lambda, x)| \leq k(\lambda, x) \exp \left\{ \sigma_2(x) - \sigma_2\left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}, \quad \lambda > 0 \quad (5.2.15)$$

eşitsizlikleri sağlar.

Gerçektende (5.2.14) ve (5.2.15) eşitsizlikleri Picard iterasyon metoduyla elde edilebilir.

$\psi(\lambda, x)$ fonksiyonu

$$\psi(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\lambda, x)$$

olsun. Burada

$$\psi_0(\lambda, x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-1)}{\sqrt{\lambda}}$$

ve

$$\psi_{n+1}(\lambda, x) = \int_x^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} \psi_n(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) dt$$

şeklindedir. Tüm reel λ ve y 'ler için

$$|\lambda^{-1} \sin \lambda y| \leq |y| \quad \text{ve} \quad |\lambda^{-1} \sin \lambda y| \leq |\lambda|$$

olduğundan o halde

$$|\psi_0(\lambda, x)| \leq k(\lambda, x)$$

ve

$$\begin{aligned} |\psi_{n+1}(\lambda, x)| &\leq \int_x^{x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \left| (t-x) \psi_n(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_x^1 \left| \psi_n(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \phi_n(\lambda, x) &= \int_x^{x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \left| (t-x) \psi_n(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_x^1 \left| \psi_n(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt \end{aligned}$$

tanımlayalım. $\phi_n(\lambda, x)$ fonksiyonu

$$\phi_n(\lambda, 1) = 0$$

başlangıç şartını sağlasın. $\phi_n(\lambda, x)$ fonksiyonuna Newton-Leibniz formülü uygulanırsa

$$\phi'_n(\lambda, x) = \int_x^{x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \left| \psi_n(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt$$

elde edilir. Son eşitlik ve (5.2.16) ele alınırsa

$$|\psi_{n+1}(\lambda, x)| \leq \phi_n(\lambda, x) = \int_x^1 \int_{\tau}^{1+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \left| \psi_n(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt d\tau \quad (5.2.17)$$

olduğu görülür. (5.2.17) denklemini sırasıyla $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ için yazılırsa

$$\begin{aligned} |\psi_1(\lambda, x)| &\leq \int_x^1 \int_{\tau}^{1+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \left| \psi_0(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt d\tau \\ &\leq k(\lambda, x) \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}, \\ |\psi_2(\lambda, x)| &\leq \int_x^1 \int_{\tau}^{1+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \left| \psi_1(\lambda, t) \left(q_1(t) + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) \right| dt d\tau \\ &\leq k(\lambda, x) \frac{\left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}^2}{2}, \end{aligned}$$

$$|\psi_n(\lambda, x)| \leq k(\lambda, x) \frac{\left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\}^n}{n!}$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikten (5.2.14) formülü elde edilir. Aynı yol ile (5.2.15) denklemi elde edilebilir.

Ayrıca $\psi(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ çözüm fonksiyonları için

$$\left| \psi(x, \lambda) + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{\exp \left\{ \int_1^x \left(|q_1(t)| + \frac{|l(l+1)|}{t^2} \right) dt + \left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| (1-x) \right\}}{\sqrt{\lambda}}, \quad (5.2.18)$$

$$\left| \varphi(x, \lambda) + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{\exp \left\{ \int_1^x \left(|q_2(t)| + \frac{|l(l+1)|}{t^2} \right) dt + \left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| (1-x) \right\}}{\sqrt{\lambda}} \quad (5.2.19)$$

eşitsizlikleri geçerlidir [5]. Şimdi (5.2.13) formülünde aralık $I = (0, \frac{N}{2})$ alınrsa yani $0 \leq \lambda \leq \frac{N}{2}$ için

$$\begin{aligned} |\psi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, x)|^2 \leq & \left| \varphi(\lambda, x) \int_0^{\frac{N}{2}} \varphi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \psi(\mu, t) \psi(\lambda, t) dt \right. \\ & \left. - \psi(\lambda, x) \int_0^{\frac{N}{2}} \psi(\mu, x) d\rho_{1,2}(\mu) \int_0^x \varphi(\mu, t) \varphi(\lambda, t) dt \right| \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

elde edilir [60]. Burada (5.2.14), (5.2.15), (5.2.18) ve (5.2.19) eşitsizlikleri (5.2.20) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} & |\psi(\lambda, x) - \varphi(\lambda, x)|^2 \\ & \leq \frac{4x}{N} \exp \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + \sigma_2(x) - \sigma_2\left(x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\} \\ & \quad \times \exp \{ \beta_1(x) + \beta_2(x) \} \int_0^{\frac{N}{2}} d\rho_{1,2}(\mu) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak Teorem 5.2.1'in ifadesinden faydalanılarak (5.2.12) elde edilir ve ispat tamamlanır.

6. DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN KARARLILIK PROBLEMİ

Bu kısımda ayırık sınır koşullarıyla ele alınan Difüzyon denklemi için kararlılık problemi tanımlanacaktır. Ayrıca Difüzyon operatörü için iki spektruma göre normlaştırıcı sayıları ifade eden bir formül verilecektir.

6.1. Kararlılık Probleminin Tanımlanması

$q_1(x)$, $p(x)$ reel değerli fonksiyonlar, $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q_1(x) \in L_2[0, \pi]$, h_1 , h_2 ve H sonlu, reel sayılar ve λ spektral parametre olmak üzere

$$-y''(x) + (2\lambda p(x) + q_1(x))y(x) = \lambda^2 y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (6.1.1)$$

Difüzyon denklemi

$$\begin{aligned} y'(0) - h_1 y(0) &= 0, \\ y'(\pi) + H y(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

ve

$$\begin{aligned} y'(0) - h_2 y(0) &= 0, \\ y'(\pi) + H y(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

sınır koşulları ile ele alınsın. (6.1.1)-(6.1.2) probleminin özdeğerlerini $\{\lambda_{1,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ ile (6.1.1), (6.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerini $\{\mu_{1,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ ile gösterelim. Burada

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx, \quad \sum_n |c_{1,n}|^2 < \infty, \quad \sum_n |\tilde{c}_{1,n}|^2 < \infty,$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \left(h_1 + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi (q_1(x) + p^2(x)) dx \right)$$

ve

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{\pi} \left(h_2 + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi (q_1(x) + p^2(x)) dx \right)$$

olmak üzere özdeğerler için

$$\lambda_{1,n} = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,n}}{n},$$

$$\mu_{1,n} = n + c_0 + \frac{\tilde{c}_1}{n} + \frac{\tilde{c}_{1,n}}{n}$$

asimptotik formülleri geçerlidir [12].

