

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KORTEWEG-de VRIES (GKdV) DENKLEMİNİN
YARI-ANALİTİK METODLARLA ELDE EDİLEN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI

Ebru CAVLAK

Tez Yöneticisi
Yrd.Doç. Dr. Mustafa İNÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KORTEWEG-de VRIES (GKdV) DENKLEMİNİN
YARI-ANALİTİK METODLARLA ELDE EDİLEN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI

Ebru CAVLAK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği / oyçok-
luğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr Mustafa İNÇ

Üye: Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Üye: Yrd. Doç. Dr Mustafa İNÇ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sinan ÇALIK

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa İNÇ'e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ebru CAVLAK

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
ŞEKİLLER LİSTESİ	II
TABLolar LİSTESİ	V
SİMGELER LİSTESİ	VII
KISALTMALAR	VII
ÖZET	VIII
ABSTRACT	IX
1. BÖLÜM	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	1
2. BÖLÜM	9
2.1. Adomian Ayrışım Metodu	9
2.2. Adomian Polinomlarının Hesaplanması	11
2.2.1. Lineer Olmayan Polinomlar	12
2.2.2. Trigonometrik Lineer Olmayanlık	14
2.2.3. Üstel Lineer Olmayanlık	16
2.2.4. Logaritmik Lineer Olmayanlık	17
2.3. Varyasyonel İterasyon Metodu	19
2.4. Homotopi Pertürbasyon Metodu	20
3. BÖLÜM	22
3.1. Genelleştirilmiş KdV Denklemi	22
3.2. Soliton ve Soliton Etkileşiminin Tarihçesi	24
3.3. GKdV Denkleminin Sayısal Çözümlerinin İrdelenmesi	27
3.3.1. Ayrışım Metodunun GKdV Denklemine Uygulanması	27
3.3.2. Varyasyonel İterasyon Metodunun GKdV Denklemine Uygulanması	46
3.3.3. Homotopi Pertürbasyon Metodunun GKdV Denklemine Uygulanması	60
4. BÖLÜM	80
Sonuç ve Tartışma	80
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	87

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.2.1. Tek dalga (Solitary wave)	24
Şekil 3.3.1. $n=1$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	33
Şekil 3.3.2. $n=1$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi	33
Şekil 3.3.3. $n=2$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	36
Şekil 3.3.4. $n=2$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi	36
Şekil 3.3.5. $n=3$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	39
Şekil 3.3.6. $n=3$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi	39
Şekil 3.3.7. $n=4$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	42
Şekil 3.3.8. $n=4$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi	42
Şekil 3.3.9. $n=5$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	45
Şekil 3.3.10. $n=5$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi	45
Şekil 3.3.11. $n=1$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	49
Şekil 3.3.12. $n=1$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi	49
Şekil 3.3.13. $n=2$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	51
Şekil 3.3.14. $n=2$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi	52

Şekil 3.3.15. $n=3$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	54
Şekil 3.3.16. $n=3$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....	54
Şekil 3.3.17. $n=4$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	56
Şekil 3.3.18. $n=4$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....	57
Şekil 3.3.19. $n=5$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	59
Şekil 3.3.20. $n=5$ durumunda, $c=1$ için iterasyon fomülü ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....	59
Şekil 3.3.21. $n=1$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	63
Şekil 3.3.22. $n=1$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....	63
Şekil 3.3.23. $n=2$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	67
Şekil 3.3.24. $n=2$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....	67
Şekil 3.3.25. $n=3$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	71
Şekil 3.3.26. $n=3$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....	71
Şekil 3.3.27. $n=4$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması	75

Şekil 3.3.28. $n=4$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....75

Şekil 3.3.29. $n=5$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün değişken t - zamanına göre karşılaştırılması 78

Şekil 3.3.30. $n=5$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.....78

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.3.1. GKdV denkleminin her bir n değeri için verilen başlangıç şartları ...	27
Tablo 3.3.2. GKdV denkleminin her bir n değeri için verilen analitik çözümler ...	29
Tablo 3.3.3. $n=1$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	32
Tablo 3.3.4. $n=2$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	35
Tablo 3.3.5. $n=3$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	38
Tablo 3.3.6. $n=4$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	41
Tablo 3.3.7. $n=5$ durumunda, $c=1$ için Ayrışım serisinin dört teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	44
Tablo 3.3.8. $n=1$ durumunda, $c=1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	48
Tablo 3.3.9. $n=2$ durumunda, $c=1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	50
Tablo 3.3.10. $n=3$ durumunda, $c=1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	53
Tablo 3.3.11. $n=4$ durumunda, $c=1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	55
Tablo 3.3.12. $n=5$ durumunda, $c=1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	58
Tablo 3.3.13. $n=1$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	62
Tablo 3.3.14. $n=2$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	66
Tablo 3.3.15. $n=3$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	70
Tablo 3.3.16. $n=4$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	74

Tablo 3.3.17. $n=5$ durumunda, $c=1$ için Homotopi serisi ile hesaplanan dört terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata	77
---	----

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
L	Lineer Operatör
L^{-1}	İntegral Operatörü
A_n	Adomian Polinomları
Nu	Lineer Olmayan Operatör
Σ	Toplam Sembolü
Π	Çarpım Sembolü
$ $	Norm
λ	Lamda
δ	Delta
Ω	Omega
η	Eta
ξ	Xi
Γ	Gamma

KISALTMALAR

ADM	Adomian ayrışım metodu
VİM	Varyasyonel iterasyon metodu
HPM	Homotopi pertürbasyon metodu
GKdV	Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi
FPU	Fermi, Pasta, Ulam sistemi
NLS	Lineer olmayan Schrödinger denklemi
SG	Sine- Gordon denklemi
MKdV	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ KORTEWEG-de VRIES (GKdV) DENKLEMİNİN YARI-ANALİTİK METODLARLA ELDE EDİLEN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Ebru CAVLAK

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2008, Sayfa: 87

Bu tez dört bölüm olarak düzenlenmiştir.

İlk bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; Adomian ayrışım metodu, Varyasyonel iterasyon metodu ve Homotopi pertürbasyon metodlarının genel yapıları anlatılmıştır. Ayrıca Adomian ayrışım metodu uygulanırken ihtiyaç duyulan Adomian polinomlarının hesaplamaları verildi.

Üçüncü bölümün birinci ve ikinci kısmında Genelleştirilmiş KdV denklemi ve soliton kavramları anlatılmıştır. Bu bölümün üçüncü kısmında da; GKdV denkleminin sırasıyla ADM, VİM ve HPM uygulanarak denklemin sayısal çözümleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde de; sayısal olarak irdelenen GKdV denklemi için yöntemlerin hassaslığı hakkında yorum yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: GKdV denklemi, Adomian ayrışım metodu (ADM), Varyasyonel iterasyon metodu (VİM), Homotopi pertürbasyon metodu (HPM), Adomian polinomları, Lagrange çarpamı.

ABSTRACT

Master's Thesis

COMPARISON of NUMERICAL SOLUTIONS OBTAINED with SEMI-ANALYTICAL
METHODS of GENERALIZED KORTEWEG-de VRIES (GKdV) EQUATION

Ebru CAVLAK

Firat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2008, Page: 87

This thesis is arranged in four chapters.

In the first chapter, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters.

In the second chapter, we give general structures of Adomian Decomposition Method, Variational Iteration Method and Homotopy Perturbation Method. Furthermore, we give the calculation of Adomian polynomials which we need in the course of applying Adomian Decomposition Method.

In the first and second section of third chapter, we explain the concept of Generalized KDV equation and soliton. In the third section of this chapter, numerical solutions of the equation were investigated by applying ADM, VIM and HPM methods respectively to the Generalized KDV equation.

In the fourth chapter, we remark about sensitivity of the methods of Generalized KDV equation which investigated as numerical.

Key Words: GKdV equation, Adomian decomposition method (ADM), Variational iteration method (VIM), Homotopy perturbation method (HPM), Adomian polynomials, Lagrange multiplier.

1. BÖLÜM

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1

X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne X üzerinde bir metrik denir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [1].

$$M1) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$M2) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$M3) \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X bir tam metrik uzay adını alır.

Tanım 1.1.2

X bir vektör uzayı olsun. $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu dönüşüme bir norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$N1) \|x\| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = 0 \iff x = \theta$$

$$N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ (askaler)}$$

$$N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir. Bir $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayı tam ise, yani bu uzaydan alınan her Cauchy dizisi bu normlu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [1].

Tanım 1.1.3

Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferensiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferensiyel denklem denir. Bir diferensiyel denklem

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

veya genel olarak

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklemler, adi diferensiyel denklem olarak isimlendirilir [2].

Tanım 1.1.4

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere kısmi türevli denklem denir [3].

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.5

Bir değişkenin skaler bir fonksiyonu için Adomian polinomu aşağıdaki şekilde verilir. f fonksiyonu n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} U_i \right)$$

formülü ile tanımlanır [4].

Tanım 1.1.6

A , B , C birer sabit sayı olmak üzere, x ve y serileri arasında kesin olan türden çeşitli fonksiyonel ilişkilere deterministik ilişki denir. Örneğin;

$$y = Ax + B \quad (\text{Doğrusal İlişki})$$

$$\log y = \log(Ax + B) \quad (\text{Tam logaritmik ilişki})$$

ifadeleri birer deterministik ilişkidirler. Bunlardan başka daha pek çok deterministik ilişki tipleri yazılabilir. Çünkü serilerden birinin aldığı değer bilindiğinde, diğer serinin alabileceği değer kesin olarak hesaplanabilir. Örneğin; bir gazın hacmi ile basıncı arasındaki ters yönlü ilişki, elektrik akımı ile direnç arasındaki ters yönlü ilişkiler birer deterministik ilişkidir [5].

Tanım 1.1.7

Önceden hangi değerleri alacağı kesin olarak bilinmeyen, fakat yaklaşık olarak bir eğilim belirleyen, olaylar arasındaki ilişkiye stokastik ilişki denir.

Bu tür ilişkilere konu olan olayların, hangi sonucu alacağı deney veya olay gerçekleşmeden bilinemez, ancak yaklaşık olarak belli bir hata payı ile tahmin edilebilir [5].

Tanım 1.1.8

Bir a büyüklüğünün yaklaşık değeri a^* ve gerçek değeri a ise a^* değerindeki e_a mutlak hata

$$e_a = a^* - a,$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

a^* değerindeki e_b Bağlı hata ise

$$e_b = \left(\frac{a^* - a}{a} \right) = \frac{e_a}{a} \quad a \neq 0,$$

ile verilir [6].

Teorem 1.1.1

İki değişkenli bir fonksiyon için Adomian polinomları aşağıdaki formda verilir [7].

$$\begin{aligned} A_n(U_0, V_0) &= f(U_0, V_0), \\ A_0(U_0, \dots, U_n; V_0, \dots, V_n) &= \sum \frac{U_1^{p_1}}{p_1!} \dots \frac{U_n^{p_n}}{p_n!} \frac{V_1^{q_1}}{q_1!} \dots \\ &\quad \frac{V_n^{q_n}}{q_n!} \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n+q_1+q_2+\dots+q_n}}{\partial u^{p_1+p_2+\dots+p_n} \partial v^{q_1+q_2+\dots+q_n}} \\ p_1 + p_2 + \dots + np_n + q_1 + q_2 + \dots + nq_n &= n, \\ f(U_0, V_0), n &\neq 0. \end{aligned}$$

Tanım 1.1.9

Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [8].

Tanım 1.1.10

E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x 'de, değer kümesi E_y 'de bulunan $y = Ax$ operatörünü ele alalım. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa verilen bu A operatörüne lineer operatör denir [8].

$$L1) A(x + y) = Ax + Ay$$

$$L2) A(\lambda x) = \lambda Ax$$

Tanım 1.1.11

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmış bir H lineer vektör uzayını göz önüne alalım. H da ki her vektör çiftine bir sayı karşı getiren bir $(.,.) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, daha doğru bir deyişle fonksiyoneli aşağıdaki kuralları sağladığı taktirde bir iç çarpım adını alır [1]:

- i) $\forall u, v \in H$ için $(u, v) = \overline{(u, v)}$,
- ii) $\forall u, v \in H$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$,
- iii) $\forall u, v, w \in H$ için $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,
- iv) $\forall u \in H, u \neq 0$ için $(u, u) > 0$.

Tanım 1.1.12

Herhangi $x, y, z, \dots$ elemanlar cümlesini H ile gösterelim. H aşağıdaki koşulları sağlasın [1].

$H1)$ H lineer kompleks uzayıdır.

$H2)$ H da bulunan her x, y eleman çiftine bunların iç çarpımı denilen ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen kompleks (reel) bir sayı karşılık gelir.

$H3)$ $g(x, y) = \|x - y\|$ olacak şekilde norm anlamında yakınsaklığa göre H uzayı tamdır.

$H4)$ Keyfi doğal n sayısı için H uzayında lineer bağımsız n tane eleman mevcuttur.

Yani H sonsuz boyutludur.

$H1), H2)$ ve $H3)$ aksiyomları sağlanıyorsa H 'a Üniter Hilbert uzayı denir. $H1), H2), H3)$ ve $H4)$ özellikleri sağlamıyor ise H 'a Hilbert uzayı denir.

Tanım 1.1.13

Elemanlarını nokta olarak adlandıracağımız bir X kümesini kendi içine dönüştüren bir $f : X \rightarrow X$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bir $x^* \in X$ noktası $f(x^*) = x^*$ bağıntısını sağlıyorsa f fonksiyonunun bir sabit noktası adını alır [9].

Tanım 1.1.14

(X, d) bir metrik uzay olsun ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine dönüştürsün. Her $x, y \in X$ nokta çifti ve $0 < k < 1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa f bir büzülme dönüşümü ya da sadece bir büzülme adını alır [9].

Teorem 1.1.2 (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay ve f bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır [9].

