

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İZOTROPİK UZAYDA DOĞRUSAL YÜZEYLER

Aysun YAZAR

Yüksek Lisans Tezi

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Ağustos-2017

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İZOTROPİK UZAYDA DOĞRUSAL YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aysun YAZAR

(151121102)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 24.07.2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 21.08.2017

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (Fırat Üniversitesi)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (Fırat Üniversitesi)

Prof. Dr. Erol KILIÇ (İnönü Üniversitesi)

Ağustos-2017

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında, araştırılmasında ve oluşumunda kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve sabırla yardımcı olan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ 'e sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Aysun YAZAR

ELAZIĞ-2017

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SEMBOLLER LİSTESİ	VII
1. BÖLÜM	1
1. GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	2
2.1. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR	2
2.2. İZOTROPİK UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR	9
3. BÖLÜM	13
3.1. ÖKLİD UZAYINDA DOĞRUSAL YÜZEYLER	13
3.2. ÖKLİD UZAYINDA DOĞRUSAL YÜZEY ÖRNEKLERİ	26
4. BÖLÜM	33
4.1. İZOTROPİK UZAYDA DOĞRUSAL YÜZEYLER	33
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	42

ÖZET

Bu yüksek lisans tez çalışması toplam dört ana bölümden oluşmaktadır.

Bu tez çalışmasının giriş kısmında; diferansiyel geometrinin önemli bir araştırma alanı olan yüzeyler konusu hakkında yapılan temel çalışmalar kısaca açıklanmıştır.

Daha sonra ele alınan ikinci bölümde ise Öklid uzayı ve İzotropik uzayın temel kavramları ve tez çalışmasına ışık tutacak diğer kavramlar verildi.

Çalışmanın üçüncü bölümünde ise Öklid uzayında doğrusal yüzey kavramı detaylıca incelenerek, doğrusal yüzeylerin önemli tanım ve teoremleri verildi. Öklid uzayında bu yüzeyler ile ilgili çalışmalarda elde edilen bir takım karakterizasyonlar verildi.

Çalışmanın son bölümünde de izotropik uzayda doğrusal yüzey konusu ele alındı. Bu uzayda mevcut doğrusal yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak, bu eğrilikler cinsinden ele alınan yüzeyler için yapılan bazı sınıflandırmalar verildi.

Anahtar Kelimeler: İzotropik Uzay, Doğrusal Yüzey, Gauss Eğriliği, Ortalama Eğrilik

SUMMARY

Ruled Surfaces in Isotropic Space

This master thesis work consists of four main sections.

In the introduction part of this thesis study, surfaces which is an important research area of differential geometry are briefly explained.

In the second part, the basic definitions of Euclidean space and isotropic space and other definition which will shed light on the study of thesis are given.

In the third part of the work, the definition of ruled surface in Euclidean space is examined in detail and important definitions and theorems of ruled surfaces are given. In Euclidean space, some characterizations of these surfaces are given.

In the last part of the work, ruled surface definition in isotropic space was discussed. Gauss and mean curvatures of this ruled surfaces are calculated in isotropic space, and some classifications are given

Key Words: Isotropic space, ruled surfaces, Gauss curvature, mean curvature

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1.1. Öklid uzayında doğrusal yüzey 13



SEMBOLLER LİSTESİ

V	: Vektör uzayı
M	: Yüzey
$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
$P(\mathbb{R}^3)$	: 3-boyutlu projektif uzay
τ	: Topoloji
T	: Eğrinin birim teğet vektör alanı
N	: Eğrinin asli normal vektör alanı
B	: Eğrinin binormal vektör alanı
Z	: Yüzeyin birim dik vektör alanı
D	: Afin konneksiyonu
$\mathcal{X}$	: Vektör alanı
$\varphi(I \times \mathbb{R})$	: Öklid uzayında doğrusal Yüzey
K	: Gauss eğriliği
H	: Ortalama eğriliği
E, F, G	: Birinci temel formun katsayıları
L, M, N	: İkinci temel formun katsayıları
S	: Şekil operatörü
d	: Dağılıma parametresi
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$\langle, \rangle$	: İç çarpım

$\ \cdot\ $	: Norm
(x^1, x^2)	: $\mathbb{R}^2$ de dik koordinat sistemi
(y^1, y^2, y^3)	: $\mathbb{R}^3$ de dik koordinat sistemi
I^3	: 3-boyutlu İzotropik uzay
$\mathcal{K}$	: İzotropik uzayın eğriliği
τ	: İzotropik uzayın burulması
f	: İdeal doğru
w	: İdeal düzlem
$F(0:0:0:1)$	: İdeal nokta



1.BÖLÜM

1. GİRİŞ

Son zamanlarda diferansiyel geometride önemli çalışma alanı bulunan konulardan biri yüzey konusu olmuştur. Bu konu ile ilgili özellikle O'Neil, Chen ve Carmo gibi araştırmacıların çalışmaları yeni araştırma yapacaklara temel kaynak oluşturmaktadır [1,2,3].

Klasik geometride yüzeylerin geniş bir sınıfını oluşturan doğrusal yüzeyler konusu son zamanlarda birçok araştırmacı için inceleme alanı oluşturmaktadır. Bu yüzeyler birçok farklı uzayda çok fazla araştırmacı tarafından incelenmişlerdir [4,5,6]. Doğrusal yüzeyler temel olarak bir eğri çifti tarafından üretilir. Bu eğri çifti baz eğrisi ve dayanak eğrisi olarak isimlendirilir. 3-boyutlu Öklid uzayında bir regle yüzey lokal olarak

$$r(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

formuna sahiptir. Burada α ve β , (s, t) koordinat çifti için baz ve dayanak eğrileridir.

Kısaca bir uzayda ele alınan bir eğri üzerinde doğrunun hareketiyle oluşan doğrusal yüzeyler, yüzey konusu içerisinde önemli bir rol oynar. Yukarıda belirtildiği gibi doğrusal yüzeylerde hem Öklid uzayında hem de farklı uzaylarda birçok bakımdan incelenmiştir.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında da Sabuncuoğlu ve Hacısalıhoğlu'nun bakış açısı ile Öklid uzayında doğrusal yüzey kavramı ele alınmıştır [7, 8, 9].

Doğrusal yüzeyler konusu da birçok farklı uzayda farklı yönleri ile incelenmiştir ve birçok önemli sınıflandırma yapılmıştır [10-13].

Bu çalışmada ise ilk olarak Öklid uzayında doğrusal yüzey kavramı detaylıca incelenerek, doğrusal yüzeylerin önemli tanım ve teoremleri verildi. Ardından bu yüzeyin ortalama ve Gauss eğriliklerinin hesaplama yöntemi üzerinde durulmuştur. Daha sonra yüzeyin açılabilir olması ile eğrilikleri arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Bu durumların sağlanması ve eğriliklerin alabileceği değerlerle ilgili teorem ve sonuçlara yer verildi.

Son zamanlarda Öklidsel olmayan uzaylar birçok araştırmacı için çalışma alanı oluşturmaktadır. Bu uzaylardan biri olan izotropik uzay kavramı ile ilgili birçok çalışma da yapılmıştır. Bu çalışmalarla ilgili detaylı bilgiler için [14 -24] kaynaklarına bakılabilir.

Çalışmanın son bölümünde ise verilen bir doğrusal yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış ve bu eğrilikler cinsinden verilen doğrusal yüzey için sınıflandırma yapan teoremler detaylıca incelenmiştir [25].

2. BÖLÜM

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve A da boştan farklı bir cümle olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay adı verilir [7].

$$A_1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$A_2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır}$$

Tanım 2.1.2. A bir reel afin uzay ve V de bu uzay ile birleşen vektör uzayı olsun. V de bir iç çarpım

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı olarak tanımlanırsa bu iç çarpım yardımı ile A da uzaklık, açı gibi metrik ifadeler tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzay adını alır [7].

$$\textbf{Tanım 2.1.3.} \quad d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna ve d(x, y) reel sayısına sırasıyla E^n n-boyutlu standart Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ile Öklid metriği adı verilir [7].

Tanım 2.1.4. E^n n-boyutlu standart Öklid uzayını göz önüne alalım. $\forall x, y, z \in E^n$ için $\widehat{xyz}$ şeklindeki açının ölçüsü; $\cos \theta = \frac{\langle \vec{xy}, \vec{yz} \rangle}{\|\vec{xy}\| \|\vec{yz}\|}$ şeklinde verilen eşitliği yardımı ile hesaplanan θ reel sayısıdır [7].

Tanım 2.1.5. E^n Öklid uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde verilen fonksiyonun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir [7].

Tanım 2.1.6. X bir cümle olsun. X nin alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olmak üzere eğer τ aşağıda verilen önermeleri sağlıyorsa X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay adı verilir [7].

$$\mathbf{T}_1 : X, \emptyset \in \tau$$

$$\mathbf{T}_2 : \text{Her } A_1, A_2 \in \tau \text{ ise } A_1 \cap A_2 \in \tau$$

$$\mathbf{T}_3 : \tau \text{ da alınan herhangi sayıda elamanların birleşimi yine de } \tau \text{ ya aittir.}$$

Tanım 2.1.7. X ve Y birer topolojik uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ şeklinde f fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon sürekli ise f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna X den Y ye bir homeomorfizm ya da topolojik dönüşüm denir [7].

Tanım 2.1.8. X bir topolojik uzay olsun. X nin P ve Q gibi farklı noktaları için, X de sırasıyla P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına hausdorff uzay denir [7].