Diğer taraftan $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q_2(x) \in L_2[0, \pi]$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$-y''(x) + (2\lambda p(x) + q_2(x))y(x) = \lambda^2 y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (6.1.4)$$

denklemini (6.1.2) ve (6.1.3) sınır koşulları ile ele alımsın. (6.1.2), (6.1.4) ve (6.1.3), (6.1.4) sınır değer problemlerinin özdeğerleri sırasıyla $\{\lambda_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri olsun. Bu özdeğerler için

$$\begin{aligned} \lambda_{2,n} &= n + c_0 + \frac{c_2}{n} + \frac{c_{2,n}}{n}, \\ \mu_{2,n} &= n + c_0 + \frac{\tilde{c}_2}{n} + \frac{\tilde{c}_{2,n}}{n} \end{aligned}$$

asimptotik formülleri sağlanır. Burada

$$\sum_n |c_{2,n}|^2 < \infty, \quad \sum_n |\tilde{c}_{2,n}|^2 < \infty,$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi} \left(h_1 + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi (q_2(x) + p^2(x)) dx \right)$$

ve

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{\pi} \left(h_2 + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi (q_2(x) + p^2(x)) dx \right)$$

şeklindedir [12]. (6.1.1) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h_1 \quad (6.1.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu olsun. $\varphi(x, \lambda_n)$, λ_n özdeğerine karşılık gelen (6.1.1)-(6.1.2) probleminin özfonksiyonudur ve kısaca $\varphi_n(x)$ ile gösterilsin.

(6.1.1)-(6.1.2) probleminin normlaştırmacı sayıları ve spektral fonksiyonu sırasıyla

$$\alpha_{1,n} = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi p(x) \varphi_n^2(x) dx$$

ve

$$\rho_1(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_{1,n} < \lambda} \frac{1}{\alpha_{1,n}}, & \lambda \geq 0 \\ - \sum_{\lambda < \lambda_{1,n}} \frac{1}{\alpha_{1,n}}, & \lambda < 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde (6.1.4) denkleminin (6.1.5) başlangıç şartını sağlayan çözümü $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ olsun. λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar $\tilde{\varphi}(x, \lambda_n)$ 'ler olsun ve kısalık için $\tilde{\varphi}_n(x)$ ile gösterilsin. O halde (6.1.2), (6.1.4) probleminin normlaştırıcı sayıları ve spektral fonksiyonu sırasıyla

$$\alpha_{2,n} = \int_0^\pi \tilde{\varphi}_n^2(x) dx - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi p(x) \tilde{\varphi}_n^2(x) dx$$

ve

$$\rho_2(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_{2,n} < \lambda} \frac{1}{\alpha_{2,n}}, & \lambda \geq 0 \\ - \sum_{\lambda < \lambda_{2,n}} \frac{1}{\alpha_{2,n}}, & \lambda < 0 \end{cases}$$

formülleri ile verilir.

6.2. Normlaştırıcı Sayıların İki Spektruma Göre İfadesi

Bu kısımda Difüzyon denkleminin iki spektrumdan elde edilmesi için bir yöntem verilecektir. Bu yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün iki spektrumdan elde edilmesi yönteminin aynısıdır. Sonrasında ise Difüzyon denklemi için kararlılık problemi ele alınacaktır.

Teorem 6.2.1. $\{\lambda_{1,n}\}$ ve $\{\mu_{1,n}\}$ dizileri sırasıyla (6.1.1)-(6.1.2) ve (6.1.1), (6.1.3) problemlerinin özdeğerleri olmak üzere $\alpha_{1,n}$ normlaştırıcı sayıları $\lambda_{1,n}$ ve $\mu_{1,n}$ özdeğerleri yardımıyla

$$\alpha_{1,n} = \frac{h_2 - h_1}{2\lambda_{1,n}(\mu_{1,n} - \lambda_{1,n})} \prod_{k=-\infty}^{\infty} ' \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n}}{\mu_{1,k} - \lambda_{1,n}}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\prod$ ' sembolü sonsuz çarpımda $k = n$. terimin mevcut olmadığını gösterir.

İspat (6.1.1) denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h_1,$$

$$\psi(0, \lambda) = 1, \quad \psi'(0, \lambda) = h_2$$

sınır koşullarını sağlayan çözümleri sırasıyla $\varphi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ ile gösterilsin. (6.1.1)-(6.1.2) probleminin çözüm fonksiyonlarının görüntüsü

$$\alpha_{h_1}(x) = xp(0) + 2 \int_0^x \left(A_{h_1}(\zeta, \zeta) \sin \alpha(\zeta) - B_{h_1}(\zeta, \zeta) \cos \alpha(\zeta) \right) d\zeta$$

olmak üzere

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\left(\lambda x - \alpha_{h_1}(x)\right) + \int_0^x A_{h_1}(x, t) \cos \lambda t dt + \int_0^x B_{h_1}(x, t) \sin \lambda t dt$$

şeklindedir. (6.1.1), (6.1.3) probleminin çözüm fonksiyonlarının görüntüsü ise

$$\psi(x, \lambda) = \cos\left(\lambda x - \alpha_{h_2}(x)\right) + \int_0^x A_{h_2}(x, t) \cos \lambda t dt + \int_0^x B_{h_2}(x, t) \sin \lambda t dt$$

verilir. Burada

$$\alpha_{h_2}(x) = xp(0) + 2 \int_0^x \left(A_{h_2}(\zeta, \zeta) \sin \alpha(\zeta) - B_{h_2}(\zeta, \zeta) \cos \alpha(\zeta) \right) d\zeta$$