İspat:

Önce f fonksiyonunun sabit noktası varsa tek olduğunu gösterelim. İki $x^*, x^{**} \in X$ sabit noktası varsa bu noktalar $f(x^*) = x^*$ ve $f(x^{**}) = x^{**}$ bağıntılarını sağlamalıdır. Bu durumda

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq kd(x^*, x^{**})$$

yazılabileceğinden $d(x^*, x^{**}) \neq 0$ ise $k \geq 1$ çelişmesine varılır. Dolayısıyla $d(x^*, x^{**}) = 0$ ve $x^* = x^{**}$ bulunur. Şimdi tek olan sabit noktanın varlığını gösterebiliriz. Her hangi bir $x_0 \in X$ noktasını seçelim. $f(x_0) = x_0$ ise sorun kalmamıştır. Ancak genellikle $x_1 = f(x_0)$ bulunacaktır. Bir $\{x_n\} \subset X$ dizisini $x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1$ şeklinde oluşturalım. Bu dizinin elemanlarının iteratif olarak $x_n = (f \circ \dots \circ f)(x_0) = f^n(x_0)$ şeklinde belirleneceği açıktır. $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Bu özelliği görmek için önce

$$d(x_m, x_n) = d(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) \leq kd(x_{m-1}, x_{n-1})$$

işlemini örneğin r kez yineleyelim. Kolaylıkla

$$d(x_m, x_n) \leq k^r d(x_{m-1}, x_{n-1})$$

bağıntısını elde ederiz. Şimdi yukarıdaki ifadede $r = m, n = m + 1$ alırsak

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_0, x_1)$$

çıkar. Genellikten kaybetmeksizin $n > m$ seçmek koşuluyla üçgen eşitsizliğinden ardışık olarak yararlanarak

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

veya

$$d(x_m, x_n) \leq (k^m + \dots + k^{n-1})d(x_0, x_1) = k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} d(x_0, x_1)$$

ve $n \geq m$ için

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^m}{1 - k} d(x_0, x_1) \quad (2.1.12)$$

sonucuna varırız. Bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen $\left(\log \frac{\varepsilon(1 - k)}{d(x_0, x_1)} \right) / \log k$ sayısından büyük en küçük doğal sayıyı $N(\varepsilon)$ ile gösterirsek $m, n \geq N$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ buluruz. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X metrik uzayı tam olduğundan bu dizinin bir $x^* \in X$ limiti var olacaktır. f sürekli olduğu için de

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$$

elde edilecektir. Buna göre x^* noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Görülüyor ki f bir büzülme dönüşümü olduğu taktirde X uzayının her hangi bir noktasından başlayarak iteratif bir işlemle ardışık olarak sabit noktaya yaklaşabiliriz. Başlangıç noktasının yeri yalnız yaklaşım hızını etkileyebilir. m adımdaki hatayı $e_m = d(x_m, x^*)$ ile gösterir ve (2.1.12) de $n \rightarrow \infty$ limitine geçerse.

$$e_m \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_0, f(x_0))$$

ile çok duyarlı olmasa da bu hata için bir üst sınır elde ederiz.

Teorem 1.1.3

N bir büzülme dönüşümü ve

$$\|N_n - N\| = \varepsilon_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

olmak üzere, S_n serisi $N(y_0 + S) = S$ ifadesinin çözümü olan S için

$$S_{n+1} = N_n(y_0 + S_n), S_0 = 0$$

şeklindeki yakınsaklığı verir [10].

Teorem 1.1.4

H bir Hilbert uzay, N H 'da bir operatör ve y 'de

$$y - Ny = f$$

denkleminin bir çözümü olsun.

$$\begin{cases} y_0 = f \\ y_{n+1} = A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

ifadesinden oluşan $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ serisi; $\exists 0 \leq \alpha \leq 1, \|y_{k+1}\| \leq \alpha \|y_k\|, \forall k \in N \cup \{0\}$ şartları altında y 'ye yakınsar [11].

İspat:

Burada

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_1 &= y_1, \\ S_2 &= y_1 + y_2, \\ &\vdots \\ S_n &= y_1 + y_2 + \dots + y_n. \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\{S_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Öncelikle bu $\{S_n\}$ dizisinin H hilbert uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için;

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|y_{n+1}\| \leq \alpha \|y_n\| \leq \alpha^2 \|y_{n-1}\| \leq \dots \leq \alpha^{n+1} \|y_0\|$$

olduğunu düşünelim. $\forall n, m \in N$ için $n \geq m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\|, \\ &\leq \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \dots + \|S_{m+1} - S_m\|, \\ &\leq \alpha^n \|y_0\| + \alpha^{n-1} \|y_0\| + \dots + \alpha^{m+1} \|y_0\|, \\ &\leq (\alpha^{m+1} + \alpha^{m+2} + \dots) \|y_0\| = \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} \|y_0\| \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Bu ifadeden $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0$ olduğu görülür. Böylece $\{S_n\}$ dizisi H hilbert uzayında bir Cauchy dizisidir ve bu da gösterir ki

$$\exists S, S \in H, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, S = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

dizisidir. Ayrıca $y - Ny = f$ denkleminin çözümü Teorem 1.1.3'de ki

$$S = N(y_0 + S)$$

denkleminin çözümüne eşittir ve bu ifadede N sürekli bir operatör olmak üzere

$$N(y_0 + S) = N(\lim_{n \rightarrow \infty} (y_0 + S)) = \lim_{n \rightarrow \infty} N(y_0 + S) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = S$$

olur. Yani S' 'de $y - Ny = f$ denkleminin çözümüdür.

Teorem 1.1.5

H bir hilbert uzay olmak üzere, $(.,.)$ H üzerinde bir iç çarpım ve $\|.\|$ ifadeside H üzerinde bir norm tanımlasın. H hilbert uzayı $H = L^2((\alpha, \beta) \times [0, T])$ biçimindedir. u fonksiyonunun tanım aralığı ise

$$\int_{(\alpha, \beta) \times [0, T]} u^2(x, s) ds d\tau < +\infty, u : (\alpha, \beta) \times [0, T] \rightarrow R$$

şeklinde tanımlansın ve

$$(u, v)_H = \int_{(\alpha, \beta) \times [0, T]} u(x, s)v(x, s) ds d\tau$$

dur. u ' nun norm ile ilişkisinde

$$\|u\|_H^2 = \int_{(\alpha, \beta) \times [0, T]} u^2(x, s) ds d\tau$$

formundadır.

Ele alınan problem operatör formda

$$Lu + Ru + Nu = 0$$

şeklinde yazılır. Burada $L \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ olarak tanımlanan diferensiyel operatör, R lineer operatörün kalan kısmı, N de non-lineer operatördür.

Bir T operatörü

$$Tu = -Ru - Nu$$

olarak tanımlansın. Eğer aşağıdaki iki hipotez metodun uygulandığı denklem için sağlanırsa Adomian ayrışım metodu yakınsaktır.

$$H_1) \forall u, v \in H \quad (T(u) - T(v), u - v) \geq k \|u - v\|^2; k > 0,$$

$H_2) M > 0$ herhangi bir sayı için $C(M) > 0$ sabiti mevcuttur öyleki; $u, v \in H$ ve $\|u\| \leq M, \|v\| \leq M$ olmak üzere

$$\forall w \in H \quad \text{ için } (T(u) - T(v), w) \leq C(M) \|u - v\| \|w\|$$

yazılabilir.

Cherruault [10] ve Mavoungou [12] yukarıdaki H_1 ve H_2 hipotezleri ile Sibony nin [13] geliştirmiş olduğu metodu kullanarak yakınsaklığı ispatlamışlardır [14]. İlerki bölümlerde GKdV'nin yakınsaklığı bu hipotezler yardımıyla gösterilecektir.

2. BÖLÜM

2.1 ADOMIAN AYRIŞIM YÖNTEMİ

Adomian ayrışım metodu Amerikalı bilim adamı G. Adomian (1923-1996) tarafından tasarlanmıştır. Metod seri biçiminde bir çözüm elde edebilmek için yapılan çalışmalara dayanır. Mühendislik, fizik, biyoloji gibi bir çok farklı alanda yapılan bilimsel çalışmalarda kullanılan bir yöntemdir [15].

Yapılan çalışmalarla; Adomian ayrışım metodu kullanılarak, geleneksel yöntemlere göre yaklaşık çözümleri oluşturan serilerin elemanlarının hesaplanmasında daha hassas ve daha hızlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrışım metodu yalnızca başlangıç şartının kullanılmasıyla çözümün elde edilmesini sağlar. Metod minimum hesaplama ve yüksek doğruluklu, etkili bir açık çözümü üretir ve bu yönüyle bir çok bilim adamı tarafından da güvenilir bir yöntem olarak görülür. Ayrışım metodu; lineer, lineer olmayan, homojen veya homojen olmayan gibi değişik tipdeki diferansiyel denklemler için kullanılabilir. Yöntemin geleneksel yöntemlere göre bir çok avantajı vardır. Bu metodla lineer ve lineer olmayan problemlerde doğrusallaştırmalara ve aralıklara ihtiyaç duyulmaksızın yakınsak çözümü elde edebiliriz. Bazı durumlarda çözüm elemanlarının tam değerlerini bulmak mümkün olmayabilir, bu tür durumlarda sayısal olarak yaklaşık elemanlar alınır. Bu düşünce sayısal olarak Adomian ayrışım metodunun uygulanmasını amaçlar. Yine Adomian yönteminde önemli bir yeri olan birbirini götüren terimler (noise terms) olgusu, yalnızca iki iterasyon kullanılarak çözümün bulunmasını sağlar. Yalnızca homojen olmayan problemlerde oluşan noise terimler, çözümün çeşitli elemanlarında oluşabilecek karşıt durumlu özdeş terimler olarak tanımlanır.

Ayrışım yönteminin bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir [4]-[33]. Genel olarak bu metodu verecek olursak; kabul edelim ki F , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$F(u) = g(x) \quad (2.1.1)$$

denklemini ele alalım. (2.1.1) denkleminde L ; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, R ; lineer operatörün kalan kısmını ve N ; ise lineer olmayan terimi göstermek üzere denklemini;

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (2.1.2)$$

şeklinde ayrıştırarak yazalım. L bir lineer operatör ve tersi de mevcut olsun. (2.1.2) eşitliği;

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (2.1.3)$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.1.4)$$

elde edilir.

L 'nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (2.1.4) eşitliğinde gerekli işlemleri yaptıktan sonra;

$$u = u(0) + tu'(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.1.5)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.1.5) ile elde edilen eşitlikteki Nu lineer olmayan terim $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (2.1.5) eşitliğindeki u ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen başlangıç değeri sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere $u_0 = a + bt - L^{-1}g$ ile bulunur daha sonra u_0 terimi kullanılarak $u_1, u_2, u_3, \dots$ terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.1.6)$$

yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (2.1.5) eşitliği tekrar yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.1.7)$$

genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (2.1.7) eşitliği açık şekilde;

$$\begin{cases} u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 'a, A_1 sadece u_0 ve u_1 'e, A_2 ise u_0, u_1, u_2 'ye

bağlı ve benzer şekilde (2.1. 8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0), \\
A_1 &= u_1 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0), \\
A_2 &= u_2 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!} \right) \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0), \\
A_3 &= u_3 \left(\frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left(\frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!} \right) \left(\frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0), \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\Phi \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n > 0,
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

ile verilmektedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.1.9) genel formülünün kullanılması, (2.1.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x, t)$ kapalı çözüm fonksiyonunun bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için;

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x, t) \quad n \geq 0 \tag{2.1.10}$$

olmak üzere;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = u(x, t) \tag{2.1.11}$$

ifadesini (2.1.8) indirgeme bağıntısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir. Buna ilaveten (2.1.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genel olarak fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde bir çok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı teorik olarak Y.Cherruault ve arkadaşları tarafından incelenmiştir [10]-[16]. Yakınsaklığı ifade ederken sabit nokta teoreminden faydalanmışlardır.

2.2 ADOMİAN POLİNOMLARININ HESAPLANMASI

Wazwaz [34] tarafından lineer olmayan terimlerin Adomian polinomlarını hesaplamak için son derece kullanışlı bir algoritma geliştirdi. Bu algoritmanın kullanılmasıyla A_n Adomian polinomlarının hesaplanması aşağıdaki yöntemle verilir.

2.2.1 LİNEER OLMAYAN POLİNOMLAR

1. DURUM

Eğer $F(y) = y^2$ ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (2.2.1)$$

olmak üzere $F(y) = y^2$ lineer olmayan terimi (2.2.1)'de yerine yazılırsa;

$$F(y) = (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 \quad (2.2.2)$$

bulunur. Eşitiliğin sağ tarafı açılırsa;

$$F(y) = (y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 + \dots) \quad (2.2.3)$$

elde edilir. (2.2.3)'deki açılımda indis toplamaları aynı olan terimleri bir araya getirirsek;

$$\begin{aligned} F(y) = & y_0^2 + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0y_3 + 2y_1y_2 \\ & + 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2 + 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

olur. (2. 2.4)'den; $F(y) = y^2$ Adomian polinomları;

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2, \\ A_1 &= 2y_0y_1, \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2, \\ A_3 &= 2y_1y_2 + 2y_0y_3, \\ A_4 &= y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_0y_4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

formunda bulunur.

2. DURUM

Polinom tipinde verilen lineer olmayan terimler için $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere aşağıdaki genelleme yapılabilir;

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^n, \\ A_1 &= ny_0^{(n-1)}y_1, \\ A_2 &= \frac{1}{2}n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1^2 + ny_0^{(n-1)}y_2, \\ A_3 &= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)y_0^{(n-3)}y_1^3 + n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1y_2 + ny_0^{(n-1)}y_3, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

3. DURUM

Eğer $n \in \mathbb{Z}^-$ ise bu taktirde Adomian polinomları;

$$\begin{aligned}
A_0 &= -y_0^{-n}, \\
A_1 &= -ny_0^{-(n+1)}, \\
A_2 &= -\frac{1}{2}n(n-1)y_0^{-(n+2)}y_1^2 - ny_0^{-(n+1)}y_2, \\
A_3 &= -\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)y_0^{-(n+3)}y_1^3 - n(n-1)y_0^{-(n+2)}y_1y_2 - ny_0^{-(n+1)}y_3, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

formülüyle bulunur.

4. DURUM

Eğer n ondalıklı bir sayı ise bu taktirde Adomian polinomları;

$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0^n, \\
A_1 &= ny_0^{(n-1)}y_1, \\
A_2 &= ny_0^{(n-1)}y_2 + \frac{1}{2}n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1^2, \\
A_3 &= ny_0^{(n-1)}y_3 + n(n-1)y_0^{(n-2)}y_1y_2 + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)y_0^{(n-3)}y_1^3, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

olarak hesaplanır.

5. DURUM

Eğer lineer olmayan terim $F(y) = yy_x$ ise

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n \\
y_x &= \sum_{n=0}^{\infty} y_{n_x}
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

olmak üzere (2.2.9) ifadesi;

$$\begin{aligned}
F(y) &= (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots)_x \\
&= y_0y_{0x} + y_{0x}y_1 + y_0y_{1x} + y_{0x}y_2 + y_{1x}y_1 + y_{2x}y_0 + y_{0x}y_3 + y_{1x}y_2 \\
&\quad + y_{2x}y_1 + y_{3x}y_0 + y_{0x}y_4 + y_{0y_{4x}} + y_{1x}y_3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

ve indis toplamaları aynı olan ifadeler gruplandırılırsa;

$$\begin{aligned}
A_0 &= y_0 y_{0x}, \\
A_1 &= y_{0x} y_1 + y_0 y_{1x}, \\
A_2 &= y_{0x} y_2 + y_{1x} y_1 + y_{2x} y_0, \\
A_3 &= y_{0x} y_3 + y_{1x} y_2 + y_{2x} y_1 + y_{3x} y_0, \\
A_4 &= y_{0x} y_4 + y_{1x} y_3 + y_{2x} y_2 + y_{3x} y_1, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

bulunur.

