

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İZOTROP DÜZLEMİNİN ELEMENTER GEOMETRİSİ VE
İNVARİYANTLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Maksut UĞURLU

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

AĞUSTOS 2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İZOTROP DÜZLEMİNİN ELEMENTER GEOMETRİSİ VE İNVARYANTLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKSUT UĞURLU
(101121114)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14/08/2013

Tezin Savunulduğu Tarih: 02/09/2013

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Yrd. Doç. Dr. Tayfun TUTAK

AĞUSTOS-2013

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması esnasında bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak imkânlar sağlayan, çalışmamın her aşamasında yanımda olan çok kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU'na teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Maksut UĞURLU

ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III
SUMMARY	IV
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
GİRİŞ	1
I. BÖLÜM.....	2
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	2
II. BÖLÜM	8
2.1. Düzlemsel İzotrop Geometriler ve İnvariantları	8
III. BÖLÜM	28
3.1. İzotrop Düzlemin Elemanter Geometrisi	28
İZOTROP-II.....	63
4.1. İzotrop Düzlemde Çeşitli Çemberler Arasındaki Lineer Bağıntılar	71
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	82

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; Düzlemsel İzotrop Geometrilere ve İnvaryantlar incelendi.

Üçüncü bölümde; İzotrop düzlemin Elementer Geometrisi verildi.

Dördüncü bölümde ise İzotrop Düzlemde Çeşitli Çemberler arasındaki lineer bağıntılar araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Projektif Geometri, İzotrop Geometri, Cayley-Klein Geometrisi

SUMMARY

Elemantry Geometry of Isotrop Plane and Invariants

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter; some fundemental definitions and theorems are given.

In the second chapter; Isotrop plane geometry and invariants are examined.

In the third chapter; Elemantary geometry of isotrop plane is given.

In the foruth chapter, Linear relations between the various circles in the isotrop plane are investigated.

Key Words: Projektive Geometry, İsotrop Geometry, Cayley-Klein Geometry

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	4
Şekil 2.1	11
Şekil 2.2	11
Şekil 2.3	16
Şekil 2.4	21
Şekil 2.5	23
Şekil 2.6	25
Şekil 3.1	30
Şekil 3.2	38
Şekil 3.3	39
Şekil 3.4	42
Şekil 3.5	44
Şekil 3.6	46
Şekil 3.7	47
Şekil 3.8	49
Şekil 3.9	50
Şekil 3.10	51
Şekil 3.11	52
Şekil 3.12	54
Şekil 3.13	57
Şekil 3.14	69

SEMBOLLER LİSTESİ

τ	:	Otomorfizmler grubu
$Aut(M)$	:	Otomorfizmler grubu
Υ	:	Transformasyonlar grubu
$\wp_3$	:	İzotrop hareket grubu
$\sphericalangle$	:	Doğrular arasındaki açı
R	:	Çevrel çemberin yarıçapı
ρ	:	İç teğet çemberin yarıçapı
δ_{ik}	:	Kronecker Deltası
I_2	:	İzotrop Düzlem
P_2	:	2-projektif uzay
$(I_2, \wp_3)$	:	Düzlem izotrop hareket geometrisi
(I_2, L_4)	:	Uzaklığı koruyan benzerlik geometrisi
(I_2, γ_4)	:	Uzunlukları koruyan benzerlik geometrisi
(I_2, W_4)	:	Düzlemsel izotrop açıları koruyan benzerlik geometrisi
$\bar{P}_g$	:	İzotrop uzaklık
PQ	:	İzotrop yay
$\kappa(g, k)$	:	Çemberin kuvveti
φ	:	İzotrop olmayan doğrular arasındaki açı

GİRİŞ

Uzunca yıllar Öklid geometrisi bilim dünyasına hakim olmasına rağmen 1800’lü yılların sonlarına doğru Öklid olmayan geometri kavramları çalışılmaya başlandı. Bu çalışmaların öncüsü Cayley ve Klein dir. Bu nedenle Öklid olmayan geometriler Cayley-Klein geometrisi olarak adlandırılır.

İlk izotrop düzlem kavramı E. Study ile bir süre sonra da H. Beck tarafından verilmiştir. Sonraları da L. Berwald, C. Moore, D. Fog, St. Glass, S. di Noi bu konuyu araştırmışlardır. İzotrop düzlemin elementer ve diferansiyel geometrisi K. Strubecker tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra H. Braune, U. Graf, S. Grüner, J. Grünwald, G. Kowalewski, J. Lang, B. Pavkoviç, E. Kruppa, W. Rath, O. Roschel, W. Vetter, izotrop geometrinin gelişmesinde katkıları olmuştur. Ayrıca I. M. Yaglam, N. M. Makarowa, S. A. Skopec izotrop geometrisine katkıda bulunmuşlardır.

H.Sachs da izotrop düzlemin diferansiyel geometrisini sistematik olarak araştırmıştır.

Bu çalışmada amacımız düzlemsel izotrop geometride nokta, doğru, açı, üçgen ve çember kavramlarını incelemektir. Bu anlamda çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde düzlemsel izotrop geometriler ve invariantları incelendi. Üçüncü bölümde izotrop düzlemde üçgen ve çember kavramları araştırıldı. Dördüncü bölümde ise izotrop çemberler arasındaki lineer bağıntılar verildi.

I. BÖLÜM

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1: G bir cümle ve “ o ” de G de bir iç işlem olmak üzere aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (G, o) ikilisine bir grup adı verilir [1].

$$G.1 \forall a, b, c \in G \text{ için } (aob)oc = ao(boc),$$

$$G.2 \forall a \in G \text{ için } eoa = a \text{ olacak şekilde } e \in G \text{ vardır.}$$

$$G.3 \forall a \in G \text{ için } a^{-1}oa = e \text{ olacak şekilde } a^{-1} \in G \text{ vardır.}$$

Tanım 1.2: $o: G \times G \rightarrow G$ olmak üzere $\forall a, b \in G$ için $(aob) \in G$ iken $G.1$ bağıntısı sağlanıyorsa (G, o) ikilisine yarı-grup denir [1].

Tanım 1.3: (G, o) bir grup ve $U \neq \emptyset$ olmak üzere $U \subset G$ olsun. O zaman U , $U \times U$ üzerinde “ o ” bağıntısı ile G deki grup aksiyomlarını sağlıyorsa, U ya G nin alt grubu denir.

Ayrıca $\forall a \in G$ için $aU = Ua$ sağlanıyorsa $U \subset G$ alt grubuna normal bölen adı verilir [1].

Teorem 1.1: $U \subset G$, $U \neq \emptyset$ olmak üzere $U \subset G$ ’nin G de bir alt grup olması için gerek ve yeter şart;

$$i). \forall a, b \in U \text{ için } aob \in U$$

$$ii). \forall a \in U \text{ için } a^{-1} \in U \text{ olmasıdır [1].}$$

Tanım 1.4: Tanım 1.1’deki aksiyomlara ek olarak $\forall a, b \in G$ için $aob = boa$ bağıntısı sağlanıyorsa G grubuna Abel (değişimli) grup denir [1].

Tanım 1.5: M boştan farklı bir cümle olsun. $f: M \rightarrow M$ (birebir ve örten) fonksiyonuna M de bir permütasyon adı verilir [1].

Teorem 1.2: M bir cümle ve τ da M nin transformasyonlarının cümlesi olsun. Eğer bağıntı, dönüşümlerin ardışık uygulaması (bileşimi) olarak alınırsa τ bir gruptur. Ayrıca $\tau =: Aut(M)$ de M nin otomorfizmler grubudur [1].

İspat: $T_1, T_2 \in \tau$ olsun. $T_2 \circ T_1 = T$ ile gösterelim. $T_2 \circ T_1$ birebir-örten dönüşümlerin bileşkesi M üzerinde yine birebir-örten dönüşümdür. Yani, $T_2 \circ T_1 \in \tau$ olmak üzere

$x \neq y$ iken.

$$T_1(x) \neq T_1(y)$$

$$T_2(x) \neq T_2(y)$$

dir.

Ayrıca;

$$T_2(T_1(x)) \neq T_2(T_1(y))$$

yazılabilir.

Şimdi $G_1 - G_3$ aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

$G.1.$ $T_1, T_2, T_3 \in \tau$ ve $x \in M$ keyfi olsun.

$$[(T_1 \circ T_2) \circ T_3](x) = (T_1 \circ T_2)(T_3(x)) = T_1(T_2(T_3(x)))$$

$$[T_1 \circ (T_2 \circ T_3)](x) = T_1(T_2 \circ T_3)(x) = T_1(T_2(T_3(x)))$$

olur. Burada sağ taraflar eşit olduğundan sol taraflar da eşit olur, yani;

$$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$$

sağlanır.

$G.2.$ $I: x \rightarrow x$ özdeşlik dönüşümü, M nin üzerine olan bir birebir-örten dönüşümdür, yani $I \in \tau$ dir. Bu nedenle $I \circ T = T$ bağıntısı $\forall T \in \tau$ için sağlanır. Çünkü $x \in M$ olduğundan;

$$(I \circ T)(x) = I(T(x)) = T(x)$$

olur.

$G.3.$ $T \in \tau$ birebir-örten ise T^{-1} vardır. Burada T^{-1} de birebir-örtentir. Yani $T^{-1} \in \tau$ dir. Bu nedenle $T^{-1} \circ T = I$ yazılabilir.

O halde her $x \in M$ için;

$$(T^{-1} \circ T)(x) = T^{-1}(T(x)) = x = I(x)$$

olur.

Tanım 1.6: Bir M cümlesinin transformasyonlarının bir Υ kümesi M üzerine olan dönüşümlerin bileşke işlemine göre oluşturduğu bir grup ise Υ ye M üzerine bir transformasyon grubudur denir. Buna göre M üzerine olan transformasyon grupları $Aut(M)$ nin otomorfizmler grubunun bir alt grubudur. Buradan Teorem 1.1 gereğince transformasyon grupları ile ilgili önemli bir karakterizasyon elde edilir [1].

Teorem 1.3: Bir M cümlesinin transformasyonlarının Υ cümlesinin bir transformasyonlar grubu olması için gerek ve yeter şart;

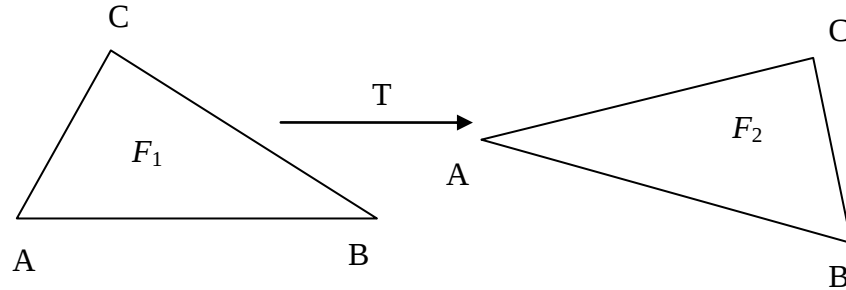
i) $T_1, T_2 \in \Upsilon$ için $T_2 \circ T_1 \in \Upsilon$

ii) $T \in \Upsilon$ için $T^{-1} \in \Upsilon$

olmasıdır.

Bir M cümlesi ve M üzerindeki transformasyonların bir grubu olan Υ verilsin. M nin elemanları noktalar olarak alınırsa, M de bir uzay olarak belirtilir. M nin herhangi bir $F \subset M$ alt cümlesine ise resim adı verilir.

Tanım 1.7: $TF_1 = F_2$ olmak üzere eğer bir $T \in \Upsilon$ transformasyonu varsa iki $F_1, F_2 \subset M$ şekline bir Υ transformasyon grubuna ait denklik adı verilir ve $F_1 \sim F_2$ şeklinde gösterilir [1].



Şekil 1.1

Teorem 1.4: M cümlesinin transformasyonlarının oluşturduğu Υ cümlesinden alınan resimlerin denkliği bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

Yansıma: $F_1 \sim F_2$ dir.

$I \in \Upsilon$ olsun. $IF_1 = F_1$ olup I özdeşlik dönüşümüdür.

Simetri: $F_1 \sim F_2$ dir.

O zaman $T \in \Upsilon$ iken $TF_1 = F_2$ olmak üzere $T^{-1} \in \tau$ vardır. Ayrıca;

$$T^{-1}(TF_1) = T^{-1}(F_2) \Rightarrow F_1 = T^{-1}(F_2)$$

elde edilir. O halde $F_2 \sim F_1$ olur.

Geçişme: $F_1 \sim F_2$ ve $F_2 \sim F_3$ olacak şekilde $T_1, T_2 \in \Upsilon$ vardır.

Buradan $(T_2 \circ T_1)(F_1) = T_2(T_1(F_1)) = T_2(F_2) = F_3$ olacak şekilde $T_2 \circ T_1 \in \Upsilon$ vardır.

Dolayısıyla $F_1 \sim F_3$ olur.

Tanım 1.8: M üzerine olan bir Υ transformasyon grubuna ait bir $F \subset M$ resminin bir özelliği Υ deki herhangi bir transformasyon altında invariant (değişmez) ise bu özelliğe bir geometrik özellik (bir geometrik büyüklük) adı verilir.

M üzerindeki çeşitli geometrilere ulaşmak için mümkün olduğunca çok $\Upsilon \subset \text{Aut}(M)$ alt gruplarını incelemek gerekir. $\text{Aut}(M)$ deki alt grupları incelemek için aşağıdaki yöntem verilebilir.

M üzerine olan Υ transformasyon grubuna ait $K \subset M$ resmi bir mutlak resim olarak adlandırılın.

Tanım 1.9: T, M üzerindeki bir transformasyon olsun ve $K \subset M$ bir mutlak resim olsun. Eğer $TK = K$ eşitliği kümeler teorisindeki anlamda geçerli ise T ye M üzerinde bir otomorfizm denir.

Teoerm 1.5: $K \subset M$ ye ait bütün otomorfizmler cümlesi $\text{Aut}(M)$ nin bir alt gurubudur.

İspat: Teorem 1.3 göz önüne alınsın.

Burada, K ya ait otomorfizmlerin cümlesi $\text{Aut}(K)$ ile gösterilsin.

I. $T_1, T_2 \in \text{Aut}(K)$ olsun. Bu durumda $T_2 \circ T_1$ K ya ait bir otomorfizmdir, çünkü $T_2 \circ T_1, M$ üzerinde bir transformasyondur ve aşağıdakiler geçerlidir:

$$\begin{aligned} P \in K &\Rightarrow T_1(p) \in K \Rightarrow T_2(T_1(p)) \in K \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(p) \in K \\ q \notin K &\Rightarrow T_1(q) \notin K \Rightarrow T_2(T_1(q)) \notin K \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(q) \notin K \end{aligned}$$

II. $T \in \text{Aut}(K)$ olsun. Bu durumda T ve T^{-1} , M üzerinde birer transformasyondur. Şimdi $T^{-1} \in \text{Aut}(K)$ olduğunu gösterelim:

$p \in K$ keyfi olsun. Bu durumda $T(r) = p$ olacak şekilde $r \in K$ vardır. Bu T nin birebir-örtenliği ve $T \in \text{Aut}(K)$ olması nedeniyle mevcuttur. Buradan $T^{-1}(p) = r$ elde edilir. Yani T^{-1} , K nın her noktasını K daki bir noktaya resmeder. Benzer şekilde;

$$q \notin K \text{ iken } T^{-1}(q) \notin K$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek 1.1: $P_n(K)$ ile K cismi üzerinde “ n -boyutlu projektif uzay” ve $PGL(P_n)$ ile de $P_n(K)$ nın projektif grubunu gösterelim. İzdüşümler birebir eşleşmeler olduğundan, örnek olarak $(P_n, PGL(P_n))$ bir grup oluşturur. Bu projektif geometriye bir örnektir.

Örnek 1.2: $P_n(K)$ da ilk olarak mutlak resim (ideal görüntü) bir H hiperdüzlemi olarak seçilirse $\frac{P_n}{H} = A_n$ cümlesi n -boyutlu “afin uzay” olarak adlandırılır. H daki otomorfizmler olan izdüşümler;

$$AGL \subset PGL$$

şeklinde gösterebileceğimiz bir alt grubu oluştururlar.

$(A_n, AGL(A_n))$ grup geometrisine “afin geometri” denir. Burada bölme oranı bir geometrik büyüklük örneğidir.

M üzerindeki Υ transformasyon grubunun bir alt cümlesi yani $u \subset \Upsilon$ olsun. (M, u) ve (M, Υ) geometriler olarak göz önüne alınırsa (M, Υ) nin her geometrik

büyüklüğü (M, u) nun da bir geometrik büyüğüdür, fakat $u \subset Y$ olmasına karşın tersi doğru değildir. (M, u) yeni bir ifadeyi ortaya çıkarır, öyle ki bu ifade (M, Y) de geçerli olmaz. Yani (M, u) daha çok geometrik özelliklere sahiptir. Bu nedenle (M, u) yu (M, Y) den daha üst geometrik olarak belirtebiliriz. Örneğin bölme oranı bir afin değişmezdir (ve (M, u) ya aittir) ancak projektif değişmez değildir. Ancak çifte oran bir projektif değişmezdir ve aynı zamanda bir afin değişmezdir.

Teorem 1.6: M üzerine olan bir Y transformasyon grubunun her u alt grubuna (M, Y) geometrisinin bir (M, u) üst geometrisi karşılık gelir. (M, u) değişmezler ve ifadeler bakımından (M, Y) den daha zengindir.

II. BÖLÜM

2.1. Düzlemsel İzotrop Geometriler ve İnvaryantları

Burada n -boyutlu $P_n(R)$ projektif uzayını göz önüne alalım. Projektif koordinat sisteminde P_n nin noktalarının koordinatları homojen ve trivial olmayan koordinatlar olmak üzere $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ şeklinde $(n+1)$ lilerle gösterilir.

Bu şekilde alınan $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ koordinatlarına projektif koordinatlar denir.

Bir H hiperdüzleminin belirlenmesinden sonra $A_n = \frac{P_n}{H}$ afın uzayına geçildiğinde noktaların koordinatları $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ sıralı n -lisiyle gösterilir. Burada

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_0}, \dots, \xi_n = \frac{x_n}{x_0} \text{ dır.}$$

Tanım 2.1: $T : A_n \rightarrow A_n$ transformasyonlarının cümlesini göz önüne alalım;

$[a_1, \dots, a_r]$ değişkenleri bağımsız iken φ_i analitik fonksiyonu $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, a_1, \dots, a_r$ bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise;

$$\xi_i = \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

cümlesine r -parçalı cümle denir. Buradaki $a_1, \dots, a_r$ değişkenlerine transformasyon cümlesinin parametreleri denir. Eğer (2.1) bir transformasyon grubu ise bu transformasyon cümlesine r -parçalı “Lie Grubu” denir.

Örnek 2.1: P_n deki bir projektif koordinat sistemi ile ilgili olarak;

$$\rho \bar{x}_i = \sum_{k=0}^n a_{ik} x_k \quad i=0, 1, 2, \dots, n \quad \text{Det}(a_{ik}) \neq 0, \quad \rho \neq 0 \quad (2.2)$$

projektiviteleri $PGL(P_n)$ transformasyon grubunu oluşturur. Bu grubun eleman sayısı $n(n+2)$ dir. Ayrıca (a_{ik}) matrisi $(n+1)^2$ elemana sahiptir. Ancak bu matris $(n+1)^2 - 1$ eleman ile belirlenir. Örneğin;

$$a_{00} = 1$$

alınabilir.

$Det(a_{ik}) \neq 0$ olması serbest parametre sayısının azalmadığını gösterir. Çünkü δ_{ik} göz önüne alınırsa;

$$Det(a_{ik}) = 1 \neq 0$$

dır.

Örnek 2.2: A_n deki bir koordinat sistemi ile ilgili olarak;

$$\xi_i = a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad Det(a_{ik}) \neq 0 \quad (2.3)$$

afiniteleri $AGL(A_n)$ afin grubunu oluşturur. Bu grubun eleman sayısı $n(n+1)$ dir. n^2 parametresi (a_{ik}) matrisinden, n parametresi de (a_i) vektöründen dolayı alınmaktadır.

Şimdi $P_2(\mathbb{R})$ nin projektiviter grubunun 8 elemanlı özel bir alt grubunu tespit edelim. Bu grup;

$$\begin{aligned} \rho \bar{x}_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ \rho \bar{x}_1 &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad Det(a_{ik}) \neq 0 \\ \rho \bar{x}_2 &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde belirlenebilir.

Ayrıca P_2 de bir f projektif doğrusunu ve bunun üzerinde bulunan bir $F \in f$ noktasını Cayley-Klein geometrinin bir resmi olarak alabiliriz.

Tanım 2.2: $\{f, F\}$ mutlak şeklin projektif otomorfizmler grubuna “genel izotrop benzerlik grubu” denir ve Υ_5 ile gösterilir.

Burada $I_2 = \frac{P_2}{f}$ olsun. Bu durumda (I_2, Υ_5) geometrisine “genel düzlemsel izotrop benzerlik geometrisi” adı verilir.

Teorem 2.1: Bir afin koordinat sisteminde genel izotrop benzerlik grubu;

$$\begin{cases} \bar{x} = a + px \\ \bar{y} = b + cx + qy \end{cases} \quad pq \neq 0 \quad (2.5)$$

formunda belirlenir. Burada $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ afin koordinatlardır. Bu transformasyonlar grubu 5-terimlidir.

İspat: P_2 de $f, x_0 = 0$ tarafından belirlenecek şekilde bir projektif koordinat sistemi seçelim, F nin projektif koordinatları $F = (0:0:1)$ şeklindedir. f doğrusu A_2 afin düzleminin projektif sonsuzdaki ideal doğrusu olarak seçilir. $F, \{x, y\}$ afin koordinat sisteminin y -ekseninin sonsuzdaki noktası olur. (2.4)deki bütün projektivitelere $\bar{x}_0 = 0$ dır, dolayısıyla $\bar{x}_0 = 0$ sağlanır ve $a_{01} = a_{02} = 0$ olur.