Tanım 2.1.9. M bir topolojik uzay olsun. Bu topolojik uzay için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye n -boyutlu topolojik manifold denir [7].

M₁) M bir hausdorff uzaydır.

M₂) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

M₃) M sayılabilir çoklukta açık cümleler ile örtülebilir.

Tanım 2.1.10. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\mathcal{X}(M)$ olmak üzere,

$$D: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

$$1) D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$2) D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir [7].

Tanım 2.1.11. M bir Riemann manifoldu ve D, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer,

1) D, C^∞ sınıfındandır.

2) M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan her $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

dir.

3) M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan her $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ve her $p \in A$ için

$$X_p[< Y, Z >] = < D_X Y, Z > |_p + < Y, D_X Z > |_p$$

dir.

özellikleri sağlanıyorsa D konneksiyonuna M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ve D_X e de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir [7].

Tanım 2.1.12. M, E^n de bir hiperyüzey ve M nin şekil operatörü de S olsun. E^n deki Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + < S(X), Y > N$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev ve yukarıda ifade edilen denkleme de Gauss denklemi adı verilir [7].

Tanım 2.1.13. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir alt cümle M olsun. M nin her bir p noktası için, p nin $\mathbb{R}^3$ de bir A komşuluğu ve $\mathbb{R}^2$ nin U açık alt kümesinden, $\mathbb{R}^3$ uzayına bir φ fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi sağlayacak şekilde elde edilebiliyorsa, M ye $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir [7].

1) $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonu diferansiyellenebilir, regüler bir fonksiyondur.

2) $\varphi(U) = M \cap A$ dır ve $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

Tanım 2.1.14. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ olsun. α ve β vektörlerinin x vektörel çarpım işlemi

$$X = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta = \psi(\alpha \wedge \beta)$$

şeklinde tanımlı bir iç işlemdir [7].

Tanım 2.1.15. Bir reel vektör uzayı V olsun. V reel vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım işlemi diye aşağıdaki aksiyomları verilen $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne (reel değerli fonksiyona) denir ve bu işlemin değeri $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir [26].

1) Simetri aksiyomu:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in V$$

2) Bilineerlik aksiyomu:

$$\langle a u_1 + b u_2, v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u_2, v \rangle$$

$$\langle u, a v_1 + b v_2 \rangle = a \langle u, v_1 \rangle + b \langle u, v_2 \rangle$$

3) Pozitif tanımlılık:

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in V,$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}.$$

Tanım 2.1.16. Bir reel vektör uzayı V olsun. Bu V reel vektör uzayı üzerinde belli bir iç çarpım işlemi tanımlanırsa bu vektör uzayına bir iç çarpım uzayı adı verilir [26].

Tanım 2.1.17. V bir iç çarpım uzayı olsun. $u \in V$ vektörünü göz önüne alalım.

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

ifadesine $u \in V$ vektörünün normu (veya uzunluğu) denir [26].

Tanım 2.1.18. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık alt aralığı olsun.

$$\alpha : I \xrightarrow{\text{Diferansiyellenebilir.}} E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

fonksiyonuna E^n de bir eğri denir. Burada $I \subset \mathbb{R}$ ye α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de eğrinin parametresi (değişkeni) denir [9].

Tanım 2.1.19. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için eğer $|\alpha'(s)| = 1$ ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğridir denir [9].

Tanım 2.1.20. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki bir vektör alanı diye

$$\mathcal{X} : M \rightarrow \cup_p T_M(p)$$

olarak tanımlanan bire-bir örten $\mathcal{X}$ fonksiyonuna denir. Burada $\mathcal{X}(M)$ ye de M üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir [7].

Tanım 2.1.21. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi üstündeki X vektör alanının bileşenlerinin her biri düzgün fonksiyonlar ise X vektör alanı düzgün vektör alanıdır denir [9].

Tanım 2.1.22. $v, w \in X(\mathbb{R}^n)$ olsun. $p \in \mathbb{R}^n$ için $(D_v w)_{(p)} = D_{v(p)} w$

eşitliğiyle tanımlı $D_v w$ vektör alanına w nin v yönündeki kovaryant türevi denir [7].

Tanım 2.1.23. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı denir [9].

Tanım 2.1.24. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektör alanı (birim dik vektör alanı) denir [9].

Tanım 2.1.25. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

vektörüne de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektör alanı adı verilir. Ayrıca

$\{T(s), N(s), B(s)\}$ üçlüsüne de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üç yüzölçümü denir [9].

Tanım 2.1.26. N, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere, M nin her p noktasında,

$$S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M) \quad , \quad S_p(v_p) = -D_{v_p} N$$

biçiminde tanımlı S fonksiyonuna, M yüzeyinin, N birim normal vektör alanına bağlı şekil operatörü denir [9].

Tanım 2.1.27. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir M yüzeyinin her bir p noktasına

$$|_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad |_p(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

fonsiyonuna karşılık getiren $|$ fonsiyonuna, M üstünde birinci temel form denir.

$$||_p: T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad ||_p(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

biçiminde tanımlı $||$ fonsiyonuna, M üstünde ikinci temel form denir [9].

Tanım 2.1.28. Kabul edelim ki M yüzeyi $r(x, y) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$ ile verilmiş olsun. Burada diferansiyellenebilir a, b, c fonksiyonlarına r nin koordinat fonksiyonları adı verilir. Bu durumda birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E = \langle r_x, r_x \rangle, \quad F = \langle r_y, r_x \rangle, \quad G = \langle r_y, r_y \rangle,$$

$$L = \langle r_{xx}, Z \rangle, \quad M = \langle r_{xy}, Z \rangle, \quad N = \langle r_{yy}, Z \rangle,$$

ile verilir. Burada

$$Z = \frac{r_x \times r_y}{\|r_x \times r_y\|}$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır.

Yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri sırasıyla

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)},$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

ile verilir [9].

Tanım 2.1.29. $\mathbb{R}^n$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Eğer her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine bu uzayda regüler eğri denir [9].

Tanım 2.1.30. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey M olsun. Eğer M yüzeyinin bir p noktasında

$$\langle S(v_p), v_p \rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir v_p vektörü varsa bu v_p vektörüne bir asimtotik vektör denir [9].

Tanım 2.1.31. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha: I \rightarrow M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimtotik vektörü ise α eğrisine M yüzeyi içinde bir asimtotik eğri denir [9].

Sonuç 2.1.1. M yüzeyi içinde regüler bir eğri β ve Z de M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. β eğrisinin bir asimtotik eğri olması için $\langle \beta'', Z \circ \beta \rangle = 0$ olması gerek ve yeterdir. [9].

Tanım 2.1.32. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey M ve α eğrisinde $\alpha: I \rightarrow M$ şeklinde bir eğri olmak üzere bu M yüzeyinin birim dik vektör alanı Z olsun. α'' vektör alanı, $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer birleşimi ise $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisine, M yüzeyi içerisinde bir jeodezik eğri adı verilir [9].

Tanım 2.1.33. Bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üç yüzölçümü $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun.

$\text{Sp} \{T(s), N(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzayına oskülatör düzlem denir.

$\text{Sp} \{N(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzayına normal düzlem denir.

$\text{Sp} \{B(s), T(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzayına rektifiyan düzlem denir [7].



2.2. İzotropik Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $P(\mathbb{R}^3)$ 3-boyutlu bir reel projektif uzay olsun. I^3 3-boyutlu izotropik uzay $P(\mathbb{R}^3)$ den elde edilen ve öklidisel olmayan bir uzaydır. Bu uzayın ideal şekli (w, f_1, f_2) sıralı üçlülerinden oluşur. Burada w , $P(\mathbb{R}^3)$ de bir düzlem, f_1, f_2 de w de iki kompleks eşlenik doğrudur.

w ideal düzlemi $x_0 = 0$ denklemi ile verilir. f_1 ve f_2 ideal doğruları da

$$x_0 = x_1 \mp ix_2 = 0$$

denklemi ile belirlidir. Bu iki ideal doğrunun arakesitine ideal nokta adı verilir ve bu nokta $F(0:0:0:1)$ ile gösterilir [23].

Tanım 2.2.2. İzotropik uzayın hareket denklemleri

$$x' = a + x \cos(\phi) - y \sin(\phi)$$

$$y' = b + x \sin(\phi) + y \cos(\phi)$$

$$z' = c + dx + ey + z$$

şeklinde verilir. Bu hareket bir öteleme, dönme ve affine shear dönüşümden meydana gelir [23].

Tanım 2.2.3. $p = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3)$ I^3 3-boyutlu izotropik uzayda iki nokta olsun. Bu iki noktanın skaler çarpımı

$$\langle ., . \rangle_i = \begin{cases} p_3 q_3, & p_i = 0 \text{ ve } q_i = 0 \quad i = 1, 2 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2, & p_i \neq 0 \text{ veya } q_i \neq 0 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.2.4. $p = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3)$ I^3 3-boyutlu izotropik uzayda iki nokta olsun. Bu iki nokta arasındaki uzaklık bunların xy - düzlemine izdüşümlerinin uzaklığı olarak tanımlanır. Yani

$$\|p - q\|_i = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (q_i - p_i)^2} \quad (2.2.1)$$

şeklindedir [23].