şeklindedir. $\{\lambda_{1,n}\}$ ve $\{\mu_{1,n}\}$ dizilerinin sırasıyla

$$\Phi_1(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda), \quad (6.2.1)$$

$$\Phi_2(\lambda) = \psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) \quad (6.2.2)$$

fonksiyonlarının kökleri ile çakıştığı aşıkardır.

$$f(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + m(\lambda) \varphi(x, \lambda)$$

fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon

$$f'(\pi, \lambda) + Hf(\pi, \lambda) = 0$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde

$$m(\lambda) = -\frac{\psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda)}{\varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda)} = -\frac{\Phi_2(\lambda)}{\Phi_1(\lambda)} \quad (6.2.3)$$

elde edilir. Burada $m(\lambda)$ fonksiyonunun kutuplarının ve sıfırlarının sırasıyla (6.1.1)-(6.1.2) ve (6.1.1), (6.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri ile çakıştıkları ve mero-morf fonksiyon olduğu görülür. Diğer yandan Green formülünden

$$\begin{aligned} & (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \int_0^\pi f(x, \lambda_1) f(x, \lambda_2) dx = \\ &= (f'(x, \lambda_2) f(x, \lambda_1) - f'(x, \lambda_1) f(x, \lambda_2))|_0^\pi \\ &+ \int_0^\pi f(x, \lambda_1) f(x, \lambda_2) (2\lambda_1 - 2\lambda_2) p(x) dx \\ &= [m(\lambda_1) - m(\lambda_2)] (h_1 - h_2) \\ &+ (2\lambda_1 - 2\lambda_2) \int_0^\pi f(x, \lambda_1) f(x, \lambda_2) p(x) dx \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

olur. (6.2.4) denkleminde $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ olarak alınırsa

$$\int_0^\pi |f(x, \lambda)|^2 dx - \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \int_0^\pi p(x) |f(x, \lambda)|^2 dx = (h_1 - h_2) \frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{2 \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} \lambda} \quad (6.2.5)$$

elde edilir. Bu formülde $h_2 > h_1$ ($h_1 > h_2$) olduğunda meromorf fonksiyon üst yarı düzlemi kendine dönüştürür (alt yarı düzlemi kendine dönüştürdüğü durumdur). Bu takdirde $m(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ve kutupları (6.1.1)-(6.1.2) ve (6.1.1), (6.1.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri ile çakışır.

Yukarıdaki hesaplamaların benzerleri yapılırsa

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - \lambda_n^2) \int_0^\pi f(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) dx = \\ & h_2 - h_1 + 2(\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi f(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) p(x) dx \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - \lambda_n^2) \int_0^\pi f(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) dx \\ & - 2(\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi f(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) p(x) dx = h_2 - h_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $f(x, \lambda)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - \lambda_n^2) \int_0^\pi \psi(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) dx + (\lambda^2 - \lambda_n^2) m(\lambda) \int_0^\pi \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) dx \\ & - 2(\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi \psi(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) p(x) dx \\ & - 2(\lambda - \lambda_n) m(\lambda) \int_0^\pi \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \lambda_n) p(x) dx \\ & = h_2 - h_1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\lambda \rightarrow \lambda_n$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi p(x) \varphi_n^2(x) dx \\ &= \frac{h_2 - h_1}{\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} 2\lambda_n (\lambda - \lambda_n) m(\lambda)} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

elde edilir. Bu formülden faydalananarak α_n 'lerin $\{\lambda_n\}$ ve $\{\mu_n\}$ 'ler yardımıyla görüntüsü elde edilebilir.

Not edelim ki $\cos \lambda x$ ve $\sin \lambda x$ fonksiyonunu $\Phi_1(\lambda)$ ve $\Phi_2(\lambda)$ fonksiyonlarına dönüştüren sırasıyla $A_{h_1}(x, t)$, $B_{h_1}(x, t)$, $A_{h_2}(x, t)$, $B_{h_2}(x, t)$ çekirdek fonksiyonları mevcuttur. Bu

sebeple

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\lambda) &= \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) \\
&= (\alpha'_{h_1}(\pi) - \lambda) \sin(\lambda\pi - \alpha_{h_1}(\pi)) + A_{h_1}(\pi, \pi) \cos \lambda\pi \\
&\quad + B_{h_1}(\pi, \pi) \sin \lambda\pi + H \cos(\lambda\pi - \alpha_{h_1}(\pi)) \\
&\quad + \int_0^\pi \left[H A_{h_1}(\pi, t) + \frac{\partial A_{h_1}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pi} \right] \cos \lambda t dt \\
&\quad + \int_0^\pi \left[H B_{h_1}(\pi, t) + \frac{\partial B_{h_1}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pi} \right] \sin \lambda t dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\lambda) &= \psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) \\
&= (\alpha'_{h_2}(\pi) - \lambda) \sin(\lambda\pi - \alpha_{h_2}(\pi)) + A_{h_2}(\pi, \pi) \cos \lambda\pi \\
&\quad + B_{h_2}(\pi, \pi) \sin \lambda\pi + H \cos(\lambda\pi - \alpha_{h_2}(\pi)) \\
&\quad + \int_0^\pi \left[H A_{h_2}(\pi, t) + \frac{\partial A_{h_2}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pi} \right] \cos \lambda t dt \\
&\quad + \int_0^\pi \left[H B_{h_2}(\pi, t) + \frac{\partial B_{h_2}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pi} \right] \sin \lambda t dt
\end{aligned}$$

eşitlikleri söz konusudur.