Transforme olan noktalar $(0:1:0)$ ve $(0:0:1)$ şeklindedir. O halde F , dönüşümün sabit noktası olmak zorundadır. Burada $a_{12} = 0$ sağlanır. Böylece şu elde edilir:

$$\begin{aligned} \rho \bar{x}_0 &= a_{00} x_0 \\ \rho \bar{x}_1 &= a_{10} x_0 + a_{11} x_1 \quad a_{00}, a_{11}, a_{22} \neq 0 \\ \rho \bar{x}_2 &= a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Eğer buradan afin koordinatlara geçilirse (2.5)'deki bağıntı elde edilir. Yani;

$$\frac{a_{10}}{a_{00}} =: a; \frac{a_{11}}{a_{00}} =: p; \frac{a_{20}}{a_{00}} =: b; \frac{a_{21}}{a_{00}} =: c; \frac{a_{22}}{a_{00}} =: q$$

değerleri (2.6) da yerine yazılırsa (2.5) elde edilir. Burada $pq = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{00}^2} \neq 0$ bağıntısı a, b, c, p, q gibi 5-serbest parametreye bağlıdır. Bu transformasyonlar bir grup oluşturur.

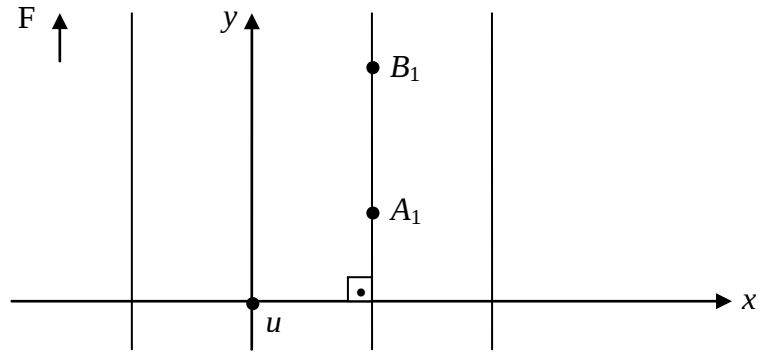
Tanım 2.3: f doğrusuna ideal doğru, F noktasına da ideal nokta denir. Bir f afin doğrusu F yi sonsuzdaki nokta olarak üzerinde bulunduruyorsa izotrop doğru adını alır.

$A \neq B$ noktaları aynı izotrop doğru üzerinde iseler bunlar paraleldirler denir.

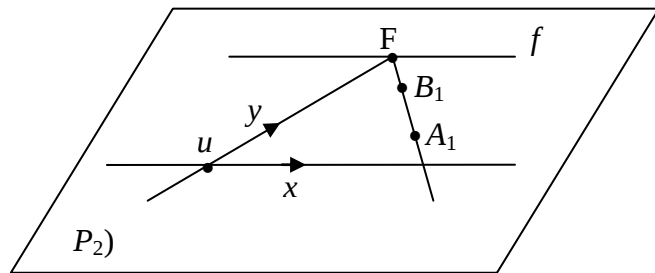
Uyarılar:

1. Tanım 2.3’de verilen kavramlar geometrik karakterlerdir. Υ_5 in transformasyonları F sabit noktasına sahiptirler. F' nin üzerinde bulunduğu bir doğru dönüşümde de üzerinde bulunma durumunu korur. Bu nedenle izotrop doğru kavramı da Υ_5 -invarianttır. Benzer şekilde paralel nokta kavramı da (I_2, Υ_5) geometrisine ait geometrik bir kavramdır.

2. Geometrik durumu açıklamak için genellikle Teorem 2.1’in ispatında $\{U; x, y\}$ afin koordinat sistemi uygulanır. Burada biz özellikle Kartezyen sağ (pozitif olarak alacağız)- sistemle açıklayacağız ve standart koordinat sistemi olarak alacağız. İzotrop doğrular y -ekseninin paralel doğrular demetini oluştururlar. Şekil 2.1 de iki paralel nokta A_1 ve B_1 ile gösterilmiştir. Şekil 2.2 aynı durumun izdüşümünü göstermektedir.



Şekil 2.1



Şekil 2.2

3. Yukarıdaki anlamda ilk izotrop düzlem kavramı E. Study ile bir süre sonra da H. Beck tarafından verilmiştir. Sonraları da L. Berwald, C. Moore, D. Fog, St. Glass, S. di Noi bu konuyu araştırmışlardır. İzotrop düzlemin elementer ve diferansiyel geometrisi K. Strubecker tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra H. Braune, U. Graf, S. Grüner, J. Grünwald, G. Kowalewski, J. Lang, B. Pavkoviç, E. Kruppa, W. Rath, O. Roschel, W. Vetter, izotrop geometrinin gelişmesinde katkıları olmuştur. I. M. Yaglam, N. M. Makarowa, S. A. Skopec izotrop geometrisine katkıda bulunmuşlardır.

Paralel olmayan $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ noktaları için $d(A, B)$ izotrop uzaklığını inceleyelim. A, B paralel olmadıklarından $a_1 \neq b_1$ dir.

$$\begin{cases} \bar{x} = a + px \\ \bar{y} = b + cx + qy \end{cases} \quad pq \neq 0 \quad (2.5)$$

(x, y benzer şekilde $\bar{x}, \bar{y}$ afin koordinatları gösteriyor ise dönüşüm grubu 5 terimlidir).

$d(A, B) = b_1 - a_1$ şeklinde tanımlanırsa;

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{b}_1 - \bar{a}_1 = a + pb_1 - (a + pa_1) = pd(A, B)$$

bulunur.

Yani d invariant değil, ancak Υ_5 e karşı bir relatif invarianttır. Böylece şu tanım verilebilir:

Tanım 2.4: Bir I büyüklüğüne, (2.1) transformasyon grubunun bir transformasyonunun uygulanmasıyla;

$$\bar{I} = f(a_1, a_2, \dots, a_r)I \quad (2.7)$$

şeklinde transforme edilmiş ise I ya bir relatif invaryant denir (Burada f , $a_1, a_2, \dots, a_r$ nin bir fonksiyonudur).

$f \equiv 1$ ise bir mutlak invariant elde edilir.

$p \equiv 1$ için $d(A, B)$ bir invarianttır.

Teorem 2.2:

$$\begin{cases} \bar{x} = a + x \\ \bar{y} = b + cx + qy \end{cases} \quad q \neq 0 \quad (2.8)$$

formundaki bütün transformasyonlar 4-terimli bir $L_4 \subset Y_5$ alt grubunu oluşturlar. Bu grup uzaklığı koruyan benzerliktir.

$$d(A, B) = b_1 - a_1 \quad (2.9)$$

ifadesi L_4 e ait bir geometrik büyüklüktür ve paralel olmayan A, B noktalarının izotrop uzaklığı olarak isimlendirilir. (I_2, L_4) geometrisine “uzaklığı koruyan benzerlik geometrisi” denir.

İspat: (2.8) transformasyon kümesi 4 adet a, b, c, q serbest parametreye bağlıdır. Grup olduğunu gösterelim. Bunun için Teorem 1.3’ü kullanalım:

$$T_1 : \begin{cases} \bar{x} = a_1 + x \\ \bar{y} = b_1 + c_1 x + q_1 y \end{cases}, \quad q_1 \neq 0$$

ve

$$T_2 : \begin{cases} \bar{x} = a_2 + \bar{x} \\ \bar{y} = b_2 + c_2 \bar{x} + q_2 \bar{y} \end{cases}, \quad q_2 \neq 0$$

(2.8) den alınan iki transformasyon olsun. Buna göre $T_2 o T_1$ ’i bulmalıyız. O halde;

$$\bar{x} = a_2 + a_1 + x$$

$$\bar{y} = b_2 + c_2 (a_1 + x) + q_2 (b_1 + c_1 x + q_1 y) = (b_2 + c_2 a_1 + q_2 b_1) + (c_2 + q_2 c_1) x + q_1 q_2 y$$

elde edilir. Buradaki transformasyonun yapısı nedeniyle ve $q_1 q_2 \neq 0$ olduğundan $T_2 o T_1$ bileşkesi yine (2.8) transformasyon kümesine aittir. (2.8)’den bir T^{-1} transformasyon ele alınırsa;

$$\begin{cases} x = -a + \bar{x} \\ y = -\frac{b}{q} - \frac{c}{q}\bar{x} + \frac{1}{q}\bar{y} \end{cases}$$

Elde edilir. Böylece bu da (2.8)e aittir.

Sonuçlar

1. İzotrop düzlemin paralel olmayan iki A, B noktası arasındaki uzaklık yönlüdür. Çünkü,

$$d(B, A) = a_1 - b_1 = -(b_1 - a_1) = -d(A, B)$$

dir.

2. Paralel noktalar için (2.9) uzaklık formülünden daima d uzaklığı $d = 0$ dır. Yani farklı paralel noktalar arasındaki uzaklık sıfırdır. Eğer paralel olmayan iki nokta arasındaki uzaklık sıfır ise bunlar çakışıktır. Diğer bir deyişle, A ile B paralel değil ve $d(A, B) = 0$ ise $A = B$ dır.

3. (2.5)'den yalnız $d(A, B) = |b_1 - a_1|$ nin invariant olduğu her bir transformasyonu ayırmak istersek $p = -1$ olması da söz konusudur.

Fakat $p = -1$ ise;

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a - x \\ \bar{y} &= b + cx + qy, \quad q \neq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklinde başka transformasyon elde edilir, bu transformasyonlar bir grup oluşturmaz.

O halde bir doğru parçasının yön işareti (2.10) da değişir. Bu transformasyon uzaklıkları koruyan benzerlik olarak gösterilir.

N. M. Makarova (2.8) ve (2.10) tipindeki transformasyonlar cümlesinin ikinci tipten benzerlik transformasyonları olarak isimlendirilmiştir.

$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ iki paralel nokta olsun. O zaman $s(A, B) = b_2 - a_2$ büyüklüğünün Υ_5 de nasıl bir davranış gösterdiğini araştıralım.

$$\text{Distans} \quad d(A, B) \quad (\text{uzaklık}) \quad (= b_1 - a_1)$$

$$\text{Spann} \quad s(A, B) \quad (\text{uzunluk}) \quad (= b_2 - a_2)$$

(2.5)den dolayı, $a_1 = b_1$ olduğundan uzunluk;

$$s(A, B) = b_2 - a_2 \quad (2.11)$$

olur.

$$\begin{aligned} s(\bar{A}, \bar{B}) &= \bar{b}_2 - \bar{a}_2 = b + cb_1 + qb_2 - (b + ca_1 + qa_2) \\ &= q(b_2 - a_2) \\ &= q s(A, B) \end{aligned}$$

$q \equiv 1 \Rightarrow s(\bar{A}, \bar{B}) = s(A, B)$ invaryantlık mutlak invaryantlık olur.

Teorem 2.3:

$$\begin{cases} \bar{x} = a + px \\ \bar{y} = b + cx + y \end{cases}, \quad p \neq 0 \quad (2.12)$$

biçimindeki bütün transformasyonlar 4-elemanlı $\gamma_4 \subset Y_5$ alt grubunu oluştururlar. Bu grup uzunluğu koruyan izotrop benzerliktir.

$s(A, B) = b_2 - a_2$ (A, B paralel noktalar) gösterimi γ_4 e ait bir geometrik büyüklüktür. A, B paralel noktalar arasındaki izotrop uzunluk (span) olarak isimlendirilir. (I_2, γ_4) geometrisine uzunlukları (spanı) koruyan benzerlik geometrisi denir.

İspat:

Teorem 2.2'nin ispatına benzer şekilde;

$$T_1 : \begin{cases} \bar{x} = a_1 + p_1 x \\ \bar{y} = b_1 + c_1 x + y \end{cases}, \quad T_2 : \begin{cases} \bar{x} = a_2 + p_2 x \\ \bar{y} = b_2 + c_2 x + y \end{cases}, \quad p \neq 0$$

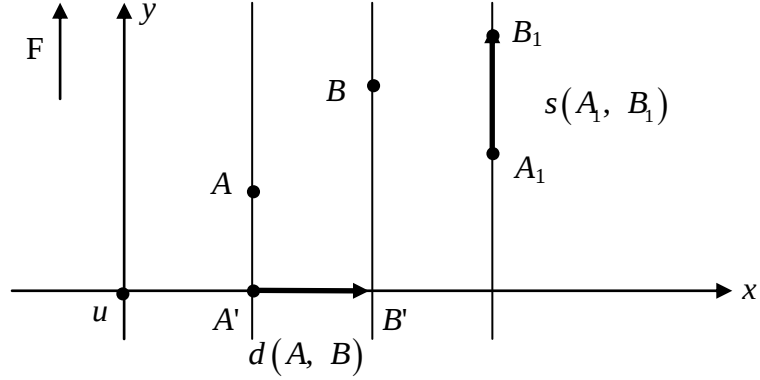
$T = T_2 \circ T_1$ gösterelim.

Herhangi $T \in \gamma_4$ için $T^{-1} \in \gamma_4$ bulunmalıdır.

Sonuçlar:

1. İki Spanin bölümü bir Υ_5 invaryanttır, bu ise genel izotrop benzerlik grubu ifadesini belirlemektedir.

2. Tanıtılan d ve s invaryantları standart Öklid koordinat sistemi ile verilebilir (Şekil 2.3)



Şekil 2.3

A, B paralel olmayan iki nokta olsun. O zaman bu noktalar izotrop doğrultusunda x -ekseni üzerine düşürülür. Bu izdüşümler A', B' olsun. O halde A', B' 'nin Öklidsel uzaklığı $d(A, B)$ izotrop uzaklığına eşittir. A_1, B_1 iki paralel nokta ise bu durumda A_1, B_1 arasındaki uzaklık (span) Öklidsel uzaklığa eşittir.

3. A, B paralel noktalar iken;

$$s(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$\sqrt{(a_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = b_2 - a_2 = s(A, B) = 0$$

$$\Rightarrow b_2 = a_2 \Rightarrow A = B$$

$$A = B \Rightarrow s(A, B) = b_2 - a_2 = 0$$

$L_4 \subset \Upsilon_5$, $\gamma_4 \subset \Upsilon_5$ alt gruplarının kesişimi yani, $L_4 \cap \gamma_4$ yine Υ_5 e ait bir alt gruptur. $\wp_3$ ile gösterilir.

Buna göre $\wp_3 = L_4 \cap \gamma_4$ dir. (2.8) ve (2.11) gereğince bu grup;

$$\begin{cases} \bar{x} = a + x \\ \bar{y} = b + cx + y \end{cases} \quad (2.13)$$

ile belirlenir. Bu dönüşüm 3-terimlidir. Bunlar a, b, c serbest parametreleridir. Bu grubun transformasyonları karşı herhangi iki $A, B \in I_2$ noktaları bir invaryanta sahiptir. Eğer A, B paralel değilse bu invaryant $d(A, B)$ dir. A, B nin paralel olmaları halinde ise bu invariant $s(A, B)$ dir.

Tanım 2.5: (2.13) transformasyon grubuna “düzlem izotrop hareketlerinin grubu” denir.

$(I_2, \wp_3)$ geometrisi “düzlem izotrop hareket geometrisi” olarak adlandırılır.

Düzlem izotrop hareket geometrisi Öklidsel hareket geometrisine benzerdir.

Şimdi doğru çiftleri için invaryantlıkları elde edelim. Bu amaçla aşağıdaki teoremi İspatlayalım.

Teorem 2.4: Her $g \subset I_2$ izotrop olmayan doğrusu;

$$y = ux + v \quad (2.14)$$

şeklinde normal formda gösterilir. Bir genel izotrop benzerliğinde izotrop olmayan bir doğrunun (u, v) doğru koordinatları ile aşağıdaki şekilde transforme olur.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{c}{p} + \frac{q}{p}u \\ \bar{v} &= \left(b - a \frac{c}{p}\right) - a \frac{q}{p}u + qv \end{aligned} \quad (2.15)$$

formu elde edilir.

İspat: P_2 projektif düzlemde bir g doğrusu $(x_0 : x_1 : x_2)$ projektif koordinatları ile $(u_0, u_1, u_2) \neq (0, 0, 0)$ olmak üzere;

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$$

şeklinde gösterilir.

g doğrusu $F(0:0:1)$ mutlak noktasından geçer $\Leftrightarrow u_2 = 0$ dır.

Böylece izotrop olmayan doğrular;

$$\frac{x_1}{x_0} = x, \quad \frac{x_2}{x_0} = y$$

$$\frac{u_0}{u_2} + \frac{u_1}{u_2} x + y = 0$$

şeklinde gösterilir. Afin koordinat dönüşümü uygulanırsa;

$$\frac{u_1}{u_2} =: -u, \quad \frac{u_0}{u_2} =: -v$$

değerlerini burada yerine yazarsak;

$$y = ux + v$$

elde edilir ki bu da (2.14) denklemdir.

$g(u, v) \cdots y = ux + v$ ye (2.5)'deki bir genel izotrop benzerlik gözüyle bakılabilir. Bu durumda görüntü doğrusu;

$$\bar{g}(\bar{u}, \bar{v}) \cdots \bar{y} = \bar{u}x + \bar{v}$$

elde edilir.

O halde g ile birlikte $\bar{g}$ de izotrop doğru değildir. Böylece (2.5) transformasyonu şöyle olur.

$$b + cx + qy = \bar{u}(a + px) + \bar{v}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\bar{u}p - c}{q}x + \frac{\bar{v} + \bar{u}a - b}{q}, \quad q \neq 0$$

için $y = ux + v$ eşitliği düşünüldüğünde;

$$u = \frac{\bar{u}p - c}{q} \quad \text{ve} \quad v = \frac{\bar{v} + \bar{u}a - b}{q}$$

(2.15) formu elde edilir.

$$uq = \bar{u}p - c \Rightarrow \bar{u} = \frac{c}{p} + \frac{q}{p}u$$

$$vq = \bar{v} + \bar{u}a - b \Rightarrow \bar{v} = \left(b - \frac{c}{p}a \right) - a \frac{q}{p}u + qv$$

(2.15) ile (2.5) karşılaştırıldığında (u, v) doğru koordinatlarının transformasyon eşitliklerinin Y_5 benzerlik grubunun dönüşüm eşitlikleri ile aynı inşa yöntemine sahip oldukları görülür. Doğruların dönüşümü regülerdir, çünkü dönüşüm matrisinin determinantı $\frac{q^2}{p} \neq 0$ dır.

Tanım 2.6: $g_1(u_1, v_1), g_2(u_2, v_2)$ izotrop düzlemin izotrop olmayan iki doğrusu olsun. Bu durumda;

$$\varphi := \angle(g_1, g_2) := u_2 - u_1 \quad (2.16)$$

gösterimine bu doğruların izotop açısı denir.

Y_5 deki bir transformasyonda izotrop olmayan iki g_1, g_2 doğrusunun izotrop açısı için;

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} := \angle(\bar{g}_1, \bar{g}_2) &= \bar{u}_2 - \bar{u}_1 = \frac{c}{p} + \frac{q}{p}u_2 - \frac{c}{p} - \frac{q}{p}u_1 \\ &= \frac{q}{p}(u_2 - u_1) = \frac{q}{p}\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Yani φ açısı Y_5 e ait bir rölatif invaryanttır. Fakat $p = q$ ise φ mutlak invaryanttır.

Teorem 2.5:

$$\begin{aligned} x &= a + px \\ y &= b + cx + py \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad (2.17)$$

formundaki bütün transformasyonlar açıları koruyan izotrop bir benzerlik olan;

$$W_4 \subset Y_5$$

şeklinde 4-terimli bir alt grup oluşturur. İzotrop olmayan iki doğrunun (2.16) daki açısı W_4 e ait bir mutlak invaryanttır. (I_2, W_4) geometrisine düzlemsel “izotrop açıları koruyan benzerlik geometrisi” denir.

İspat: Teorem 2.2’deki gibi yapılır.

Sonuçlar:

1. Doğru parçasının uzunluk ölçümü gibi açı ölçümü de izotrop düzlemde yönlüdür. Çünkü;

$$\varphi(g_2, g_1) = u_1 - u_2 = -(u_2 - u_1) = -\varphi(g_1, g_2)$$

olur. O halde açı ölçümü yönlüdür.

2. İzotrop olmayan paralel doğrular için daima $\varphi = 0$ ’dır.

3. İzotrop olmayan iki doğrunun açısı genel izotrop benzerlik grubuna ait rölatif invaryanttır. Diğer taraftan paralel ve izotrop olmayan doğrular arasındaki iki açının bölüm (bölme) katsayısı bir mutlak Υ_5 invaryanttır.

4. (2.5) den sadece;

$$\varphi(g_1, g_2) = |u_2 - u_1|$$

in invaryant olduğu transformasyonlar belirlenmek istenirse bu durumda $p = -q$ de çözüm olarak akla gelir.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a - px \\ \bar{y} &= b + cx + py \end{aligned} \quad p \neq 0 \quad (2.18)$$

transformasyonları bir grup oluşturmaz. Ama düz olmayan açıları koruyan benzerlik olarak gösterilebilir.

5. (2.8) ve (2.17) den ve benzer şekilde (2.11) ve (2.17) den sırasıyla;

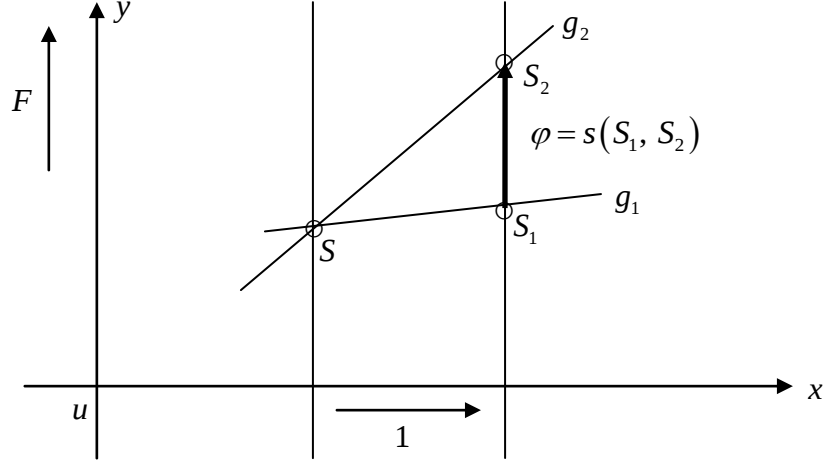
$$L_4 \cap W_4 = \wp_3$$

$$\gamma_4 \cap W_4 = \wp_3$$

sağlanır.