Tanım 2.2.5. x ve y , I^3 izotropik uzayda iki nokta olsun. Eğer I^3 izotropik uzayında x ve y nin $\mathbb{R}^2$ üzerine z -doğrultusundaki izdüşümleri aynı ise bu iki nokta paralel nokta olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.2.6. I^3 izotropik uzayında iki farklı doğru tipi vardır. Bunlardan z-doğrultusuna paralel olanlara izotropik doğru adı verilir. (2.2.1) ile verilen metrik z-doğrultusundaki doğrular boyunca dejeneredir. Diğer tür doğrular non- izotropik doğru olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.2.7. I^3 izotropik uzayda izotropik doğruları içeren düzleme izotropik düzlem adı verilir. Diğer düzlemler de non- izotropik düzlem olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.2.8. $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ I^3 izotropik uzayda bir eğri olsun. Eğer

$$\forall s \text{ için } (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$$

ise bu eğriye birim hızlı eğri adı verilir. Yani birim hızlı $\gamma(s)$ eğrisi için $\|\gamma'(s)\|_i = 1$ dir [23].

Tanım 2.2.9. $\gamma(s)$, I^3 izotropik uzayda bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi, izotropik teğetlere sahip değilse yani $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), y(s))$ için

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \neq 0$$

ise admissible eğri olarak adlandırılır [23].

Tanım 2.2.10. I^3 izotropik uzayında $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ile parametrelendirilen bir eğri

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I^3$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

olsun. Burada x, y, z diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu durumda $\gamma(s)$ eğrisinin $\mathcal{K}(s)$ eğriliği ve $\tau(s)$ torsiyonu sırasıyla

$$\mathcal{K}(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)) = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)$$

$$\tau(s) = \frac{1}{\mathcal{K}(s)} \det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))$$

şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.2.11. I^3 izotropik uzayında, $I \subseteq \mathbb{R}$ ile parametrelendirilen birim hızlı

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I^3$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

eğrisi için

$$T(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)) = \gamma'(s)$$

eşitliğiyle verilen $T(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı denir [23].

Tanım 2.2.12. I^3 izotropik uzayında, $I \subseteq \mathbb{R}$ ile parametrelendirilen birim hızlı

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I^3$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\mathcal{K}(s)} (x''(s), y''(s), z''(s))$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki asli normal vektör alanı ya da birim dik vektör alanı denir [23].

Tanım 2.2.13. I^3 izotropik uzayında, $I \subseteq \mathbb{R}$ ile parametrelendirilen birim hızlı

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I^3$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

eğrisi için

$$B = (0,0,1)$$

eşitliğiyle belirli $B(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki binormal vektör alanı denir [23].

Tanım 2.2.14. I^3 izotropik uzayında, $I \subseteq \mathbb{R}$ ile parametrelendirilen birim hızlı eğrisi

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I^3$$

$$s \rightarrow \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

şeklinde verilsin.

Bu eğrinin Frenet vektörleri

$$T(s) = \gamma'(s)$$

$$N(s) = \frac{1}{\mathcal{K}(s)} (x''(s), y''(s), z''(s))$$

$$B = (0,0,1)$$

şeklindedir. Bu durumda Frenet formülleri de

$$T' = \mathcal{K} \cdot N$$

$$N' = -\mathcal{K} \cdot T + \tau \cdot B$$

$$B' = 0$$

ile verilir [23].

Tanım 2.2.15. M^2, I^3 izotropik uzayında

$$X: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow I^3$$

$$(u, v) \rightarrow X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

şeklinde verilen bir daldırılmış uzay olsun. Burada diferansiyellenebilir x_1, x_2, x_3 fonksiyonlarına X yüzeyinin koordinat fonksiyonları adı verilir. Bu durumda verilen yüzey için birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_v, X_u \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle,$$

$$L = \langle X_{uu}, Z \rangle, \quad M = \langle X_{uv}, Z \rangle, \quad N = \langle X_{vv}, Z \rangle,$$

ile verilir. Burada X yüzeyinin Z birim normal vektör alanı

$$Z = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

şeklinde hesaplanır. X yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri sırasıyla

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)},$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

formülleri ile hesaplanır [23].

3. BÖLÜM

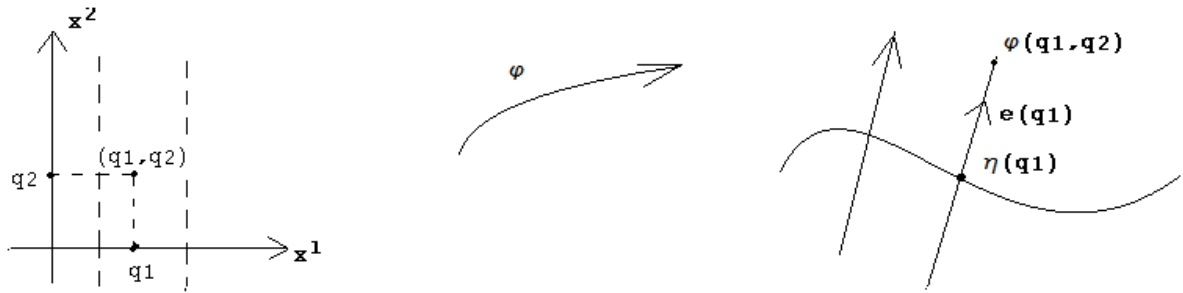
3.1. Öklid Uzayında Doğrusal Yüzeyler

Tanım 3.1.1. $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi üzerinde birim uzunlukta bir e vektör alanını göz önüne alalım. Burada e , I aralığının her bir t elemanına karşılık, $\eta(t)$ noktasında $e(t)$ vektörünü karşılık getiren bir dönüşümdür.

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(q_1, q_2) = \eta(q_1) + q_2 e(q_1)$$

dönüşümü regüler bir dönüşüm olmak üzere, $\varphi(I \times \mathbb{R})$ yüzeyine $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğrusal yüzey veya regle yüzey denir. η eğrisine doğrusal yüzeyin bir dayanak eğrisi adı verilir. $e(t)$ vektörüne doğrusal yüzeyin $\eta(t)$ noktasındaki doğrultmanı denir. $\eta(t)$ noktasından geçen ve $e(t)$ vektörüne paralel olan doğruya $\eta(t)$ noktasından geçen ana doğru denir [9]. (Şekil 3.1)

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki dik koordinat sistemini (x^1, x^2) ile $\mathbb{R}^3$ uzayındaki dik koordinat sistemini (y^1, y^2, y^3) ile gösterelim. Bu durumda,



(Şekil 3.1.1)

$q = (q_1, q_2)$ için

$$\varphi(q) = \eta(x^1(q)) + x^2(q)e(x^1(q)) = ((\eta_{ox^1}) + x^2(e_{ox^1}))(q)$$

olduğundan

$$\varphi = (\eta_{ox^1}) + x^2(e_{ox^1})$$

yazılabilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\eta \circ x^1)}{\partial x^1}(q) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\eta \circ x^1)(q_1 + h, q_2) - (\eta \circ x^1)(q_1, q_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(q_1 + h) - \eta(q_1)}{h} \\ &= \eta'(q_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial(e \circ x^1)}{\partial x^1}(q) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e \circ x^1)(q_1 + h, q_2) - (e \circ x^1)(q_1, q_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(q_1 + h) - e(q_1)}{h} \\ &= e'(q_1)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi_1(q) &= \frac{\partial(\eta \circ x^1)}{\partial x^1}(q) + \frac{\partial(x^2(e \circ x^1))}{\partial x^1}(q) \\ &= \eta'(q_1) + \frac{\partial x^2}{\partial x^1}(q) \cdot (e \circ x^1)(q) + x^2(q) \cdot \frac{\partial(e \circ x^1)}{\partial x^1}(q) \\ &= \eta'(q_1) + 0 \cdot (e \circ x^1)(q) + q_2 e'(q_1) \\ &= \eta'(q_1) + q_2 e'(q_1)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\varphi_1(q) = \eta'(q_1) + q_2 e'(q_1) \quad (3.1.1)$$

$$\varphi_2(q) = e(q_1) \quad (3.1.2)$$

bulunur.

Burada, $I \times \mathbb{R}$ nin her q noktasında $\varphi_1(q) \times \varphi_2(q) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Aksi durumda I ve $\mathbb{R}$ yerine daha küçük aralıklar alınabilir.

$\varphi(I \times \mathbb{R})$ doğrusal yüzeyinin $\varphi(q_1, q_2)$ noktasından geçen x^1 parametre eğrisi,

$$\alpha(t) = \varphi(q_1 + t, q_2)$$

eşitliğiyle belirli α eğrisidir.

Yani

$$\alpha(t) = \eta(q_1 + t) + q_2 e(q_1 + t)$$

yazılabilir. M doğrusal yüzeyinin $\varphi(q_1, q_2)$ noktasından geçen x^2 parametre eğrisi,

$$\beta(t) = \varphi(q_1, q_2 + t)$$

eşitliğiyle belirli β eğrisidir. Bu durumda

$$\beta(t) = \eta(q_1) + (q_2 + t)e(q_1)$$

olduğu kolayca görülür. Bu ise, $\varphi(q_1, q_2)$ noktasından geçen ana doğrudur.

Teorem 3.1.1. $\varphi(I \times \mathbb{R})$ doğrusal yüzeyinin $\varphi(q_1, q_2)$ noktasından geçen x^2 parametre eğrisi bu yüzey içinde hem asimtotik, hem de jeodezik eğridir [9].

İspat: Doğrusal yüzeyin $\varphi(q_1, q_2)$ noktasından geçen x^2 parametre eğrisini yukarıda β ile göstermiştik. Dolayısıyla $\beta'(t) = (e(q_1))_{\beta(t)}$ ve $\beta''(t) = 0$ olur. Yüzeyin birim dik vektör alanı Z olsun. O halde

$$\langle \beta'', Z \circ \beta \rangle = 0$$

olduğundan sonuç 2.1.1. göz önüne alınırsa β eğrisi asimtotik eğri olur.