2.2.2 TRİGONOMETRİK LİNEER OLMAYANLIK

1. DURUM

$F(y) = \sin y$ ise o zaman ilk olarak $A_0 = F(y_0)$ ifadesini diğer terimlerden ayırmalıyız. Çünkü diğer terimler y_0 'a bağlı olarak hesaplanmaktadır.

$$F(y) = \sin y$$

lineer olmayan terimi (2.2.11)'de yerine yazılırsa;

$$F(y) = \sin[y_0 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)] \tag{2.2.12}$$

bulunur ve bu ifade de $\theta = y_0$, $\phi = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$ alınır,

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \tag{2.2.13}$$

ifadesinden;

$$F(y) = \sin y_0 \cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \cos y_0 \sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \tag{2.2.14}$$

elde edilir. Burada $\cos(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ve $\sin(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)$ ifadeleri Taylor serisine açılırsa;

$$\begin{aligned}
F(y) &= \sin y_0 \left(1 - \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 + \frac{1}{4!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^4 - \dots \right) \\
&\quad + \cos y_0 \left((y_1 + y_2 + y_3 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^3 + \dots \right)
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

ve böylece;

$$\begin{aligned}
F(y) = & \sin y_0 \left(1 - \frac{1}{2!}(y_1^2 + 2y_1y_2 + \dots) + \frac{1}{4!}(y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + \dots) - \dots \right) \\
& + \cos y_0 \left((y_1 + y_2 + y_3 + \dots) - \frac{1}{3!}(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + \dots) + \dots \right)
\end{aligned} \quad (2.2.16)$$

bulunur. (2.2.16) ifadesi düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
A_0 &= \sin y_0, \\
A_1 &= y_1 \cos y_0, \\
A_2 &= y_2 \cos y_0 - \frac{1}{2!}y_1^2 \sin y_0, \\
A_3 &= y_3 \cos y_0 - y_1y_2 \sin y_0 - \frac{1}{3!}y_1^3 \cos y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (2.2.17)$$

olur.

2. DURUM

Eğer $F(y) = \cos y$ ise yukarıda yapılan işlemlerin benzeri lineer olmayan terim olan $\cos y$ için uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
A_0 &= \cos y_0, \\
A_1 &= -y_1 \sin y_0, \\
A_2 &= -y_2 \sin y_0 - \frac{1}{2!}y_1^2 \cos y_0, \\
A_3 &= -y_3 \sin y_0 - y_1y_2 \cos y_0 - \frac{1}{3!}y_1^3 \sin y_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \quad (2.2.18)$$

bulunur.

3. DURUM

Eğer $F(y) = \sinh y$ ve $F(y) = \cosh y$ şeklinde hiperbolik lineer olmayanlığa sahip ise aynı algoritma kullanılarak Adomian polinomları sırasıyla;

$$\begin{aligned} A_0 &= \sinh y_0, \\ A_1 &= y_1 \cosh y_0, \\ A_2 &= y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \sinh y_0, \\ A_3 &= y_3 \cosh y_0 + y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \cosh y_0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

ve

$$\begin{aligned} A_0 &= \cosh y_0, \\ A_1 &= y_1 \sinh y_0, \\ A_2 &= y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 \cosh y_0, \\ A_3 &= y_3 \sinh y_0 + y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^3 \sinh y_0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

formülleriyle elde edilir.

2.2.3 ÜSTEL LİNEER OLMAYANLIK

1. DURUM

Eğer $F(y) = e^y$ ise bu taktirde $F(y_0) = e^{y_0}$ teriminin diğer terimlerden ayrılması gerekir, ifade yerine yazılırsa;

$$F(y) = e^{(y_0+y_1+y_2+y_3+\dots)} \tag{2.2.21}$$

veya

$$F(y) = e^{y_0} e^{y_1+y_2+y_3+\dots} \tag{2.2.22}$$

elde edilir. Bu son ifadede, $e^{y_1+y_2+y_3+\dots}$ terimi Taylor serisine açılırsa;

$$\begin{aligned} F(y) &= e^{y_0} \left[1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \frac{1}{2!} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 + \dots \right] \\ &= e^{y_0} + y_1 e^{y_0} + \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{y_0} + \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{y_0} \\ &\quad + \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{y_0} + \dots \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned}
A_0 &= e^{y_0}, \\
A_1 &= y_1 e^{y_0}, \\
A_2 &= \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{y_0}, \\
A_3 &= \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{y_0}, \\
A_4 &= \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{y_0}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

elde edilir.

2. DURUM

Eğer $F(y) = e^{-y}$ ise bu taktirde Adomian polinomları;

$$\begin{aligned}
A_0 &= e^{-y_0}, \\
A_1 &= -y_1 e^{-y_0}, \\
A_2 &= \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{-y_0}, \\
A_3 &= \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{-y_0}, \\
A_4 &= \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{-y_0}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

şeklinde olur.

2.2.4 LOGARİTMİK LİNEER OLMAYANLIK

1. DURUM

Eğer $F(y) = \ln y$, $y > 0$ ise bu taktirde bu ifade (2.2.1)'de yerine yazılırsa ;

$$F(y) = \ln(y_0 + y_1 + y_2 + \dots) \tag{2.2.26}$$

bulunur.(2.2.26) ifadesi ise

$$F(y) = \ln \left[y_0 \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \right] \tag{2.2.27}$$

formunda yazılabilir.

$$\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta$$

olduğundan (2.2.27) ifadesi

$$F(y) = \ln y_0 + \ln \left(1 + \frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) \quad (2.2.28)$$

olur. (2.2.28)'de ikinci terim Taylor serisine açılırsa;

$$\begin{aligned} F(y) = & \ln y_0 + \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^2 \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{y_1}{y_0} + \frac{y_2}{y_0} + \dots \right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

elde edilir. (2.2.29)'da indis toplamaları aynı olan terimler gruplandırılırsa, $F(y) = \ln y$ için Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln y_0, \\ A_1 &= \frac{y_1}{y_0}, \\ A_2 &= \frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0^2}, \\ A_3 &= \frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{y_0^3}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

olur.

2. DURUM

Eğer $F(y) = \ln(1 + y)$, $-1 \leq y \leq 1$ ise o zaman Adomian polinomları

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln(1 + y_0), \\ A_1 &= \frac{y_1}{1 + y_0}, \\ A_2 &= \frac{y_2}{1 + y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1 + y_0)^2}, \\ A_3 &= \frac{y_3}{1 + y_0} - \frac{y_1 y_2}{(1 + y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1 + y_0)^3}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

şeklinde bulunur.

2.3 VARYASYONEL İTERASYON METODU

Varyasyonel metodu (VIM) ilk olarak Çinli matematikçi J. Huan He tarafından ortaya konulmuştur. Bu metod lineer ve lineer olmayan problemlerde analitik çözüme yakınsak yaklaşık çözümlerin hızlı bir şekilde elde edilmesinde kullanılır. Genel olarak literatürde bu tekniğin diğer tekniklere göre avantajı olarak, hesaplamalardaki sadeliği verilmektedir.

Bu yaklaşım; Blasius denklemi [35], Helmholtz denklemi [36], Burger's denklemi [37], coupled Burgers denklemi [37] gibi çeşitli denklemlere uygulanmıştır.

Sıradan veya kısmi diferansiyel denklemlerin bu yöntemle çözülmesi; varyasyonel teorisin de tanımlanmış Lagrange çarpanı adındaki bir integral çarpanının kullanılmasıyla oluşturulmuş bir indirgeme formülünden elde edilir. Bu indirgeme formülünü içeren ilave fonksiyon genellikle analitik çözümle yakın olan diferansiyel denklemin çözümünü göz önünde bulundurur. Özellikle son yıllarda bu metod lineer olmayan diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için pek çok yazar tarafından kullanılmıştır [38]-[48].

İkinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklemi kapalı formda

$$F(x, t, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}) = 0 \quad (2.3.1)$$

alalım. Burada x ve t bağımsız değişkenler ve u bilinmeyen fonksiyon olsun. Böylece başlangıç şartlarıyla verilmiş olan problemin çözümüyle ilgileniriz. Kısmi diferansiyel denkleme t 'ye bağlı bir düzeltme fonksiyonunu (başlangıçtaki değişkene dayalı ve lineer terimli bağımlı değişkenlerden türetilenlerden seçilmiş) aşağıdaki formda;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) F(x, \tau, u_n, (\hat{u}_n)_x, (u_n)_\tau, (u_n)_{\tau\tau}, (\hat{u}_n)_{xx}, (\hat{u}_n)_{x\tau}) d\tau \quad (2.3.2)$$

verebiliriz, burada $\hat{u}_n$ sınırlandırılmış varyasyondur. Bu durumda λ 'nın optimum değerini bulmak için $\delta u = 0$ sabitli (2.3.2) denklemi tarafından oluşan düzeltme fonksiyonunu elde ederiz. Böylece;

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) F(x, \tau, u_n, (\hat{u}_n)_x, (u_n)_\tau, (u_n)_{\tau\tau}, (\hat{u}_n)_{xx}, (\hat{u}_n)_{x\tau}) d\tau = 0 \quad (2.3.3)$$

olur. u 'dan λ değeri türetildikten sonra sabit şartlarla (2.3.3) denklemini elde ederiz. Böylece Lagrange çarpanı tanımlanmış olur ve diferansiyel denklemin çözümü $n \geq 0$ için u_n fonksiyonuyla aşağıdaki şekilde tanımlanmış olur.

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) F(x, \tau, u_n, (u_n)_x, (u_n)_\tau, (u_n)_{\tau\tau}, (u_n)_{xx}, (u_n)_{x\tau}) d\tau \quad (2.3.4)$$

2.4 HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU

Homotopi pertürbasyon metodu (HPM) ilk olarak Çinli matematikçi J. Huan He tarafından tasarlanmıştır [49]. Bu metodun temel düşüncesi; $p \in [0, 1]$ aralığındaki bir parametre üzerinde kurulmuştur. HPM en dikkat çeken özelliklerinden biri uygun bir çözüm elde etmek için yalnızca birkaç pertürbasyon teriminin yeterli oluşudur. Ayrıca yöntem doğruluk derecesi yüksek, minimum hesaplamalarla yaklaşık çözümleri verdiğinden daha kullanışlı bir yöntem olarak gösterilir.

HPM ile elde edilen çözümlerin Adomian ayrışım metodu ile bulunan çözümlere benzer olduğu görülür. HPM ve ADM arasındaki en önemli farklardan biri HPM metodu Adomian polinomlarından dolayı oluşan karışıklıkların giderilmesinde daha etkilidir. HPM nümerik metodlarla karşılaştırıldığında lineer olmayan problemler için doğruluğu daha yüksek çözümler verir ve çözümü verirken yüksek hesaplamalara ihtiyaç duyulmaz.

Metod güvenilirliği ve hesaplamaları azaltmasından dolayı geniş bir kullanım alanına sahiptir. Yöntem lineer ve lineer olmayan denklemlerin çoğuna yine lineer olmayan sınır değer problemlerine, lineer olmayan fractional kısmi diferensiyel denklemler v.b. denklemlere uygulanmıştır [50]-[52].

Bu yöntemin genel yapısını şöyle açıklayabiliriz;

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, n \in \Gamma \quad (2.4.1)$$

sınır şartlarıyla verilen

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \quad (2.4.2)$$

lineer olmayan diferensiyel denklemi düşünelim. A sıradan bir diferensiyel operatör, B bir sınır operatörü, $f(r)$ bir analitik fonksiyon, Γ 'da Ω alanının sınırıdır.

Genel olarak; A operatörü, L lineer bir operatör, N de lineer olmayan bir operatör olmak üzere iki bölüme ayrılabilir. Böylece (2.4.2) denklemi

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (2.4.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Homotopi tekniğiyle, $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ şeklindeki bir homotopi

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad (2.4.4)$$

veya

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.4.5)$$

şartlarıyla kurulabilir. Burada $p \in [0,1]$ aralığında tanımlı bir parametredir. Belirtilen şartlar altında, u_0 (2.4.2) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır. (2.4.4) ve (2.4.5) denklemlerinden açık olarak görülebilmek ki;

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0, \quad (2.4.6)$$

ve

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0, \quad (2.4.7)$$

olur. $p = 0$ olduğu zaman (2.4.4) ve (2.4.5) denklemlerinin lineer olduğu, $p = 1$ olduğunda da lineer olmadıkları görülür. p 'yi sıfırdan başlatarak aldığımız değerlerle yapılan işlemlerle $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r) = 0$ olur. Sıradan bir problem olan $L(v) - L(u_0) = 0$, $A(v) - f(r) = 0$ probleminin deformasyonu ile elde edilir ve bu işlem yapıldıkça p 'nin değeri de sıfırdan itibaren arttırılır. Homotopi yönteminin temel düşüncesi, çalışma alanındaki farklı problemlerin çözümünde basit bir problemin sürekli olarak değiştirilmesidir. Ayrıca homotopi metodu p 'yi çok küçük bir parametre olarak kullanır.

Basit bir yaklaşımla (2.4.4) ün çözümünü p 'nin bir kuvvet serisi;

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots \quad (2.4.8)$$

formunda verebiliriz. Burada $p = 1$ için (2.4.2) denkleminin yaklaşık çözümünün sonuçları

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (2.4.9)$$

şeklinde yazılabilir. (2.4.8) serisi p 'den dolayı bütün çözüm alanında yakınsak olabilir.

Bu metodun diğer pertürbasyon tekniklerindeki sınırlamaları giderdiği görülmüştür. Başka bir deyişle diğer pertürbasyon tekniklerinden daha avantajlıdır.

3. BÖLÜM

3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ KdV DENKLEMİ

KdV denklemi olarak bilinen denklem, 1885 yılında D.J. Korteweg ve G.de Vries [53] adındaki iki bilim adamı tarafından sığ sulardaki dalga yayılımının gözlenmesiyle oluşturulmuştur. Bu denklem geçen yüzyıldan beri bilinmesine rağmen fiziksel özellikleri tam olarak elde edilememiştir. KdV denklemi 1844’de John Scott Russell tarafından gözlemlenmiş tek dalgalar (solitary wave) için en basit ve faydalı modellerden biridir. Martin Kruskal ve Norman Zabusky [54] adındaki iki bilim adamı, dalga hareketine benzer tekrarlamaları KdV denklemi ile oluşmuş bir sistemle gözlemlemişlerdir. Bu tek dalga’nın önemli özelliklerinden biri de birbirleriyle çarpışmaları ve bu çarpışma hareketi sonunda şekil ve biçimlerini korumalarıdır. Bu da tek dalgalar için KdV denkleminin elastik olduğunu gösterir. Dalganın doğal yapısından dolayı, Zabusky ve Kruskal bu tek dalga’yı “soliton” olarak adlandırmışlardır. Ayrıca Zabusky ve Kruskal [54], periyodik sınır şartlarıyla KdV denkleminin sayısal çözümünü gözlemlemişlerdir. Soliton kavramı ilk olarak Fermi, Pasta, Ulam [55] sistemindeki modellerle anlatılmıştır.