Böylece izotrop olmayan doğruların φ açısı da invaryant olarak izotrop hareket grubuna aittir.

6. Açı ölçüsü izotrop düzlemde açıkça belirlidir ve Öklid düzlemdeki gibi periyodik değildir. φ derece ölçüsü olarak değil uzunluk ölçüsü olarak alınır.



Şekil 2.4

g_1 ve g_2 I_2 deki iki paralel olmayan ve izotrop olmayan doğru olsun. Bu durumda bunların açısı φ çok basit bir şekilde Öklidsel olarak gösterilir (Şekil 2.4'deki gibi).

Teorem 2.6: $S_1 \in g_1$ ve $S_2 \in g_2$ noktalarının $s(S_1, S_2)$ spanı (uzunluğu)dur. Bu iki doğrunun S kesişme noktası olmak üzere;

$$d(S, S_1) = d(S, S_2) = 1$$

olur.

İspat: Birinci anlam izotrop karakterdir, bu karakter izotrop;

$$d(S, S_1) = d(S, S_2) = k$$

olsun. φ açısı;

$$\varphi(S_1, S_2) = \frac{s(S_1, S_2)}{k}$$

dır. Açık ölçüsünü izotrop uzunluk ölçüsüne geri götürmektedir. Bu anlamı İspatlamak için genelliği bozmaksızın bir g_1 ve g_2 doğrularının S kesişme noktası koordinat sisteminin başlangıç noktası olarak seçilebilir. Bu iki ötelemeyle elde edilir ve daha önce var olan izotrop invariantları değiştirmez. Çünkü $c=1$ için (2.13) izotrop hareket grubundan elde edilir. Bu halde doğruların;

$$g_1, \dots, y = u_1 x$$

$$g_2, \dots, y = u_2 x$$

denklemlerinden şu sağlanır;

$$S_1(1, u_1), \quad S_2(1, u_2)$$

yani

$$\varphi(g_1, g_2) = u_2 - u_1 = s(S_1, S_2)$$

olur.

Şekil 2.4'ten açıkça anlaşılmaktadır ki g_2 doğrusu bir izotrop doğruya dönüşürse $\varphi \rightarrow \infty$ olacaktır. Dönemeler bu nedenle izotrop düzlemde mümkün değildir.

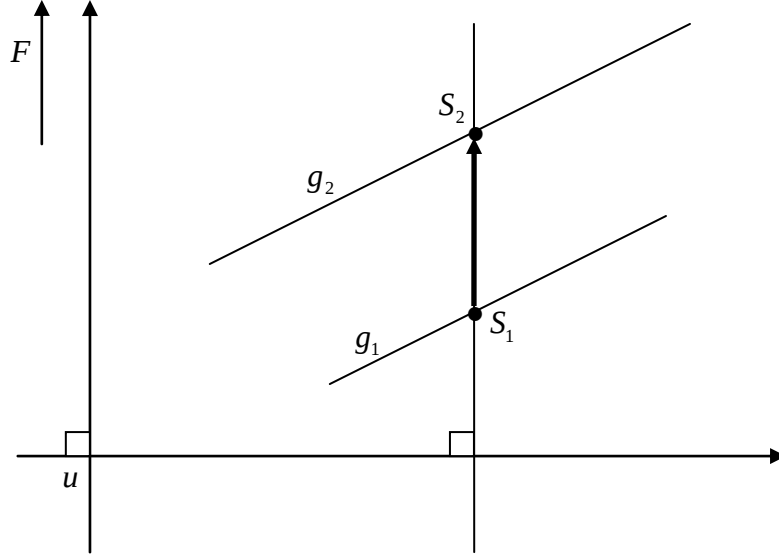
İki izotrop olmayan $g_1(u_1, v_1)$, $g_2(u_2, v_2)$ doğrular paralel iseler, $u_1 = u_2$ sağlanır ve $\varphi = 0$ olur. Bu halde bu iki paralel doğru;

$$\varphi^*(g_1, g_2) = v_2 - v_1 \quad (2.19)$$

izotrop uzaklığı invariant olarak ortaya koyar. (2.15) gereğince $u_1 = u_2$ olduğundan;

$$\varphi^*(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 = q(v_2 - v_1) = q\varphi^*(g_1, g_2)$$

sağlanır, yani φ^* , y_5 deki transformasyonlara ait rölatif invarianttır. $q=1$ için yani, γ_4 uzunluğu (span) koruyan benzerlik grubundaki transformasyonlar için φ^* bir mutlak invarianttır. Böylece φ^* aynı zamanda bir φ_3 invarianttır. Hatta iki paralel izotrop olmayan doğrunun φ^* uzaklığı bir basit izotrop ve aynı şekilde Öklidsel anlamda, Şekil 2.5'te gösterildiği gibi olmasına olanak sağlar.



Şekil 2.5

φ^* , paralel iki $S_1 \in g_1$, $S_2 \in g_2$ noktalarının $s(S_1, S_2)$ uzunluğuna eşittir. Burada φ^* , $x = x_0$ izotrop doğrusunun seçimine bağlı değildir. Öklidsel bakışta φ^* , iki $S_1 \in g_1$, $S_2 \in g_2$ noktaları arasındaki Öklidsel uzaklıktır, öyle ki bu uzaklık y -paralel herhangi bir koordinat sisteminde bulunur. Bu düşünce Teorem 2.7’de benzer olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 2.7: $g_1(x = x_1^{(0)})$, $g_2(x = x_2^{(0)})$ izotrop doğruları;

$$\tilde{\varphi} = x_2^{(0)} - x_1^{(0)} \quad (2.20)$$

L_4 invariantına sahiptir. $\tilde{\varphi}$, Υ_5 e ait rölatif bir invarianttır. Bir izotrop olmayan doğru ve bir izotrop doğru $\wp_3$ e ait bir invarianta sahip değildir ve dolayısıyla L_4 , W_4 ve Υ_5 e ait bir invarianta sahip değildir.

İspat:

I. Υ_5 deki transformasyonlardan, gerçekten (2.5) gereğince;

$$\bar{\tilde{\varphi}} = \bar{x}_2^{(0)} - \bar{x}_1^{(0)} = a + px_2^{(0)} - a - px_1^{(0)} = p(x_2^{(0)} - x_1^{(0)}) = p\tilde{\varphi}$$

sağlanır. Yani uzaklıkları koruyan izotrop benzerlikler içinde $\tilde{\varphi}$, $p=1$ için mutlak invaryanttır.

II. Son ifadeyi anlamak için göstermeliyiz ki, verilen izotrop olmayan $g_1(u_1, v_1)$, $g_2(u_2, v_2)$ doğruları için öyle ki g_1 doğrusu g_2 üzerine resmeden ve verilen bir h izotrop doğrusu tamamen sabit bırakan bir izotrop hareket daima vardır ve verilen bir h izotrop doğrusu tamamen sabit izotrop doğrusu $x = x^{(0)} = \text{sabit}$ şeklinde verilmişse öncelikle (2.13) te $a=0$ yazmalıyız. Bununla ve $p=q=1$ ise (2.15)den $\bar{u} = c + u$, $\bar{v} = b + v$ sağlanır.

$u_2 = c + u_1$, $v_2 = b + v_1$ gösterim denklemleri, böylece $\wp_3$ -transformasyonuna uygun aranan b ve c katsayıları elde edilir ki bu katsayılar yardımıyla g_1 doğrusu g_2 üzerine resmedilir. Bir I invariantı için bununla $\wp_3$ e ait;

$$I(h, g_1) = I(h, g_2)$$

dönüşümü sağlanır.

Şuna dikkat edilmelidir ki, $\tilde{\varphi}$ da bir $\wp_3$ -invarianttır.

Teorem 2.8: İzotrop hareket grubu $\wp_3$, açıları koruyan izotrop benzerliğin W_4 grubunda bir normal bölendir.

İspat: Her $G \in W_4$ transformasyonu için $G\wp_3 = \wp_3G$ eşitliğinin geçerliliği gösterilmek üzere;

$$\begin{aligned} G..... \begin{cases} \bar{x} = a + px \\ \bar{y} = b + cx + qy \end{cases}, & B_1..... \begin{cases} \bar{x} = a_1 + x \\ \bar{y} = b_1 + c_1x + y \end{cases} \\ B_2..... \begin{cases} \bar{x} = a_2 + x \\ \bar{y} = b_2 + c_2x + y \end{cases}, & B_1, B_2 \in \wp_3 \end{aligned}$$

sağlansın. Bu durumda;

$$GoB_1 = B_2oG$$

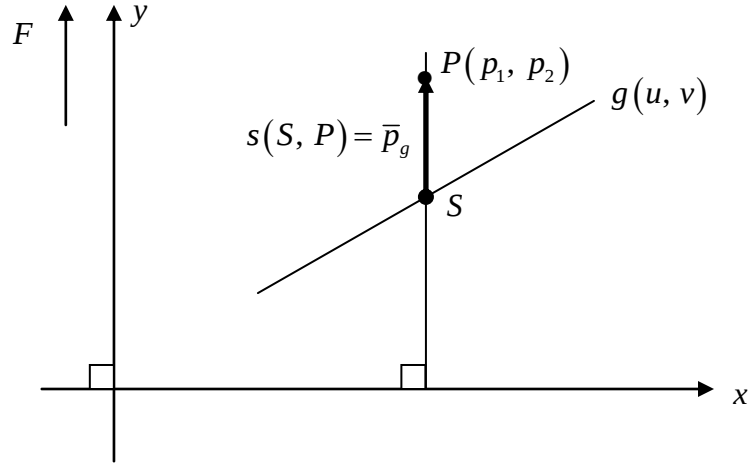
yardımla;

$$\{pa_1 = a_2, \quad c_1 = c_2, \quad ca_1 + pb_1 = b_2 + c_2a\}$$

denklem sistemi oluşur. Bu sistem $a, b, c, p \neq 0$ ile belirlidir ve verilen a_1, b_1, c_1 ler daima a_2, b_2, c_2 ler cinsinden tek türlü çözülebilirdir ve tersi de doğrudur.

Tanım 2.7: g , izotrop olmayan bir doğru, $P \notin g$ olsun. Bu durumda P den g ye olan izotrop normal denilince P den geçen izotrop doğru anlaşılır.

Bu tanım gereğince izotrop normal tek olarak belirlidir. Tersine olarak, o halde her $g \subset I_2$ doğrusu her izotrop doğrusuna diktir. Bu tanım, apaçıktır ki Υ_5 invarianttır. Tanımlanan normal ifadesi ve şimdiye kadar verilen invariantlar geçerlidir. Diğer invariantlar izotrop düzlemde elde edilirler. Örnek olarak, $P(p_1, p_2)$ noktasının $\wp_3$ e ait izotrop olmayan $g(u, v)$ doğrusuna uzaklığı açıklayalım.



Şekil 2.6

Bunun için, P den g ye olan izotrop normali ve bunun g ile kesişme noktasını S yi belirleyelim.

$s(S, P)$ spannı (uzunluk) $\wp_3$ -invarianttır (hatta γ_4 -invariant ve $\bar{P}_g$ izotrop uzaklık olarak tanımlanabilir (Şekil 2.6).

Analitik olarak;

$$\bar{P}_g = P_2 - up_1 - v \quad (2.21)$$

şeklinde bulunur.

Bu bölümde son olarak izotrop düzlemde yüzey alanının tanımı ile ilgilenilmektedir. Bunun için $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ vektörleriyle gerilen bir A, B, C, D paralelkenarı verilsin. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri lineer bağımsızdırlar. (2.3) afinitesinin A, B, C, D noktalarına uygulanmasıyla, $\vec{e} = \varphi_e$ vektör dönüşümü için $Det\varphi = Det(a_{ik}) \neq 0$ sağlanır. Buradan;

$$Det(\vec{a}, \vec{b}) = Det(a, b).Det\varphi$$

bağıntısı sağlanır. $Det(a, b) = [a, b]$ şeklinde ifade edelim. O halde özellikle genel izotrop benzerlik olan;

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [a, b]pq \quad (2.22)$$

bağıntısı sağlanır.

Böylece $[a, b]$ determinantı, Υ_5 e ait bir relatif invarianttır, fakat her izotrop benzerliğe karşı bir mutlak invariant olması için ek olarak $p.q = 1$ sağlanmalıdır.

Tanım 2.8: I_2 de a ve b tarafından gerilen bir paralelkenarın izotrop yüzey alanı denilince $[a, b]$ determinantı anlaşılır. İzotrop benzerliğe, $p.q = 1$ olmak üzere, alanı koruyan izotrop benzerlik denir.

Teorem 2.9: Yüzey alanını koruyan izotrop benzerlikler 4-bileşenli bir $f_4 \subset \Upsilon_5$ alt grubunu oluştururlar. (I_2, f_4) geometrisine alanı koruyan izotrop benzerlik geometrisi denir.

İspat: Teorem 2.2'deki yolla yapılır.

Uyarılar:

1. Oluşturulan yüzey alanı yönlüdür. Çünkü;

$$[b, a] = -[a, b]$$

dır. Bu özellik afin ve Öklid denkleminde de geçerlidir.

2. $p = 1$, $q = 1$ sağlandığından izotrop olan özel $\wp_3$ -invarianttır. Buraya kadar elde edilen düşüncelerin sonucu olarak şu teorem verilebilir:

Teorem 2.10: İzotrop hareketler uzunluğu korur, uzaklığı “span”ı korur, açığı korur, alanı korur ve φ^* ve φ yı invariant bırakır. Uzunluğu koruyan benzerlikler açıları korumazlar ve alanları korumazlar. Spanı koruyan benzerlikler ne uzunlukları ne açıları ve ne de alanı korurlar.

Bu teorem gösterir ki, Öklid benzerlik geometrisi ve izotrop geometri arasında önemli farklılık vardır. Öklid geometrisinde uzunlukları koruyan benzerlikler bilindiği gibi açıları ve alanları korur. Çeşitli izotrop benzerlikler gruplarına göre izotrop benzerlikler geometrisi öklidyen benzerlik geometrisine göre önemli şekil zenginliğine sahiptir.

İzotrop benzerliklerin çeşitli tiplerinin sistematik bir incelemesini N. M. Makrowa 1957 [7] yayınladığı bir makalesinde vermiştir.

III. BÖLÜM

3.1. İzotrop Düzlemin Elemanter Geometrisi

İzotrop düzlemin elemanter geometrisi denilince I_2 deki üçgen ve çember esaslarının $\wp_3$ izotrop hareket grubuna göre izahatını anlayacağız. $\wp_3$ grubu şimdiye kadar elde edilen bütün metrik invariantları geçerli kıldığından bir geometrinin oluşumu için fevkalade uygundur.

Tanım 3.1: I_2 izotrop düzleminde doğrudan olmayan üç noktanın oluşturduğu sıralı $\{A, B, C\}$ kümesine üçgen denir. A, B, C noktalarına üçgenin köşeleri ve

$$AB =: c, \quad BC =: a, \quad CA =: b$$

de üçgenin kenarları adı verilir. Eğer bir üçgenin hiçbir kenarı izotrop değilse böyle bir üçgene “kabul edilebilir (uygun) üçgen” diyeceğiz.

$\{A, B, C\}$ sıralı olduğundan $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ sıralaması ile bir anlamda devir tahsis edilmektedir. Üçgen uygun ise, bu durumda;

$$d(A, B) =: |c|, \quad d(B, C) =: |a|, \quad d(C, A) =: |b|$$

dir ve $|a| \neq 0$, $|b| \neq 0$, $|c| \neq 0$ olur. Benzer şekilde yönlendirilmiş açılar için;

$$\alpha := \angle(b, c) \neq 0, \quad \beta := \angle(c, a) \neq 0, \quad \gamma := \angle(a, b) \neq 0$$

olur.

Teorem 3.1: İzotrop düzlemin bir uygun üçgeninde yönlendirilmiş kenarların uzunlukları toplamı ve aynı şekilde yönlendirilmiş açılarının ölçüleri toplamı sıfırdır.

İspat:

I. Üçgenin köşelerinin koordinatları $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ olsun. (2.8)’e göre;

$$|a| = d(B, C) = c_1 - b_1$$

$$|b| = d(C, A) = a_1 - c_1$$

$$|c| = d(A, B) = b_1 - a_1$$

den;

$$|a| + |b| + |c| = c_1 - b_1 + a_1 - c_1 + b_1 - a_1 = 0$$

olduğu görülür.

II. Üçgenin kenarları yönlü olduğuna göre bunları vektör olarak;

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$$

$$\overrightarrow{CA} = (a_1 - c_1, a_2 - c_2)$$

şeklinde alabiliriz. c, a, b birleştirme doğrularının u -değerleri (2.13)'den yararlanılarak;

$$u(c) = u(AB) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1},$$

$$u(a) = u(BC) = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1},$$

$$u(b) = u(CA) = \frac{a_2 - c_2}{a_1 - c_1}$$

şeklinde bulunur. Bu değerler (2.15)'de yerlerine yazılırsa;

$$\alpha = u(c) - u(b) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} - \frac{a_2 - c_2}{a_1 - c_1},$$

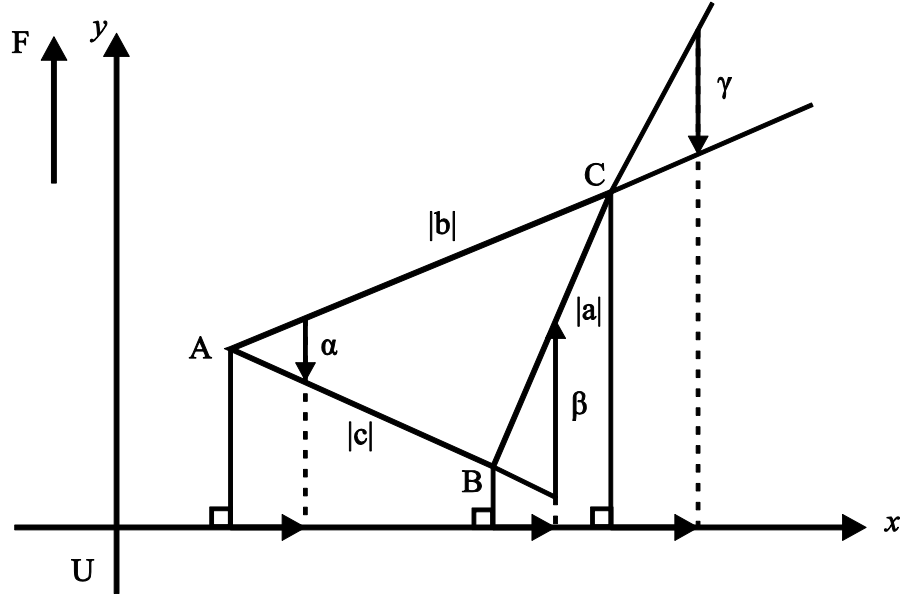
$$\beta = u(a) - u(c) = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1},$$

$$\gamma = u(b) - u(a) = \frac{a_2 - c_2}{a_1 - c_1} - \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}$$

olur ve bu değerler yerlerine konur ve hesaplamalar yapılırsa;

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

olduğu görülür.



Şekil 3.1

Teorem 3.1 izotrop üçgen geometrisinin öklidyen geometriden çok farklı olduğunu göstermektedir. Şekil 3.1’de bu geometrik hal standart koordinat sisteminde açık bir şekilde gösterilmektedir.

Tanım 3.2: Bir izotrop çember denilince, $P_2(\mathbb{R})$ de F yi içeren ve F de f mutlak doğrusuna teğet olan 2. dereceden regüler bir eğri anlaşılır.

P_2 projektif düzleminde 2. dereceden regüler bir eğri konik kesiti olarak ifade edilir ve $\{F, f\}$ mutlak şekil, mutlak çizgisel eleman olarak alınırsa böylece “izotrop çember” kısaca mutlak çizgisel elemanı içeren bir konik kesiti şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 3.2: I_2 izotrop düzleminde, $\wp_3$ e göre izotrop çemberlerin bir üç-parametrelili çeşidi oluşur. Bu ise;

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta, \quad R \neq 0 \text{ ise } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

ile gösterilir. Her çember;

$$y = Rx^2, \quad R \neq 0 \quad (3.2)$$

$\wp_3$ –normal formuna dönüştürülebilir. R , bir $\wp_3$ -invarianttır ve izotrop çemberin yarıçapı olarak isimlendirilir. Her uygun (tam) üçgen bir tek olarak belirli olan bir izotrop çevrel çembere sahiptir.

İspat:

1. $P_2(\mathbb{R})$ 'de $(x_0 : x_1 : x_2)$ projektif koordinatlarıyla bir 2. dereceden c eğrisi;

$$\alpha_{00}x_0^2 + \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{01}x_0x_1 + 2\alpha_{02}x_0x_2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 = 0 \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \quad (*)$$

şeklinde kuadratik bir formda gösterilir. Bu konik $F(0:0:1)$ noktasından geçeceğinden $(*)$ da bu değerler yerine konulursa $\alpha_{22} = 0$ olur. Şimdi 2. derece c eğrisi ile $x_0 = 0$ sonsuzdaki doğrusunun kesişme noktasını belirleyelim. $\alpha_{22} = 0$ olduğundan;

$$\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 = 0 \quad (**)$$

(Burada $x_1 = 0$ olması durumunda F noktası eğri üzerindedir)

elde edilir. Burada $x_1 = 0$ çözümü $F(0:0:1)$ noktasını verir ($x_0 = 0$, $x_1 = 0$ dan) ki bu da olması gerekir. Bu durumda f , c ye F noktasında teğettir ve f ile c nin F de başka kesişme noktası yoktur, yani $x_1 = 0$, yine $(**)$ denkleminin çözümüdür. Bu ise sadece $\alpha_{12} = 0$ için mümkündür. Verilen kuadratik formun katsayılar matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{02} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Formundadır. $\alpha_{02} = 0$ olursa $\text{Rang } A \leq 2$ olur ve c 2. dereceden regüler eğri olmaz. Benzer şekilde $\alpha_{11} \neq 0$ bulunur. Sonuç olarak afin koordinatlara geçilirse $\alpha_{02} \neq 0$ olmak üzere;

$$\alpha_{00} + \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{01}x + 2\alpha_{02}y = 0$$

konik kesit denklemi elde edilir. Burada;

$$-\frac{\alpha_{11}}{2\alpha_{02}} =: R \neq 0, \quad -\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}} =: \alpha, \quad -\frac{\alpha_{00}}{2\alpha_{02}} =: \beta$$

kısaltmaları yapılırsa (3.1) denklemi elde edilir.