Ayrıca $\beta'' = 0$ olduğundan β'' vektör alanı, $Z \circ \beta$ nın lineer birleşimidir. Dolayısıyla β eğrisi bir jeodezik eğridir.

Tanım 3.1.2. $\varphi(I \times \mathbb{R})$ doğrusal yüzeyinin her bir $\varphi(q_1, q_2)$ noktasında, $X(\varphi(q_1, q_2)) = (e(q_1))_{\varphi(q)}$ eşitliğiyle tanımlanan X vektör alanına, e vektör alanının $\varphi(I \times \mathbb{R})$ yüzeyine genişletilmiş denir [9].

Ayrıca $\varphi(q_1, q_2)$ noktasından geçen x^2 parametre eğrisi β ise

$$X(\varphi(q_1, q_2)) = \beta'(0)$$

olur. β eğrisi, $X(\varphi(q_1, q_2))$ teğet vektörüne yapışık bir eğridir.

Teorem 3.1.2. e vektör alanının $\varphi(I \times \mathbb{R})$ yüzeyine genişletilmiş X ise

$$\langle S(X), X \rangle = 0 \quad (3.1.3)$$

yazılabilir [9].

İspat: Doğrusal yüzeyin bir p noktasını göz önüne alalım. Ayrıca $\varphi(q_1, q_2) = p$ olsun.

Yukarıda β ile gösterilen x^2 parametre eğrisi için

$$\beta(t) = \eta(q_1) + (q_2 + t)e(q_1)$$

$$\beta(0) = \eta(q_1) + q_2 e(q_1) = p$$

ve

$$\beta'(0) = (e(q_1))_p = X(p)$$

olduğundan

$$S(X(p)) = -D_{X(p)}Z = -D_{\beta'(0)}Z = -(Z\circ\beta)'(0)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\langle S(X), X \rangle(p) = \langle S(X(p)), X(p) \rangle = -\langle (Z\circ\beta)'(0), \beta'(0) \rangle$$

bulunur. β eğrisi asimtotik eğri olduğundan

$$\langle (Z\circ\beta)', \beta' \rangle = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\langle S(X), X \rangle = 0$$

bulunur.

Teorem 3.1.3. e vektör alanının $\varphi(I \times \mathbb{R})$ yüzeyine genişletilmiş X olsun. Y vektör alanı, $\{X, Y, Z\}$ kümesi ortonormal bir çatı alanı olacak biçimde bir vektör alanı olmak üzere

$$K = -(\langle S(X), Y \rangle)^2 \quad (3.1.4)$$

dır [9].

İspat:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \langle S(X), X \rangle & \langle S(X), Y \rangle \\ \langle S(Y), X \rangle & \langle S(Y), Y \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{vmatrix}}$$

eşitliğini kullanarak

$$K = \frac{\langle S(X), X \rangle \cdot \langle S(Y), Y \rangle - \langle S(Y), X \rangle \cdot \langle S(X), Y \rangle}{\langle X, X \rangle \cdot \langle Y, Y \rangle - \langle Y, X \rangle \cdot \langle X, Y \rangle}$$

$$= \frac{\langle S(X), X \rangle \cdot \langle S(Y), Y \rangle - \langle S(Y), X \rangle \cdot \langle S(X), Y \rangle}{1 - 0}$$

$$K = \langle S(X), X \rangle \cdot \langle S(Y), Y \rangle - \langle S(Y), X \rangle \cdot \langle S(X), Y \rangle$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle S(Y), X \rangle = \langle S(X), Y \rangle$$

ifadesi göz önüne alınırsa ayrıca (3.1.3) eşitliğine göre $\langle S(X), X \rangle = 0$ olduğundan

$$K = -(\langle S(X), Y \rangle)^2$$

bulunur.

Tanım 3.1.3. Bir M doğrusal yüzeyinin dik vektör alanı, yüzeyin ana doğruları boyunca paralel kalıyorsa bu doğrusal yüzeye, açılabilir yüzey denir [9].

$p \in M$ ve p den geçen ana doğru β olsun. M doğrusal yüzeyi açılabilir yüzey ise her $t \in \mathbb{R}$ için $D_{\beta'(t)}Z = 0$ dır. Özel olarak $D_{\beta'(0)}Z = 0$ alınabilir. $\beta'(0) = X(p)$ olduğundan $D_{X(p)}Z = 0$ yazılabilir. Buradan $(D_X Z)(p) = 0$ elde edilir. Her $p \in M$ için bu ifade doğru olduğundan $D_X Z = 0$ elde edilir.

Karşıt olarak $D_X Z = 0$ olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $(D_X Z)(\beta(t)) = 0$ yazılabilir.

Burada

$$D_{\beta'(t)}Z = D_{X(\beta(t))}Z = (D_X Z)(\beta(t)) = 0$$

olduğundan Z vektör alanı, β eğrisi boyunca sabit demektir. O halde M doğrusal yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

Sonuç olarak M doğrusal yüzeyinin açılabilir yüzey olması için gerek ve yeter koşul, $D_X Z = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.1.4. M doğrusal yüzeyinin açılabilir olması için $K = 0$ olması gerek ve yeterdir [9].

İspat: M doğrusal yüzeyi açılabilir bir yüzey olsun. M nin birim dik vektör alanı Z olmak üzere $D_X Z = 0$ yazılabilir. Buradan

$$K = -(\langle S(X), Y \rangle)^2 = -(\langle D_X Z, Y \rangle)^2 = -(\langle 0, Y \rangle)^2 = 0$$

elde edilir.

Karşıt olarak M doğrusal yüzeyinin Gauss eğriliğinin sıfır olduğunu kabul edelim. (3.1.4) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\langle S(X), Y \rangle = 0$$

elde edilir. Teorem 3.1.2. de

$$\langle S(X), X \rangle = 0$$

olduğunu elde etmiştik. $\{X, Y\}$ kümesi her bir noktada teğet uzayın ortonormal bir tabanı olduğundan dolayı yukarıdaki son iki eşitlikten $S(X) = 0$ elde edilir. O halde

$$D_X Z = -S(X) = 0$$

bulunur. Bu ise M doğrusal yüzeyinin açılabilir olması demektir.

M doğrusal yüzeyinin η dayanak eğrisini, her bir $\eta(s)$ noktasında bu noktadan geçen ana doğruya dik olacak biçimde birim hızlı bir eğri olarak alalım. Bu durumda η eğrisinin hız vektör alanı T olmak üzere $\{T(s), e(s), Z(\eta(s))\}$ kümesi, η nın her bir noktasında $T_{\eta(s)}(\mathbb{R}^3)$ uzayının ortonormal bir tabanı olur. Aksi belirtilmedikçe η eğrisini yukarıdaki şekilde kabul edeceğiz.

Teorem 3.1.5. M doğrusal yüzeyinin dayanak eğrisi, her bir noktasında, bu noktadan geçen ana doğruya dik olacak biçimde birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

$$a = \langle T', e \rangle$$

$$b = \langle T', Z \circ \eta \rangle \tag{3.1.5}$$

$$c = \langle e', Z \circ \eta \rangle$$

olmak üzere

$$T' = ae + b(Z \circ \eta)$$

$$e' = -aT + c(Z \circ \eta) \tag{3.1.6}$$

$$(Z \circ \eta)' = -bT - ce$$

yazılabilir [9].

İspat: η eğrisi üstündeki $T, e, Z\eta$ vektör alanlarının bu eğri boyunca türevleri olan $T', e', (Z\eta)'$ vektör alanlarını $\{T, e, Z\eta\}$ çatı alanına bağlı olarak hesaplayacağız.

$\langle T, T \rangle: I \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü sabit fonksiyon olduğundan $(\langle T, T \rangle)' = 0$ olur. Buradan $\langle T', T \rangle = 0$ yazılabilir. Ayrıca

$$T' = \lambda_1 e + \lambda_2 (Z\eta)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin her iki tarafı e ile sağdan iç çarpıma tabi tutulursa

$$\lambda_1 = \langle T', e \rangle = a$$

bulunur.

Ayrıca $T' = \lambda_1 e + \lambda_2 (Z\eta)$ eşitliğinin her iki yanını $Z\eta$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\lambda_2 = \langle T', Z\eta \rangle = b$$

elde edilir. O halde

$$T' = ae + b(Z\eta)$$

yazılabilir. Burada

$$\langle e', e \rangle = 0$$

olduğundan

$$e' = \xi_1 T + \xi_2 (Z\eta)$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanını T ile sağdan iç çarpıma tabi tutulursa

$$\xi_1 = \langle e', T \rangle = -a$$

bulunur. Ayrıca $e' = \xi_1 T + \xi_2 (Z\eta)$ eşitliğinin her iki yanını $Z\eta$ ile sağdan iç çarpıma tabi tutulursa

$$\xi_2 = \langle e', Z\eta \rangle = c$$

bulunur. O halde

$$e' = -aT + c(Z\eta)$$

yazılabilir. Burada

$$\langle (Z\eta)', Z\eta \rangle = 0$$

olduğundan

$$(Z\eta)' = h_1 T + h_2 e$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$h_1 = \langle (Z\eta)', T \rangle = -\langle Z\eta, T' \rangle = -b$$

$$h_2 = \langle (Z\eta)', e \rangle = -\langle Z\eta, e' \rangle = -c$$

olduğundan

$$(Z\eta)' = -bT - ce$$

elde edilir.