$\Phi_1(\lambda)$ ve $\Phi_2(\lambda)$ fonksiyonları 1 mertebeli tam fonksiyonlar olduğundan ve tam fonksiyonların sıfırlarına dağılımından

$$\Phi_1(\lambda) = C_1 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right), \quad \Phi_2(\lambda) = C_2 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)$$

görüntüsü elde edilir. Burada C_1 ve C_2 reel sabitlerdir. O halde $m(\lambda)$ fonksiyonu da tam fonksiyondur ve

$$m(\lambda) = \frac{C_1}{C_2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1}$$

görüntüsü söz konusudur. Son eşitlikten ve (6.2.6) denkleminde

$$\alpha_n = \frac{h_2 - h_1}{2\lambda_n(\mu_n - \lambda_n)} \frac{C_1}{C_2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \prod_{k=-\infty}^{\infty'} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \right)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{C_1}{C_2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 1 \quad (6.2.7)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için çözüm fonksiyonlarının asimptotik formülünden

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{\Phi_1(\lambda)}{\Phi_2(\lambda)} = 1$$

olduğu görülür. Yani

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{C_1}{C_2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1} \\ = \frac{C_1}{C_2} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\mu_k - \lambda} = 1 \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\mu_k - \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda}\right) = 1 \quad (6.2.8)$$

göz önüne alınsın. (6.2.8) eşitliğinde sonsuz çarpımın yakınsaklığını göstermek için aşağıdaki seri göz önüne alınsın ve $\{\lambda_k\}$ ve $\{\mu_k\}$ özdeğerlerinin asimptotik formüllerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda} + \frac{\lambda_{-k} - \mu_{-k}}{\mu_{-k} - \lambda} \right) + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\mu_0 - \lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{c_1 - \tilde{c}_1}{k} + \frac{c_{1,k} - \tilde{c}_{1,k}}{k}}{\mu_k - \lambda} + \frac{\frac{\tilde{c}_1 - c_1}{k} + \frac{\tilde{c}_{1,-k} - c_{1,-k}}{k}}{\mu_{-k} - \lambda} \right) + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\mu_0 - \lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_1 - \tilde{c}_1}{k} \left(\frac{1}{\mu_k - \lambda} - \frac{1}{\mu_{-k} - \lambda} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{1,k} - \tilde{c}_{1,k}}{k(\mu_k - \lambda)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{1,-k} - c_{1,-k}}{k(\mu_{-k} - \lambda)} + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\mu_0 - \lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada son iki serinin yakınsaklığı açık şekilde görülmektedir.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_1 - \tilde{c}_1}{k} \left(\frac{1}{\mu_k - \lambda} - \frac{1}{\mu_{-k} - \lambda} \right) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_1 - \tilde{c}_1 + \mu_{-k} - \mu_k}{k(\mu_k - \lambda)(\mu_{-k} - \lambda)} \end{aligned}$$

olup bu son seride yakınsaktır. Bu sonuçlardan (6.2.8) sonsuz çarpımın yakınsaklığı elde edilir, yani

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \mu_k}{\mu_k - \lambda}\right) = 1.$$

Böylece (6.2.7) eşitliği elde edilir. O halde (6.1.1)-(6.1.2) ve (6.1.1), (6.1.3) sınır değer problemlerinin sırasıyla iki spektruma göre ifadesi

$$\alpha_{1,n} = \frac{h_2 - h_1}{2\lambda_{1,n}(\mu_{1,n} - \lambda_{1,n})} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n}}{\mu_{1,k} - \lambda_{1,n}}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\alpha_{2,n} = \frac{h_2 - h_1}{2\lambda_{2,n}(\mu_{2,n} - \lambda_{2,n})} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n}}{\mu_{2,k} - \lambda_{2,n}}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

şeklindedir.

Şimdi bu kısmın esas teoremi olan iki spektruma göre operatörün tanımlanmasının kararlılığına ilişkin teoremin ifade ve ispatı verilsin.

Teorem 6.2.2. $\{\lambda_{j,k}\}$ ve $\{\mu_{j,k}\}$ ($j = 1, 2$) özdeğerleri $2N + 2$ sayıda çakışmalar öyleki $k = 1, 2, \dots, N + 1$ için $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$ ve $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ olsun ve $k = -1, -2, \dots, -N - 1$ için $\lambda_{1,k} = \lambda_{2,k}$ ve $\mu_{1,k} = \mu_{2,k}$ olsun. O halde sırasıyla $\lambda > 0$ için $k > N + 1$, $n < \frac{N}{2}$ ve $\lambda < 0$ için $k < -N - 1$, $n > -\frac{N}{2}$ şartları altında $N > 2A$ ve $N > 2\tilde{A}$ iken

$$\begin{aligned} Var \quad \{\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda)\} &< \begin{cases} Ce^C \rho_1\left(\frac{N}{2}\right) & , \lambda > 0 \\ \tilde{C}e^{\tilde{C}} \rho_2\left(-\frac{N}{2}\right) & , \lambda < 0 \end{cases} \\ -\infty < \lambda < \frac{N}{2} \\ -\frac{N}{2} < \lambda < \infty \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$A = \left| \frac{1}{2\pi k} \int_0^\pi (q_2(t) - q_1(t)) dt + \frac{c_{2,k} - c_{1,k}}{k} \right|,$$

$$\tilde{A} = \left| \frac{1}{2\pi k} \int_0^\pi (q_2(t) - q_1(t)) dt + \frac{\tilde{c}_{1,k} - \tilde{c}_{2,k}}{k} \right|,$$

$$C = \frac{\left(1 + \frac{3}{2N}\right) (A + \tilde{A})}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)}$$

ve

$$\tilde{C} = \frac{\left(1 + \frac{5}{2N}\right) (A + \tilde{A})}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{4N} + \frac{15}{2N^2}\right)}$$

şeklindedir.