2. Şimdi bir (3.1) çemberinin bir $\wp_3$ -Normal formunu inceleyelim, yani (2.12) izotrop hareketlerinin uygulanmasıyla (3.1)in yapısını (şekli) mümkün olduğunca basitleştirelim. Verilen R, α, β ile önce (3.1)den;

$$y = R \left(x + \frac{\alpha}{2R} \right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4R}$$

elde edilir. Şimdi izotrop hareket uygulanırsa;

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{2R} + x$$

$$\bar{y} = \frac{\alpha^2}{4R} - \beta + y$$

den;

$$\bar{y} = R \bar{x}^2$$

olur ve çizgiler kaldırılırsa (3.2)deki $y = R x^2$ elde edilir.

3. (3.1)deki R nin $\wp_3$ -invariantlığını İspatlamak için (3.1)e (2.12) şeklinde bir izotrop hareket uygulayalım. Burada;

$$\bar{y} = R \bar{x}^2 + \alpha \bar{x} + \beta$$

dan hareketle kısa bir deformasyon sonucu;

$$b + cx + y = R(a + x)^2 + \alpha(a + x) + \beta$$

dan;

$$y = R x^2 + (2Ra + \alpha - c)x + Ra^2 + \alpha a + \beta - b$$

oluşur. Bu ise bize x^2 katsayısının sabit kaldığını gösterir.

4. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ noktaları (uygun) tam üçgenin köşe noktaları olsun. Bu durumda bir taraftan bu noktalar doğrudan olmadıklarından dolayı;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

dır, diğer taraftan bu noktaların herhangi ikisi paralel olmadıklarından;

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \neq 0$$

dır. Bu üç A, B, C noktası bir (3.1) çemberine aitseler, bunlar;

$$y_i = Rx_i^2 + \alpha x_i + \beta \quad (i=1, 2, 3)$$

denklemini sağlamak zorundalar. Buradan şu lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} Rx^2 + \alpha x - y + \beta = 0 \\ Rx_1^2 + \alpha x_1 - y_1 + \beta = 0 \\ Rx_2^2 + \alpha x_2 - y_2 + \beta = 0 \\ Rx_3^2 + \alpha x_3 - y_3 + \beta = 0 \end{cases}$$

olur. Burada $R, \alpha, \beta, (-1)$ bilinmeyenlerdir ve aşikâr olmayan apaçık olmayacak çözüm bulunabilir. Buradan aranan izotrop çemberin denklemi olarak gerekli olan;

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Tersine olarak (3.3) bağıntısı bir izotrop çemberi belirler. Çünkü (3.3) denkleminde uygun şekilde düzenlemeler yapılırsa;

$$y(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} x^2 + Ax + B$$

denklemi kesin olarak izotrop çemberi belirler. Burada A ve B katsayıları yalnız x_i ve y_i ($i=1, 2, 3$)ye bağlıdır ve diğer hiçbir şeyle ilgili değildir. Yukarıdaki denklem gerçekten bir izotrop çemberdir ve bunun yarıçapı;

$$R = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{2 \times (\text{üçgenin alanı})}{\pi \text{ üçgenin kenar uzunlukları}} \neq 0 \quad (3.4)$$

dır ve bu çember bir tek olarak belirlidir.

Uyarılar:

1. Bir izotrop çember Öklidsel anlamda (3.2) ile verilen eksen izotrop eksen doğrultusunda olan bir paraboldür. E. Study, bu şekildeki çember kavramını izotrop düzleme aktarmış ve buna “parabolik çember” demiştir.

2. Öklid düzleminde doğrudan olmayan her üç nokta ile bir tek çember belirlenir. Bu düşünce izotrop düzlemde karışıktır. Burada herhangi iki nokta ayrıca paralel olmalıdır.

3. Tanım 3.2’de verilen izotrop çember, 5.Bölümde’de genişletildi.

4. Bazı yazarlar [8] $R = \frac{1}{2P}$ biçiminde ifade ederler ve P ye izotrop çemberin parametresi olarak bakarlar.

(3.4) formu basit bir geometrik anlam verir. Sayılar determinantı $\{A, B, C\}$ üçgeni ile belirlenen alanın iki katına eşittir. Bu yüzey alanı F ile gösterilirse;

$$x_2 - x_1 = |c|, \quad x_3 - x_1 = -|b|, \quad x_3 - x_2 = |a|$$

olmak üzere;

$$R = -\frac{2F}{|a| \cdot |b| \cdot |c|}$$

olur. $R = \frac{1}{2P}$ terimi, Öklidsel elemanter geometrinin üçgen formuna analog olarak elde edilir.

$$F = -\frac{|a| \cdot |b| \cdot |c|}{4P} \quad (3.5)$$

P: Çevrel çemberin parametresidir.

Az önce gösterildiği gibi (2.21)’e uygun olarak üç $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ noktası için $\wp_3$ e göre;

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

invariantı elde edilir. Bu değer A, B, C ile belirlenen üçgenin alanıdır. Birbirinden farklı üç izotrop olmayan doğru;

$$g_i, \dots, y = u_i x + v_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

için aşağıdaki büyüklüğü yerine koyalım:

$$F := \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1) \quad (3.7)$$

ve g_1, g_2, g_3 doğrularının belirlediği üç kenarın “dual oranı” olarak gösterelim. (2.4) gereğince bir izotrop olmayan;

$$\{\bar{u} = c + u, \bar{v} = (b - ac) - au + v\}$$

doğrusunun doğru koordinatlarının transformasyon için geçerlidir ve buradan hesapla görülüyor ki;

$$\overline{\hat{F}} = \hat{F}$$

sağlanır. Yani, $\hat{F}$ bir mutlak $\wp_3$ -invarianttır. (3.7)’den kolayca görülüyor ki, eğer g_1, g_2, g_3 doğruları paralel veya aynı demete sahipse $\hat{F} = 0$ dir.

Buradan şu teorem verilebilir:

Teorem 3.3: Herhangi ikisi paralel olmayan ve izotrop olmayan farklı üç doğru g_i ($i = 1, 2, 3$) bir tek k izotrop çemberini belirtirler, öyle ki bu çember her üç doğruya da teğet olur.

$$\alpha = \angle(g_2, g_3), \beta = \angle(g_3, g_1), \gamma = \angle(g_1, g_2)$$

ile göstermek üzere;

$$\hat{F} = \frac{P}{4} \alpha \beta \gamma \quad (3.8)$$

sağlanır. P iç teğet çemberin parametresidir.

İspat: İspatlamak için eğri sınıfı olarak, yani teğetler kümesi olarak (3.1)’in ele alınması uygundur. (3.1)’in herhangi bir $P(x_0, y_0)$ noktasındaki teğeti;

$$y = (\alpha + 2Rx_0)x + (\beta - 2Rx_0^2)$$

ile verilmiştir ve bu nedenle asla izotrop değildir.

$$u = \alpha + 2Rx_0, \quad v = \beta - 2Rx_0^2$$

ile (3.1)'den derhal k nın sınıfını belirleyen denklem olarak;

$$k : v = -\frac{p}{2}u^2 + p\alpha u + \frac{p}{2}(4R\beta - \alpha^2)$$

sağlanır.

$P = \frac{1}{2R}$ burada bir mutlak $\wp_3$ -invarianttır. Bir izotrop çemberde yerine konulursa eğri sınıfını belirlemek için;

$$V = \hat{R}u^2 + \hat{\alpha}u + \hat{\beta},$$

ki burada;

$$\hat{R} = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4R}$$

dır, Teorem 3.2'deki yolla benzer şekilde ispat tamamlanabilir.

Şöyle ki k izotrop olmayan üç $g_i : y = u_i x + v_i$ ($i = 1, 2, 3$) doğruyu teğetler olarak kabul ederse,

$$v_i = \hat{R}u_i^2 + \hat{\alpha}u_i + \hat{\beta} \quad (i = 1, 2, 3)$$

sağlanmak zorundadır.

$$(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)(u_2 - u_3) \neq 0$$

koşul vardır. Çünkü g_1, g_2, g_3 doğrularından herhangi ikisi paralel değildir. Bu koşul altında;

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{F} \neq 0$$

olur. Bu ise g_1, g_2, g_3 doğrularının bir demete ait olmadıklarını gösterir ve hatta paralel olmadığını da gösterir. (3.4)'e analog şekilde;

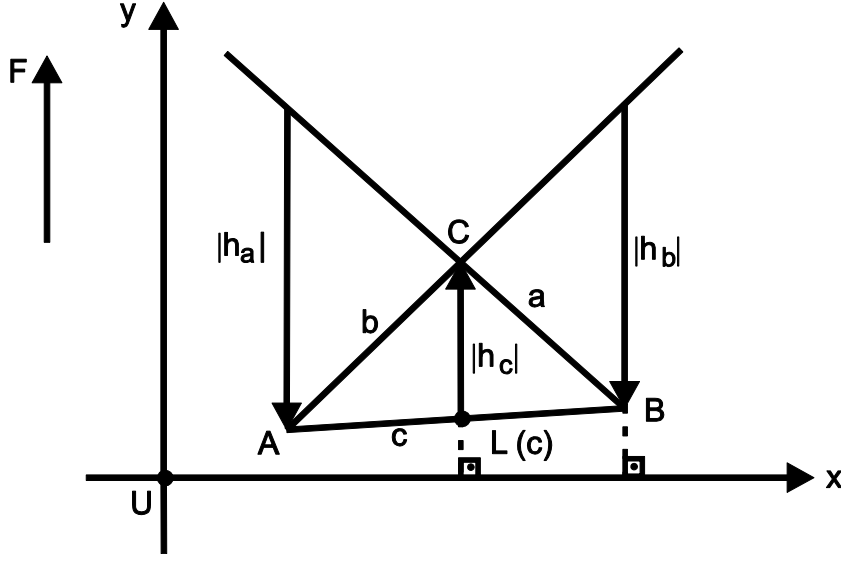
$$\hat{R} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)} \neq 0$$

bulunur. (3.7) ve $\alpha = u_3 - u_2$, $\beta = u_1 - u_3$, $\gamma = u_2 - u_1$ ile buradan;

$$\hat{R} = -\frac{2\hat{F}}{\alpha \beta \gamma}$$

oluşur. Burada $\hat{R} = -\frac{P}{2}$ formülü ile (3.8)'in sağlandığı görülür.

Öklidsel geometride, birbirinden farklı üç doğruya teğet olan dört çember var olmasına karşın, izotrop düzlemde sadece bir çember teğettir. O halde tam üçgenin kenarları izotrop değilse, hatta noktadaş veya paralel değilse, böyle bir üçgen “bir tek olarak belirli bir iç teğet çembere” sahiptir. İç teğet çemberin yarıçapı ρ ile ve çevrel çemberin yarıçapı da R ile gösterilecektir. $|a|, |b|, |c|$ kenarları ve α, β, γ açıları ile R, ρ arasındaki bağıntıyı araştıralım ve izotrop düzlemdeki bir tam üçgenin F ve $\hat{F}$ invariantlarını oluşturalım. Burada bu üçgenin izotrop yüksekliklerini de h_a, h_b, h_c ve bu yüksekliklerin uzunluklarını da $|h_a|, |h_b|, |h_c|$ ile gösterelim (Şekil 3.2). Örneğin h_c yüksekliğini elde edelim. Bunun için de c de üçgenin $c = AB$ kenarı çizilen izotrop normal gösterelim. h_c , c yi bir $L(c)$ noktasında keser. Biz bunu $|h_c| := s(L(c), C)$ ile gösterelim. Benzer şekilde $|h_a|$ ve $|h_b|$ yi tanımlayalım. $|h_a|, |h_b|, |h_c|$ olmaları nedeniyle izotrop düzlemdeki bir üçgenin yüksekliklerinin kesişme noktaları yoktur. Ancak projektif genişletilmiş düzlemde bu yüksekliklerin kesişme noktası olarak F mutlak noktası alınabilir.



Şekil 3.2

Teorem 3.4: İzotrop düzlemdeki bir tam üçgende aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\frac{|a|}{\alpha} = \frac{|b|}{\beta} = \frac{|c|}{\gamma} = -\frac{1}{R}; \quad (3.9a)$$

$$\frac{\alpha}{|a|} = \frac{\beta}{|b|} = \frac{\gamma}{|c|} = -4\rho$$

$$|h_c| = |b|\alpha, \quad |h_a| = |c|\beta, \quad |h_b| = |a|\gamma \quad (3.9b)$$

$$2F = |a| \cdot |h_a| = |b| \cdot |h_b| = |c| \cdot |h_c|$$

$$2\hat{F} = -\alpha|h_a| = -\beta|h_b| = -\gamma|h_c|; \quad (3.9c)$$

$$\frac{\hat{F}}{F} = R, \quad R = 4\rho$$

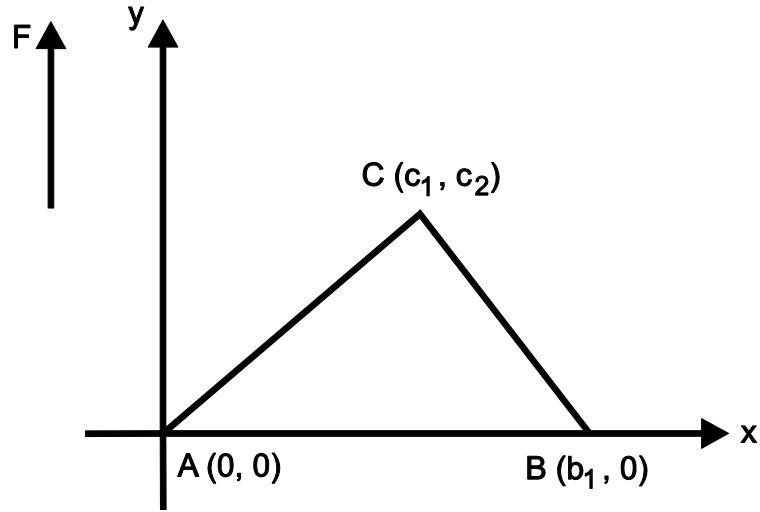
İspat: Verilen formülleri İspatlamak için, önce ABC üçgeni bir izotrop hareketle aşağıdaki özel konumuna getirelim:

A noktasını standart koordinat sistemini başlangıç noktasına getirelim ve B noktası da x-ekseni üzerine gelsin. Böylece bir $\wp_3$ -transformasyonu elde edilir. O halde üçgenin köşelerinin koordinatları;

$$A(0, 0), \quad B(b_1, 0), \quad C(c_1, c_2)$$

olur.

O halde şunları hesaplayabiliriz:



Şekil 3.3

$$\overrightarrow{AB} = (b_1, 0) \Rightarrow |c| = b_1; \quad U(\overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2) \Rightarrow |a| = c_1 - b_1; \quad U(\overrightarrow{BC}) = \frac{c_2}{c_1 - b_1}$$

$$\overrightarrow{CA} = (a_1 - c_1, a_2 - c_2) = (-c_1, -c_2) \Rightarrow |b| = -c_1; \quad U(\overrightarrow{CA}) = \frac{c}{c}$$

$$\alpha = \angle(b, c) = U(\overrightarrow{AB}) - U(\overrightarrow{CA}) = -\frac{c_2}{c_1}$$

$$\beta = \angle(c, a) = U(\overrightarrow{BC}) - U(\overrightarrow{AB}) = \frac{c_2}{c_1 - b_1}$$

$$\gamma = \angle(a, b) = U(\overrightarrow{CA}) - U(\overrightarrow{BC}) = -\frac{c_2 \cdot b_1}{c \cdot (c_1 - b_1)}$$

(1) Bu eşitliklerden hemen;

$$\frac{|a|}{\alpha} = \frac{|b|}{\beta} = \frac{|c|}{\gamma} = -\frac{c_1(c_1 - b_1)}{c_2}$$

elde edilir. O halde (3.4)'den;

$$R = \frac{c_2}{c_1(c_1 - b_1)}$$

elde edilir. Böylece (3.9a) formülü İspatlanır. Üçgenin $c = g_1$, $a = g_2$, $b = g_3$ kenarları için hesaplama yaparsak;

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0;$$

$$u_2 = \frac{c_2}{c_1 - b_1}, \quad v_2 = \frac{c_2 b_1}{c_1 - b_1}, \quad v_3 = \frac{c_2}{c_1}, \quad v_3 = 0$$

elde edilir. Böylece (3.7)'den;

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \frac{c_2^2 b_1}{c_1 (c_1 - b_1)} = -\frac{1}{2} \alpha \beta |c|$$

bulunur. (3.8)'de eğer $\rho = \frac{1}{2p}$ olduğu dikkate alınırsa;

$$-\frac{1}{2} |c| = \frac{p}{4} \gamma$$

olur ve sonuç olarak $\frac{\gamma}{|c|} = -4\rho$ bulunur. Bununla da (3.9a)'nın İspatı tamamlanır.

(2) (2.20)'den

$$|h_c| = c_2 = |b| \alpha, \quad |h_a| = \frac{c_2 b_1}{c_1 - b_1} = |c| \beta, \quad |h_b| = -b_1 \frac{c_2}{c_1} = |c| \alpha = |a| \gamma$$

hesaplanır. (3.5)'den;

$$2F = -|a||b||c|$$

$$R = |a||b|\gamma = |h_b| \cdot |b|$$

sağlanır. Burada (3.9a) kullanılarak diğer eşitliklerin İspatı da tamamlanır.

(3) $2\hat{F} = -\alpha \beta |c|$ bağıntısından (3.9b) gereğince

$$2F = -\alpha |h_a|$$

olur. (3.9a) ve (3.9b)'den;

$$\alpha |h_a| = \beta |h_b| = \gamma |h_c|$$

bulunur.

Böylece bulduğumuz formüllerden;

$$\frac{\hat{F}}{F} = -\frac{\gamma|h_a|}{|a||h_a|} = R$$

ve benzer şekilde

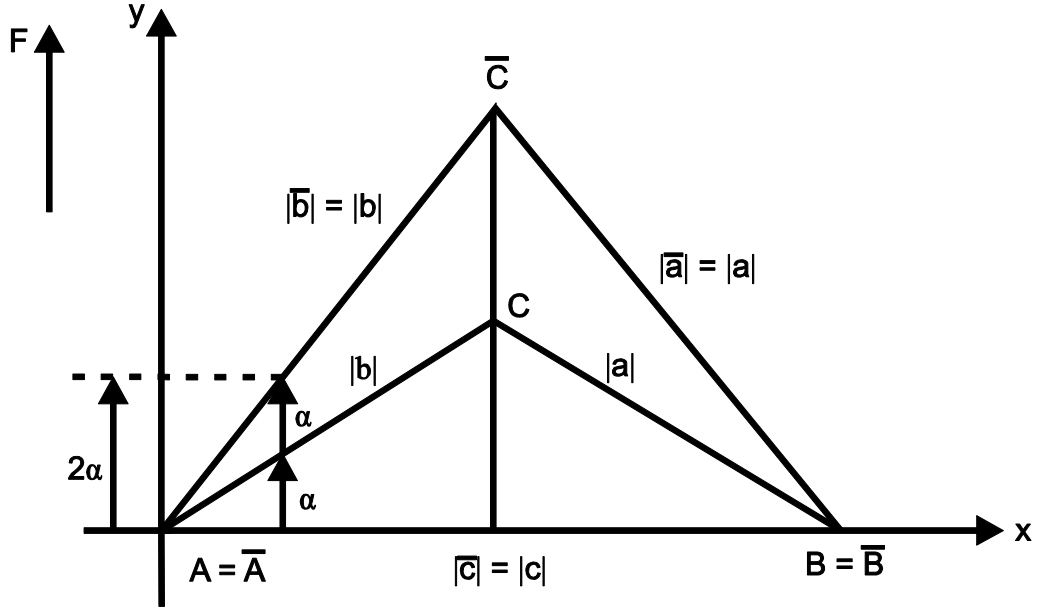
$$R = 4\rho$$

elde edilir.

Teorem 3.4 İzotrop düzlemde tam üçgen “izotrop trigonometri”nin oluşmasına olanak sağlar. Öyle ki, örneğin (3.9a) da olduğu gibi Öklidsel trigonometride geçerli olan sinüs teoremi sağlanır. Burada ilginç bir sonuç, bir tam üçgenin izotrop çevresel çemberin yarıçapının izotrop iç teğet çemberin yarıçapının dört katı olmasıdır. Bu özellik L-Berwald [9] tarafından gösterildi [10, 11]. İzotrop trigonometri basit bir şekilde izotrop düzlemin tam üçgeni için eşitlik teoremini verir.

Tanım 3.3: İzotrop düzlemin iki $\{A, B, C\}$, $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ tam üçgenine kongruenttir (eşit şekiller) denir, eğer bir $T \in \wp_3$ izotrop hareketle $TA = \bar{A}$, $TB = \bar{B}$, $TC = \bar{C}$ elde ediliyorsa.

Belli ki kongruent üçgenler bütün olarak bir hareketle çakışır, öyle ki $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ gibi kenarlar ve açılar çakışır. O halde kongruent (eşitlik) teoremine göre verilen parçaları çakışan iki tam üçgen kongruenttirler. Hatta düzlemsel hiperbolik ve Öklidsel geometride üçgenler için kongruent teoremi elde edilir. Örneğin hiperbolik düzlemde iki üçgen hiperbolik kongruenttir [12, 13], eğer bunların üç kenarı karşılıklı olarak çakışırsa. Fakat bu ifade izotrop düzlemde yanlıştır. Şekilde görüldüğü gibi has $\{A, B, C\}$ ve $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ üçgenlerinin 3. kenarı çakışmıştır. Fakat $\bar{\alpha} = 2\alpha$ ’dır. İzotrop düzlemde, bununla beraber şu teorem geçerlidir.



Şekil 3.4

Teorem 3.5: İzotrop düzlemde has iki üçgen kongruenttir.