Lineer olmayan dalga yapısı hakkındaki bilgiler, modern matematiksel fiziğin gelişmesinde önemli kavramlardan biri olan soliton tanımının kullanıldığı fizik ve matematik arasındaki ortak çalışmalarla elde edilir. KdV denkleminin çözümünde solitonlar dağılma özelliği göstermezler. Klasik KdV denklemi lineer olmayan bazı fiziksel bölgelerde gözlemlenebilir. Başlangıç olarak Karpman [56] ve Bisognano [57] tarafından lineer olmayan nötr yüzeylerdeki dalga hareketi ve dairesel bir çemberdeki şiddetli ışınlar için KdV denkleminin yararlanılarak teorik modeller geliştirilmiştir. Bu denklem; katı, sıvı, gaz ve plazma; soğuk bir yüzeyde ki magnetikhidrodinamiklerde; lineer olmayan yaylarla birleştirilmiş eşit kütleli bir boyutlu kafeslerde ki boylamsal dalga yayılımlarında; Fermi probleminde; soğuk bir plazmadaki akustik iyon dalgalarında; tüpteki akışkanın yönünde ve elastiki çubuklardaki boylamsal dalgalarda ve bunlar gibi daha bir çok fiziksel uygulamaya sahiptir.

Geçen 50 yıl boyunca lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerinin yorumları için geniş bir araştırma sahası oluşturulmuştur. Lineer olmayan denklemler içerisinde en iyi bilinenlerden biride KdV denklemidir. Bununla birlikte matematik ve fiziğin çeşitli dallarında lineer olmayan KdV denklemi kullanılmaktadır.

Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi (GKdV)

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0$$

şeklinde verilebilir. Buradaki ikinci $u^n u_x$ ve üçüncü u_{xxx} terimleri sırasıyla iletim ve dağılma terimlerini gösterir. GKdV denkleminin solitonları lineer olmayan iletim ve dağılma terimleri arasındaki ilişkiyle oluşur. Dağılma etkisi dalgaformunun hızını oluştururken lineer olmayan iletim etkisinde dalgaformunun şeklini oluşturur. Bu iki terimin karşılıklı etkileşimlerinden sabit bir dalgaformu oluşur (solitary wave). Her bir soliton karşılıklı etkileşimlerine rağmen değişmez. Çünkü GKdV denklemi niceliğini koruyan sınırsız bir gruba sahiptir. Solitonların yapısı sistemin parametrelerinin zamana bağlı olduğunu garanti eder ve böylece solitonların stabil olduğu görülür. GKdV denkleminin en önemli durumlarından biri modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemdir. Bu denklem $n = 2$ için GKdV denkleminin türetilmesiyle oluşur ve bu denklem elektrodinamikler de, ince tabakalardaki elektromagnetik dalgalarda, yoğunluk katmanlarının iç kısımlarında, elastik araçlarda ve trafik akışları gibi bir çok fiziksel uygulama alanına sahiptir.

3.2 SOLİTON VE SOLİTON ETKİLEŞİMİNİN TARİHÇESİ

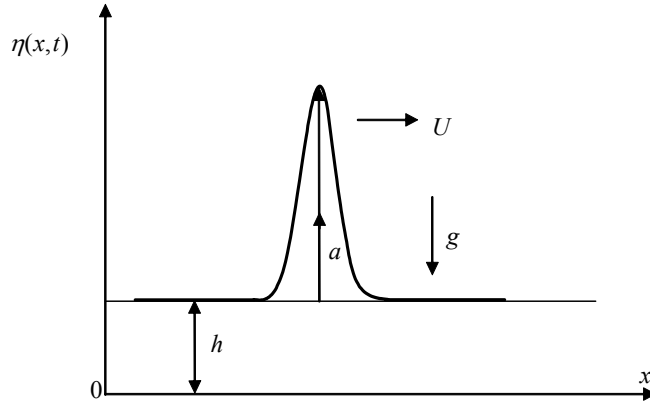
1834’de John Scott Rusell tek dalga (solitary wave)’yı, Edinburg-Glasgow kanalında, şeklini değiştirmeyen uzun bir su dalgası olarak gözlemlemiştir. Bu dalgayı “ büyük dalga kayması ” olarak adlandırmış ve gözlemlerini 1844’de “Dalgalar üzerine rapor (Report on Wave) ” makalesinde açıklamıştır. Bu makalede, tek dalganın periyodik bir dalga olmayıp şeklini değiştirmeyen, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş şekilde yayılan bir dalga olduğunu açıklamıştır. Bunu takiben, benzer dalgaların üretilmesiyle ilgili daha yoğun çalışmalar yapılmıştır. Bu deneysel bilgilere dayalı olarak Rusell, tek dalganın u hızı ve sonlu bir h derinliğindeki sıvının serbest yüzey üzerindeki maksimum a genliği arasında

$$u^2 = g(h + a) \quad (3.2.1)$$

formunda önemli bir bağıntı bulmuştur. Burada g yerçekimi ivmesidir. Su dalgalarıyla ilgili, Airy ve Stokes’in teorilerine zıt olan bu görüşler, yani Rusell’in tek dalga hakkındaki yorumu, tek dalganın varlığı ve bu dalganın bir sıvı ortamında şeklini değiştirmeden yayılmasıyla ilgili düşüncesiyle birlikte pek çok problem ortaya çıkmıştır. 1870’lere kadar bu fikirler pek kabul görmemesine rağmen, yalnız 1871’de J.Boussinesq [58] ve 1876’da Lord Rayleigh [59] tarafından benimsenmiştir. Bu bilim adamları da yapışkan olmayan ve sıkıştırılamayan sıvıların hareket denklemini (3.2.1) formunda belirtmişlerdir. Gerçek-tende onlar tek dalga profilini Şekil 3.2.1’deki, herhangi bir $a > 0$ için $z = \eta(x, t)$, $\beta^2 = 3a / \{4h^2(h + a)\}$ olmak üzere;

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \{ \beta(x - ut) \} \quad (3.2.2)$$

çözümünü bulmuşlardır.



Şekil 3.2.1. Tek dalga (Solitary wave).

Bu yazarlar sadece $a < h$ olmak üzere geçerli olan $\sec h^2$ çözümünü bulmalarına rağmen, (3.2.2)'yi çözüm kabul eden herhangi bir diferensiyel denklem bulamamışlardır. Bununla birlikte Boussinesq, $c = \sqrt{gh}$ sığ su dalgalarının hızı olmak üzere böylesi uzun dalgalar için;

$$\eta_{tt} = c^2 \left[\eta_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 \eta_{xxx} \right] \quad (3.2.3)$$

şeklinde lineer olmayan yayılma denklemini ortaya koymuştur. Bu denklem Boussinesq [58] denklemi olarak bilinir ve bunun çözümü;

$$\eta(x, t) = a \sec h^2 \left[(3a/h^3)^{1/2} (x \pm ut) \right] \quad (3.2.4)$$

şeklindedir. Bu çözüm ise hem pozitif hem de negatif yönde hareket eden dalgayı gösterir.

Bu çalışmadan 60 yıl sonra, 1885'de D.J. Korteweg ve G.de. Vries [53] adındaki iki Hollandalı bilim adamı, Scott tarafından yapılan gözlemlerin bir açıklamasını veren matematiksel bir model ortaya koyarak, ρ yoğunluklu bir su yüzeyi üzerinde tek yöndeki dalgaların yayılışı için

$$\eta_t = \frac{c}{h} \left[\left(\varepsilon + \frac{3}{2} \eta \right) \eta_x + \frac{1}{2} \sigma \eta_{xxx} \right] \quad (3.2.5)$$

denklemini elde etmişlerdir. Bu denklem KdV denklemi olarak bilinir.

1955'de Fermi, Pasta ve Ulam'ın [55], Los Alamos bilim laboratuvarındaki lineer olmayan kütle-yay sistemlerinin sayısal modelleri üzerine raporlarıyla KdV denkleminin tek dalgasıyla ilgili teori ve uygulamada ki gelişmeler devam etmiştir. 1914'de Debye iddia ettiki; "Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki lineer olmayan kuvvetler yüzündendir." Bu görüş Fermi, Pasta ve Ulam'ı düzgün başlangıç durumunun sonunda lineer olmayan terimler yüzünden bütün şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağıldığına inandırmıştır. Fakat onların çalışmaları şekiller arasında enerjinin aynı oranda dağılmadığını göstermiştir. Bütün enerji başlangıçta en düşük seviyede olmasına rağmen, değişik düşük mertebeden şekiller arasında ileri ve geri hareketinden sonra yine en düşük seviyesine geri döner. Bu gerçek Fermi, Pasta ve Ulam'ın (FPU) tekrarlanan olayı olarak bilinir.

(FPU)'nın dikkate değer bu araştırması, Martin Kruskal ve Norman Zabusky'nin [54], tekrarlamamanın nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan kütle-yay sisteminin sürekli bir modelini geliştirmelerine neden olmuştur. Kruskal ve Zabusky Bölüm 3.1'de bahsedildiği gibi bu tek dalgaları solitonlar olarak adlandırmışlardır.

Daha sonra, Gardner ve diğer [60] ve Hirota [61]- [62] herhangi bir pozitif n tam sayısı için n -soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözüm-

lerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [63], Hammack ve Segur [64], Weidman ve Maxworthy [65] tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bunların bu buluşları son 30 yıl boyunca yaygın, teorik, deneysel ve işlemsel çalışmalara yol açmıştır. Şimdi benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup uygulamalı matematikte ve fizikte çeşitli branşlara ayrılmıştır. Bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metod geliştirilmiştir [66]-[67]. Son olarak aşağıdaki ifadeleri vermemiz uygun olacaktır. Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle ilişkilendirilebilir. KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü (solitary wave) genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca KdV denkleminde başka denklemler için tek dalga çözümü $\sec h^2$ fonksiyonu olmayabilir, fakat $\sec h$ veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir. Gerçekten de bazı lineer olmayan denklemler tek dalga çözümünü sahip olup solitonlara sahip olmazken, KdV denklemi gibi denk-

lemeler solitonlar olan tek dalgalara sahiptirler. Gerçekten soliton kavramı matematiksel fizikte yeni bir paradizim olarak şekil almıştır. Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin; lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS) [68]: plazma dalgalarını, lineer olmayan optik dalgalarını, NLS denklemi sarmal (envelope) solitonlara sahiptir. NLS denkleminin solitonları genliğe bağlı değildir. Fiziksel olarak, önceki çalışmalarda bu tür solitonlara düşük frekanslı solitonlar denirdi daha sonra Makhankov yaptığı çalışmalarda bu solitonların yüksek frekanslı solitonlar olduğunu söylemiştir [69]- [71]. Bir başka önemli model denklemi de Sine-Gordon denklemidir. Bu denklem de elementer parçacıkların birleştirilmesi teorisindeki lineer olmayan dalga hareketini, manyetik akıntıyı ve kristallerdeki bozukluğu tanımlamak için kullanılır. SG denklemi ise soliton, antisoliton (veya kinks, antikinks) ve aynı eksene göre simetrik solitonlara (breather solitonlara) sahiptir. Ayrıca bu solitonların hızı dalganın genliğine bağlı değildir.

3.3 GKdV DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNİN İRDELENMESİ

3.3.1 AYRIŞIM METODUNUN GKdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu kısımda 3.1 bölümünde tanımlanmış olan GKdV denkleminin

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.3.1)$$

verilen başlangıç şartları (Tablo 3.3.1.) altında 2. Bölümde bahsedilmiş olan Adomian ayrışım metodu yardımıyla sayısal çözümlerini bulup analitik çözümleri ile karşılaştıracğız. GKdV denkleminin ayrışım metodu yardımıyla çözümü Helal ve Mehanna [14] tarafından verilmiştir. Yaptıkları çalışmada başlangıç şartlı (3.3.1) denkleminin ayrışım metodu ve sonlu farklar metodu kullanarak elde ettikleri sayısal sonuçları karşılaştırmışlardır.

n	$u(x, 0)$
1	$\frac{c}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right),$
2	$\sqrt{c} \sec h(\sqrt{c} x),$
3	$\sqrt[3]{\frac{5c}{2}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{c} x \right),$
4	$\left(\frac{5c}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \sec h^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{c} x),$
5	$\left(\frac{7c}{2} \right)^{\frac{1}{5}} \sec h^{\frac{2}{5}} \left(\frac{5}{2} \sqrt{c} x \right),$

Tablo 3.3.1. Verilen her bir n değeri için kullanılacak başlangıç şartları.

(3.3.1) denkleminde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $L_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ olmak üzere bu denklem operatör formunda;

$$L_t u(x, t) + 6u^n(x, t)L_x u(x, t) + L_{xxx} u(x, t) = 0 \quad (3.3.2)$$

şeklinde yazılabilir. $u(x, t)$ çözüm fonksiyonunu bulmak için (3.3.2) denkleminin soldan L_t^{-1} operatörünü uygularsak;

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}[-6u^n(x, t)L_x u(x, t) - L_{xxx} u(x, t)] \quad (3.3.3)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ integral operatörünü göstermektedir. Ayrışım metodu ile çözümü

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.3.4)$$

formunda aradığımızdan bu ifadeyi (3.3.3) de yerine yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} \left[-6 \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t) \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right)_{xxx} \right] \quad (3.3.5)$$

bulunur. Burada indirgeme bağıntısını, $f(x)$ Tablo 3.3.1’de ki $u(x, 0)$ başlangıç şartı olmak üzere;

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= f(x), \\ u_{k+1}(x, t) &= L_t^{-1}(-6A_k - (u_k)_{xxx}), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

şeklinde elde ederiz. Bu bağıntıda A_k ,

$$A_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, \dots, u_n), \quad k \geq 0,$$

ifadesi Adomian polinomları olarak adlandırılır. Herhangi bir kısmi diferensiyel denklemde ortaya çıkacak lineer olmayan terim veya terimlerin durumuna göre Adomian polinomlarının nasıl hesaplanacağı 2. Bölümde geniş bir şekilde ifade edilmiştir. Burada lineer olmayan $A_k = u^n u_x$ fonksiyoneli ele alırsak A_n terimlerinin bir kaçı;

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^n u_{0x}, \\ A_1 &= n u_0^{n-1} u_{0x} u_1 + u_0^n u_{1x}, \\ A_2 &= n u_0^{n-1} u_1 u_{1x} + \frac{1}{2} n(n-1) u_{0x} u_0^{n-2} u_1^2 + n u_{0x} u_0^{n-1} u_2 + u_0^n u_{2x}, \\ A_3 &= \frac{1}{2} n(n-1) u_0^{n-2} u_{1x} u_1^2 + n(n-1) u_{0x} u_0^{n-2} u_1 u_2 + n u_0^{n-1} u_1 u_{2x} \\ &\quad + n u_0^{n-1} u_{1x} u_2 + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) u_{0x} u_0^{n-3} u_1^3 + n u_{0x} u_0^{n-1} u_3 \\ &\quad + u_0^n u_{3x}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

şeklinde dir. Diğer polinomlarda benzer şekilde türetilir. Buna göre verilen başlangıç şartlarıyla birlikte GKdV denkleminin ayrışım metodu kullanılarak;

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= f(x), \\ u_1(x, t) &= L_t^{-1}(-6A_0 - (u_0)_{xxx}), \\ u_2(x, t) &= L_t^{-1}(-6A_1 - (u_1)_{xxx}), \\ u_3(x, t) &= L_t^{-1}(-6A_2 - (u_2)_{xxx}), \\ u_4(x, t) &= L_t^{-1}(-6A_3 - (u_3)_{xxx}), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

terimleri bulunur ve 2. bölümde bahsedilen $u(x, t)$ kapalı çözüm fonksiyonlarına ait sayısal çözümlerin elde edilmesi (2.1.10) ve (2.1.11) yardımıyla ayrışım serisinin çözüm fonksiyonu

bulunur ve elde edilen ayrışım serisinin terimleri (3.3.8) ve (3.3.4) seri formunda yerine yazılırsa;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t) + \dots \quad (3.3.9)$$

ayrışım serisinin çözüm fonksiyonu elde edilmiş olur.