Şimdi belirli bir μ sayısı için

$$\alpha_\mu: I \rightarrow M, (\alpha_\mu)(s) = \eta(s) + \mu e(s) \quad (3.1.7)$$

biçiminde tanımlı α_μ eğrisini göz önüne alalım. Burada $\alpha_0 = \eta$ olduğundan

$$\begin{aligned} (\alpha_\mu)'(s) &= \eta'(s) + \mu e'(s) = T(s) + \mu(-a(s)T(s) + c(s)Z(\eta(s))) \\ &= (1 - \mu a(s))T(s) + \mu c(s)Z(\eta(s)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada

$$(\alpha_\mu)'(s) = (1 - \mu a(s))T(s) + \mu c(s)Z(\eta(s))$$

eşitliğindeki $T(s)$ vektörü, $T(s)$ vektörünün $\alpha_{\mu(s)}$ noktasına paralel kaydırılmışı olan $(T(s))_{\alpha_{\mu(s)}}$ anlamındadır. $Z(\eta(s))$ vektörü de $Z(\eta(s))$ vektörünün $\alpha_{\mu(s)}$ noktasına paralel kaydırılmışı olan $(Z(\eta(s)))_{\alpha_{\mu(s)}}$ anlamındadır. $e(s)$ vektörü, $\alpha_{\mu(s)}$ noktasından geçen ana doğruya paraleldir. Her $s \in I$ için

$$\langle (\alpha_\mu)'(s), e(s) \rangle = 0$$

olduğundan

$$(\alpha_\mu)'(s) \perp e(s)$$

bulunur.

O halde α_μ eğrisi her noktada, o noktadan geçen ana doğruya diktir. Bundan dolayı bu eğriye M nin bir dik (ortogonal) yörüngesi denir.

Sonuç 3.1.1. M doğrusal yüzeyinin açılabilir olması için $c = 0$ olması gerek ve yeterdir.

Şimdi

$$\xi(s) = \eta(s) + \frac{a(s)}{a^2(s)+c^2(s)} e(s) \quad (3.1.8)$$

eşitliğiyle tanımlı $\xi: I \rightarrow M$ eğrisi göz önüne alınırsa, bu eğrinin ana doğruların birbirine en yakın olduğu noktalardan geçen dik yörünge olduğu görülür.

Tanım 3.1.4. (3.1.8) eşitliğiyle verilen $\xi: I \rightarrow M$ eğrisine, M doğrusal yüzeyinin striksiyon çizgisi denir. $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğru üstündeki $\xi(s)$ noktasına, doğrusal yüzeyin bu ana doğruya ait merkez noktası adı verilir [9].

Teorem 3.1.6. $e'(s)$ vektörü, M doğrusal yüzeyinin $\xi(s)$ noktasındaki dik vektörüne paraleldir [9].

İspat: $\xi(s)$ eğrisi, α_μ eğrisindeki μ yerine $\frac{a(s)}{a^2(s)+c^2(s)}$ alınarak elde edilen eğri olduğundan

$$(\alpha_\mu)'(s) = (1 - \mu a(s))T(s) + \mu c(s)Z(\eta(s))$$

eşitliğinde μ yerine $\frac{a(s)}{a^2(s)+c^2(s)}$ alınarak elde edilen vektör, $\xi'(s)$ vektörüdür. Burada

$$\begin{aligned} \langle e'(s), (\alpha_\mu)'(s) \rangle &= \langle -a(s)T(s) + c(s)Z(\eta(s)), (1 - \mu a(s))T(s) + \mu c(s)Z(\eta(s)) \rangle \\ &= -a(s) + \mu(a^2(s) + c^2(s)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\langle e'(s), \xi'(s) \rangle = -a(s) + \frac{a(s)}{a^2(s) + c^2(s)} (a^2(s) + c^2(s)) = 0$$

yazılabilir.

Dolayısıyla buradan $\langle e'(s), e(s) \rangle = 0$ olduğu kolayca görülür. $\{\xi'(s), e(s)\}$ kümesi $\xi(s)$ noktasındaki teğet düzlemin tabanı olduğundan $e'(s) \parallel Z(\xi(s))$ elde edilir.

O halde $e'(s)$ vektörü, M doğrusal yüzeyinin $\xi(s)$ noktasındaki teğet düzlemine diktir.

Teorem 3.1.7. M doğrusal yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu K olduğuna göre

$q = (q_1, q_2)$ için

$$K(\varphi(q)) = \frac{-c^2(q_1)}{(1 - 2q_2a(q_1) + q_2^2a^2(q_1) + q_2^2c^2(q_1))^2} \quad (3.1.9)$$

dır [9].

İspat: Burada

$$\begin{aligned} \varphi_1(q) &= \eta'(q_1) + q_2e'(q_1) \\ &= T(q_1) + q_2e'(q_1) \\ &= T(q_1) + q_2(-a(q_1)T(q_1) + c(q_1)(Z\eta)(q_1)) \end{aligned}$$

ve

$$\varphi_2(q) = e(q_1)$$

yazılabilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(q) &= -q_2a'(q_1)T(q_1) + (1 - q_2a(q_1))T'(q_1) + q_2c'(q_1)(Z\eta)(q_1) + q_2c(q_1)(Z\eta)'(q_1) \\ &= -q_2a'(q_1)T(q_1) + (1 - q_2a(q_1))(a(q_1)e(q_1) + b(q_1)(Z\eta)(q_1)) \\ &\quad + q_2c'(q_1)(Z\eta)(q_1) + q_2c(q_1)(-b(q_1)T(q_1) - c(q_1)e(q_1)) \\ &= (-q_2a'(q_1) - q_2b(q_1)c(q_1))T(q_1) + (a(q_1) - q_2a^2(q_1) - q_2c^2(q_1))e(q_1) \\ &\quad + (q_2c'(q_1) - q_2a(q_1)b(q_1) + b(q_1))(Z\eta)(q_1) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(q) &= -a(q_1)T(q_1) + c(q_1)(Z\eta)(q_1) \\ \varphi_{21}(q) &= \varphi_{12}(q) = -a(q_1)T(q_1) + c(q_1)(Z\eta)(q_1) \\ \varphi_{22}(q) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \varphi_1(q) \times \varphi_2(q) &= -q_2c(q_1)T(q_1) + (1 - q_2a(q_1))(Z\eta)(q_1) \\ (||\varphi_1(q) \times \varphi_2(q)||)^2 &= (q_2^2c^2(q_1) + 1 - 2q_2a(q_1) + q_2^2a^2(q_1)) \\ &= 1 - 2q_2a(q_1) + q_2^2a^2(q_1) + q_2^2c^2(q_1) \end{aligned}$$

olduğundan

$$Z(\varphi(q)) = \frac{-q_2 c(q_1) T(q_1) + (1 - q_2 a(q_1))(Z_{0\eta})(q_1)}{\|\varphi_1(q) \times \varphi_2(q)\|}$$

bulunur. Birinci ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E(q) &= \langle \varphi_1(q), \varphi_1(q) \rangle \\ &= (1 - q_2 a(q_1))^2 + q_2^2 c^2(q_1) \\ &= 1 - 2q_2 a(q_1) + q_2^2 a^2(q_1) + q_2^2 c^2(q_1) \end{aligned}$$

$$F(q) = \langle \varphi_1(q), \varphi_2(q) \rangle = 0$$

$$G(q) = \langle \varphi_2(q), \varphi_2(q) \rangle = 1$$

$$L(q) = \langle Z(\varphi(q)), \varphi_{11}(q) \rangle$$

$$M(q) = \langle Z(\varphi(q)), \varphi_{12}(q) \rangle = \frac{c(q_1)}{\|\varphi_1(q) \times \varphi_2(q)\|}$$

$$N(q) = \langle Z(\varphi(q)), \varphi_{22}(q) \rangle = 0$$

şeklinde olduğundan

$$K(\varphi(q)) = \frac{L(q)N(q) - (M(q))^2}{E(q)G(q) - (F(q))^2}$$

eşitliği kullanılırsa

$$K(\varphi(q)) = \frac{-c^2(q_1)}{(1 - 2q_2 a(q_1) + q_2^2 a^2(q_1) + q_2^2 c^2(q_1))^2}$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.2. M doğrusal yüzeyinin açılabilir olması için Gauss eğriliğinin sıfır olması gerek ve yeterdir.

Teorem 3.1.8. Bir doğrultman boyunca Gauss eğriliğinin en küçük olduğu nokta, bu doğrultman üstündeki merkez noktasıdır [9].

İspat: Koφ fonksiyonunun bir doğrultman boyunca türevi hesaplanırsa

$$(\text{Ko}\varphi)_2(q) = \frac{2c^2(q_1)(-2a(q_1) + 2q_2^2a^2(q_1) + 2q_2^2c^2(q_1))}{(1 - 2q_2a(q_1) + q_2^2a^2(q_1) + q_2^2c^2(q_1))^3}$$

bulunur.

Buradan $(\text{Ko}\varphi)_2(q_1, q_2) = 0$ olacak şekilde q_2 sayısı aranır

$$q_2 = \frac{a(q_1)}{a^2(q_1) + c^2(q_1)}$$

bulunur. q_2 nin bu değeri için elde edilen noktanın $\eta(q_1)$ den geçen ana doğru üstündeki merkez nokta olduğu kolayca görülür. Ayrıca

$$(\text{Ko}\varphi)_{22}(q) = \frac{4c^2[(a^2 + c^2)((1 - q_2a)^2 + q_2^2c^2)^3 - 2(-a + q_2a^2 + q_2c^2)](q_1)}{(1 - 2q_2a(q_1) + q_2^2a^2(q_1) + q_2^2c^2(q_1))^3}$$

olduğundan

$$(\text{Ko}\varphi)_{22}\left(\frac{a(q_1)}{a^2(q_1) + c^2(q_1)}\right) > 0$$

dır.