- a) Eğer 3-kenar ve bir açı çakışırsa, veya
- b) Eğer 3-açı ve bir kenar (çakışırsa) üst üste getirilebilirse

İspat: Her iki has üçgenin koordinatları;

$$A(a_1, a_2), \quad B(b_1, b_2), \quad C = (c_1, c_2)$$

$$\bar{A}(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \quad \bar{B}(\bar{b}_1, \bar{b}_2), \quad \bar{C}(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$$

dir. İki üçgenin kongruent olması halinde bir izotrop hareket;

$$\{\bar{x} = \alpha + x, \quad \bar{y} = \beta + \gamma x + y\}$$

α, β, γ katsayılarıyla belirlenen oluşur, öyle ki $A, \bar{A}$ üzerine, $B, \bar{B}$ üzerine ve $C, \bar{C}$ üzerine resmedilir. Böylece homogen olmayan şu lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = \alpha + a_1 & \bar{a}_2 = \beta + \gamma a_1 + a_2 \\ \bar{b}_1 = \alpha + b_1 & \bar{b}_2 = \beta + \gamma b_1 + b_2 \\ \bar{c}_1 = \alpha + c_1 & \bar{c}_2 = \beta + \gamma c_1 + c_2 \end{cases}$$

Burada 6 denklemden üç α , β , γ bilinmeyişi belirlenir. Bu sistemin birinci grubundan;

$$\alpha = \overline{a_1} - a_1 = \overline{b_1} - b_1 = \overline{c_1} - c_1$$

sağlanır, yani;

$$\overline{b_1} - \overline{a_1} = b_1 - a_1, \quad \overline{c_1} - \overline{b_1} = c_1 - b_1, \quad \overline{a_1} - \overline{c_1} = a_1 - c_1$$

dır. Bu ifade ise üçgenlerin üç kenarın çakıştığını gösterir. Böylece α bir türlü olarak belirli sabittir. Diğer gruptaki üç denklemden yine çözümü kolay yapılmaya uygundur. β elimine (yok) edilirse;

$$\frac{\overline{a_2} - \overline{b_2}}{a_1 - b_1} - \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} = \gamma = \frac{\overline{c_2} - \overline{b_2}}{c_1 - b_1} - \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}$$

bulunur ve ifade birbirine eşittir. Yani;

$$\frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} - \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{\overline{c_2} - \overline{b_2}}{c_1 - b_1} - \frac{\overline{b_2} - \overline{a_2}}{b_1 - a_1}$$

dır. Burada $c_1 - b_1 = \overline{c_1} - \overline{b_1}$, $a_1 - b_1 = \overline{a_1} - \overline{b_1}$ eşitlikleri kullanıldı.

Bu ifade uygundur. Çünkü B açısının $\overline{B}$ açısı ile çakıştığını gösterir. İkinci grubun ilk iki denklemden β ve γ tek türlü olarak belirlenir, çünkü katsayılar determinanı;

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 - a_1 \neq 0$$

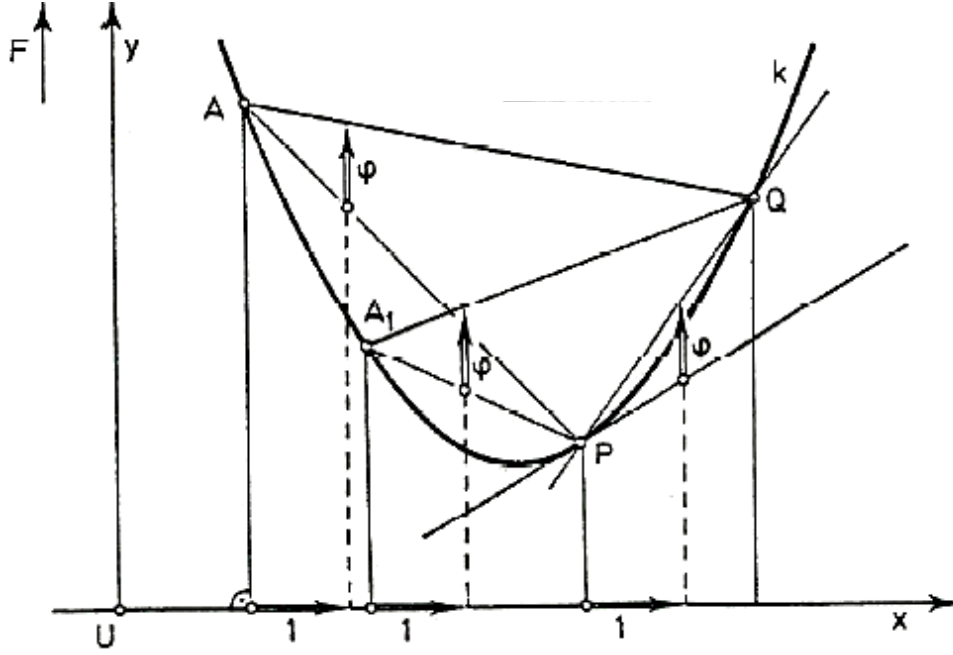
dır. O halde A ve B paralel değildirler. Öyleyse T tek türlü oluşur.

(b) α , β , γ açıları ve örneğin $|a|$ kenarı verilsin. O zaman $|b|$ ve $|c|$ kenarları (3.9a)'daki bağıntılar gereğince tek türlü belirlenirler. (a)'da verilenlerle ikinci kongrüans teoremi kolayca İspatlanır [10].

Öklidsel elemanter geometride olduğu gibi izotrop hareket geometrisinde de elemanter çember geometrisinin gelişimi özellikle caziptir. Öklidsel çevre açısına analogdan bir teoremin İspatı gösterilmesiyle başlayalım.

Teorem 3.6: P, Q bir k izotrop çemberinin farklı noktaları $A \neq P, A \neq Q$ olacak şekilde k üzerinde herhangi bir nokta olsun. O zaman izotrop açı $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{QA}) = \varphi$, $A \in k$ noktasının konumuna bağlı değildir.

İspat:



Şekil 3.5

Genelliği bozmadan k 'yı (3.2) normal formu;

$$y = Rx^2$$

seçelim. $R = \frac{1}{2p}$ yarıçap olmak üzere k aşağıdaki gibi parametrik formdadır.

$$\{x = 2pt, y = 2pt^2\}, \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (3.10)$$

Burada t 'nin farklı her değeri için k üzerinde farklı nokta elde edilir.

$$P(2pt_1, 2pt_1^2), \quad Q(2pt_2, 2pt_2^2), \quad A(2pt, 2pt^2)$$

$$t_1 \neq t_2, \quad t \neq t_1, \quad t \neq t_2$$

olur. O halde izotrop çevresel açı φ aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\overrightarrow{PA} = (2p(t-t_1), 2p(t^2-t_1^2))$$

$$\overrightarrow{QA} = (2p(t-t_2), 2p(t^2-t_2^2))$$

$$\Rightarrow u(\overrightarrow{PA}) = \frac{t^2-t_1^2}{t-t_1} = t+t_1, \quad u(\overrightarrow{QA}) = t+t_2$$

$$\Rightarrow \varphi = u(\overrightarrow{QA}) - u(\overrightarrow{PA}) = t+t_2 - t-t_1 = t_2 - t_1$$

Diğer taraftan uzaklık için;

$$d = d(P, Q) = 2pt_2 - 2pt_1 = 2p(t_2 - t_1)$$

olur. Böylece sonuç olarak;

$$d = 2p\varphi \tag{3.11}$$

sağlanır. Bu da d 'nin sadece P ve Q 'ye bağımlı olduğunu fakat p 'nin sadece k 'ya bağımlı olduğunu gösterir. O halde φ açısı $A \in k$ 'nın yerine bağlı değildir.

Öklidsel geometride olduğu gibi $A \rightarrow P$ veya $A \rightarrow Q$ yaklaşımıyla Teorem 3.6'ya analog şekilde oluşan açılı teğet açısı teoremi olarak isimlendirilir. Böylece her açılı teğet açısı olarak gösterebiliriz, öyle ki P deki veya Q daki teğet PQ kirişiyile bu açılı belirler.

Teorem 3.7: Her k izotrop çemberinde bir PQ kirişine göre çevrel açı bu PQ kirişiyile P veya Q 'deki teğeti arasındaki izotrop teğet açısına eşittir.

İspat: $P \in k$ noktasındaki $\overrightarrow{t_p}$ teğet vektörü;

$$\overrightarrow{t_p} = \begin{cases} 2p \\ 4pt_1 \end{cases} \Rightarrow u(\overrightarrow{t_p}) = 2t_1$$

olarak bulunur. Böylece P 'deki α_p teğet açısı şu şekilde hesaplanır.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{cases} 2p(t_2 - t_1) \\ 2p(t_2^2 - t_1^2) \end{cases}, \quad u(\overrightarrow{PQ}) = t_2 + t_1$$

$$\Rightarrow \alpha_p = u(\overrightarrow{PQ}) - u(\overrightarrow{t_p}) = t_2 - t_1 = \varphi$$

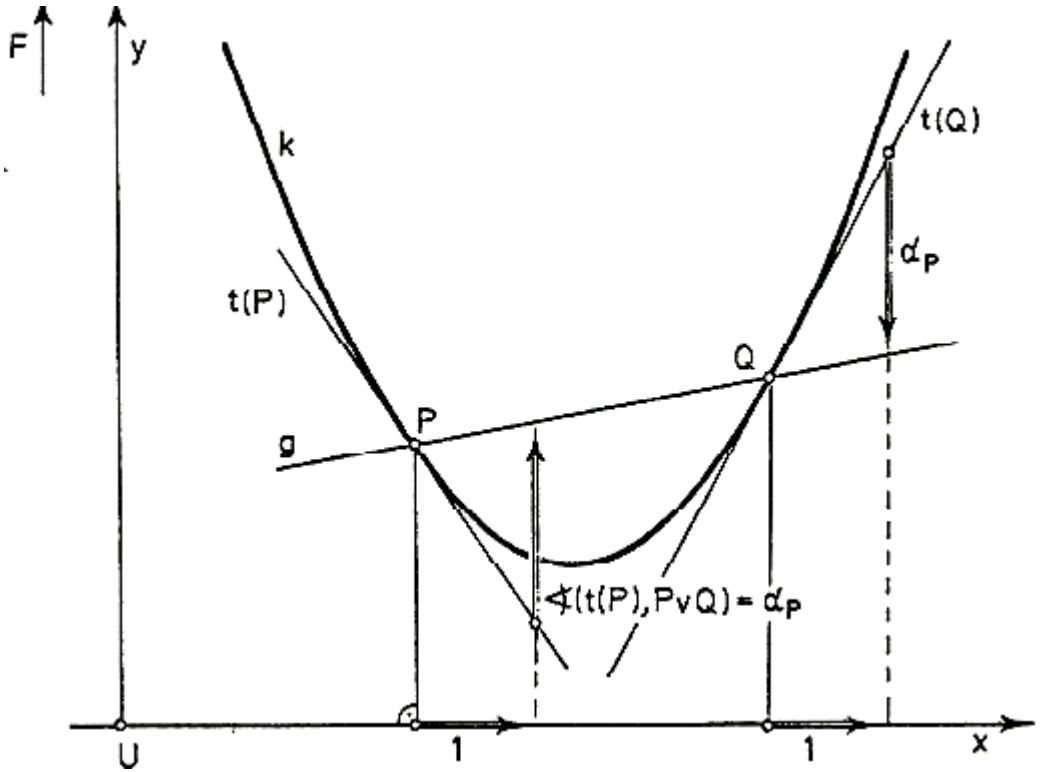
Analog şekilde;

$$\alpha_Q = u(\overrightarrow{PQ}) - u(\overrightarrow{t_Q}) = t_2 + t_1 - 2t_2 = t_1 - t_2 = -\varphi$$

şeklinde bulunur, yani $|\alpha_Q| = |\varphi|$ 'dır.

Sonuçlar:

1. Bir g doğrusu bir k izotrop çemberi farklı ve gerçel iki P, Q noktasında kessin. Bu halde g ile k 'nin P ve Q 'daki kesişme açıları eşittir.



Şekil 3.6

İspat: g ile k 'nin kesişme açısı olarak, k ile g 'nin bir kesişme noktasından teğeti ile g arasındaki açıyı anlayacağız. $P \neq Q$ olduğundan g izotrop değildir. Teorem 3.7 İspatından $\alpha_Q = -\alpha_P$ alabiliriz. Yani

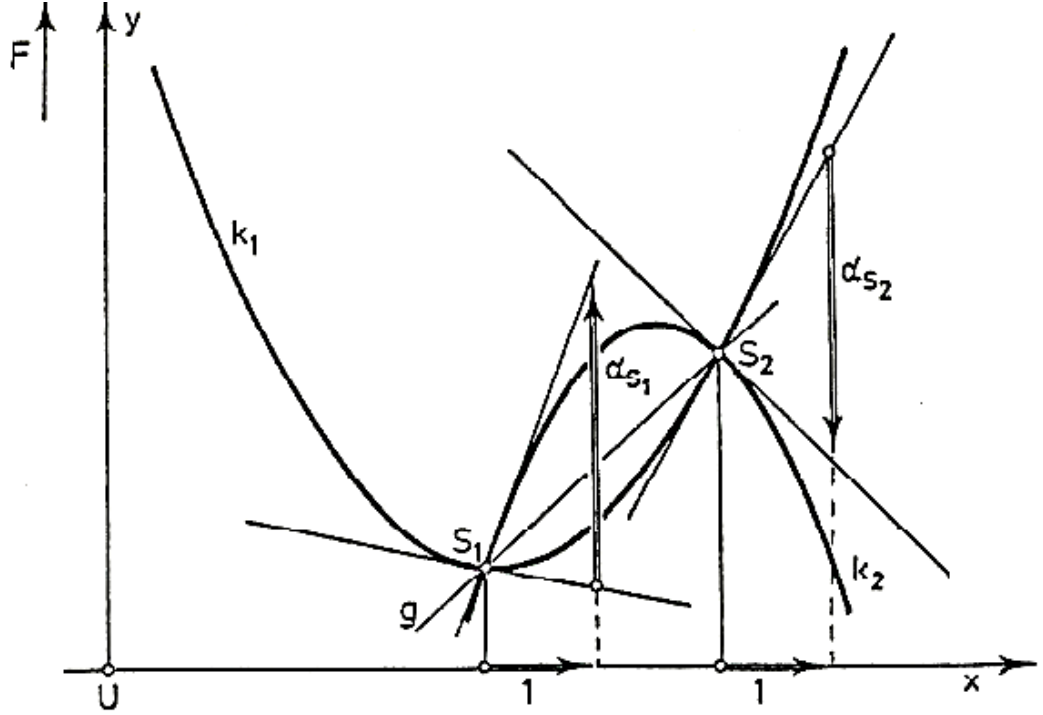
$$|\alpha_Q| = |\alpha_P|$$

dir.

α_P ve α_Q kesişme açılarının ters işaretlere eşit olduklarına dikkat edelim.

2. İki izotrop k_1, k_2 çemberi gerçel farklı iki S_1, S_2 noktasında kesişirse, S_1 ve S_2 'deki kesişme açıları aynı büyüklüktedirler.

İspat:



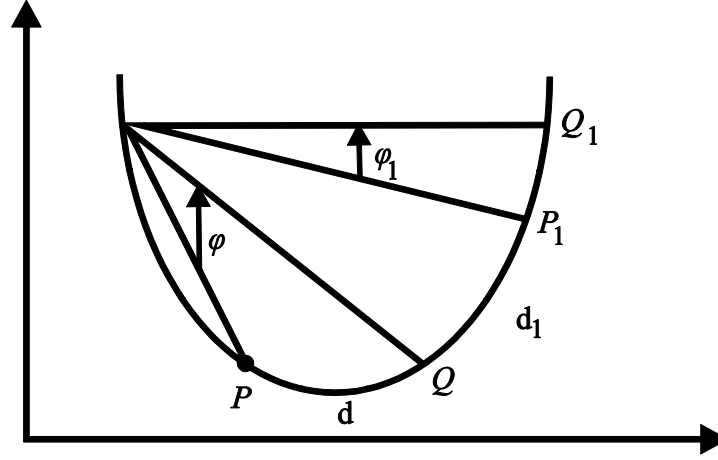
Şekil 3.7

k_1 ile k_2 'nin kesişme açısı olarak $k_1 \cap k_2$ 'nin bir noktasındaki k_1 'in t_1 teğeti ile k_2 'nin t_2 teğeti arasındaki açıyı alacağız. k_1 ve k_2 'nin S_1 ve S_2 kesişme noktalarını birleştiren doğru $g = S_1.S_2$ alınırsa sonuca göre İspat tamamlanır.

Yine her iki izotrop çember k_1 ve k_2 'nin α_{S_1} ve α_{S_2} kesişme açılarının ters işaretiyle eşit olduklarına dikkat edelim (Şekil 15).

3. $d = d(P, Q)$, izotrop yay PQ olarak alınırsa, o zaman şu sağlanır: Her izotrop k çemberinde eşit yaylar gören izotrop çevre açıları da eşittir.

İspat:



$PQ = d$ ve $P_1Q_1 = d_1$, k 'nın iki yayı, φ ve φ_1 'de bu yayları gören çevre açıları olsun. O zaman (3.11) gereğince şu sağlanır.

$$d = 2p\varphi, \quad d_1 = 2p\varphi_1 \quad d = d_1$$

ise, buradan;

$$\varphi = \frac{d}{2p} = \frac{d_1}{2p} = \varphi_1$$

olur.

4. Her k izotrop çemberinde eşit izotrop çevre açılarına ait izotrop yayları da eşittir.

İspat: $d = 2p\varphi$, $d_1 = 2p\varphi_1$ 'den $\varphi_1 = \varphi$ olduğundan $d = d_1$ olur.

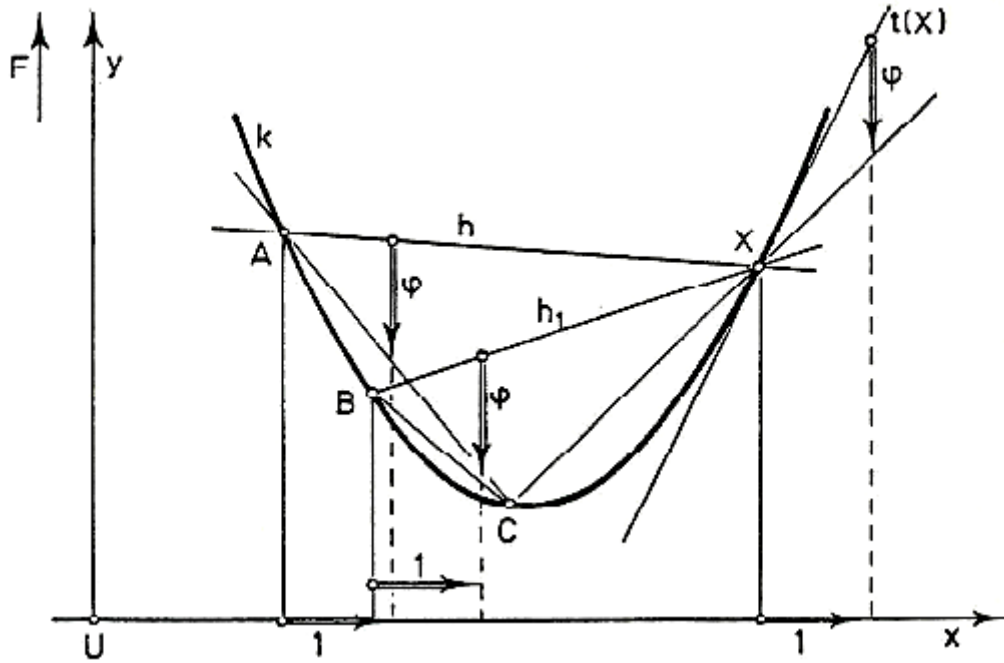
5. İzotrop çember geometrisi, Öklidsel anlamda aynı doğrultuda eksnlere sahip olan paraboller üzerine teoremleri verir. Bu tipten paraboller üzerine teoremler izotrop düzlem ifadesi kullanmadan- 1935'de N. Graf ve R. Kahlau tarafından verildi [14, 15, 16]. Aşağıda, doğrudan olmayan ve herhangi ikisi paralel olmayan üç A, B, C noktası verilen bir k izotrop çemberin nokta-nokta çizimini vereceğiz.

Teorem 3.2. gereğince k tek türlü belirlidir. k üzerinde diğer bir nokta X ile gösterilsin. O zaman Teorem 3.2. gereğince şu geçerlidir:

$$\sphericalangle(CBX) = \sphericalangle(CAX)$$

Burada açıyı izotrop anlamda anlayacağız. Buradan aşağıdaki basit çizim şeli elde edilir:

A'dan geçen keyfî bir h yardımcı doğru alınır. h 'nın AC ile oluşturduğu izotrop açı φ ile gösterilirse, B'den geçen ve BC ile φ izotrop açısını oluşturan bir h_1 doğrusu çizilir. h ile h_1 doğrusunun X kesişme noktası k izotrop çemberin üzerinde bir noktadır. h doğrusu A etrafında döndürülerek elde edilen demet üzerinde k 'ya ait belli sayıda diğer noktaları aynı yöntemle elde edilir. X veya C'deki teğet, teğet açısı teoremiyle oluşturulabilir (Şekil 16).



Şekil 3.8

Öklidsel anlamda bununla aşağıdaki çizimsel problemi çözelim. Bir parabol nokta-nokta ve teğetlerle bulunur. Eğer ekseninin doğrultusu ve farklı üç noktası verilmişse. Çizimin basit değişimi ile tepe noktası elde edilir ve parabolün odak noktası bulunur (Şekil 3.9).