Bu kısımda ayrışım serisinin terimleri ne kadar çok hesaplanırsa, elde edilecek sayısal sonuç da o kadar hassas olacaktır.

Sayısal karşılaştırma yapabilmek için lineer olmayan GKdV denkleminin ayrışım seri fonksiyonları ile Tablo 3.3.2'de ki analitik çözümlerini göz önüne alacağız.

n	$u(x, t)$
1	$\frac{c}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right),$
2	$\sqrt{c} \sec h(\sqrt{c}(x - ct)),$
3	$\sqrt[3]{\frac{5c}{2}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{c}(x - ct) \right),$
4	$\left(\frac{5c}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \sec h^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{c}(x - ct)),$
5	$\left(\frac{7c}{2} \right)^{\frac{1}{5}} \sec h^{\frac{2}{5}} \left(\frac{5}{2} \sqrt{c}(x - ct) \right),$

Tablo 3.3.2. Verilen her bir n değerine karşılık gelen GKdV denkleminin analitik çözümleri.

Şimdi 1. Bölümde verilmiş olan Teorem 1.1.5'i GKdV denkleminde uygulayalım.

Teorem 3.3.1 (Yakınsaklığın Yeterli Şartı):

Başlangıç ve sınır koşulları göz önüne alınmayan GKdV (3.3.1) denkleminde $L \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ seçilirse Adomian ayrışım metodu bir özel çözüme yakınsar.

İspat:

Teoremi ispatlamak için yakınsaklığın (H_1) ve (H_2) şartlarının sağlandığını göstereceğiz. Bunun için önce $L(u)$ operatörünün (H_1) yakınsaklık hipotezinin sağlandığını göstereceğiz.

GKdV denkleminde

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial t}(u) = u_t, R(u) = u_{xxx} \text{ ve } N(u) = 6u^n u_x$$

olsun. Bu ifadelerden;

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial t}(u) = -T(u) = -N(u) - R(u) = -6u^n u_x - u_{xxx}$$

yazılabilir.

T yarısürekli bir operatör ve $u, v \in H$ için $k > 0$ bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned}
(T(u) - T(v), u - v) &\geq k \|u - v\|^2, \\
T(u) - T(v) &= \left(6u^n \frac{\partial u}{\partial x} - 6v^n \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) \\
&= \frac{6}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} (u^{n+1} - v^{n+1}) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u - v), \\
(T(u) - T(v), u - v) &= \left(\frac{6}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} (u^{n+1} - v^{n+1}), u - v\right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} (u - v), u - v\right),
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\delta_1, \delta_2 > 0$ reel sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} (u^{n+1} - v^{n+1}), u - v\right) &\leq \delta_1 \|u^{n+1} - v^{n+1}\| \times \|u - v\| \\
&\leq \delta_1 \|(u - v)(u^n + u^{n-1}v + u^{n-2}v^2 + \dots + v^n)\| \times \|u - v\| \\
&\leq \delta_1 \|u - v\| \times \|u^n + u^{n-1}v + u^{n-2}v^2 + \dots + v^n\| \times \|u - v\| \\
&\leq (n+1)\delta_1 M^n \|u - v\|^2, \\
-\left(\frac{\partial}{\partial x} (u^{n+1} - v^{n+1}), u - v\right) &\geq (n+1)\delta_1 M^n \|u - v\|^2,
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $\|u\| \leq M, \|v\| \leq M$ dir.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} (u - v), u - v\right) &\leq \delta_2 \|u - v\| \times \|u - v\| \\
&\leq \delta_2 \|u - v\|^2, \\
-\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} (u - v), u - v\right) &\geq \delta_2 \|u - v\|^2,
\end{aligned}$$

$$(T(u) - T(v), u - v) \geq \left(-6\frac{1}{n+1}(n+1)\delta_1 M^n \|u - v\|^2\right) - \delta_2 \|u - v\|^2 = k \|u - v\|^2$$

yazılabilir. Böylece $k = -6\delta_1 M^n - \delta_2$ olduğundan (H_1) hipotezi sağlanmış olur.

Şimdi (H_2) hipotezinin sağlandığını gösterelim. Bunun için $\|u\| \leq M, \|v\| \leq M$ olduğunda

$$\begin{aligned}
(T(u) - T(v), w) &= 6 \left(\frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x} (u^{n+1} - v^{n+1}), w\right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} (u - v), w\right) \\
&\leq 6 \frac{1}{(n+1)} (n+1) M^n \|u - v\| \|w\| + \|u - v\| \|w\| \\
&= (6M^n + 1) \|u - v\| \|w\| = C(M) \|u - v\| \|w\|,
\end{aligned}$$

bulunur burada $C(M) = 6M^n + 1$ dir. Teorem 1.1.5'in (H_1) ve (H_2) yakınsaklık hipotezleri sağlandığından GKdV denkleminde Adomian ayrışım metodu uygulandığında bir özel çözüme yakınsar.

1. DURUM

Şimdi $n = 1$ için Tablo 3.3.1’de ki başlangıç koşullarını kullanarak Adomian ayrışım metodunu GKdV denkleminde uygulayalım:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \frac{c}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right), \\ u_1(x, t) &= \frac{1}{2} c^{\frac{5}{2}} t \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right), \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{8} c^4 t^2 (-2 + \cosh(\sqrt{c}x) \sec h^4 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right), \\ u_3(x, t) &= \frac{1}{48} c^{\frac{11}{2}} t^3 \sec h^5 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \left(-11 \sinh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) + \sinh \left(\frac{3\sqrt{c}}{2} x \right) \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Bu elde edilen ayrışım serisinin terimlerini (3.3.4) seri formunda yerlerine yerleştirirsek;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

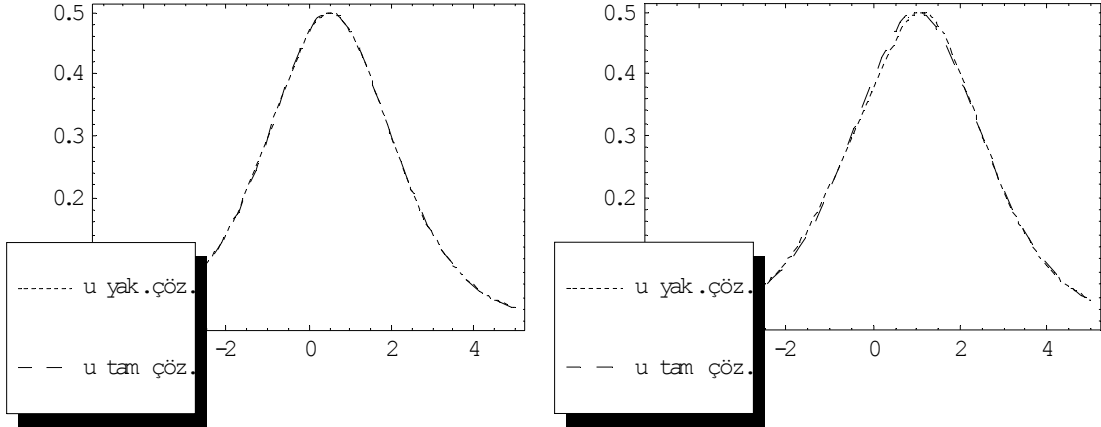
ifadesinden;

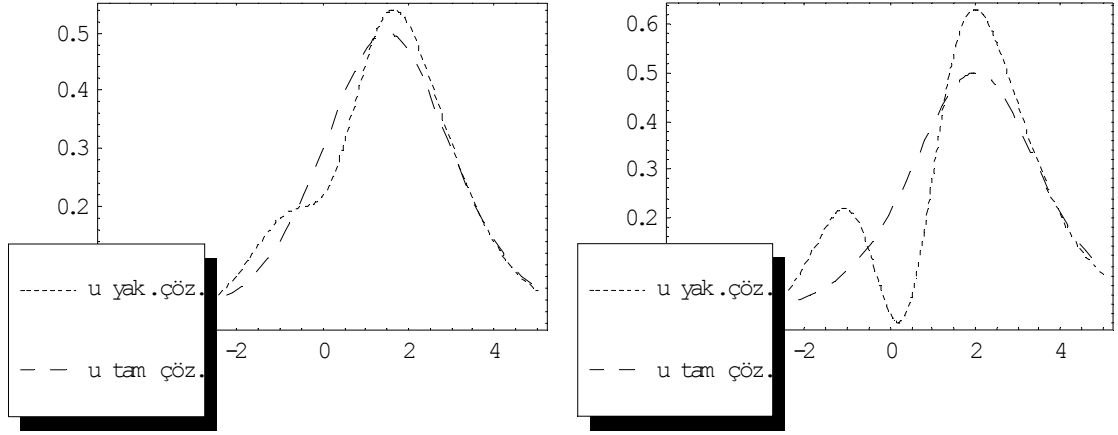
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{48} c \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^5 \left(-9(-2 + c^3 t^2 \cos \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) + 3(2 + c^3 t^2) \cosh \left(\frac{3\sqrt{c}}{2} x \right) \right. \\ &\quad \left. + 2c^{\frac{3}{2}} t(6 - 5c^3 t^2 + (6 + c^3 t^2) \cosh(\sqrt{c}x]) \sinh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \right) + \dots \end{aligned}$$

ayrışım serisinin çözüm fonksiyonu elde edilir. Adomian ayrışım metodu ile elde ettiğimiz yaklaşık değerler ile Tablo 3.3.2’de verilmiş olan analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

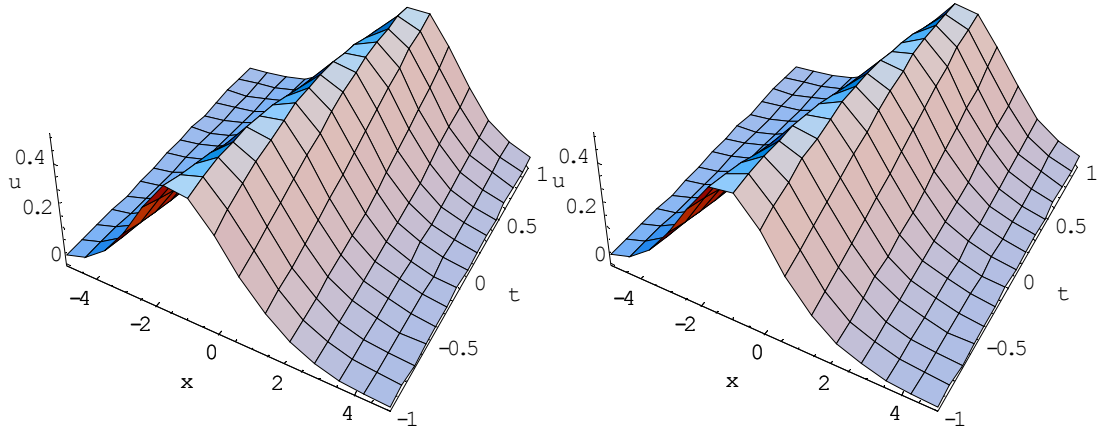
t/x	5	10	15	20	25
0.1	4.53239×10^{-8}	3.85455×10^{-10}	2.60101×10^{-12}	1.75256×10^{-14}	1.18087×10^{-16}
0.2	7.36168×10^{-7}	6.29422×10^{-9}	4.24774×10^{-11}	2.8619×10^{-13}	1.92834×10^{-15}
0.3	3.78303×10^{-6}	3.25292×10^{-8}	2.19518×10^{-10}	1.47911×10^{-12}	9.9662×10^{-15}
0.4	0.0000121353	1.04983×10^{-7}	7.08481×10^{-10}	4.77376×10^{-12}	3.21653×10^{-14}
0.5	0.0000300672	2.61799×10^{-7}	1.76683×10^{-9}	1.1905×10^{-11}	8.0215×10^{-14}
0.6	0.0000632637	5.54662×10^{-7}	3.74347×10^{-9}	2.52236×10^{-11}	1.69955×10^{-13}
0.7	0.000118905	1.05022×10^{-6}	7.08831×10^{-9}	4.77612×10^{-11}	3.21813×10^{-13}
0.8	0.000205745	1.83163×10^{-6}	1.2363×10^{-8}	8.33019×10^{-11}	5.61284×10^{-13}
0.9	0.000334189	3.00034×10^{-6}	2.02524×10^{-8}	1.36461×10^{-10}	9.19468×10^{-13}
1.0	0.000516351	4.67795×10^{-6}	3.1578×10^{-8}	2.12774×10^{-10}	1.43366×10^{-12}

Tablo 3.3.3. $n = 1$ durumunda; $c = 1$ için Ayrışım serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.1. $c = 1$ için $n = 1$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.2. $c = 1$ için $n = 1$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

2. DURUM

$n = 2$ için Tablo 3.3.1.'de verilen başlangıç şartları altında, GKdV denkleminde (3.3.1) Adomian ayrışım metodunu uygulayalım. Burada (3.3.6) indirgeme bağıntısı ve (3.3.7) Adomian polinomları göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sqrt{c} \sec h(\sqrt{cx}), \\ u_1(x, t) &= c^2 t \sec h(\sqrt{cx}) \tanh(\sqrt{cx}), \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{4} c^{\frac{7}{2}} t^2 (-3 + \cosh(2\sqrt{cx})) \sec h(\sqrt{cx})^3, \\ u_3(x, t) &= \frac{1}{24} c^5 t^3 \sec h(\sqrt{cx})^4 (-23 \sin(\sqrt{cx}) + \sinh(3\sqrt{cx})), \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Bu elde edilen ayrışım serisinin terimlerini (3.3.4) seri formunda yerlerine yerleştirirsek