İspat Spektral fonksiyonlar farkı için

$$\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda) = \begin{cases} \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_{1,n}} \left(1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}}\right), & \lambda \geq 0 \\ \sum_{\lambda < \lambda_n} \frac{1}{\alpha_{2,n}} \left(1 - \frac{\alpha_{2,n}}{\alpha_{1,n}}\right), & \lambda < 0 \end{cases} \quad (6.2.9)$$

eşitliği göz önüne alınsın. Burada total salınımın tanımından pozitif ve negatif özdeğerler için sırasıyla $\lambda_0 < \lambda_{N+2}$ ve $\lambda_{-N-2} < \lambda_{\bar{0}}$ şartları altında

$$\begin{aligned} Var_{\substack{-\infty < \lambda < \lambda_0 \\ \lambda_{\bar{0}} < \lambda < \infty}} \{ \rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda) \} &\leq \begin{cases} \max_{\lambda_n < \lambda_0} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} \right| \sum_{\lambda_n < \lambda_0} \frac{1}{\alpha_{1,n}}, & \lambda \geq 0 \\ \max_{\lambda_{\bar{0}} < \lambda_n} \left| 1 - \frac{\alpha_{2,n}}{\alpha_{1,n}} \right| \sum_{\lambda_{\bar{0}} < \lambda_n} \frac{1}{\alpha_{2,n}}, & \lambda < 0 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \max_{\lambda_n < \lambda_0} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} \right| \rho_1(\lambda_{N+2}), & \lambda \geq 0 \\ \max_{\lambda_{\bar{0}} < \lambda_n} \left| 1 - \frac{\alpha_{2,n}}{\alpha_{1,n}} \right| \rho_2(\lambda_{-N-2}), & \lambda < 0 \end{cases} \quad (6.2.10) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Burada spektral fonksiyonlar farkını değerlendirmek için (6.2.10) eşitsizliğinin sağ tarafındaki mutlak değerli ifade ele alınsın. Bu ifade pozitif ve negatif özdeğerler için ayrı ayrı ele alınmalıdır.

İlk olarak pozitif özdeğerler için yani $\lambda \geq 0$ iken

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} \right| \leq \max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \prod_{k=N+2}^{\infty} \frac{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})}{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})} \right| \quad (6.2.11)$$

eşitsizliği incelensin. Burada

$$\Psi_1(\lambda_n) = \prod_{k=N+2}^{\infty} \frac{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})}{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})} \quad (6.2.12)$$

fonksiyonu tanımlansın. (6.2.12) denkleminde her iki tarafın logaritması alınıp gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} |\ln \Psi_1(\lambda_n)| &= \left| \sum_{k=N+2}^{\infty} \ln \left(\frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n}} \right) + \sum_{k=N+2}^{\infty} \ln \left(\frac{\mu_{2,k} - \lambda_{2,n}}{\mu_{1,k} - \lambda_{1,n}} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=N+2}^{\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right) \right| + \sum_{k=N+2}^{\infty} \left| \ln \left(1 - \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right) \right| \quad (6.2.13) \end{aligned}$$

elde edilir. $k > N + 1$, $n < \frac{N}{2}$ için

$$\left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| < 1, \quad \left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| < 1$$

eşitsizliklerinin sağlandığı açıktır. Diğer taraftan $|z| < 1$ için

$$\ln(1 - z) < \frac{|z|}{1 - |z|}$$

eşitsizliği sağlanır. Son eşitsizlik göz önüne alınarak (6.2.13) denklemi

$$|\ln \Psi_1(\lambda_n)| < \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{\left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| \right)} + \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{\left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| \right)} \quad (6.2.14)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada özdeğerlerin asimptotik formülleri kullanılarak $k > N + 1$, $n < \frac{N}{2}$ için bazı hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| &= \left| \frac{\frac{1}{2\pi k} \int_0^\pi (q_2(t) - q_1(t)) dt + \frac{c_{2,k} - c_{1,k}}{k}}{\lambda_{2,k} \left(1 - \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_{2,k}}\right)} \right| \\
&< \frac{A}{\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_{1, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{\lambda_{2, N+2}}\right)} \\
&< \frac{A \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)} \tag{6.2.15}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mu_{1,k} - \mu_{2,k}}{\mu_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| &< \left| \frac{\frac{1}{2\pi k} \int_0^\pi (q_1(t) - q_2(t)) dt + \frac{\tilde{c}_{1,k} - \tilde{c}_{2,k}}{k}}{\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_{2, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{\mu_{1, N+2}}\right)} \right| \\
&< \frac{\tilde{A} \left(1 + \frac{3}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)} \tag{6.2.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.2.15) ve (6.2.16) eşitsizlikleri (6.2.14) denkleminde yerine konulursa $N > 2A$ ve $N > 2\tilde{A}$ için

$$\begin{aligned}
|\ln \Psi_1(\lambda_n)| &< \frac{\frac{A(1 + \frac{3}{2N})}{N(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2})}}{1 - \frac{A(1 + \frac{3}{2N})}{N(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2})}} + \frac{\frac{\tilde{A}(1 + \frac{3}{2N})}{N(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2})}}{1 - \frac{\tilde{A}(1 + \frac{3}{2N})}{N(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2})}} \\
&< \frac{\left(1 + \frac{3}{2N}\right) \left\{ \left(A + \tilde{A}\right) - \frac{2A\tilde{A}(1 + \frac{3}{2N})}{N(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2})} \right\}}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right) \left\{ 1 - \frac{(1 + \frac{3}{2N})(A + \tilde{A})}{N(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2})} + \frac{A\tilde{A}(1 + \frac{3}{2N})^2}{N^2(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2})^2} \right\}} \\
&< \frac{\left(1 + \frac{3}{2N}\right) (A + \tilde{A})}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)} \tag{6.2.17}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(6.2.17) ve (6.2.11) denklemleri birlikte ele alınırsa

$$\max_{n < \frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} \right| \leq \exp \left\{ \frac{\left(1 + \frac{3}{2N}\right) (A + \tilde{A})}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)} \right\} - 1$$

yazılabilir. Burada üstel fonksiyonun seriye açılımından

$$\max_{n < -\frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{2,n}} \right| < \frac{\left(1 + \frac{3}{2N}\right) (A + \tilde{A})}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)} e^{\frac{(1 + \frac{3}{2N})(A + \tilde{A})}{\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4N} + \frac{3}{2N^2}\right)}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizlik ve (6.2.10) denklemi birlikte incelenirse Teorem 6.2.2'nin pozitif özdeğerler için ispatı tamamlanır.