Şimdi

$$K(\xi(s)) = - \left(\frac{a^2(s) + c^2(s)}{c(s)} \right)^2 \quad (3.1.10)$$

eşitliği göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.3. Teorem 3.1.8. göz önüne alınırsa $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğru boyunca K fonksiyonunun en küçük değeri $K(\xi(s))$ dır.

Tanım 3.1.5. M doğrusal yüzeyini göz önüne alalım.

$$d(s) = \frac{c(s)}{a^2(s) + c^2(s)} \quad (3.1.11)$$

eşitliğiyle belirli $d(s)$ sayısına $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğruya ilişkin dağılma parametresi adı verilir. $d: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da M doğrusal yüzeyinin dağılma parametresi fonksiyonu denir [9].

Sonuç 3.1.4. M doğrusal yüzeyinin açılabilir olması için dağılma parametresi fonksiyonunun sıfır olması gerek ve yeterdir.

İspat: Sonuç 3.1.1. de M doğrusal yüzeyinin açılabilir olması için $c = 0$ olmasının gerek ve yeter koşul olduğu gösterilmişti. Dağılma parametresi fonksiyonunun tanımından dolayı bu koşulun $d = 0$ önermesine denkliği hemen görülür.

Sonuç 3.1.5. M doğrusal yüzeyinin $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğru üstündeki merkez noktası $\xi(s)$ olduğuna göre $d(s) \neq 0$ olacak şekildeki noktalar için,

$$K(\xi(s)) = -\frac{1}{d^2(s)} \quad (3.1.12)$$

dır.

İspat: (3.1.10) eşitliği ile (3.1.11) eşitliği karşılaştırıldığında (3.1.12) eşitliği hemen elde edilir.

Sonuç 3.1.6. M doğrusal yüzeyinin bir doğrultmanına ilişkin dağılma parametresi, bu yüzey için seçilen, φ fonksiyonuna bağlı değildir.

İspat: (3.1.12) eşitliği,

$$K(\xi(s)) \cdot d^2(s) = -1$$

biçiminde yazılabilir. Bir yüzeyin Gauss eğriliği, bu yüzey için seçilen φ fonksiyonuna bağlı olmadığından $d(s)$ fonksiyonu da φ fonksiyonuna bağlı değildir.

3.2. Öklid Uzayında Doğrusal Yüzey Örnekleri

$\mathbb{R}^3$ uzayında

$$\left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

silindir eğrisini göz önüne alalım. Biz biliyoruz ki $\mathbb{R}^3$ uzayında her silindir bir doğrusal yüzeydir. Buda doğrusal yüzey olma şartlarını sağlamasıyla mevcut olur. Yani bu M silindir yüzeyi için her bir $\eta(s)$ noktasında bu noktadan geçen ana doğruya dik olacak biçimde birim hızlı η dayanak eğrisi seçilirse bu yüzeyi

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(q_1, q_2) = \eta(q_1) + q_2 e(q_1)$$

biçiminde tanımlı bir φ dönüşümüyle verebiliriz [8].

$\left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$ silindir eğrisi birim hızlı bir eğri olup her $\eta(s)$ noktasında bu noktadan geçen doğrultmana diktir.

$$e(s) = \frac{\partial(\eta(s))}{\partial y^3}$$

eşitliğiyle tanımlı e vektör alanı göz önüne alınarak $\varphi(q_1, q_2) = \eta(q_1) + q_2 e(q_1)$ eşitliğiyle tanımlı φ dönüşümü için $\varphi(\mathbb{R}^2) = M$ olduğu hemen görülür. Dolayısıyla

$$\varphi(q_1, q_2) = \eta(q_1) + q_2 e(q_1) = \left(r \cos\left(\frac{q_1}{r}\right), r \sin\left(\frac{q_1}{r}\right), q_2\right)$$

olur.

$$T(s) = \eta'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)_{\eta(s)}$$

$$Z(\eta(s)) = T(s) \times e(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)_{\eta(s)}$$

olmak üzere $\{T(s), e(s), Z(\eta(s))\}$ kümesi, η nın her bir $\eta(s)$ noktasında ortonormal bir taban olur. $e(s)$ vektörünün $e(s) = (0, 0, 1)_{\eta(s)}$ biçiminde yazılabileceği açıktır.

$$a = \langle T', e \rangle, b = \langle T', Z \circ \eta \rangle, c = \langle e', Z \circ \eta \rangle$$

eşitlikleriyle tanımlanan a, b, c, fonksiyonlarını aşağıdaki gibi bulabiliriz.

Dolayısıyla

$$T'(s) = -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right)$$

olduğundan

$$a(s) = \langle T'(s), e(s) \rangle = \left\langle -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right), (0,0,1) \right\rangle = 0$$

olur.

Benzer şekilde

$$b(s) = \langle T'(s), Z(\eta(s)) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right), \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{r} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c(s) &= \langle e'(s), Z(\eta(s)) \rangle \\ &= \langle (0,0,0), \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu yüzeyin $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğru üzerindeki merkez noktası

$$\xi(s) = \eta(s) + \frac{a(s)}{a^2(s) + c^2(s)} e(s)$$

eşitliğiyle belirli $\xi(s)$ noktasıdır. Burada verilen yüzey için

$$\frac{a(s)}{a^2(s) + c^2(s)} = \frac{0}{0}$$

olduğundan merkez noktası belirsizdir. Yani doğrultman üstündeki her bir nokta merkez nokta olarak alınırken silindirin dik kesiti olan her çember de striksiyon çizgisi olarak alınabilir.

Ayrıca bir doğrusal yüzeyin açılabilir olması için $c = 0$ olmasının gerekli ve yeterli koşul olduğunu vermiştik. Burada verilen doğrusal yüzey için $c = 0$ olduğundan silindirik yüzeyi açılabilir bir yüzeydir. Yani bu silindirik bir düzlem üzerine açılabilir.

Gauss eğriliği a, b, c , fonksiyonları cinsinden

$$K(\varphi(q)) = \frac{-c^2(q_1)}{(1 - 2q_2a(q_1) + q_2^2a^2(q_1) + q_2^2c^2(q_1))^2} = 0$$

şeklinde bulunur. Yani verilen yüzeyin Gauss eğriliği sıfırdır.

$$d(s) = \frac{c(s)}{a^2(s) + c^2(s)}$$

eşitliğiyle belirli $d(s)$ sayısına $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğruya ilişkin dağılma parametresi adı verilmişti. Yukarıda $c = 0$ olduğundan $d = 0$ olduğu görülür. Burada verilen yüzey için her bir ana doğruya ilişkin dağılma parametresi sıfırdır.

Bu yüzeyin ortalama eğriliği aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}\varphi_1(q) &= \eta'(q_1) + q_2e'(q_1) \\ &= \left(-\sin\left(\frac{q_1}{r}\right), \cos\left(\frac{q_1}{r}\right), 0\right)_{\varphi(q)}\end{aligned}$$

$$\varphi_2(q) = e(q_1) = (0, 0, 1)_{\varphi(q)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}E(q) &= \langle \varphi_1(q), \varphi_1(q) \rangle \\ &= \left\langle \left(-\sin\left(\frac{q_1}{r}\right), \cos\left(\frac{q_1}{r}\right), 0\right), \left(-\sin\left(\frac{q_1}{r}\right), \cos\left(\frac{q_1}{r}\right), 0\right) \right\rangle \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(q) &= \langle \varphi_1(q), \varphi_2(q) \rangle \\ &= \left\langle \left(-\sin\left(\frac{q_1}{r}\right), \cos\left(\frac{q_1}{r}\right), 0\right), (0, 0, 1) \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(q) &= \langle \varphi_2(q), \varphi_2(q) \rangle \\
&= \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$\varphi_1(q) \times \varphi_2(q) = \left(\cos\left(\frac{q_1}{r}\right), \sin\left(\frac{q_1}{r}\right), 0 \right)$$

ve

$$||\varphi_1(q) \times \varphi_2(q)|| = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
Z(\varphi(q)) &= \frac{\varphi_1(q) \times \varphi_2(q)}{||\varphi_1(q) \times \varphi_2(q)||} \\
&= \frac{\left(\cos\left(\frac{q_1}{r}\right), \sin\left(\frac{q_1}{r}\right), 0 \right)}{1} \\
&= \left(\cos\left(\frac{q_1}{r}\right), \sin\left(\frac{q_1}{r}\right), 0 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\varphi_{11}(q) = -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{q_1}{r}\right), \sin\left(\frac{q_1}{r}\right), 0 \right)$$

$$\varphi_{12}(q) = 0$$

$$\varphi_{22}(q) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
L(q) &= \langle Z(\varphi(q)), \varphi_{11}(q) \rangle \\
&= \left\langle \left(\cos\left(\frac{q_1}{r}\right), \sin\left(\frac{q_1}{r}\right), 0 \right), -\frac{1}{r} \left(\cos\left(\frac{q_1}{r}\right), \sin\left(\frac{q_1}{r}\right), 0 \right) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(q) &= \langle Z(\varphi(q)), \varphi_{12}(q) \rangle \\
&= \langle Z(\varphi(q)), 0 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(q) &= \langle Z(\varphi(q)), \varphi_{22}(q) \rangle \\
&= \langle Z(\varphi(q)), 0 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Buna göre

$$H(\varphi(q)) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}(q)$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1.0 - 2.0.0 + 1.(-\frac{1}{r})}{2.(1.1 - 0)} \\
&= -\frac{1}{2r}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Silindir yüzeyinin Gauss eğriliği ise

$$K(\varphi(q)) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\left(-\frac{1}{r}\right).0 - 0}{1.1 - 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi ise $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi = (x^2 \cos(x^1), x^2 \sin(x^1), hx^1)$ fonksiyonu ile verilen helikoid yüzeyini göz önüne alalım. Bu yüzeyi, her bir $\eta(s)$ noktasında, bu noktadan geçen ana doğruya dik olacak biçimde birim hızlı bir η dayanak eğrisi seçerek

$$\varphi(q_1, q_2) = \eta(q_1) + q_2 e(q_1)$$

şeklinde tanımlı bir φ dönüşümüyle verebiliriz [8].