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

ifadesinden

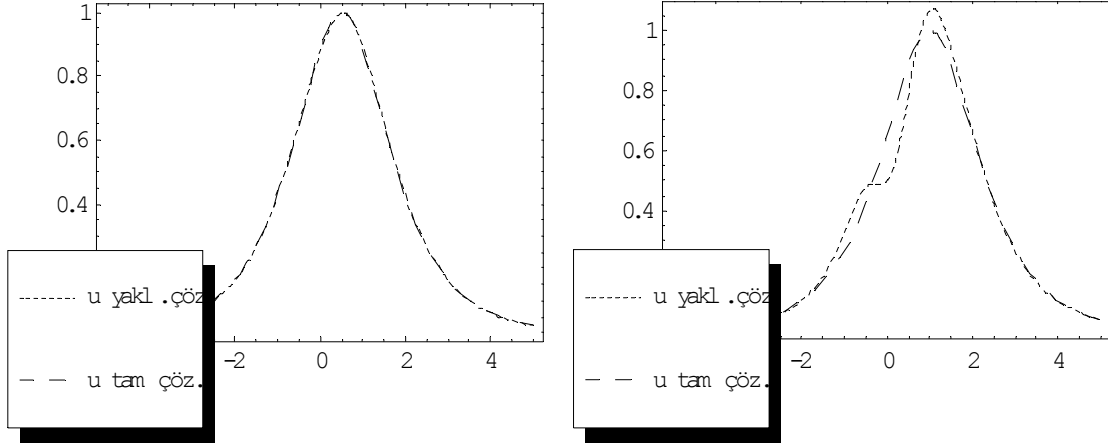
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{24} \sqrt{c} \sec h(\sqrt{cx}) (24 + 6c^3 t^2 (-3 + \cosh(2\sqrt{cx})) \sec h(\sqrt{cx})^2 + c^{\frac{9}{2}} t^3 \sec h(\sqrt{cx})^3 \\ &\quad (-23 \sin h(\sqrt{cx}) + \sinh(3\sqrt{cx}) + 24c^{\frac{3}{2}} t \tanh(\sqrt{cx})) + \dots \end{aligned}$$

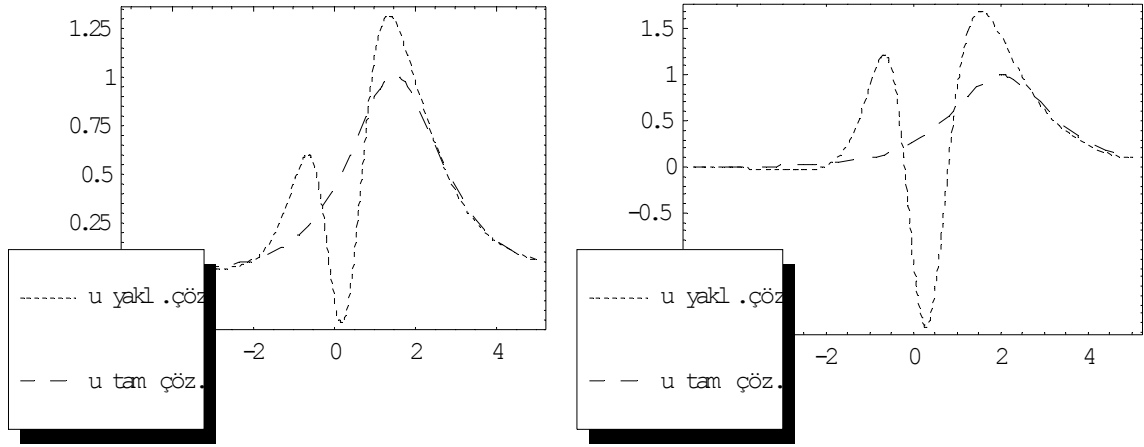
ayrışım serisinin çözüm fonksiyonu bulunur.

Adomian ayrışım metodu ile elde ettiğimiz yaklaşık değerler ve Tablo 3.3.2.'de verilmiş analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde elde edilir.

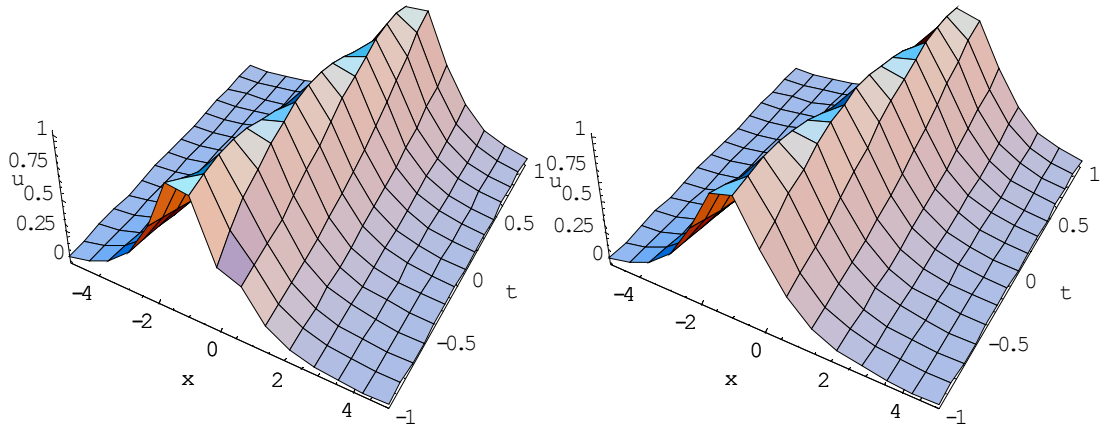
t/x	5	10	15	20	25
0.1	5.70721×10^{-8}	0.0000136661	9.20813×10^{-12}	1.75256×10^{-14}	1.18087×10^{-16}
0.2	9.3182×10^{-7}	0.0000151086	1.01803×10^{-11}	2.86192×10^{-13}	1.92834×10^{-15}
0.3	4.81501×10^{-6}	0.000016722	1.12672×10^{-10}	1.47912×10^{-12}	9.96623×10^{-15}
0.4	0.0000155369	0.0000185457	1.24961×10^{-10}	4.77376×10^{-12}	3.21653×10^{-14}
0.5	0.0000387376	0.0000206336	1.39028×10^{-9}	1.19051×10^{-11}	8.02152×10^{-14}
0.6	0.0000820542	0.0000230538	1.55335×10^{-9}	2.52236×10^{-11}	1.69955×10^{-13}
0.7	0.000155327	0.0000258905	1.74449×10^{-9}	4.77612×10^{-11}	3.21813×10^{-13}
0.8	0.000270824	0.000029246	1.97058×10^{-8}	8.33019×10^{-11}	5.61284×10^{-13}
0.9	0.000443493	0.0000332421	2.23984×10^{-8}	1.36461×10^{-10}	9.19468×10^{-13}
1.0	0.000691229	0.0000380225	2.56194×10^{-8}	2.12774×10^{-10}	1.43366×10^{-12}

Tablo 3.3.4. $n = 2$ durumunda; $c = 1$ için Ayrışım serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.3. $c = 1$ için $n = 2$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.4. $c = 1$ için $n = 2$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

3. DURUM

$n = 3$ için Tablo 3.3.1.'de verilen başlangıç şartları altında, GKdV denkleminde (3.3.1) Adomian ayrışım metodunu uygulayalım. Burada (3.3.6) indirgeme bağıntısı ve (3.3.7) Adomian polinomları göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \left(\frac{5c}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right), \\
u_1(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{6}} t (11 + \cosh(3\sqrt{cx})) \sec h^{\frac{11}{3}} \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right) \sinh \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right), \\
u_2(x, t) &= \frac{1}{64} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{10}{3}} t^2 (15380 - 15225 \cosh(3\sqrt{cx}) + 1356 \cosh(6\sqrt{cx}) \\
&\quad + \cosh(9\sqrt{cx})) \sec h^{\frac{20}{3}} \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right), \\
u_3(x, t) &= \frac{1}{1536} \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{29}{6}} t^3 \sec h^{\frac{29}{3}} \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right) - (249197706 \sinh \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right) \right. \\
&\quad + 79980828 \sinh \left(\frac{9\sqrt{c}}{2}x\right) - 6862140 \sinh \left(\frac{15\sqrt{c}}{2}x\right) \\
&\quad \left. + 87327 \sinh \left(\frac{21\sqrt{c}}{2}x\right) + \sinh \left(\frac{27\sqrt{c}}{2}x\right)\right)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Elde edilen ayrışım serisinin terimlerini (3.3.4) seri formunda yerlerine yazarsak,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

ifadesinden

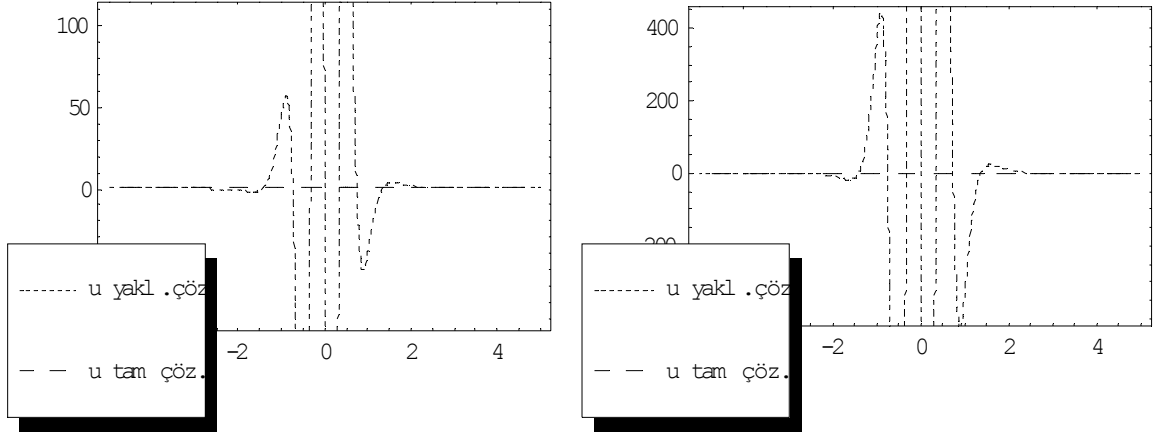
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{1536} \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right) (1536 + 24c^3 t^2 (15380 - 15225 \cosh(3\sqrt{cx}) \right. \right. \\
&\quad + 1356 \cosh(6\sqrt{cx}) + \cosh(9\sqrt{cx})) \sec h^6 \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right) \\
&\quad \left. + c^{\frac{9}{2}} t^3 \sec h^9 \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right) (-249197706 \sinh \left(\frac{3\sqrt{c}}{2}x\right) + \dots) \right)
\end{aligned}$$

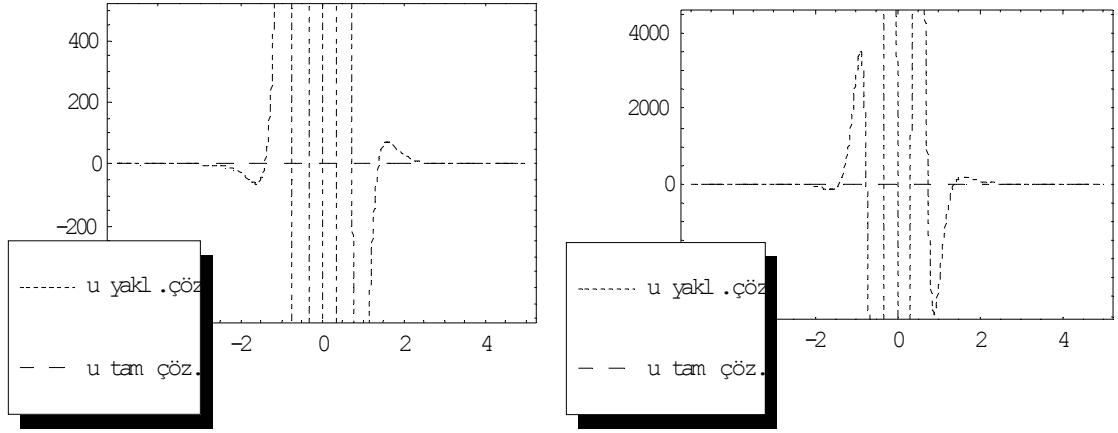
bulunur.

Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık değerler ve Tablo 3.3.2.'de ki analitik çözümler arasındaki fark alınarak aşağıdaki hata tablosu oluşturulabilir.

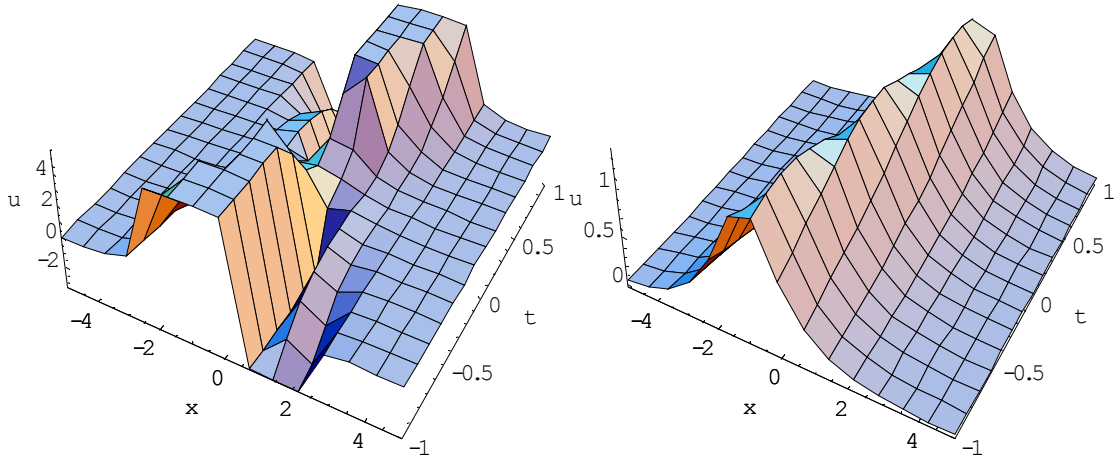
t/x	5	10	15	20	25
0.1	0.00202822	0.0000136661	9.20813×10^{-8}	6.20439×10^{-10}	4.18048×10^{-12}
0.2	0.0224236	0.000015189	1.01803×10^{-7}	6.85942×10^{-10}	4.62184×10^{-12}
0.3	0.00248176	0.000016722	1.12672×10^{-7}	7.59177×10^{-10}	5.1153×10^{-12}
0.4	0.00275243	0.0000185457	1.2496×10^{-7}	8.41975×10^{-10}	5.67318×10^{-12}
0.5	0.00306229	0.0000206336	1.39028×10^{-7}	9.36764×10^{-10}	6.31187×10^{-12}
0.6	0.00342147	0.0000230538	1.55335×10^{-7}	1.04664×10^{-9}	7.0522×10^{-12}
0.7	0.00384248	0.0000258905	1.74449×10^{-7}	1.17543×10^{-9}	7.91997×10^{-12}
0.8	0.00434046	0.000029246	1.97058×10^{-7}	1.32777×10^{-9}	8.94642×10^{-12}
0.9	0.00493351	0.0000332421	2.23984×10^{-7}	1.50919×10^{-9}	1.01688×10^{-11}
1.0	0.00564294	0.0000380225	2.5619×10^{-7}	1.72622×10^{-9}	1.16312×10^{-11}

Tablo 3.3.5. $n = 3$ durumunda; $c = 1$ için Ayrışım serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.5. $c = 1$ için $n = 3$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.6. $c = 1$ için $n = 3$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

4. DURUM

$n = 4$ için Tablo 3.3.1.'de verilen başlangıç şartları altında, GKdV denkleminde (3.3.1) Adomian ayrışım metodunu uygularsak.