İkinci ve son olarak benzer işlemleri negatif özdeğerler durumunda inceleyelim.

$$\max_{n > -\frac{N}{2}} \left| 1 - \frac{\alpha_{2,n}}{\alpha_{1,n}} \right| \leq \max_{n > -\frac{N}{2}} \left| 1 - \prod_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})}{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})} \right| \quad (6.2.18)$$

göz önüne alınsın.

$$\Psi_2(\lambda_n) = \prod_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})(\mu_{1,k} - \lambda_{1,n})}{(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n})(\mu_{2,k} - \lambda_{2,n})}$$

sonsuz çarpımı ele alınsın. Burada her iki tarafın logaritması alınıp düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} |\ln \Psi_2(\lambda_n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \ln \left(\frac{\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{1,n}} \right) + \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \ln \left(\frac{\mu_{1,k} - \lambda_{1,n}}{\mu_{2,k} - \lambda_{2,n}} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \left| \ln \left(1 - \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right) \right| + \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \left| \ln \left(1 - \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right) \right| \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

elde edilir. $k < -N - 1$, $n > -\frac{N}{2}$ için

$$\left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| < 1, \quad \left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| < 1$$

eşitsizliği açıktır. Diğer taraftan $|z| < 1$ için

$$\ln(1 - z) < \frac{|z|}{1 - |z|}$$

eşitsizliğinden (6.2.19) denklemi

$$|\ln \Psi_2(\lambda_n)| < \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{\left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| \right)} + \sum_{k=-\infty}^{-N-2} \frac{\left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right|}{\left(1 - \left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| \right)} \quad (6.2.20)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Özdeğerlerin asimptotik formülü kullanılarak $k < -N - 1$,

$n > -\frac{N}{2}$ için

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,n}} \right| &= \left| \frac{\frac{1}{2\pi k} \int_0^\pi (q_2(t) - q_1(t)) dt + \frac{c_{2,k} - c_{1,k}}{k}}{\lambda_{1,k} \left(1 - \frac{\lambda_{2,n}}{\lambda_{1,k}}\right)} \right| \\
&< \frac{A}{\left(-k - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_{2,[-\frac{N}{2}]}}{\lambda_{1,-N-2}}\right)} \\
&< \frac{A \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{4N} + \frac{15}{2N^2}\right)} \tag{6.2.21}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\mu_{2,k} - \mu_{1,k}}{\mu_{2,k} - \lambda_{1,n}} \right| &< \left| \frac{\frac{1}{2\pi k} \int_0^\pi (q_1(t) - q_2(t)) dt + \frac{\tilde{c}_{1,k} - \tilde{c}_{2,k}}{k}}{\left(-k - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_{1,[-\frac{N}{2}]}}{\mu_{2,-N-2}}\right)} \right| \\
&< \frac{\tilde{A} \left(1 + \frac{5}{2N}\right)}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{4N} + \frac{15}{2N^2}\right)} \tag{6.2.22}
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.2.21) ve (6.2.22) denklemleri (6.2.20) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $N > 2A$ ve $N > 2\tilde{A}$ için

$$\begin{aligned}
|\ln \Psi_2(\lambda_n)| &< \frac{\frac{A(1+\frac{5}{2N})}{N(\frac{1}{2}+\frac{17}{4N}+\frac{15}{2N^2})}}{1 - \frac{A(1+\frac{5}{2N})}{N(\frac{1}{2}+\frac{17}{4N}+\frac{15}{2N^2})}} + \frac{\frac{\tilde{A}(1+\frac{5}{2N})}{N(\frac{1}{2}+\frac{17}{4N}+\frac{15}{2N^2})}}{1 - \frac{\tilde{A}(1+\frac{5}{2N})}{N(\frac{1}{2}+\frac{17}{4N}+\frac{15}{2N^2})}} \\
&\quad \frac{\left(1 + \frac{5}{2N}\right) \left\{ \left(A + \tilde{A}\right) - \frac{2A\tilde{A}(1+\frac{5}{2N})}{N(\frac{1}{2}+\frac{17}{4N}+\frac{15}{2N^2})} \right\}}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{4N} + \frac{15}{2N^2}\right) \left\{ 1 - \frac{(1+\frac{5}{2N})(A+\tilde{A})}{N(\frac{1}{2}+\frac{17}{4N}+\frac{15}{2N^2})} + \frac{A\tilde{A}(1+\frac{5}{2N})^2}{N^2(\frac{1}{2}+\frac{17}{4N}+\frac{15}{2N^2})^2} \right\}} \\
&< \frac{\left(1 + \frac{5}{2N}\right) (A + \tilde{A})}{N \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{4N} + \frac{15}{2N^2}\right)} \tag{6.2.23}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (6.2.23) denklemi (6.2.18) birlikte incelenip ve üstel fonksiyonun seriye açılımı kullanılarak negatif özdeğerler için Teorem 6.2.2'nin ispatı tamamlanır.

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde regüler ve singüler Sturm-Liouville problemlerinin, Dirac ve Difüzyon denklemlerinin spektral teorisi hakkında kısa bir literatür özeti verildi. Ayrıca spektral teoride kararlılık probleminin tanımı ve öneminden bahsedildi.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde Sturm-Liouville problemleri için dönüşüm operatörünün tanımı ve bir takım özellikleri verildi. Bu kısımda spektral fonksiyonlar sonlu aralıkta çakıştığında özfonksiyonlar arasındaki farkın değerlendirilmesine ilişkin Marchenko ve Maslov'un [45] çalışmasında bulunan teorem detaylı bir şekilde incelendi.

Dördüncü bölümde regüler Sturm-Liouville problemi için Ryabushko'nun ispatlamış olduğu kararlılık teoremleri [60] Dirac denklem sistemi ile ele alınan probleme uygulandı. Burada kararlılık problemleri ile farklı potansiyellere sahip problemlerin ilk $N + 1$ sayıda spektrumları çakıştığında spektral fonksiyonlar ve özfonksiyonlar arasındaki farklar için sonlu sınırlar elde edildi.