Yani verilen yüzeyi,

$$\psi(q_1, q_2) = (0, 0, hq_1) + q_2(\cos(q_1), \sin(q_1), 0)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\eta(s) = (0, 0, s)$ eğrisini göz önüne alalım. $s = hq_1$ olduğunda $\eta(s)$ noktasına karşılık gelen ana doğruyu belirten vektör $(\cos(q_1), \sin(q_1), 0)$ vektörüdür. Başka bir ifadeyle $(\cos(\frac{s}{h}), \sin(\frac{s}{h}), 0)$ vektörüdür. O halde $e(s) = (\cos(\frac{s}{h}), \sin(\frac{s}{h}), 0)$ olarak alınabilir. $\eta'(s) = (0, 0, 1)$ olduğundan $\langle \eta'(s), e(s) \rangle = 0$ bulunur. Buna göre η eğrisi örnekte istenilen koşulları sağlayan bir eğri olur.

Sonuç olarak

$$\varphi(q_1, q_2) = (0, 0, q_1) + q_2(\cos(\frac{q_1}{h}), \sin(\frac{q_1}{h}), 0)$$

yazılabilir.

Burada

$$T(s) = \eta'(s) = (0, 0, 1)$$

$$e(s) = (\cos(\frac{s}{h}), \sin(\frac{s}{h}), 0)$$

$$Z(\eta(s)) = T(s) \times e(s) = (-\sin(\frac{s}{h}), \cos(\frac{s}{h}), 0)$$

olmak üzere $\{T(s), e(s), Z(\eta(s))\}$ kümesi, η nın her bir $\eta(s)$ noktasında ortonormal bir taban olur.

Bu helikoid eğrisinin $a = \langle T', e \rangle$, $b = \langle T', Z \rangle$, $c = \langle e', Z \rangle$ eşitlikleriyle tanımlanan a, b, c, fonksiyonlarını aşağıdaki gibi bulabiliriz.

Burada $T'(s) = (0, 0, 0)$ olduğundan

$$a(s) = \langle T'(s), e(s) \rangle = 0$$

yazılabilir.

Benzer şekilde

$$b(s) = \langle T'(s), Z(\eta(s)) \rangle = 0$$

ve

$$c(s) = \langle e'(s), Z(\eta(s)) \rangle = \frac{1}{h}$$

elde edilir.

Bu yüzeyin $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğru üzerindeki merkez noktası

$$\xi(s) = \eta(s) + \frac{a(s)}{a^2(s) + c^2(s)} e(s)$$

eşitliğiyle belirli $\xi(s)$ noktasıdır. Burada verilen yüzey için

$$\frac{a(s)}{a^2(s) + c^2(s)} = 0$$

olduğundan merkez nokta $\eta(s)$ noktasıdır. $\eta(s) = \varphi(s, 0)$ olduğu açıktır. O halde her bir ana doğru üstündeki merkez nokta, bu ana doğru ile oy^3 –ekseninin orta noktasıdır. Striksiyon çizgisi ise oy^3 –eksenidir.

Bir doğrusal yüzeyin açılabilir olması için $c = 0$ olmasının gerekli ve yeterli koşul

olduğunu vermiştik. Burada verilen doğrusal yüzey için $c \neq 0$ olduğundan bu yüzey açılabilir yüzey değildir.

Şimdi ise Gauss eğriliğine bakalım.

Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$K(\varphi(q)) = \frac{-c^2(q_1)}{(1 - 2q_2a(q_1) + q_2^2a^2(q_1) + q_2^2c^2(q_1))^2} = \frac{-h^2}{(h^2 + q_2^2)^2}$$

elde edilir.

Bu helikoid eğrisinin dağılma parametresi için şunu söyleyebiliriz:

$d(s) = \frac{c(s)}{a^2(s) + c^2(s)}$ eşitliğiyle belirli $d(s)$ sayısına, $\eta(s)$ noktasından geçen ana doğruya ilişkin dağılma parametresi adı verilmişti. $c(s) = \frac{1}{h}$ ve $a = 0$ olduğundan $d(s) = h$ bulunur. Burada verilen yüzey için her bir ana doğruya ilişkin dağılma parametresi h sayısıdır

4. BÖLÜM

4.1. İzotropik Uzayda Doğrusal Yüzeyler

Bu bölümde I^3 de doğrusal yüzeylerde temel eğrinin frenet vektörlerini elde etmeyi amaçlıyoruz. Bunun için I^3 de bir yay-uzunluğu eğrisi $\alpha = \alpha(s)$ ve α nın Frenet üç yüzlüsü $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. Bu nedenle doğrusal yüzeyler 3-tipe sahiptir:

$$r(s, t) = \alpha(s) + tV_1(s) \quad (4.1.1)$$

$$r(s, t) = \alpha(s) + tV_2(s) \quad (4.1.2)$$

$$r(s, t) = \alpha(s) + tV_3(s) \quad (4.1.3)$$

(4.1.1) ve (4.1.2) tarafından verilen doğrusal yüzeyler sırasıyla developable teğeti ve α nın asli normal yüzeyi olarak adlandırılır. (4.1.3) tarafından verilen doğrusal yüzeylerin admissible olduğunu düşünebiliriz. Bu nedenle, bunların yerine aşağıdaki doğrusal yüzeyi göz önüne alabiliriz:

$$r(s, t) = t\alpha(s) + V_3(s) \quad (4.1.4)$$

Öyle ki V_3 ün son noktasındaki tepe ile genelleştirilmiş bir konidir. I^3 de $\alpha = \alpha(s)$ yay-uzunluğunun bir teğet developable yüzeyi M olsun. Bu nedenle

$$r(s, t) = \alpha(s) + tV_1(s) \quad (4.1.5)$$

yazarız.

M developable teğeti yüzeyinin birinci ve ikinci temel form bileşenlerini hesaplayalım.

$$r(s, t) = \alpha(s) + tV_1(s)$$

olduğundan

$$r_s = \alpha'(s) + tV_1'(s)$$

$$= T + t(\mathcal{K}.N)$$

$$= (1, t\mathcal{K}, 0)$$

$$r_t = 0 + V_1(s)$$

$$= T$$

$$= (1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}
r_{ss} &= T' + t(\mathcal{K}.N') \\
&= \mathcal{K}.N + \mathfrak{t}\mathcal{K}(-\mathcal{K}T + \mathfrak{t}B) \\
&= \mathcal{K}.N - \mathfrak{t}\mathcal{K}^2T + \mathfrak{t}\mathcal{K}\mathfrak{t}B \\
&= (-\mathfrak{t}\mathcal{K}^2, \mathcal{K}, \mathfrak{t}\mathcal{K}\mathfrak{t})
\end{aligned}$$

$$r_{tt} = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}
r_{st} &= 0 + \mathcal{K}.N \\
&= \mathcal{K}.N \\
&= (0, \mathcal{K}, 0)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de E, F, G ve L, M, N ifadelerini bulalım.

$$\begin{aligned}
E &= \langle r_s, r_s \rangle \\
&= \langle (T + t(\mathcal{K}.N)), (T + t(\mathcal{K}.N)) \rangle \\
&= 1 + (\mathfrak{t}\mathcal{K})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle r_s, r_t \rangle \\
&= \langle (1, \mathfrak{t}\mathcal{K}, 0), (1, 0, 0) \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle r_t, r_t \rangle \\
&= \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$Z(r(s)) = \frac{r_s \times r_t}{\|r_s \times r_t\|}$$

eşitliğini kullanarak $Z(r(s))$ hesaplayalım. Bu durumda

$$r_s \times r_t = (0, 0, -t\mathcal{K})$$

ve

$$\|r_s \times r_t\| = \frac{1}{t\mathcal{K}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Z(r(s)) &= \frac{(0, 0, -t\mathcal{K})}{t\mathcal{K}} \\ &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} L &= \langle Z(r(s)), r_{ss} \rangle \\ &= \langle (0, 0, -1), (-t\mathcal{K}^2, \mathcal{K}, t\mathcal{K}\tau) \rangle \\ &= -t\mathcal{K}\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \langle Z(r(s)), r_{st} \rangle \\ &= \langle (0, 0, -1), (0, \mathcal{K}, 0) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \langle Z(r(s)), r_{tt} \rangle \\ &= \langle (0, 0, -1), (0, 0, 0) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Şimdi de M developable teğeti yüzeyinin ortalama ve Gauss eğriliklerini hesaplayalım.

Bu durumda

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{0 + (-t\mathcal{K}\tau) - 0}{2(1 + (t\mathcal{K})^2 - 1)} \\ &= \frac{-t\mathcal{K}\tau}{2(t\mathcal{K})^2} \\ &= -\frac{\tau}{2t\mathcal{K}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{0 - 0}{(t\mathcal{K})^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla M nin birinci ve ikinci temel formun bileşenleri

$$E = 1 + (t\mathcal{K})^2, \quad F = G = 1 \quad (4.1.6)$$

ve

$$L = -t\mathcal{K}\tau, \quad M = N = 0 \quad (4.1.7)$$

dir.