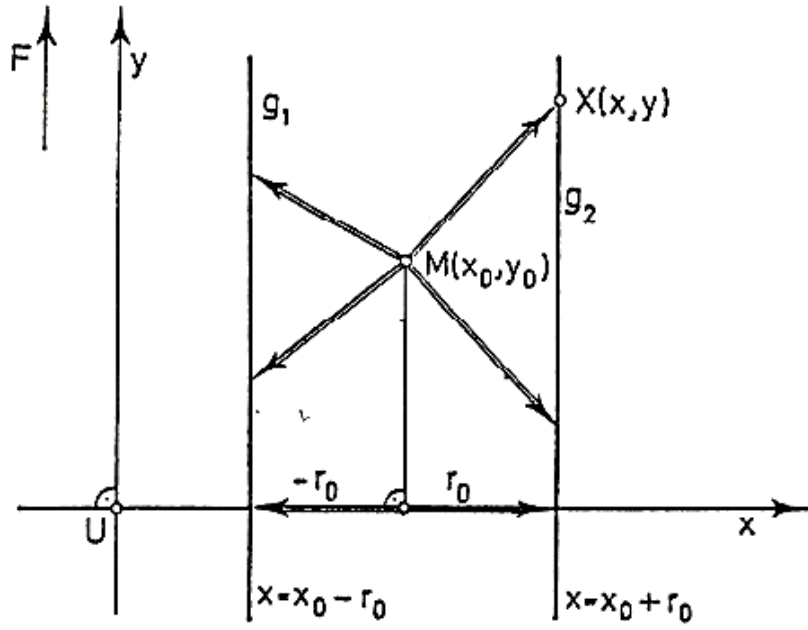
Bunun için A'dan d 'nin doğrultusuna dik olan bir h doğrusu çizilir ve bunun üzerinde parabola ait olan $x = \bar{A}$ noktası belirlenir. $\overline{AA'}$ 'nin H orta noktası parabolün a eksenine aittir. Böylece a eksenini belirlenir. $\bar{A}$ 'deki t teğetin a 'yı kestiği nokta T ile gösterilirse, $\overline{HT}$ 'nin S orta noktası parabolün tepesini verir. $\bar{A}$ 'deki t teğetinin S 'deki tepe teğeti kestiği N noktasından t 'ye dik olan doğru a eksenini F odak noktasında keser.

imi projek

$g_1, g_2, \dots, x = x_0 \pm r_0$

olan doğrulardır. Bu yapıyı singüler (tekil-bozuluş) izotrop çember olarak adlandıracğız.

ngüler (tekil-bozulu



Şekil 3.10

Projektif düzlemin kullanılmasına gerek duyulmadan basit bir tanım, çevrel açı teoreminin tersiyle verilebilir. Bu tanım N. Kupier [10, 17] tarafından izotrop çember geometrisinin oluşturulmasında kullanıldı.

Teorem 3.8: I_2 izotrop düzleminin birbirinden farklı ve paralel olmayan iki P, Q noktasından sabit bir $\varphi_0 \neq 0$ izotrop açı altında görülen noktalar kümesi bir k izotrop çemberi üzerinde bulunurlar ve bu çember P ve Q den geçer.

İspat: Hareketli bir $X(x, y)$ noktasını göz önüne alalım. O zaman $P(p_1, p_2)$ ve $Q(q_1, q_2)$ nin koordinatları;

$$u(\overrightarrow{PX}) = \frac{y - p_2}{x - p_1}, \quad U(\overrightarrow{QX}) = \frac{y - q_2}{x - q_1}$$

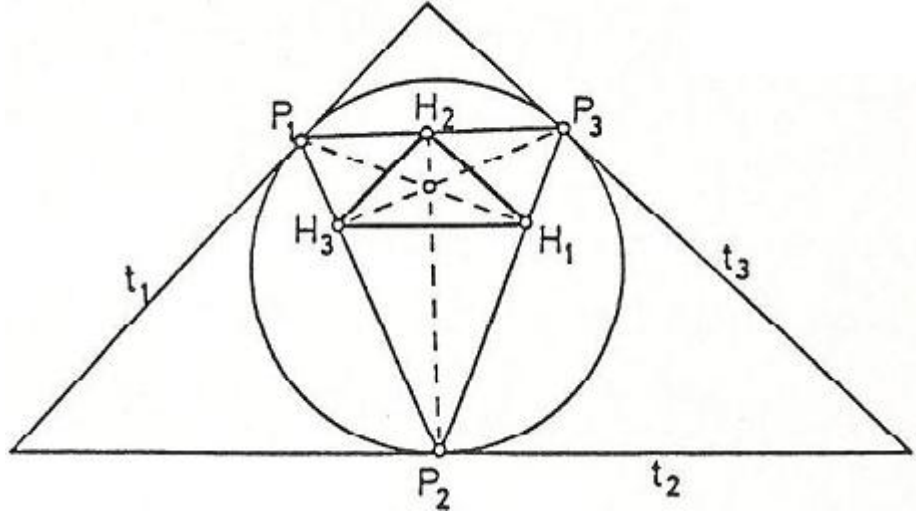
$$\Rightarrow \frac{y - q_2}{x - q_1} - \frac{y - p_2}{x - p_1} = \varphi_0 \neq 0$$

hesaplanır. Buradan X noktaları kümesi için şu denklem sağlanır.

$$y(q_1 - p_1) = \varphi_0 x^2 + (q_2 - p_2 - \varphi_0 q_1 - \varphi_0 p_1)x + \varphi_0 p_1 q_1 + q_1 p_2 - p_1 q_2$$

Bu denklem, $q_1 \neq p_1$ ve $\varphi_0 \neq 0$ olduğundan (3.1) gereğince bir izotrop çemberi gösterir.

Öklidsel çember geometriden hareketle izotrop düzlemde bilinen teoremlerin elde edilişlerini inceleyelim. Burada K. Strubecker [18] tarafından bulunan izotrop yükseklik ayak noktaları üçgeni üzerine olan teoremi ele alalım. Önce Şekil 3.11’de verilenleri Öklidsel anlamda göz önüne alalım.



Şekil 3.11

Öklidsel bir k çemberi P_1, P_2, P_3 noktaları t_1, t_2, t_3 teğetleriyle birlikte verilsin. $\{P_1, P_2, P_3\}$ üçgenin yüksekliklerinin ayak noktalarının oluşturduğu üçgen $\{H_1, H_2, H_3\}$ olsun. Elemanter geometriden bilinen şu teorem geçerlidir:

$$t_1 \parallel H_2H_3, \quad t_2 \parallel H_3H_1, \quad t_3 \parallel H_1H_2$$

dır.

Burada izotrop analog yine elemanter olarak Öklidsel ifadesi vardır. Bu şu teoreme verilir:

Teorem 3.9: Bir izotrop çemberin birbirinden farklı P_1, P_2, P_3 noktalarından t_1, t_2, t_3 teğetleri izotrop yükseklik üçgeni $\{H_1, H_2, H_3\}$ 'ün uygun kenarlarına paraleldirler. Bu teğetler $\{H_1, H_2, H_3\}$ üçgeninin uygun kenarortaylarını birleştirir.

İspat: Genelliği bozmadan k çemberini (3.10) normal formunda seçelim.

$$\{x = 2pt, \quad y = 2pt^2\}$$

P_i noktaları, t_i ($i=1, 2, 3$) parametre değerine bağlıdır. $g_{ik} = P_i P_k$ birleştirme doğruları;

$$\overrightarrow{\omega_{ik}} = \{x_k - x_i, y_k - y_i\}$$

doğrultu vektörlerine sahipler. Buradan;

$$u(\overrightarrow{P_i P_k}) = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} = \frac{2pt_k^2 - 2pt_i^2}{2pt_k - 2pt_i} = t_k + t_i$$

olur.

g_{ik} , $y = (t_k + t_i)x + v_{ik}$ formunda gösterilirse, buradan v_{ik} o şekilde belirlenir ki,

$$g_{ik}, \quad p_i(2pt_i, 2pt_i^2)$$

noktalarını içerir. Buna göre;

$$v_{ik} = -2pt_i t_k$$

olur ve böylece;

$$g_{ik} \cdots y = (t_k + t_i)x - 2pt_i t_k$$

sağlanır. Yükseklik kesim noktası H_1 , $x = 2pt_1$ izotrop doğrusu ile;

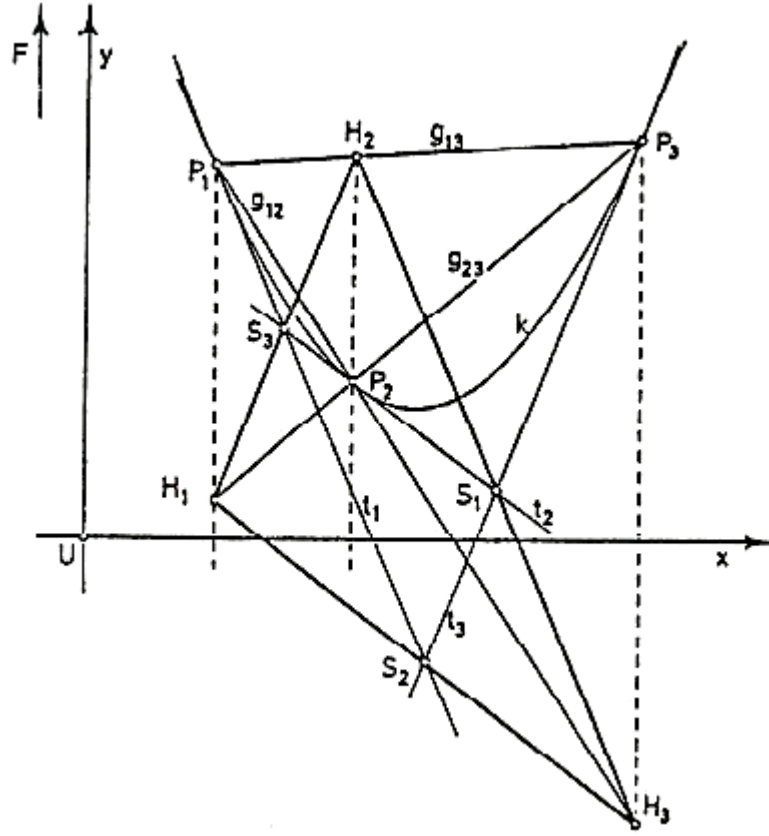
$$g_{2,3} \cdots y = (t_3 + t_2)x - 2pt_3 t_2$$

nin kesişmesi olarak elde edilir. O halde H_1 , H_2 , H_3 noktaları şöyle elde edilirler:

$$H_1[2pt_1, 2p(t_1 t_2 - t_2 t_3 + t_1 t_3)]$$

$$H_2[2pt_2, 2p(t_2 t_3 - t_3 t_1 + t_2 t_1)]$$

$$H_3[2pt_3, 2p(t_3 t_1 - t_1 t_2 + t_3 t_2)]$$



Şekil 3.12

Buradan şunlar hesaplanır:

$$\overrightarrow{H_3H_2} = \{2p(t_2 - t_3), 4pt_1(t_2 - t_3)\} \Rightarrow u(\overrightarrow{H_3H_2}) = 2t_1$$

$$\overrightarrow{H_2H_1} = \{2p(t_1 - t_2), 4pt_3(t_1 - t_2)\} \Rightarrow u(\overrightarrow{H_2H_1}) = 2t_3$$

$$\overrightarrow{H_1H_3} = \{2p(t_3 - t_1), 4pt_2(t_3 - t_1)\} \Rightarrow u(\overrightarrow{H_1H_3}) = 2t_2$$

Diğer taraftan Teorem 3.7'nin İspatından t_i ($i=1, 2, 3$) teğetleri $u(t_i) = 2t_i$ şeklinde elde edilenleri alalım. Buna göre;

$$H_3H_2 \parallel t_1, \quad H_1H_3 \parallel t_2, \quad H_2H_1 \parallel t_3$$

dir.

Şimdi teoremin ikinci ifadesini İspatlayalım. Bunun için $\overrightarrow{H_2H_3}$, $\overrightarrow{H_3H_1}$, $\overrightarrow{H_1H_2}$ kenarlarının S_1 , S_2 , S_3 orta noktalarının koordinatlarını hesaplayalım. Buna göre;

$$S_1[p(t_2 + t_3), 2pt_2t_3]$$

$$S_2[p(t_1 + t_3), 2pt_1t_3]$$

$$S_3[p(t_1 + t_2), 2pt_1t_2]$$

bulunur. Diğer taraftan t_i teğetlerinin denklemleri;

$$y = 2t_i x - 2pt_i^2 \quad (i=1, 2, 3)$$

Olarak hesaplanır ve S_k noktalarının $k \neq i$ olmak üzere t_i ($i, k=1, 2, 3$) teğetleri üzerinde bulundukları görülür. Bir izotrop çembere ait izotrop kuvvet kavramını artık verebiliriz.

Teorem 3.10: k bir izotrop çember ve p, k üzerinde bulunamayan bir nokta olsun. P den geçen bir g doğrusunun k yi kestiği noktalar S_1 ve S_2 ile gösterilsin. O zaman;

$$d(P, S_1) \cdot d(P, S_2) = f(P) \quad (3.12)$$

izotrop uzaklık yalnız P ve k ya bağımlıdır, g nin konumundan ise bağımsızdır. $f(P)$ ifadesi, P noktasını k ya göre izotrop kuvveti olarak isimlendirilir.

P den geçen k nin gerçel teğetlerinin değme noktaları T_1, T_2 ise;

$$f(P) = d^2(P, T_1) = d^2(P, T_2) \quad (3.13)$$

sağlanır.

İspat:

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta$$

genel çemberiyle başlayalım. $P(x_0, y_0)$ dan geçen g doğrusu ile k nin S_1, S_2 kesişme noktalarını hesaplayalım. μ bir parametre olmak üzere, g nin parametrik denklemi;

$$\{x = x_0 + \mu v_1, \quad y = y_0 + \mu v_2\}$$

olsun. Burada $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vektörü g nin doğrultu vektörüdür. g izotrop olmadığından $v_1 \neq 0$ 'dır. Buradan kesişme problemi olarak kuadratik denklem;

$$Rv_1^2\mu^2 + (2Rx_0v_1 + \alpha v_1 - v_2)\mu + Rx_0^2 + \alpha x_0 - y_0 + \beta = 0$$

olur. $R \neq 0$, $v_1 \neq 0$ olduğundan cebirsel anlamda daima iki çözümü vardır. Bunları μ_1 , μ_2 ile gösterirsek, bunların çarpımı;

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{Rx_0^2 + \alpha x_0 - y_0 + \beta}{Rv_1^2}$$

dır. Diğer taraftan;

$$d(P, S_1) \cdot d(P, S_2) = \mu_1 \mu_2 V_1^2$$

olduğundan

$$d(P, S_1) \cdot d(P, S_2) = x_0^2 + \frac{\alpha}{R}x_0 - \frac{1}{R}y_0 + \frac{1}{R}\beta$$

elde eldir. Bu gösterim (ifade) sadece R nin k ya göre durumuna bağlıdır. $\mu_1 = \mu_2$ halinde k nin P deki teğeti elde edilir ve yukarıdaki düşünce sabit kalır. O halde (3.13) bağıntısının doğru olduğu görülür.

Sonuçlar:

1. $R = \frac{1}{2p}$ alındığında izotrop kuvvetin hesaplanması teoremi daha basittir ve çember denklemi;

$$f(x, y) = x^2 - 2py + 2p\alpha x + 2p\beta$$

şeklinde normal formda yazılır. O halde son ispattan;

$$f(P) = x_0^2 - 2py_0 + 2p\alpha x_0 + 2p\beta, \quad P(x_0, y_0) \quad (3.13)$$

elde edilir.

2. (3.12) formülünü $y = \frac{1}{2p}x^2$ normal formdaki izotrop çember üzerinde gösterelim. $P(x, 0)$ noktasını ve k üzerinde bulunan ve P ile doğrudan olan;

$$S_1\left(x_1, \frac{1}{2p}x_1^2\right), \quad S_2\left(x_2, \frac{1}{2p}x_2^2\right)$$

noktalarını seçelim. O zaman (3.12) ve (3.13)'den;

$(x_1 - x)(x_2 - x) = x^2$ (P nın k ya göre kuvveti g nin seçiminde bağımsız olduğundan)

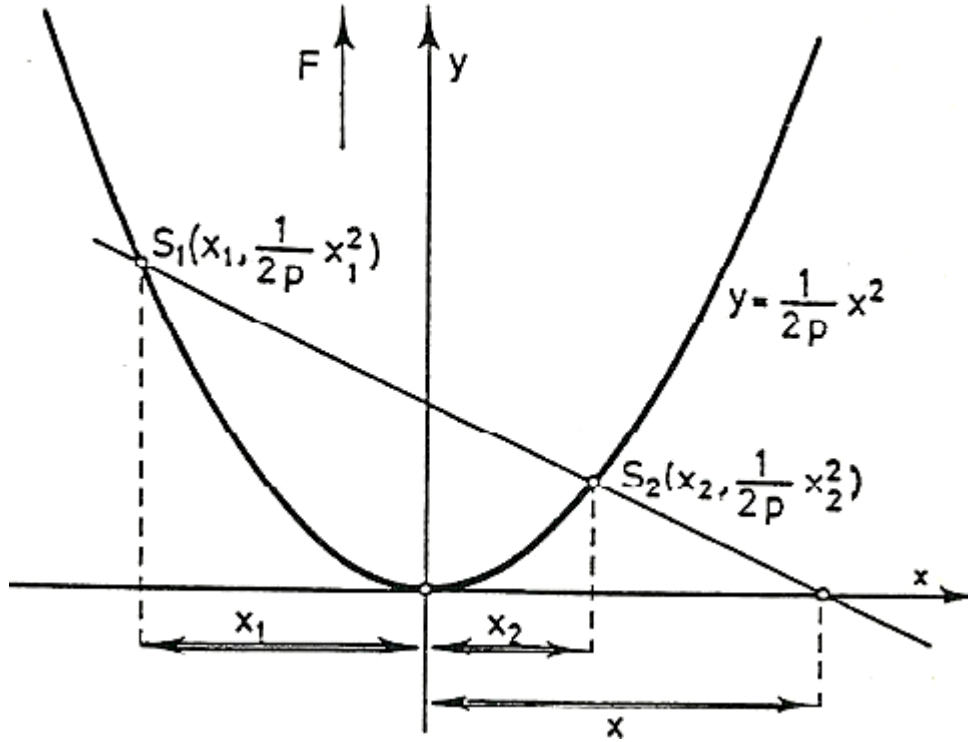
bulunur. Yani;

$$x_1 x_2 = x(x_1 + x_2)$$

olur. Bu denklem $x_1, x_2, x \neq 0$ için $(x, x_1, x_2 = 0$ olursa $P = S_1 = S_2 = (0, 0)$ olur)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad (3.14)$$

formunda yazılabilir. Kuvvet teoremi 3.10'un uygulanmasıyla fizikte önemli bir denklem olan bir "nomogram" elde edilir.



Şekil 3.13

Açıkça çizilmiş olan bir $y = \frac{1}{2p} x^2$ standart parabol varsa, x_1, x_2 apsislerinin ve

S_1, S_2 doğrularının aranmasında p noktasının x apsisi konstruktiv tanımlanabilir (Şekil 3.13).

Tanım 3.4: İki izotrop çember;

$$k_i : y = R_i x^2 + \alpha_i x + \beta_i \quad (i=1, 2, 3)$$

eğer $R_1 = R_2$ ise “kongruent”, $\alpha_1 = \alpha_2$ ise “eş merkezli” olarak isimlendirilir.

Kongruent çemberlerin $\wp_3$ – transformasyonu ile üst üste getirilebileceği (3.2)’den doğrudan doğruya sağlanır, bu yukarıdaki tanıma uygun olacak.

Teorem 3.11: İzotrop düzlemin aynı anda kongruent ve eş merkezli olmayan iki k_1, k_2 çemberlerine göre aynı kuvvete sahip olan bütün noktalar kümesi, her iki izotrop çemberin kuvvet doğrusu olarak adlandırılan bir p doğrusu üzerinde bulunurlar. P eğer varsa k_1, k_2 nin kesişim noktalarını da içerir. k_1 ve k_2 çemberle kongruent fakat eş merkezli değilseler p doğrusu izotrop olur. Eğer k_1 ve k_2 çemberleri hem kongruent hem de eş merkezli iseler p doğrusu projektif tamamlanmış izotrop düzlemin sonsuzdaki doğrusudur.

İspat: k_1 ve k_2 çemberleri sırasıyla;

$$F_1(x, y) = x^2 - 2p_1 y + 2p_1 \alpha_1 x + 2p_1 \beta_1$$

ve

$$F_2(x, y) = x^2 - 2p_2 y + 2p_2 \alpha_2 x + 2p_2 \beta_2$$

ile verilsinler. O zaman (3.13) gereğince k_1 ve k_2 ’ye göre aynı kuvvete sahip $X(x, y)$ noktaları kümesi olarak;

$$\begin{aligned} x^2 - 2p_1 y + 2p_1 \alpha_1 x + 2p_1 \beta_1 &= x^2 - 2p_2 y + 2p_2 \alpha_2 x + 2p_2 \beta_2 \\ (p_2 - p_1)y + (p_1 \alpha_1 - p_2 \alpha_2)x + p_1 \beta_1 - p_2 \beta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

sağlanır. Bu denklem;

$$(p_2 - p_1, p_1 \alpha_1 - p_2 \alpha_2) \neq (0, 0)$$

için bir p doğrusunu belirler. Bu koşul apaçıktır ki kongruent ve eş merkezli çemberler için bozucu, $\beta_1 \neq \beta_2$ olduğundan bu özel halde sonsuzdaki doğru elde edilir.

k_1 ve k_2 'nin kesişme noktaları, yani $f_1(x, y)=0$ ve $f_2(x, y)=0$ ifadelerin ikisini birden sıfır yapan değerler (*) denklemi için de yeterlidir.

Sonuç olarak, eğer $p_1 = p_2$ yani $R_1 = R_2$ ancak $\alpha_1 \neq \alpha_2$ sağlanırsa ancak bu halde p izotropdur.

Nihayet karşılıklı durumda bulunan iki izotrop çember üzerine inceleme yapabiliriz. Projektif anlamda $P_2(\mathbb{R})$ projektif düzlemde 2. mertebeden cebirsel iki eğriye indirgenir. Bunlar Bezout teoremi gereğince cebirsel anlamda $\mathbb{C}$ üzerinde dört kesişme noktasına sahipler [19, 20]. Bu durumda daima 2 kesişme noktası (F, f) mutlak çizgisel eleman üzerinde çalışırlar. Böylece izotrop düzlemin iki çemberi I_2 de 2 kesişme noktası sahiptir.

Teorem 3.12: İzotrop düzlemin iki kongruent olmayan çemberi $\mathbb{C}$ üzerinde genel anlamda daima 2 kesim noktasına sahipler. İki kongruent, fakat eş merkezli olmayan çember I_2 de yalnız bir kesişme noktasına sahipler. İki kongruent ve eş merkezli çember I_2 de kesişme noktasına sahip değildirler.