Beşinci bölümde kararlılık problemi Dirichlet şartları ile incelen Bessel tipli singülerliğe sahip Sturm-Liouville problemine uygulandı. Spektral fonksiyona ve çözüm fonksiyonlarına göre kararlılık teoremleri ifade ve ispat edildi.

Altıncı bölümde ise ayırık sınır koşulları ile ele alınan Difüzyon denkleminde kararlılık teoremleri uygulandı. Ayrıca normlaştırıcı sayıların iki spektruma göre ifadesini içeren formüller verildi.

Kısacası ele alınan farklı problemler için iki spektruma göre operatörlerin tanımlanmasının kararlılığı içeren orjinal sonuçlar elde edildi. Bu tez çalışmasının diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde kararlılık problemlerine önemli katkılar sağlaması amaçlanmıştır.

8. KAYNAKLAR

1. **Akhiezer, N. I., Glazman, I. M.**, 1966, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, 1, 2, Moscow, Nauka.
2. **Ambartsumyan, V. A.**, 1929, Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik, 53, 690-695.
3. **Borg, G.**, 1945, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math., 78, 1-96.
4. **Balci, M.**, 2000, Reel Analiz, 2. Baskı, Bilim Kitap Kırtasiye LTD. ŞTİ. Ankara.
5. **Carlson, R.**, 1997, A Borg-Levinson theorem for Bessel operator, Pasific J. Math., 177, 1-26.
6. **Condington, E. A., Levinson N.**, 1955, Theory of Ordinary Differantial Equations, McGraw-Hill, New York.
7. **Courant R., Hilbert, D.**, 1953, Methods of Matemetical Physics, New York.
8. **Ercan, A., Panakhov, E. S.**, 2016, Stability of the spectral problem for Dirac opeartors, AIP Conference Proceedings, 1738, 290010.
9. **Gasymov, M. G., Dzhabiev T. T.**, 1955, On the determination of the Dirac System from two spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku-ELM., 46-71.
10. **Gasymov, M. G.**, 1965, Determination of singular Sturm-Liouville operators according to two spectrums, Dokl. Akad., Nauk SSSR., 161(2), 274-276.
11. **Gasymov, M. G., Levitan, B. M.**, 1966, The inverse problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.
12. **Gasymov, M. G., Guseinov, G. Sh.**, 1981, Determining of the diffusion operator on spectral data, Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSSR., 37, 19-23.

13. **Gasymov, M. G., Amirov, R. Kh.**, 1985, Direct and inverse spectral problems for second order differential operators which has coulumb singularity, Dokl. Akad., Nauk Az. SSR., 41, 8, 1-5.
14. **Gelfand, I. M., Levitan, B. M.**, 1951, On the determination of a differential equations by its spectral function, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., 15, 309-360.
15. **Guseinov, I. M., Nabiev, I. M.**, 2000, A class of inverse problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators, Differential Equations, 36(3), 471-473.
16. **Guseinov, G. Sh.**, 2014, On construction of a quadratic Sturm-Liouville operator pencil from spectral data, Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 40, 203-214.
17. **Haberman, R.**, 1998, Elementary Applied Partial Differential Equations, Simon Schuster.
18. **Hochstadt, H.**, 1971, The Functions of Mathematical Physics, New York.
19. **Hochstadt, H.**, 1973, The inverse Sturm-Liouville problem, Comm. On Pure and Applied Mathematics, XXVI, 715-729.
20. **Hochstadt, H.**, 1975, Well-posed inverse spectral problems, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 72, 2496-2497.
21. **Hryniv, R. O., Mykytyuk, Ya. V.**, 2003, Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials, Inverse problems, 19, 665-684.
22. **Hryniv, R., Sacks, P.**, 2010, Numerical solution of the inverse spectral problem for Bessel operators, J. Comput. Appl. Math., 235(1), 120-136.
23. **Hryniv, R., Pronska, N.**, 2012, Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations, Inverse Problems, 28(8), 085008.
24. **İç, Ü.**, 2003, Kanonik Dirac operatörü için kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

25. **İdemen, M.**, 1999, Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Işık Üniv., İstanbul.
26. **Kirsch, A.**, 1996, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, vol.120, Springer-Verlag, New York.
27. **Koyunbakan, H., Panahkov, E. S.**, 2005, Half inverse problem for singular differential operator, *Applicable Analysis*, 84(3), 247-252.
28. **Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.**, 1972, Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions, Moscow, Russia.
29. **Krein, M. G.**, 1951, Solution of the inverse Sturm-Liouville problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 76, 21-24.
30. **Kreyszig, E.**, 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, New York.
31. **Levinson, N.**, 1949, Criteria for the limit-point case for second-order linear differential operators, *Casopis. Pest. Mat. Fys.* 74, 17-20.
32. **Levin, B. Ja**, 1964, Distribution of Zeros of Entire Functions, *Amer. Math. Soc.*
33. **Levitan, B. M.**, 1987, Inverse Sturm-Liouville Problems, VNU.
34. **Levitan, B. M.**, 1955, On the asymptotic behavior of the spectral function of a self-adjoint differential equation of the second order and on eigenfunction expansions , *Izv. AN SSSR, Series Math.* vol. 19, 33-58.
35. **Levitan, B. M.**, 1963, On the determination of a Sturm-Liouville differential equation by two of its spectra, *Dokl. AN SSSR*, 150, 474-476 (*Soviet Math. Doklady*, 4, (1963), 691-693.
36. **Levitan, B. M., Sargsyan, I. S.**, 1990, Sturm-Liouville and Dirac Operators, Netherlands.
37. **Levitan, B. M.**, 1964, Generalized Translation Operators and Some of Its Applications, Jerusalem.