(4.1.6) ve (4.1.7) ile yukarıdaki hesaplamalardan da

$$K = 0 \quad \text{ve} \quad H = -\frac{\tau}{t\mathcal{K}} \quad (4.1.8)$$

olduğu görülür.

Bu nedenle aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

Teorem 4.1.1. M, I^3 de (4.1.1) tarafından verilen bir doğrusal yüzeyi olsun. O halde aşağıdaki maddeler geçerli olur:

i) M yüzeyi izotropik flat'dır.

ii) M yüzeyinin minimal izotropik olması için gerek ve yeter şart taban eğrisinin izotropik olmayan bir düzlemde bulunmasıdır.

iii) M yüzeyi sıfırdan farklı sabit izotropik ortalama eğriliğine sahip değildir [25].

İspat: (4.1.8) göz önüne alınırsa M yüzeyinin izotropik flat olduğu aşıkardır. Tekrar (4.1.8) ifadesinden görülür ki; $H = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır. Bu da teoremin ikinci maddesini gerektirir. Teoremin son maddesi için (4.1.8) in ikinci kısmında t bağımsız bir değişken olduğundan H ortalama eğriliği (s, t) nin bütün değerleri için sıfırdan farklı bir sabit asla olamaz.

Farz edelim ki bu M, I^3 de $\alpha = \alpha(s)$ bir yay-uzunluğu eğrisinin bir asli yüzeyidir. Bu nedenle biz

$$r(s, t) = \alpha(s) + tV_2(s) \quad (4.1.9)$$

yazabiliriz.

M yüzeyinin temel formların bileşenleri

$$\begin{aligned} E &= (1 - t\mathcal{K})^2 + (t\tau)^2 \\ F &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

$$G = 1$$

ve

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{W} [t\tau' - t^2 (\frac{\tau}{\mathcal{K}})' \mathcal{K}^2] \\ M &= \frac{\tau}{W} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$N = 0$$

şeklinde bulunur.

Burada

$$\begin{aligned} W &= EG - F^2 \\ &= (1 - t\mathcal{K})^2 + (t\tau)^2 \end{aligned}$$

dir.

(4.1.10) ve (4.1.11) den M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini

$$K = \frac{\tau^2}{w^4} \text{ ve } H = -\frac{t}{w^3} [t(\frac{\tau}{\mathcal{K}})' \mathcal{K}^2 - \tau'] \quad (4.1.12)$$

olarak hesaplarız.

Teorem 4.1.2. $r(s, t) = \alpha(s) + tV_2(s)$ şeklinde verilen bir M asli normal yüzeyi için:

i) M nin izotropik flat olması için gerek ve yeter şart taban eğrisinin izotropik olmayan bir düzlemde bulunmasıdır.

ii) M nin minimal izotropik olması için gerek ve yeter şart taban eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır [25].

İspat: (4.1.12) eşitlikleri göz önüne alınırsa teoremin birinci maddesinin sağlandığı açıkça görülür. Teoremin ikinci maddesi için (4.1.12) eşitliğinin ikinci kısmı ele alınırsa $H=0$ olması için

$$t(\frac{\tau}{\mathcal{K}})' \mathcal{K}^2 - \tau' = 0 \quad (4.1.13)$$

olması gerektiği görülür.

(4.1.13) eşitliğinden gerekli işlemler yapılırsa

$$(\frac{\tau}{\mathcal{K}})' = 0, \frac{\tau}{\mathcal{K}} = \text{sabit} \quad (4.1.14)$$

bulunur. Eğer (4.1.13) de (4.1.14) birlikte göz önüne alınırsa $\tau = \text{sabit}$ olduğu görülür. Ayrıca (4.1.14) den $\mathcal{K} = \text{sabit}$ ve $\tau = \text{sabit}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi de

$$r(s, t) = t\alpha(s) + V_3(s) \quad (4.1.15)$$

tarafından parametrelendirilen I^3 de genelleştirilmiş bir M konisini göz önüne alalım. Burada

$$\alpha(s) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(s) V_i(s), \lambda_i(s) \in C^\infty \quad (4.1.16)$$

olarak belirtilir.

O halde M için birinci ve ikinci temel formun bileşenleri

$$\begin{aligned} E &= t^2 \\ F &= t\lambda_1 \\ G &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

ve

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\lambda_3 t^2 \mathcal{K}}{W} \\ M &= 0 \\ N &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

şeklinde hesaplanır.

Burada

$$W = t^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

dır.

(4.1.17) ve (4.1.18) den M yüzeyi için Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K = 0 \text{ ve } H = -\frac{1}{w^3} [\lambda_3 t^2 \mathcal{K} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2] \tag{4.1.19}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.3. I^3 de $r(s, t) = t\alpha(s) + V_3(s)$ şeklinde verilen bir doğrusal yüzey M olsun. O halde M yüzeyi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

i) M yüzeyi izotropik flat'dır.

ii) M yüzeyinin minimal izotropik olması için gerek ve yeter şart taban eğrisinin bir oskülatör eğri olmasıdır [25].

İspat: (4.1.19) eşitlikleri göz önüne alınırsa teoremin birinci maddesinin sağlandığı açıkça görülür. Ayrıca, eğer $H = 0$ ise (4.1.19) dan $\lambda_3 = 0$ elde edilir. Bu (4.1.16) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\alpha(s) = \lambda_1(s)V_1(s) + \lambda_2(s)V_2(s)$$

olarak yazılır.

Öyle ki bu son ifadeden $\alpha(s)$ taban eğrisinin α nın oskülatör düzleminde bulunduğunu söyleyebiliriz. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

- [1] O'Neil, B., 1983, Semi Rieamann Geometry, Academic Press Newyork.
- [2] Chen, B.-Y., 1973, Geometry of Submanifolds, M. Dekker, New York.
- [3] Do Carmo, MP., 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ.
- [4] A.T. Ali, H. S. Abdel Aziz, H. Sorour A.l, 2013, Ruled surfaces generated by some special curves in Euclidean 3-Space, J. Egyptian Math. Soc. 21, 285–294.
- [5] Oztekin, H. (Balgetir), Ogrenmis, A.O., Bektas, M., 2006, Curves on ruled surfaces in Minkowski 3-space, Int. J. Contemp. Math. Sci., 31-37.
- [6] Oztekin, H. (Balgetir), Bektas, M., Ergut, M., 2005, On the B-scrolls in the 3-dimensional Lorentzian space L^3 , Kragujevac J. Math. 27, 163-174.
- [7] Hacısalihoğlu, H.H., 1993, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- [8] Sabuncuoğlu, A., 2010, Çözümlü Diferensiyel Geometri Alıştırmaları, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [9] Sabuncuoğlu, A., 2010, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [10] Alegre, P., Arslan, K., Carriazo, A., Murathan, C., Öztürk, G., 2010, Some special types of developable ruled surface, Hacettepe J. Math. Stat. 39(3), 319-325.
- [11] Dillen, F., Kühnel, W., 1999, Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space, Manuscripta Math. 98, 307–320.
- [12] Izumiya, S. Katsumi, H., Yamasaki, T., 1999, The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve, Geometry and Topology of Caustics – Caustics '98 – Banach Center Publications 50, 137–149.
- [13] Izumiya, S., Takeuchi, N., 2004, New special curves and developable surfaces, Turkish J. Math. 28, 153–163.
- [14] Aydin, M.E., Mihai, A., Ruled surfaces generated by elliptic cylindrical curves in the isotropic space, Georgian Math. J. to accept for publishing.

- [15] Aydin, M.E., Mihai, I., On certain surfaces in isotropic 4-space, Math. Commun. in press.
- [16] Aydin, M.E., 2016, A generalization of translation surfaces with constant curvature in the isotropic space, J. Geom. 107(3), 603-615.
- [17] Chen, B.Y. Decu, S., Verstraelen, L, 2013, Notes on isotropic geometry of production models, Kragujevac J. Math. 37(2) , 217–220.
- [18] Erjavec, Z., Divjak, B., Horvat, D., 2011, The general solutions of Frenet's system in the equiform geometry of the Galilean, pseudo-Galilean, simple isotropic and double isotropic space, Int. Math. Forum. 6(1), 837-856.
- [19] Milin-Sipus. Z., 2014, Translation surfaces of constant curvatures in a simply isotropic space, Period. Math. Hung. 68, 160–175.
- [20] Milin-Sipus, Z., Divjak, B., 2003, Mappings of ruled surfaces in simply isotropic space I_1^3 that preserve the generators, Monatsh. Math. 139, 235–245.
- [21] Milin-Sipus, Z., Divjak, B., 1998, Curves in n-dimensional k-isotropic space, Glasnik Matematicki, 33(53), 267–286.
- [22] Pottmann, H., Grohs, P., Mitra, N. J., 2009, Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity, Adv. Comput. Math. 31, 391–419.
- [23] Sachs, H., 1990, Isotrope Geometrie des Raumes, Vieweg Verlag, Braunschweig.
- [24] Strubecker, K., 1942, Diferential Geometrie des isotropen Raumes III, Flachentheorie, Math. Zeitsch. 48, 369-427.
- [25] Ogrenmis, A.O., Certain classes of ruled surfaces in 3-dimensional isotropic space, submitted.
- [26] Hacısalıhoğlu, H.H., 1975, Lineer Cebir, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Elazığ'ın Arıcak ilçesinde doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2013 yılında Matematik Bölüm ikincisi olarak mezun oldum. 2015 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.

Aysun YAZAR