İspat: İki izotrop çember için;

$$k_i : y = R_i x^2 + \alpha_i x + \beta_i \quad (i = 1, 2)$$

denklem sistemi;

$$y - R_1 x^2 - \alpha_1 x - \beta_1 = 0$$

$$y - R_2 x^2 - \alpha_2 x - \beta_2 = 0$$

dır. Bunu inceleyelim. Bunlardan ikinci denklemden birinciye çıkarırsak;

$$(R_2 - R_1)x^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)x + \beta_2 - \beta_1 = 0 \quad (*)$$

denklemini elde edilir. Kuadratik bu denklem, çemberin kongruent olmamaları halinde $(R_1 \neq R_2)$, cebirsel anlamda $\mathbb{C}$ de tam iki çözüm sahiptir. Kongruent çemberler için $(R_1 = R_2)$ denklemde sadece;

$$(\alpha_2 - \alpha_1)x + \beta_2 - \beta_1 = 0$$

lineer kısmı kalır. Bu halde $\alpha_1 \neq \alpha_2$ için bir tek çözüm elde eldir. $\alpha_1 = \alpha_2$ için ise I_2 de hiçbir çözüm elde edilemez.

Sonuçlar

1. (*) kuadratik denkleminin Δ diskriminantını hesaplırsak;

$$\Delta = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 4(R_2 - R_1)(\beta_2 - \beta_1) \quad (3.15)$$

elde edilir. Bu diskriminantın $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ veya $\Delta = 0$ olması hallerinde, kongruent olmayan iki çember, sırasıyla gerçel ve farklı 2 noktada kesişirler, gerçel olmayan 2 noktada kesişirler veya teğet olurlar. Kongruent olmayan iki çemberin “değme bağıntısı”nı yeniden yazalım:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 4(R_2 - R_1)(\beta_2 - \beta_1) \quad (3.15)$$

Kongruent iki çember I_2 ’nin hiçbir noktasında değmezler, onlar F mutlak noktasında birbiriyle Oskülerdirler, yani (en az) üç katlı kesişme noktası olarak sayılırlar. Kongruent izotrop çemberler böylece (F, f) değme elemanı ile koniklerin bir Osküler demetini oluştururlar.

2. Kongruent ve eşmerkezli $k_1 : y = R_1 x^2 + \alpha_1 x + \beta_1$ ve $\bar{y} = R_2 \bar{x}^2 + \alpha_2 \bar{x} + \beta_2$ çemberleri için;

$$R_1 = R_2 \quad \text{ve} \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

sağlanır. O zaman onlar;

$$\{\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + \beta_2 - \beta_1\}$$

İzotrop ötelemeyle birbiri üzerine resmedilebilirler. Bu çemberler öz kesişme noktasına sahip olmak ve dört kat kesişme noktası olarak kabul edilen F noktasında birbiriyle hiperoskülerdirler. Kongruent, eşmerkezli izotrop çemberler, böylece (F, f) değme elemanı ile koniklerin bir hiperosküler demetini oluştururlar.

3. (3.15)’deki değme bağıntısının verilmesi yeterli olan osküler izotrop çemberler F mutlak noktasında hiperoskülerdirler.

İspat: İzotrop çember Teorem 3.12 gereğince I_2 'de üç katlı bir kesişme noktasına asla sahip olamazlar. Osküler çemberler daima kongruent ($R_1 = R_2$) ve F 'de oskülerdirler. $R_1 = R_2$ ile (3.15)'den sağlanır. Ancak $\alpha_1 = \alpha_2$ koşuluyla.

Şimdi gösterelim ki, iki izotrop k_1, k_2 çemberi gerçek ve farklı S_1, S_2 noktalarında aynı izotrop açı altında kesişirler. Bunun için şu teoremi verelim:

Teorem 3.13: İki kongruent olmayan çember;

$$k_i : y = R_i x^2 + \alpha_i x + \beta_i \quad (i = 1, 2)$$

izotrop düzlemde gerçel $S_1 \neq S_2$ noktalarında kesişsin. Bu noktaların kesişme açısı;

$$\varphi^2(k_1, k_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 4(R_2 - R_1)(\beta_2 - \beta_1) \quad (3.16)$$

olur. İki kongruent, ancak eşmerkezli olmayan çember öz bir S noktasında;

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (3.17)$$

açısı altında kesişir.

İspat: Bir k_i çemberinin bir $S(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetinin eğimi;

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_s = 2R_i x_0 + \alpha_i$$

ile verilir. Böylece;

$$\varphi = u_2 - u_1 = 2(R_2 - R_1)x_0 + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

dır. k_1 ve k_2 kongruent olmadıklarında, Teorem 3.12'nin İspatındaki (*) denklemini sıfır yapan;

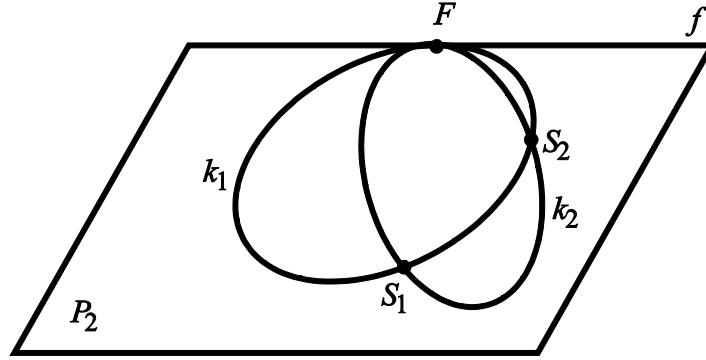
$$x_0^{(1,2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \pm \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 4(R_2 - R_1)(\beta_2 - \beta_1)}}{2(R_2 - R_1)}$$

bulunur. Bu ise yukarıdaki (3.16) sağlar. O halde gerçel ve farklı S_1, S_2 kesişme noktalarının elde edilmesi için;

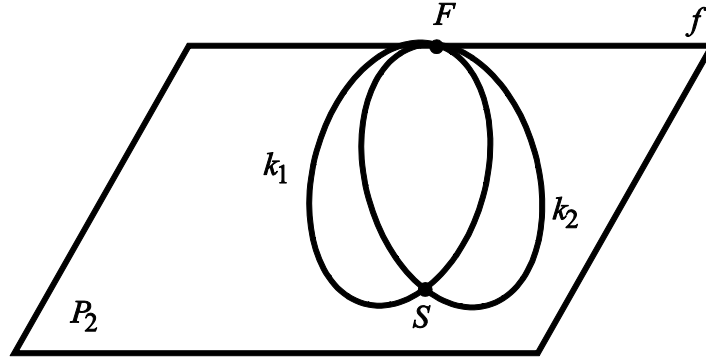
$$\sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 4(R_2 - R_1)(\beta_2 - \beta_1)} > 0$$

sağlanmalıdır. Diğer taraftan k_1 ve k_2 kongruent, fakat eşmerkezli olmaması halinde I_2 'de k_1 ve k_2 nin bir tek gerçel kesişme noktası vardır. Bu ise Teorem 3.12'nin İspatı gereği $x_0 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$ olur. $R_1 = R_2$ olması φ 'yi yukarıdaki denklem etkilemez ve (3.17) elde edilir.

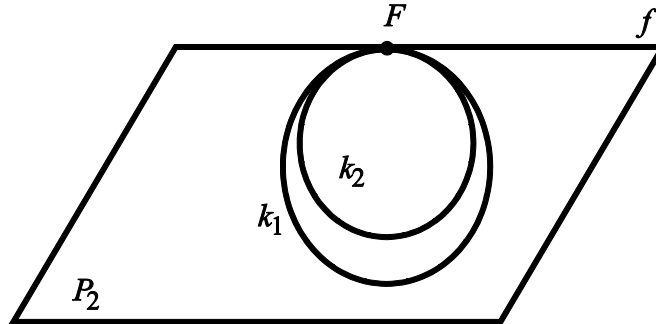
a)



b)



c)



Bu konuda çalışmaları J. Lang [21] vermiştir. Bunu yüksek üçgen geometrisi adlı çalışmada yer verilmiştir.

İZOTROP-II

İlk uygulama olarak bilinen BROCARD [8, 12, 21] teoreminin izotrop düzleminde ispatı yapılmaktadır. $\{A, B, C\}$ has (tam) üçgen olsun. Böylece, her izotrop çemberini $k_1 = (A; BC)$ şeklinde gösterelim. Bu çember A noktasından geçer ve BC doğrusuna B noktasında teğettir. Benzer şekilde, $k_2 = (B; CA)$ ve $k_3 = (C; AB)$ şeklinde tanımlanır. Bu üç k_1, k_2, k_3 çemberlerine ABC üçgenine ait birinci tipten BROCARD'sel çemberler denir. Benzer gösterimle, her $\hat{k}_1 = (A; CB)$ izotrop çemberi A noktasını içerir ve CB doğrusu C noktasında teğet olur. $\hat{k}_2 = (B; AC)$ ve $\hat{k}_3 = (C; BA)$ çemberleri de benzer şekilde tanımlanırlar. Bu $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3$ çemberleri de $\{A, B, C\}$ üçgenine ait ikinci tipten BROCARD'sel çemberler olarak isimlendirilirler. Buradan şu teorem verilebilir.

Teorem 3.14: Bir üçgenin (has-öz) birinci tipten üç Brocardsel çemberi bir W_1 noktasında ve ikinci tipten üç Brocardsel çemberi de bir W_2 noktasında kesişirler. Bu noktalara sırasıyla birinci ve ikinci Brocardsel noktalar denir. W_1 ve W_2 noktalarını üçgenin A, B, C noktalarına birleştiren doğrular bu üçgenin sırasıyla AB, BC, CA ve AC, BA, CB kenarlarıyla sırasıyla aynı W_1 ve W_2 izotrop açıları oluştururlar. Bu açıları sırasında $W_1 = -W_2$ bağıntısı vardır ve bunlar Brocardsel açıları olarak isimlendirilir. W_1 açısı üçgenin α, β, γ açılarıyla;

$$-\frac{1}{w_1} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \quad (3.18)$$

bağıntısını oluştururlar.

$$\tilde{a} := \frac{d(A, W_1)}{d(A, W_2)}, \quad \tilde{b} := \frac{d(B, W_1)}{d(B, W_2)}, \quad \tilde{c} := \frac{d(C, W_1)}{d(C, W_2)}$$

oranları kendilerine eşlenen üçgen kenarlarıyla orantılıdır. Yani,

$$\tilde{a} : \tilde{b} : \tilde{c} = \frac{|b|}{|c|} : \frac{|c|}{|a|} : \frac{|a|}{|b|} \quad (3.19)$$

dır.

İspat:

$$A(0, 0), \quad B(1, 0), \quad C(c, 1)$$

norm üçgenine İspatı uygulayalım;

$$k_1 \cdots y = R_1 x^2 + \alpha_1 x + \beta_1$$

çemberi A ve B noktalarından geçen çember olsun. Buradan ilk olarak $\beta_1 = 0$ ve $\alpha_1 = -R_1$ bağıntıları bulunur. Çünkü;

$A(0, 0)$ noktasından çember geçtiği için $\beta_1 = 0$ olur.

$B(1, 0)$ noktasından çember geçtiği için $\alpha_1 = -R_1$ olur.

elde edilir. Çemberin B noktasındaki teğeti ise;

$$y'(B) = 2R_1 + \alpha_1$$

dır. Yukarıdaki değer, yani $\alpha_1 = -R_1$ yazılırsa;

$$y'(B) = R_1$$

elde edilir. Buradan da görülür ki şekildeki çizim ile;

$$u(\overrightarrow{BC}) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{c-1}$$

bağıntısının sağlanması zorunludur. Buradan;

$$R_1 = \frac{1}{c-1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{1-c}$$

sağlanır ve böylece k_1 in denklemi;

$$\left[\frac{|\vec{a}|}{\alpha_1} = -\frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{1-c} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{c-1} \right]$$

olur.

$$k_1 : y = \frac{1}{c-1} x^2 - \frac{1}{c-1} x \tag{1}$$

bulunur. Benzer şekilde k_2 ve k_3 çemberlerinin denklemleri de;

$$k_2: y = -\frac{1}{c(c-1)^2}x^2 + \frac{1+c^2}{c(c-1)^2}x - \frac{c}{(c-1)^2} \quad (2)$$

$$k_3: y = \frac{1}{c^2}x^2 \quad (3)$$

elde edilir.

Buradaki bu üç çember $c^2 - c + 1 \neq 0$ olması halinde ikişer ikişer kongruent değildirler. Burada $c^2 - c + 1$ 'i gerçel sıfır noktasını içermediğini farz edeceğiz.

Teorem 3.12'ye göre k_i ($i=1, 2, 3$) çemberlerinin herhangi ikisiyle cebirsel anlamda daima iki kesişme noktası elde edilir. O halde bu çemberlerin ikişer ikişer kesişmelerinde birer kesişme noktası üçgenin bir köşe noktasıdır ve bu çemberler bu noktalarda birbirine teğet olamazlar. k_i ($i=1, 2, 3$) çemberleri ikişer ikişer üçgenin köşe noktalarından farklı geçrel birer noktada daha kesişirler. Ancak (1), (2) ve (3) çemberlerinin üçünün de ortak bir noktası vardır ve bu nokta;

$$w_1 \left(\frac{c^2}{c^2 - c + 1}, \frac{c^2}{(c^2 - c + 1)^2} \right) \quad (3.20)$$

noktasıdır. Yani adı geçen üç çember bu noktadan geçerler. Açıların eşitliği, çevre açısı veya teğet açısı teoremin iki kez uygulanmasıyla açıklar. Bu da k_1 çemberindeki $\overline{BW_1}$ kirişi üzerine veya k_2 çemberindeki $\overline{CW_1}$ kirişi üzerine uygulanmasıyla gösterilir. Böylece (3.20)'deki değerler cinsinden;

$$W_1 = \sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AW_1}) = \frac{1}{c^2 - c + 1}$$

şeklinde hesaplanır. Teorem 3.4'ün İspatındaki özelleştirmeye α , β ve γ için formüller elde eldir, öyle ki;

$$\alpha = -\frac{1}{c}, \quad \beta = \frac{1}{c-1}, \quad \gamma = \frac{1}{c(1-c)}$$

elde edilir ve böylece (3.18)'in doğruluğu İspatlanmış olur.

Bu norm üçgeninde adı geçen ifade genellikle geçerlidir. Burada $\wp_5$ den alınan bir transformasyonla her açısı bir $\frac{p}{q}$ faktörü ile çarpılmıştır. Ancak;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (1, 0) & \overrightarrow{CA} &= (c, 1) \\ \alpha &= u(\overrightarrow{AB}) - u(\overrightarrow{CA}) = -\frac{1}{c} \\ \overrightarrow{BC} &= (c-1, 1), & \overrightarrow{AB} &= (1, 0) \\ \beta &= u(\overrightarrow{BC}) - u(\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{c-1} \\ \overrightarrow{CA} &= (-c-1), & \overrightarrow{BC} &= (c-1, 1) \\ \gamma &= u(\overrightarrow{CA}) - u(\overrightarrow{BC}) \\ \gamma &= \frac{1}{c(1-c)}\end{aligned}$$

$$k_1: \quad y = \frac{1}{c-1}x^2 - \frac{1}{c-1}x \quad (1)$$

bu yine (3.18) ile çakışır ve gösterilen eşitlik bozulmaz.

2. Tipten $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3$ Brocardsel çemberler ve ikinci Brocardsel nokta benzer şekilde belirlenir. Buna göre önce;

$$\begin{aligned}\hat{k}_1: \quad y &= \frac{1}{c^2(c-1)}x^2 + \frac{c-2}{c^2(c-1)}x \\ \hat{k}_2: \quad y &= -\frac{1}{c}x^2 + \frac{1}{c}x \\ \hat{k}_3: \quad y &= \frac{1}{(c-1)^2}(x-1)^2\end{aligned}$$

elde edilir ve bunlarla;

$$W_2 \left(\frac{c}{c^2 - c + 1}, \frac{(c-1)^2}{(c^2 - c + 1)^2} \right) \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21)'in elemanlarıyla;

$$W_2 = \sphericalangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AW_2}) = -\frac{1}{c^2 - c + 1} = -W_1$$

Hesaplanır. Açıların eşitliğinin doğruluğu çevre ve teğet açısı teoreminin tekrar uygulanmasıyla gösterilir. Buna göre şunları hesaplayalım:

$$d(A, W_1) = \frac{c^2}{c^2 - c + 1}$$

$$d(B, W_1) = \frac{c-1}{c^2 - c + 1}$$

$$d(C, W_1) = -\frac{c(c-1)^2}{c^2 - c + 1}$$

$$d(A, W_2) = \frac{c}{c^2 - c + 1}$$

$$d(B, W_2) = -\frac{(c-1)^2}{c^2 - c + 1}$$

$$d(C, W_2) = \frac{c^2(1-c)}{c^2 - c + 1}$$

elde edilirler.

Teorem 3.4'ün İspatında verilen norm üçgeninin $|a|$, $|b|$, $|c|$ kenarları için elde edilen formüllerin ayrı ayrı gösterimiyle kolayca $|a| = c-1$, $|b| = -c$, $|c| = 1$ olduğu görülür ve bu da yukarıda verilen (3.19) bağıntısının geçerliliğinin İspatıdır.

Çok genel, fakat yeteri kadar geliştirilmiş bir kavram J. Lang [21, 22] tarafından “izotrop düzleminde izotrop üçgen geometrisi ve Apollansel değme problemi” adlı makalesinde ortaya konmuştur. Buna göre $\{A, B, C\}$ bir has üçgen ve φ 'de keyfi olarak verilen bir açı olsun. P_C ile gösterilen ve AB üçgeninde bulunan nokta için $\sphericalangle AW_1 P_C = \varphi$ sağlansın. Benzer şekilde $P_A \in BC$ ve $P_B \in CA$ tanımlansın. Ayrıca AB üzerinde $\sphericalangle BW_2 \tilde{P}_C = -\varphi$ yi sağlayan $\tilde{P}_C$ noktası ve benzer şekilde $\tilde{P}_A \in BC$ ve $\tilde{P}_B \in CA$ noktaları belirlensin. Buna göre şu teorem verilebilir.

Teorem 3.15: Bir $\{A, B, C\}$ has üçgeni ve sabit bir φ açısı altında bulunan $P_A, P_B, P_C, \tilde{P}_A, \tilde{P}_B, \tilde{P}_C$ noktalarının tümü bir k_φ çemberi üzerinde bulunurlarsa, bu çembere φ açısına göre TUCKER Çemberi denir.

İspat: $P_A, P_B, P_C, \tilde{P}_A, \tilde{P}_B, \tilde{P}_C$ noktalarının tek anlamlı olarak belirli oldukları açıktır. Norm üçgeninde, bazı hesaplamalar bunların koordinatları olarak;

$$P_A \left(\frac{\varphi c^2 + 1}{N}, \frac{\varphi}{N} \right), \quad P_B \left(\frac{c(1 + \varphi c)}{N}, \frac{\varphi}{N} \right), \quad P_C \left(\frac{\varphi c^2}{N}, 0 \right)$$

$$\tilde{P}_A \left(\frac{c(1 + \varphi)}{N}, \frac{1 - \varphi(c - 1)}{N} \right), \quad \tilde{P}_B = \left(\frac{c\varphi}{N}, \frac{\varphi}{N} \right), \quad \tilde{P}_C \left(\frac{1 + \varphi c}{N}, 0 \right)$$

elde edilir. Burada $N := 1 + \varphi(c^2 - c + 1)$ kısaltması kullanılmıştır. Bu bağıntılar ise verilen noktaların;

$$k_\varphi : \frac{c(c-1)}{N} \left[y - \frac{(c^2 - \varphi c - 1)^2}{4c(1-c)N} \right] = \left(x - \frac{\varphi c^2 + \varphi c + 1}{2N} \right)^2 \quad (3.22)$$

çemberi üzerinde bulunduklarını gösterir.

Değişik uygulamalarla ilgili olarak J. Lang'ın [21] makalesiyle karşılaştırılabilir. J. Lang adı geçen makalesine yüksek üçgen geometrisi ve çember geometrisi arasında enteresan bir bağıntıyı ortaya koymuştur. Buna göre bir $\{A, B, C\}$ has üçgeni bir P noktası ve bir $\delta \neq 0$ açısı verilsin. Öyle ki P^a, P^b, P^c noktaları üçgenin sırasıyla BC, CA, AB kenarları üzerinde;

$$\sphericalangle(P^a P, BC) = \delta$$

$$\sphericalangle(P^b P, CA) = \delta$$

$$\sphericalangle(P^c P, AB) = \delta$$

Koşullarını sağlayacak şekilde bir tek olarak belirlenirler. Bu şekilde oluşan $\{P^a, P^b, P^c\}$ üçgenine $\{A, B, C\}$ ye ait P noktasının genelleştirilmiş ayak noktaları üçgeni denir.

elde edilir.

Diğer taraftan norm üçgeninin çevrel çemberinin denklemi için (3.3)'e uygun olarak;

$$f(x, y) = x^2 - x - yc(c-1) = 0$$

Hesaplanır. Böylece P noktasının bu çembere göre kuvveti olarak;

$$f(P) = x_0(x_0 - 1) - y_0c(c-1)$$

bulunur. Bu ise tamamen (3.23)'deki payın aynısıdır. P noktası k_u çevrel çemberin üzerinde ise $f(P) = 0$ 'dır ve P^a, P^b, P^c noktaları her $\delta \neq 0$ için doğrudastırlar. Bu suretle her $P \in k_u$ noktası sabit bir $\delta \neq 0$ 'la bir $g(\delta)$ doğrusuna eşlenir.

$P \rightarrow g(\delta)$ resmetmeyi δ 'nin değişken olması halinde paragraf 5'de daha yakından inceleyeceğiz. Öklid düzleminde MORLEY'in bilinen teoremi W. VETTER [23] tarafından izotrop analog bir biçimde elde edilmiştir.