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \left(\frac{5c}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sec h^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{cx}), \\ u_1(x, t) &= \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} t \sec h^{\frac{3}{2}}(2\sqrt{cx}) \sinh(2\sqrt{cx}), \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{13}{4}} t^2 (-5 + \cosh(4\sqrt{cx})) \sec h(2\sqrt{cx})^{\frac{5}{2}}, \\ u_3(x, t) &= \frac{1}{24} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{19}{4}} t^3 \sec h(2\sqrt{cx})^{\frac{7}{2}} (-59 \sinh(2\sqrt{cx}) + \sinh(6\sqrt{cx})), \\ &\vdots \end{aligned}$$

terimleri elde edilir. Elde edilen ayrışım serisinin terimlerini (3.3.4) seri formunda yerlerine yazarsak,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

ifadesinden;

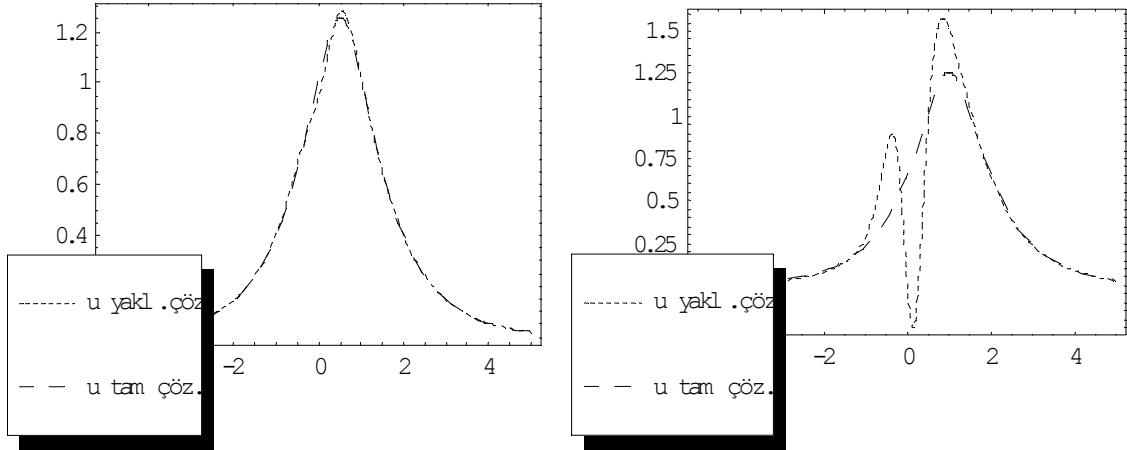
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{24} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{4}} \sec h(2\sqrt{cx})^{\frac{7}{2}} (-9(-2 + 3c^3 t^2) \cosh(2\sqrt{cx}) + 3(2 + c^3 t^2) \\ &\quad \cos(6\sqrt{cx}) + 2c^{\frac{3}{2}} t (6 - 29c^3 t^2 + (6 + c^3 t^2) \cos(4\sqrt{cx}) \sinh(2\sqrt{cx})) + \dots \end{aligned}$$

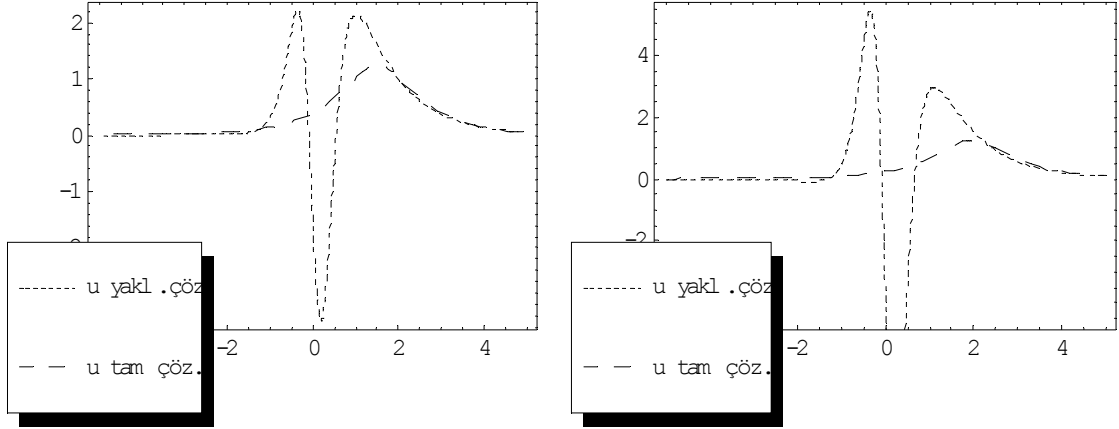
ayrışım serisinin çözüm fonksiyonu elde edillir.

$n = 4$ olması durumunda Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık değerler ve Tablo 3.3.2.'de ki analitik çözüm arasındaki fark alınarak aşağıdaki hata tablosu oluşturulabilir.

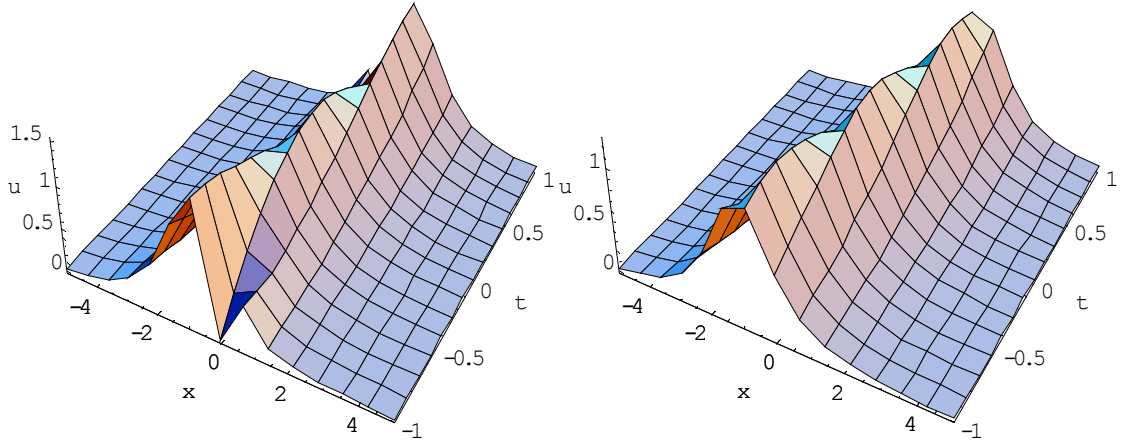
t/x	5	10	15	20	25
0.1	5.09401×10^{-8}	3.43232×10^{-10}	2.31268×10^{-12}	1.55827×10^{-14}	1.04996×10^{-16}
0.2	8.31844×10^{-7}	5.60493×10^{-9}	3.77657×10^{-11}	2.54463×10^{-13}	1.71456×10^{-15}
0.3	4.29921×10^{-6}	2.89679×10^{-8}	1.95184×10^{-10}	1.31514×10^{-12}	8.86134×10^{-15}
0.4	0.0000138755	9.34922×10^{-8}	6.29945×10^{-10}	4.24454×10^{-12}	2.85995×10^{-14}
0.5	0.0000346031	2.33154×10^{-7}	1.57098×10^{-9}	1.05852×10^{-11}	7.13224×10^{-14}
0.6	0.0000733151	4.93994×10^{-7}	3.3285×10^{-9}	2.24273×10^{-11}	1.51114×10^{-13}
0.7	0.000138823	9.35385×10^{-7}	6.30257×10^{-9}	4.24664×10^{-11}	2.86136×10^{-13}
0.8	0.0002422126	1.63144×10^{-6}	1.09925×10^{-8}	7.4067×10^{-11}	4.9906×10^{-13}
0.9	0.000396639	2.67254×10^{-6}	1.80074×10^{-8}	1.21333×10^{-10}	8.17536×10^{-13}
1.0	0.000618449	4.16709×10^{-6}	2.80776×10^{-8}	1.89185×10^{-10}	1.27472×10^{-12}

Tablo 3.3.6. $n = 4$ durumunda; $c = 1$ için Ayrışım serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.7 $c = 1$ için $n = 4$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.8 $c = 1$ için $n = 4$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

5. DURUM

(3.3.6) indirgeme bağıntısı ve $n = 5$ için (3.3.7) Adomian polinomları ve başlangıç koşulu göz önüne alınırsa ayrışım serisinin aşağıdaki terimleri

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \left(\frac{7c}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \sec h^{\frac{2}{5}} \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right), \\
u_1(x, t) &= \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{17}{10}} t \sec h^{\frac{7}{5}} \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right) \sinh \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right), \\
u_2(x, t) &= \frac{1}{4} \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{16}{5}} t^2 (-6 + \cosh(5\sqrt{cx})) \sec h^{\frac{12}{5}} \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right), \\
u_3(x, t) &= \frac{1}{24} \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{47}{10}} t^3 \sec h^{\frac{17}{5}} \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right) \left(-83 \sinh \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right) + \sinh \left(\frac{15\sqrt{c}}{2}x\right)\right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

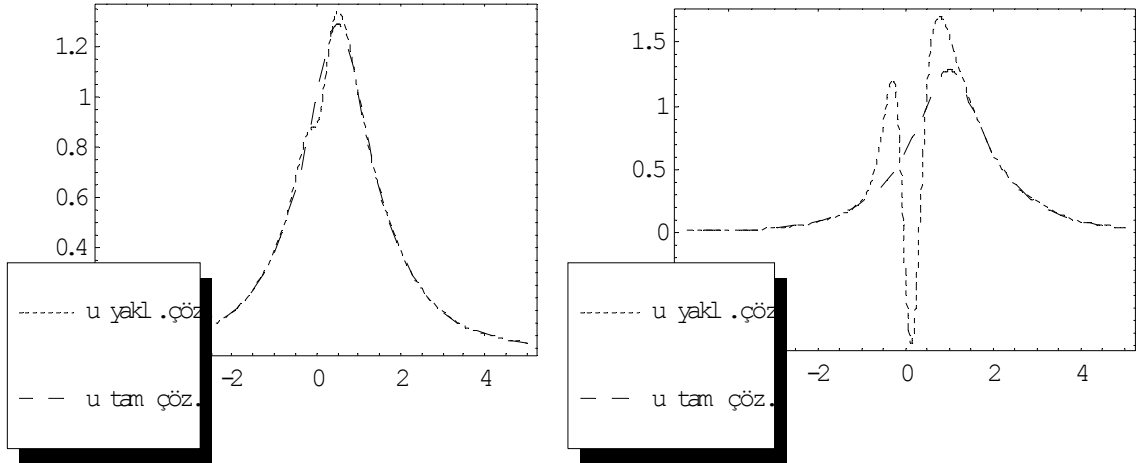
bulunur. Bu terimleri (3.3.4) seri formunda yerine yazarsak

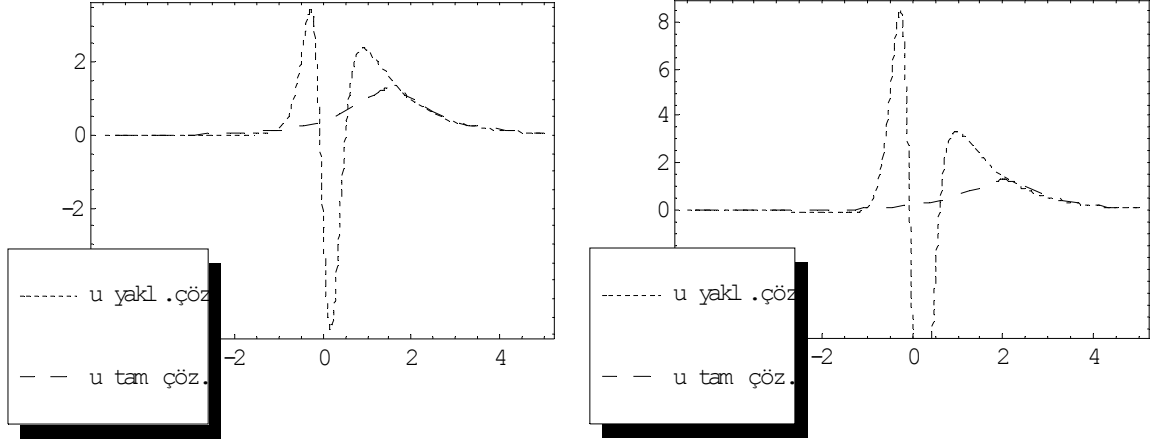
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{24} \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}} \sec h^{\frac{17}{5}} \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right) ((18 - 33c^3t^2) \cosh \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right) + 3(2 + c^3t^2) \\
&\quad \cos \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right) + 2c^{\frac{3}{2}}t(6 - 41c^3t^2 + (6 + c^3t^2) \cos(5\sqrt{cx}) \sinh \left(\frac{5\sqrt{c}}{2}x\right)) + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Adomian ayrışım metodu ile elde edilen yaklaşık değerler ve Tablo 3.3.2.'de ki analitik çözümler arasındaki fark alınarak aşağıdaki hata tablosu oluşturulabilir.

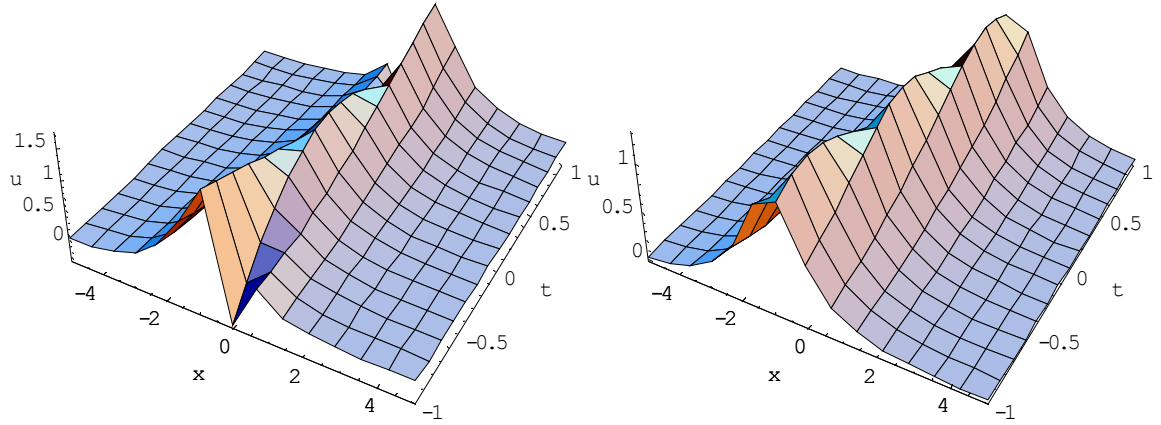
t/x	5	10	15	20	25
0.1	4.85608×10^{-8}	3.272×10^{-10}	2.20466×10^{-12}	1.48549×10^{-14}	1.00091×10^{-16}
0.2	7.92991×10^{-7}	5.34313×10^{-9}	3.60017×10^{-11}	2.42578×10^{-13}	1.63448×10^{-15}
0.3	4.0984×10^{-6}	2.76148×10^{-8}	1.86067×10^{-10}	1.25371×10^{-12}	8.44744×10^{-15}
0.4	0.0000132274	8.91253×10^{-8}	6.00521×10^{-10}	4.04628×10^{-12}	2.72636×10^{-14}
0.5	0.0000329869	2.22264×10^{-7}	1.4976×10^{-9}	1.00908×10^{-11}	6.7991×10^{-14}
0.6	0.0000698907	4.7092×10^{-7}	3.17303×10^{-9}	2.13797×10^{-11}	1.44056×10^{-13}
0.7	0.000132339	8.91694×10^{-7}	6.00819×10^{-9}	4.04828×10^{-11}	2.72771×10^{-13}
0.8	0.000230817	1.55523×10^{-6}	1.04791×10^{-8}	7.06075×10^{-11}	4.75749×10^{-13}
0.9	0.000378113	2.54771×10^{-6}	1.71663×10^{-8}	1.15666×10^{-10}	8.7935×10^{-13}
1.0	0.000589563	3.97245×10^{-6}	2.67661×10^{-8}	1.80349×10^{-10}	1.21518×10^{-12}

Tablo 3.3.7. $n = 5$ durumunda; $c = 1$ için Ayrışım serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.9. $c = 1$ için $n = 5$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.10. $c = 1$ için $n = 5$ durumunda, Ayrışım serisinin dört terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

3.3.2 VARYASYONEL İTERASYON METODUNUN GKdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu bölümde Ayrışım metodu ile çözülmüş olan GKdV denkleminin (3.3.1) daha önce 2. bölümde tanımlanmış olan Varyasyonel iterasyon metodu yardımıyla sayısal çözümlerini bulup analitik çözümleri ile karşılaştıracacağız.