38. **Levitan, B. M., Gasymov, M. G.**, 1964, Determination of a differential equation by two of its spectra, Uspekth. Math. Nauk, 19, 2(116), 3-52.
39. **Levitan, B. M., Sargsjan, I. S.**, 1970, Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.
40. **Levitan, B. M.**, 1978, On the determination of the Sturm-Liouville operator from one and two spectra, Math. Ussr, Izvestija, 12(1), 179-193.
41. **Liusternik, L. A., Sobolev, V. J.**, 1961, Elements of Functional Analysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York.
42. **Marchenko, V. A.**, 1950, Some problems in the theory of second order differential operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 72, 457-560.
43. **Marchenko, V. A.**, 1955, Theorems of Touberian type in the spectral theory of differential operators, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., 19, 381-442.
44. **Marchenko, V. A.**, 1952, Some problems in the theory of one-dimensional linear second order differential operators, I, Trudy Moskov. Math. Obshch (T.MMS), 327-343.
45. **Marchenko, V. A., Maslov, K. V.**, 1970, Stability of the problem of recovering the Sturm-Liouville operator from the spectral function, Mathematics of the USSR Sbornik, 81(123), 475-502.
46. **Marchenko, V. A.**, 1977, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Kiev.
47. **Marletta, M., Weikard, R.**, 2007, Stability for the inverse resonance problem for a Jacobi operator with complex potential, Inverse Problems, 23, 1677-88.
48. **Moses, H.E.**, 1957, Calculation of the scattering potential for one-dimensional Dirac equation from reflection coefficient and point eigenvalues, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, 240.
49. **Musayev, B., Alp, M.**, 2000, Fonksiyonel Analiz, Balcı yayınları, Kütahya, 470.

50. **McLaughlin, J. R.**, 1988, Stability theorems for two inverse problems, *Inverse Problems*, IOPscience, 4529-40.
51. **Nabiev, I. M.**, 2004, The inverse spectral problem for the diffusion operator on an interval, *Matematicheskoy Fiziki, Analiza, Geometrii*, 11, 302–313.
52. **Naimark, M. A.**, 1968, *Linear Differential Operators*, Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London.
53. **Panakhov, E. S., Bas, E.**, 2012, Inverse problem having special singularity type from two spectra, *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28(3), 239-258.
54. **Panakhov, E. S.**, 1981, Inverse problem for Dirac system in two partially settled spectrum, *VINITY* 3304, 1-29.
55. **Panakhov, E. S., Ercan, A.**, 2017, Stability problem of singular Sturm-Liouville equation, *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 8(2), 148-159.
56. **Poeschel, J., Trubowitz, E.**, 1987, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, Orlando.
57. **Povzner, A. V.**, 1948, On differential equations of Sturm-Liouville type on a half-axis, *Mat. Sb.*, 23.
58. **Prats, F., Toll, J.**, 1959, Construction of the Dirac equation central potential from phase shifts and bound states, *Phys. Rev.*, 113(1), 363-370.
59. **Rundell, W., Sacks, P. E.**, 2001, Reconstruction of a radially symmetric potential from two spectral sequences, *J. Math. Anal. Appl.*, 264, 354-381.
60. **Ryabushko, T. I.**, 1973, Stability of the reconstruction of a Sturm-Liouville operator from two spectra, II *Teor. Funkts. Anal. Prilozhen.*, 18, 176-85.(in Russian)
61. **Ryabushko, T. I.**, 1981, Stability of the reconstruction of a Sturm-Liouville boundary value problem on a semiaxis from two spectra, *Teor. Funkts. Funktsion. Anal. Prilozhen.*, 35, 96-100. (in Russian)

62. **Sargsjan, I. S.**, 1966a, A theorem of the completeness of the eigenfunctions of the generalized Dirac system, Dokl., Akad. Nauk. Arm. SSR, 42(2), 77-82.
63. **Sargsjan, I. S.**, 1966b, Solution of the cauchy problem for a one-dimensional Dirac system, Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1(6), 392-436.
64. **Sat, M.**, 2012, Singüler Dirac operatörünün spektral teorisi, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
65. **Sat, M., Panakhov, E. S.**, 2014, Spectral problem for diffusion operator, Applicable Analysis, 93(6), 1178-1186.
66. **Savchuk, A. M., Shkalikov, A. A.**, 2010, Inverse problems for Sturm–Liouville operators with potentials in Sobolev spaces: Uniform stability, Funkts. Anal. Prilozh., 44(4), 34–53, [Funct. Anal. Appl. 44, 270–285].
67. **Stashevskaya, V. V.**, 1953, On inverse problems of spectral analysis for a class of differential equations, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 93, 409-411.
68. **Şuhubi, E. S.**, 2001, Fonksiyonel Analiz, İTÜ., İstanbul.
69. **Veliev, S. G.**, 1972, Inverse problem for the Dirac systems a the whole axis, DEP. VINITI, 4917-4972.
70. **Yilmazer, R., Panakhov, E. S.**, 2011, On the determination of the hydrogen atom equation from two spectra, World Applied Sciences Journal, 13(10), 2203-2210.
71. **Yurko, V. A.**, 1980, On stability of recovering the Sturm-Liouville operators, Di. Eqns., Theory Funct. (Saratov Univ.), 3, 113-24 (in Russian).
72. **Yurko, V. A.**, 1998, On recovering Sturm-Liouville differential operators with singularities inside the interval, Math. Notes, 64(1), 121-132.
73. **Yurko, V. A.**, 2007, Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems, Moscow, Fizmatlit, Saratov (Russian).
74. **Weber J. H., Arfken G. B.**, 2005, Mathematical Methods for Physicists, Elsevier Academic Press.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Sivas'ta doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Sivas'ta tamamladıktan sonra 2006 yılında kazandığım Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden 2011 yılında mezun oldum. Lisans eğitimim esnasında pedagojik formasyon eğitimi aldım. 2011 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek lisans eğitimime başladım ve 2014 yılında Fırat Üniversitesi Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans eğitimimi tamamladım. 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında, Doktora eğitimine başladım ve devam etmekteyim. 2012 yılından itibaren Fırat Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.