IV. BÖLÜM

4.1. İzotrop Düzlemde Çeşitli Çemberler Arasındaki Lineer Bağntılar

Bu bölümde izotrop düzlemdeki çemberler teorisini yeniden inşa edelim. Böylece uygun bir dönüşümle başlayalım ve özel lineer çember çeşitlerini inceleyelim. Buradan M. MAKAROVA'nın [26] ve [27] SACHS'ında [28] çalışmasıyla devam edelim. Özellikle [55] çalışmasını belirleyen dönüşüm prensibini sürekli (daima) kullanalım. Teorem 3.10'da izotrop düzlemlerin çemberleri için bu oran değerini alalım ve şimdi bu oran değeri için dualiteyi kullanalım. Böylece, bir doğru üzerinde bir çemberin izotrop oranını ele alalım. İlk olarak Teorem 3.3'de çemberin İspatını anımsayalım. Orada bir k çemberi (u, v) doğru koordinatlarıyla;

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta, \quad R \neq 0 \quad (4.1)$$

şeklinde belirlenmiştir.

$y = ux + v$ teğetinin k çemberi üzerindeki değme noktası $P(x_0, y_0)$ olsun. Buna göre;

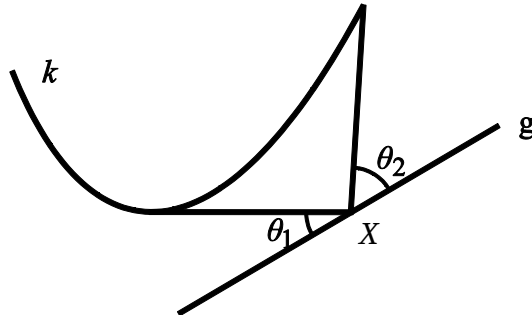
$$\begin{aligned} u &= 2Rx_0 + \alpha \\ v &= -Rx_0^2 + \beta \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur ve k çemberinin denklemi doğru koordinatlarıyla;

$$v = -\frac{1}{4R}u^2 + \frac{\alpha}{2R}u + \frac{4R\beta - \alpha^2}{4R} \quad (4.3)$$

olur.

Teorem 4.1: k , I_2 izotrop düzleminde bir çember ve g k 'ya teğet olmayan ve izotrop olmayan bir doğru olsun ve X de g doğrusu üzerinde keyfi bir nokta olsun.



g doğrusu üzerindeki keyfi bir X noktasından k ya çizilen teğetlerin g doğrusu ile oluşturduğu açıları θ_1 ve θ_2 ile gösterelim. Açıların $\theta_1 \cdot \theta_2 = \kappa(g, k)$ çarpımı $X \in g$ noktasının konumundan bağımsızdır. $\kappa(g, k)$ ye g doğrusu üzerinde çemberin kuvveti denir.

İspat: g doğrusu $y = Ax + B$ şeklinde verilsin. g doğrusu ile izotrop olmayan $g_1 : A_1x + B_1$ doğrularının kesişme noktasını P ile gösterelim.

İzotrop olmayan $\lambda g + \mu g_1 = 0$ doğru demetinin bir doğrusunun g ile yaptığı θ açısı için;

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} (A_1 - A) \quad (4.4)$$

hesaplanır. Burada $\lambda + \mu \neq 0$ 'dır.

$\lambda = -\mu$ olması halinde ise demet izotrop doğru demeti olur. ($\lambda = -\mu$ ise $\theta \rightarrow \infty$ olur. O halde doğru sonsuza gider. Bu da doru demetin izotrop doğru demeti olması demektir)

İzotrop olmayan bu doğru demetinin doğru koordinatları;

$$u = \frac{\lambda A + \mu A_1}{\lambda + \mu}, \quad v = \frac{\lambda B + \mu B_1}{\lambda + \mu} \quad (4.5)$$

olur. (4.5), (4.3)'de yerine koyarsak,

$$a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 = 0 \quad (4.6)$$

Kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin katsayıları $A, B, A_1, B_1, \alpha, \beta$ ve R ye bağlıdır. (4.6)'nın $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ çözümleri X den k ya teğetlerin konumlarını belirler. g doğrusu k ye teğet olmadığından $\mu = 0$ ve (4.6)'nın bir çözümü değildir ve bu nedenle $a \neq 0$ 'dır.

(4.4) ve (4.6)'dan Vietâschen'in kök teoreminin kullanılmasıyla;

$$\theta_1 \theta_2 \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) = (A_1 - A)^2$$

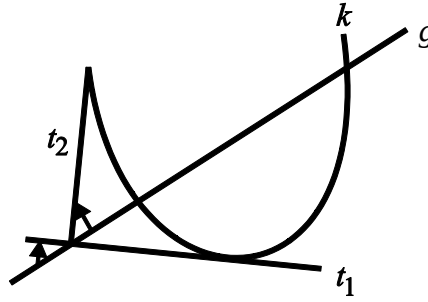
bağıntısı elde edilir. Buradan basit hesaplamayla;

$$\theta_1 \theta_2 = (A - \alpha)^2 + 4R(B - \beta) \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) gösterir ki $\theta_1 \theta_2$ çarpımı A_1, B_1 'den ve hatta $X \in g$ 'den bağımsızdır.

UYARILAR

1. Teorem 4.1'deki θ_1, θ_2 açıları (2.15)'deki gibi yönlendirilmiş ölçüleri olarak bakacağız. k çemberine çizilen teğetleri t_1, t_2 ile gösterelim. Buna göre $\theta_1 = \angle(g, t_1), \theta_2 = \angle(g, t_2)$ ile gösterelim. $\kappa(g, k) > 0$ ise $\text{sgn } \theta_1 = \text{sgn } \theta_2$ 'dir. G doğrusu k çemberini iki farklı reel (gerçel) noktada keser.



Eğer $\kappa(g, k) < 0$ ise $\text{sgn } \theta_1 \neq \text{sgn } \theta_2$ 'dir ve g doğrusu k çemberini gerçel olmayan noktalarda keser. Bu bağıntı (3.15)'den açıkça geçerlidir. Şu hallerde;

$$\alpha_2 = \Delta, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad R_2 = 0, \quad R_1 = R, \quad \beta_2 = B \quad \text{ve} \quad \beta_1 = \beta$$

Konulursa bunun geçerli olduğu açıkça görülür.

2. Teorem 4.1 izotrop analog l şeklinde Öklid düzleminde çok iyi bilinen çember üzerindeki bağıntıdır [29, 30].

3. (4.7) ile (4.3)'ün karşılaştırılmasından görülür ki $\kappa(g, k)$ kuvveti elde edilir. k nın doğru koordinatlarına normlanmış doğru denkleminden $\kappa(g, k)$ kuvvetinin geçerli olduğu elde edilebileceği görülür ki orada u^2 nın katsayısı 1'dir.

$y = Rx^2 + \alpha x + \beta$ çemberi ile izotrop olmayan bir $y = Ax + B$ doğrusunun φ kesişme açısı (3.16)'dan hesaplanır. Böylece;

$$\varphi^2 = (A - \alpha)^2 + R(B - \beta)$$

bulunur ve (4.7) ile karşılaştırılırsa buradan şu teorem verilebilir.

Teorem 4.2: İzotrop düzlemin bir k çemberinin izotrop olmayan bir g doğrusuna olan $\kappa(k, g)$ kuvveti g ile k nin kesişme açısının karesine eşittir.

Bu teorem [29] [23]'de verilen Öklidsel sonucun bir analogu şeklinde ortaya koymuştur. Bu Teorem 4.2'nin anlamında bir g doğrusu ile bir k çemberinin φ kesişme açısı için bir geometrik anlam vardır. Hatta, eğer φ açısı imajiner (sanal) olsa da yine geometrik anlam vardır. Yani, eğer k ve g nin gerçel kesişme noktalarını içermeseydi. Kongrüent çemberler daima (3.17)'deki gerçel açı altında kesişirler. Bu bağıntı kongrüent olmayan çemberler için daima geçerli değildir.

Teorem 4.3: İzotrop düzlemin birbirine değmeyen kongrüent olmayan iki k_1, k_2 çemberi daima gerçel ya da kompleks eşlenik iki orta teğete sahiptir. Her iki çemberin d teğetsel uzaklığı için;

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{1}{4R_1R_2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 4(R_2 - R_1)(\beta_2 - \beta_1) \right] \\ &= \frac{1}{4R_1R_2} \Delta = \frac{1}{4R_1R_2} \varphi^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

sağlanır.

İspat: k_1, k_2 çemberlerinin (u, v) ortak teğetleri (4.3)'e göre;

$$v = -\frac{1}{4R_i}u^2 + \frac{\alpha_i}{2R_i}u + \frac{4R_i\beta_i - \alpha_i^2}{4R_i} \quad (i = 1, 2)$$

denklemlerinin her ikisinin çözümü olarak elde edilir. Dual uzayda (u, v) nokta koordinatlarıyla belirleyelim. Yani (4.1)'den;

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta, \quad R \neq 0$$

dır. Paragraf 3'teki gibi yukarıdaki doğrunun izotrop çember ile kesişme noktalarını belirleyelim.

$R_1 \neq R_2$ olduğundan $\hat{k}_1, \hat{k}_2$ dual çemberleri de kongrüent değildirler ve birbirlerine değmezler. Teorem 3.12'ye göre $\mathbb{C}$ üzerinde birbirinden farklı T_1, T_2

kesişme noktaları belirtirler. Bu kesişme noktaları k_1, k_2 çemberlerinin orta t_1, t_2 teğetlerine dual olarak eşlenir.

$T_1(x_1, y_1) \in k_1, T_2(x_2, y_2) \in k_2$ bu teğetlerden biridir. Böylece t, t_1 ve t_2 teğetlerinden birisinin seçilmesi halinde izotrop uzaklığı $\overline{T_1 T_2} =: d$ 'den bağımsızdır. d ye her iki çemberin teğetsel uzaklığı denir.

(4.2)'den;

$$\begin{aligned} 2R_1x_1 + \alpha_1 &= 2R_2x_2 + \alpha_2 \\ \beta_1 - R_1x_1^2 &= \beta_2 - R_2x_2^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

olur. Bunlar elemanlar cinsinden yazılırsa;

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2$$

yazılabilir. Bu da t ortak teğetinin seçimi (4.8) formundan bağımsızdır. (4.8) formülü (3.16)'dan elde edilebilir.

Teorem 4.4: k_1, k_2 izotrop düzlemin iki kongrüen olmayan ve birbirine değmeyen iki çember olsun ve bunların yarıçaplarını R_1, R_2 ve kesişim açılarını φ_1 tanjant (teğetsel) uzaklığını d ile gösterelim. $P_1 \in k_1, P_2 \in k_2$ noktaları aynı izotrop doğru üzerinde bulunuyorlarsa bunların spanı 1 birimdir ve k_1 'in P_1 'deki ve aynı şekilde k_2 'nin P_2 'deki teğetleri paraleldir. O halde şunlar geçerlidir.

a) k_1, k_2 çemberleri gerçel olmayan noktalarda kesişirler. Fakat, k_1 ve k_2 gerçel bir teğet uzunluğuna sahiptir. Buradan;

$$\varphi^2 = 4R_1R_2d^2 \quad (4.10)$$

olur.

b) k_1 ve k_2 gerçel olmayan kesişme noktalarına ve bunların gerçel olmayan bir teğet uzunluğuna sahip iseler;

$$\varphi^2 4L.(R_1 - R_2) \quad (4.11)$$

olur.

İspat:

a) şıkkındaki ifade (4.8)'den geçerlidir. O halde $\Delta < 0$ ve $R_1 R_2 < 0$ 'dır.

b) durumunda ise $R_1 R_2 > 0$ 'dır. $P_1(x_1, y_1) \in k_1$, $P_2(x_2, y_2) \in k_2$ nokta çiftleri ki bu noktalardaki k_1 ve k_2 teğetleri paraleldirler, ve P_1 ve P_2 'nin birleştirme doğrusu da izotropdur. O halde kısa bir hesaplama ile;

$$4L(R_1 - R_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 - 4(\beta_2 - \beta_1) \cdot (R_2 - R_1)$$

elde edilir. Buradan ve (3.16)'dan (b) deki bağıntının doğruluğu görülür.

İki izotrop düzlemde lineer çember çeşitlerine girişi öğrenmek için Öklidsel çember geometrisinde çemberin koordinatlarına yaklaşmak ve bunların dönüşümlerini incelemek tavsiye edilir [24].

$$\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{01}x + 2\alpha_{02}y + \alpha_{00} = 0 \quad (4.12)$$

genel çember denkleminde hareketle (Teorem 3.2'nin İspatından elde edilen sonuçlardan) N. NAKAROWA'nın [27, 31]'deki literatürde gösterdiği;

$$\eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \alpha_{11} : \alpha_{01} : \alpha_{02} : \alpha_{00} \quad (4.13)$$

sıralı-dörtlü koordinatları gösterelim.

$\alpha_{11} \neq 0$ için (4.12) bir tek çember belirtir. Burada şimdiye kadar parabolik çember olarak ele aldığımız küme reel veya eşlenik kompleks doğru-çiftine ve hatta izotrop doğru-çifti olarak elde edilir.

$\alpha_{11} = 0$ için çemberin biri sonsuzdaki f doğrusu ile biri izotrop olan veya izotrop olmayan doğru-çifti elde edilir. Bu şekilde tanımlanan çember kümesi $\eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = 0 : 0 : 0 : 0$ dörtlüler-kümesi üzerine birebir-örtentirler. (4.13)'den $\alpha_{02} \neq 0$ için 5-li koordinatlar;

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \alpha_{11} : \alpha_{01} : \alpha_{02} : \alpha_{00} \frac{\alpha_{01}^2 - \alpha_{11}\alpha_{00}}{\alpha_{02}} \quad (4.14)$$

tanımlayalım.

Bu koordinatlardan sadece (3.1)'deki parabolik çemberi veya $\alpha_{11}=0$ için izotrop olmayan bir doğru elde edilir. Parabolik çemberler kümesi ve izotrop olmayan doğrular kümesi γ ile gösterilir.

5-li koordinat sistemi bağımsız değildir. Hatta aralarında;

$$x_1^2 - x_0x_3 - x_2x_4 = 0 \quad (4.15)$$

Bağıntısı vardır. Bu bağıntı (4.14)'ten hemen ortaya çıkar. (x_i) homogen 5-liler P_4 4-boyutlu gerçel projektif uzayda projektif koordinatlar olarak alınır.

O halde (4.15) denklemi $M_3^2 \subset P_4$ şeklinde bir 3-boyutlu ikinci mertebeden bir hiper-yüzey tanımlar. Daha yakından incelemek için (4.15)'e;

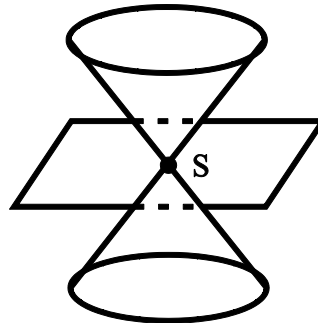
$$\{x_0 = y_0 + y_3, \quad x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + y_4, \quad x_3 = y_0 - y_3, \quad x_4 = y_2 - y_4\}$$

projektivitesini uygularsak;

$$-y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$$

elde edilir [25]. O halde M_3^2 bir hiper-quadriktir. Lineer cebirden bilinen teoreme göre M_3^2 lineer alt uzayının maksimal boyutu $u = 4 - 2 - 1 = 1$ 'dir. Yani bunlar doğrulardır. $H_0 : x_2 = 0$ hiper-düzlemi M_3^2 üzerine $S(0:0:0:0:1)$ noktasında hiper-teğetsel düzlemdir ve bu düzlem M_3^2 yi tek parçalı ikinci mertebeli N_2^2 koniği ile koniğin tepe noktası S de kesişirler.

$$M_3^2 \cap N_2^2 = S$$



M_3^2 , N_2^2 boyunca N_2^2 ile kesişsin. O halde;

$$M_3^{*2} = \frac{M_3^2}{N_2^2}$$

oluşturulursa;

$$\sigma : \gamma \rightarrow M_3^{*2} = \frac{M_3^2}{N_2^2} \subset P_4 \quad (4.16)$$

elde edilir. $k_1(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ ve $k_2(y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ çemberleri kongruent olmayan veya kongruent olan ve eşmerkezli olmayan çemberler olsun. O halde (3.16)'dan veya (3.17)'de;

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{x_1}{x_2}, & R_1 &= -\frac{x_0}{2x_2}, & \beta_1 &= -\frac{x_3}{2x_2}; \\ \alpha_2 &= -\frac{y_1}{y_2}, & R_2 &= -\frac{y_0}{2y_2}, & \beta_2 &= -\frac{y_3}{2y_2} \end{aligned}$$

geçerlidir. Bu değer (4.15)'e uygulanırsa k_1 , k_2 çemberlerinin φ kesişme açısı;

$$\varphi^2 = \frac{-2x_1y_1 + x_0y_3 + x_3y_0 + x_2y_4 + x_4y_2}{x_2y_2} \quad (4.17)$$

Olur. k_1 , bir izotrop çember ve k_2 izotrop olmaya doğru veya k_1 ve k_2 izotrop olmayan ve paralel olmayan iki doğru ise (3.16) veya (2.15)'den hareketle (4.17) bağıntısı elde edilir.

Özel olarak $k_1, k_2 \in \gamma$ çemberlerinin değme bağıntısı olarak;

$$-2x_1y_1 + x_0y_3 + x_3y_0 + x_2y_4 + x_4y_2 = 0 \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18)'in sol tarafı

$$2(x_1^2 - x_0x_3 - x_3x_4)$$

polar formundadır.

KAYNAKLAR

- [1]. **Sachs, H.:** Ebene Isotrope Geometrie, Friedr., Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden.
- [2]. **Sachs, H.:** 1990, Isotrope Geometrie des Raumes, Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden.
- [3]. **Hacısalıhoğlu, H.H.:** 1993, Diferansiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [4] **Kaya, Rüstem:** 1978, Projektif Geometri, Projektif Düzlemler Kuramına Giriş, 1. cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [5]. **Brauner, H.:** 1981, Differentialgeometrie, Vieweg-Verlag Braunschweig-Wiesbaden.
- [6]. **Klein, F.:** 1928, (Nachdruck 1968) Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Sпрinger-Verlag, Berlin.
- [7]. **Makapoba, H.M.:** 1955.
- [8]. **Strubecker, K.:** 1962, Geometrie in einer isotropen Ebene, Mat.-Naturwiss. Unterricht (MNU) 15, s. 297-306, 343-351, 385-394.
- [9]. **Berwald, L.:** 1915, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie in einer Minimalebene, Monatsh. Math. Phys. 26, s. 211-228.
- [10]. **Kuiper, N.:** 1954, Een vlakke meetkunde, Simon Stevin 30, s. 94-105.
- [11]. **Strubecker, K.:** 1983, Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecks-geometrie auf ebene Ausgleichsprobleme, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 192, s. 497-559.
- [12]. **Baldus, R. U. Löbell, F.:** 1953, Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Göschel, Band 970, Berlin.
- [13]. **Röschel, O.:** 1984, Der Satz von Holditch in der isotropen Ebene, Abh. D. Braunsch. Wiss. Ges. 36, s. 27-32.
- [14]. **Graf, U. u. Kahlau, R.:** 1935, Über eine Gruppe von Parabel-sätzen. Sitzungsber. Berl. Math. Gesell. 34, s. 30-32.

- [15]. **Graf, U. u. Kahlau, R.:** 1935, Einige Sätze über Parabeln gleicher Achsenrichtung. Unterrichtsbl. Math. u. Nat. 41, s. 114-117.
- [16]. **Benz, H.:** 1912, Zur Geometrie der Minimalebene, Sitz.-Ber. Berlin, Math. Ges. 12, s. 14-30.
- [17]. **Strubecker, K.:** 1948, Zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichung n. Ordnung $(a_n^{D+1})(a_{n-1}^{D+1}) \cdots (a_1^{D+1})y = s(x)$ Archiv d. Math. 1, s. 65-72.
- [18]. **Strubecker, K.:** 1956, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I: Grundlagen, Odenbourg-Verlag, München.
- [19]. **Burau, W.:** 1962, Algebraische Kurven und Flächen I, Algebraische Kurven der Ebene, Sammlung Götschen, Bd. 435, Berlin.
- [20]. **Röschel, O.:** 1983, Zur Kinematik der isotropen Ebene, Journ. Of Geometry 21, s. 146-156.
- [21]. **Kurnik, Z.:** 1985, Eine Verallgemeinerung des Satzes von N. Abramescu für Kurven der isotropen Ebene. Berichte der Math.-Stat. Sektion, Forschungszentrum Graz, Ber. Nr. 241, s. 1-6.
- [22]. **Beck, H.:** 1912, Geometrie der Minimalebene, Sitz.-Ber. Berlin, Math. Ges. 12, s. 14-30.
- [23]. **Blaschke, W. U Müller, H.R.:** 1956, Ebene Kinematik, Mathem.-Einzelschriften, Oldenbourg-Verlag, München.
- [24]. **Blaschke, W.:** 1929, Vorlesungen über Differential geometrie III, Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln, Springer-Verlag, Berlin 1929.
- [25]. **Kowalsky, H.-J.:** 1967, Lineare Algebra. Götschens Lehrbücherei Bd. 27, Walter de Gruyter, Berlin.
- [26]. **Makarova, H. M.:** 1957,
- [27]. **Makarova, H. M.:** 1963,
- [28]. **Sachs, H.:** 1978, Zur Geometrie der Hypersphären im n-dimensionalen einfach isotropen Raum. Jorun. F. D. Reine u. Angew. Math. 298, s. 199-217.

- [29]. **Müller, E. U. Krames, J.:** 1929, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. 2, Die Zyklographie, Verlag Deuticke Leipzig und Wien.
- [30]. **Müller, H. R.:** 1963, Kinematik, Sammlung Götschen, Bd. 584/584a Berlin.
- [31]. **Pavlíček, J. B.:** 1975, The Galilean plane, Knihovnice Odborn. Věd. Spisů Vysoké. Učení Techn. v. Brně B 56, s. 85-94.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılı Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 1994 yılında girmiş olduğum Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1998 yılında mezun oldum. 1998 yılında Kırşehir'de öğretmenlik hayatıma başladım. 2001 yılında Elazığ'a tayin oldum. Halen öğretmenlik görevime 100. Yıl Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde devam etmekteyim. Evli ve 1 erkek çocuk babasıyım.