(3.3.1) denklemi için düzeltme fonksiyonu

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} + 6u_n(x, \xi) \frac{\partial(\tilde{u}_n)(x, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial^3(\tilde{u}_n)(x, \xi)}{\partial x^3} \right) d\xi \quad (3.3.10)$$

şeklindedir. Sabit şartlarla üretilen

$$\lambda' = 0$$

$$1 + \lambda = 0$$

ifadesinden Lagrange çarpanı

$$\lambda = -1$$

olur. Lagrange çarpanının (3.3.10) denkleminde yerine yazılmasıyla oluşan iterasyon formülü;

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} + 6u_n(x, \xi) \frac{\partial(\tilde{u}_n)(x, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial^3(\tilde{u}_n)(x, \xi)}{\partial x^3} \right) d\xi, n \geq 0 \quad (3.3.11)$$

formundadır. Burada n 'nin değerleri için Tablo 3.3.1'de ki başlangıç şartları göz önünde tutularak

$$u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots \quad (3.3.12)$$

terimleri bulunur. Burada

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t), \quad (3.3.13)$$

ifadesi ile GKdV denkleminin varyasyonel yöntemiyle sayısal çözümlerini bulmuş oluruz.

1. DURUM

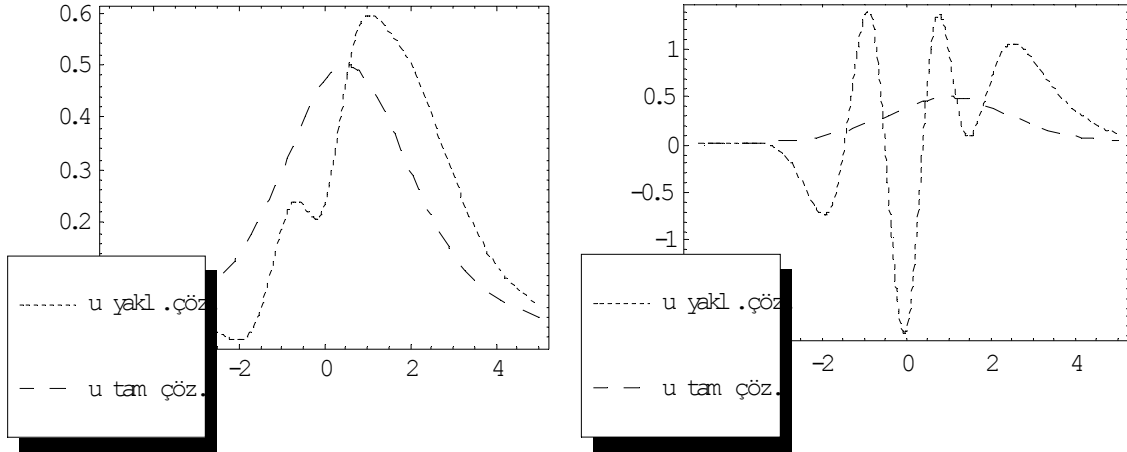
(3.3.1) GKdV denkleminde $n = 1$ alınmasıyla elde edilen denkleme (3.3.11) ile verilen iterasyon formülünü uygularsak aşağıdaki terimler elde edilmiş olur.

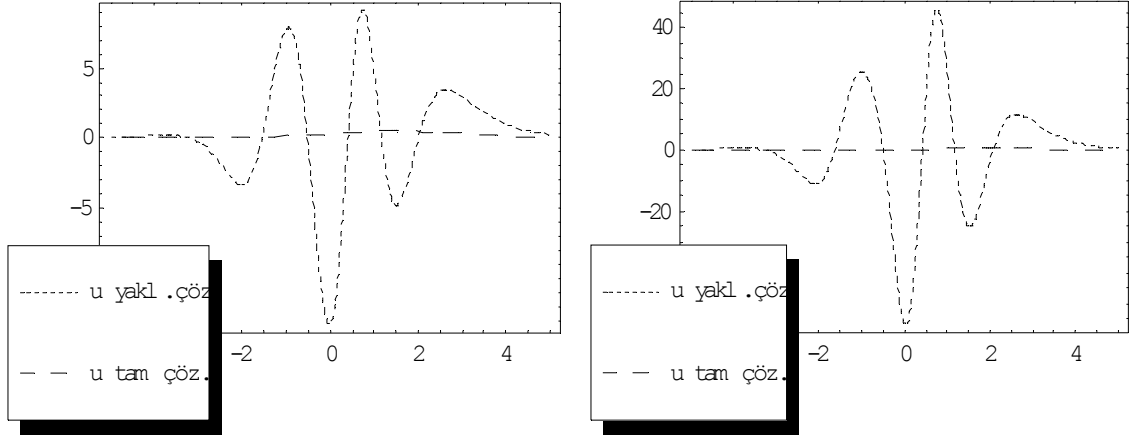
$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \frac{c}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right), \\
u_1(x, t) &= \frac{1}{2} c \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^2 + t \left(\frac{1}{2} c^{\frac{5}{2}} \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^4 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} c^{\frac{5}{2}} \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^2 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^3 \right), \\
u_2(x, t) &= u_1(x, t) - \frac{1}{4} c^4 t^2 \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^8 + \frac{1}{2} c^{\frac{5}{2}} t \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^4 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \\
&\quad - \frac{3}{4} c^{\frac{11}{2}} t^3 \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^{10} \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) + \frac{1}{2} c^{\frac{5}{2}} t \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^2 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^3 \\
&\quad + \frac{3}{4} c^4 t^2 \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^4 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^4 + \frac{9}{4} c^{\frac{11}{2}} t^3 \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^6 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^5 \\
&\quad + \frac{1}{2} c^4 t^2 \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^2 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^6 + \frac{3}{2} c^{\frac{11}{2}} t^3 \sec h \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^4 \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right)^7, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

terimleri bulunur ve (3.3.13) ifadesi ile de GKdV denkleminin varyasyonel yöntemiyle sayısal çözümlerini bulmuş oluruz.

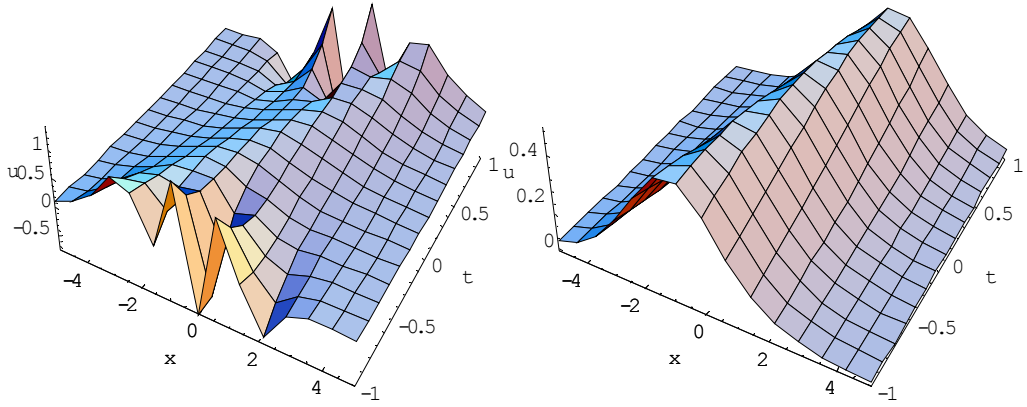
t/x	5	10	15	20	25
0.1	-0.00295688	-0.0000205013	-1.38163×10^{-7}	-9.30937×10^{-10}	-6.2726×10^{-12}
0.2	-0.00664515	-0.0000459908	-3.09938×10^{-7}	-2.08835×10^{-9}	-1.40712×10^{-11}
0.3	-0.11182	-0.0000769105	-5.18284×10^{-7}	-3.49218×10^{-9}	-2.35301×10^{-11}
0.4	-0.0167172	-0.000113693	-7.66086×10^{-7}	-5.16185×10^{-9}	-3.47803×10^{-11}
0.5	-0.0234121	-0.000156759	-1.05615×10^{-6}	-7.11625×10^{-9}	-4.79489×10^{-11}
0.6	-0.0314876	-0.00020652	-1.39117×10^{-6}	-9.37364×10^{-9}	-6.31591×10^{-11}
0.7	-0.0411807	-0.000263372	-1.77378×10^{-6}	-1.19516×10^{-8}	-8.05292×10^{-11}
0.8	-0.0527702	-0.000327697	-2.20646×10^{-6}	-1.48669×10^{-8}	-1.00173×10^{-10}
0.9	-0.0665743	-0.000399886	-2.69159×10^{-6}	-1.81357×10^{-8}	-1.22197×10^{-10}
1.0	-0.0829541	-0.000480208	-3.23141×10^{-6}	-2.17729×10^{-8}	-1.46704×10^{-10}

Tablo 3.3.8. $n = 1$ durumunda; $c = 1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.11. $c = 1$ için $n = 1$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.12. $c = 1$ için $n = 1$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

2. DURUM

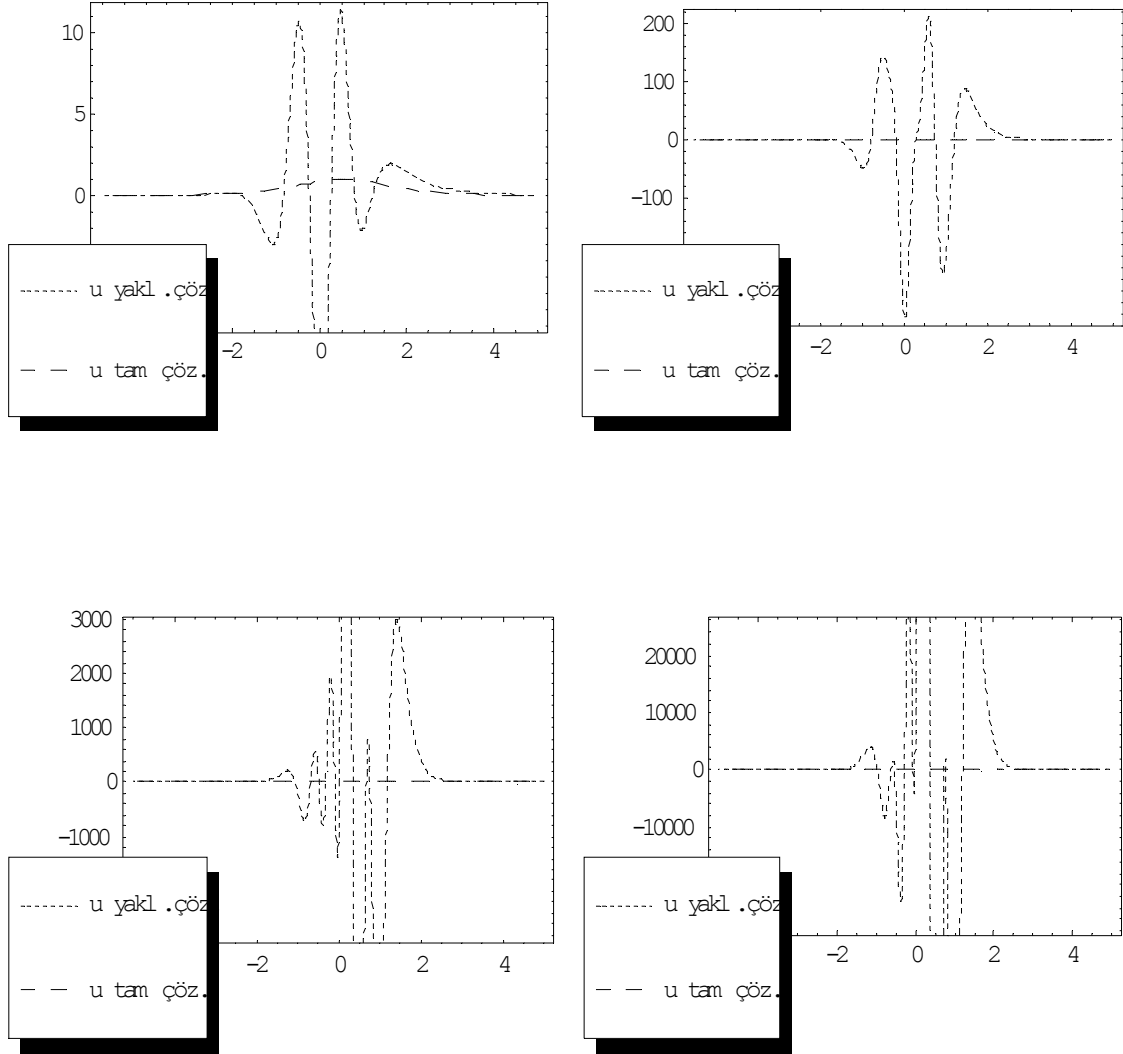
(3.3.1) GKdV denkleminde $n = 2$ alınmasıyla elde edilen denkleme (3.3.11) ile verilen iterasyon formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sqrt{c} \sec h(\sqrt{cx}), \\ u_1(x, t) &= \sqrt{c} \sec h(\sqrt{cx})(1 + c^{\frac{3}{2}} t \tanh(\sqrt{cx})), \\ u_2(x, t) &= \sqrt{c} \sec h(\sqrt{cx})(1 + c^{\frac{3}{2}} t \tanh(\sqrt{cx}) + c^{\frac{3}{2}} t \tanh(\sqrt{cx})^3 + c^3 t^2 \tanh(\sqrt{cx})^4 \\ &\quad + \sec h(\sqrt{cx})^2 (c^{\frac{3}{2}} t \tanh(\sqrt{cx}) + 18c^{\frac{9}{2}} t^3 \tanh(\sqrt{cx})^3 + 6c^6 t^4 \tanh(\sqrt{cx})^4)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

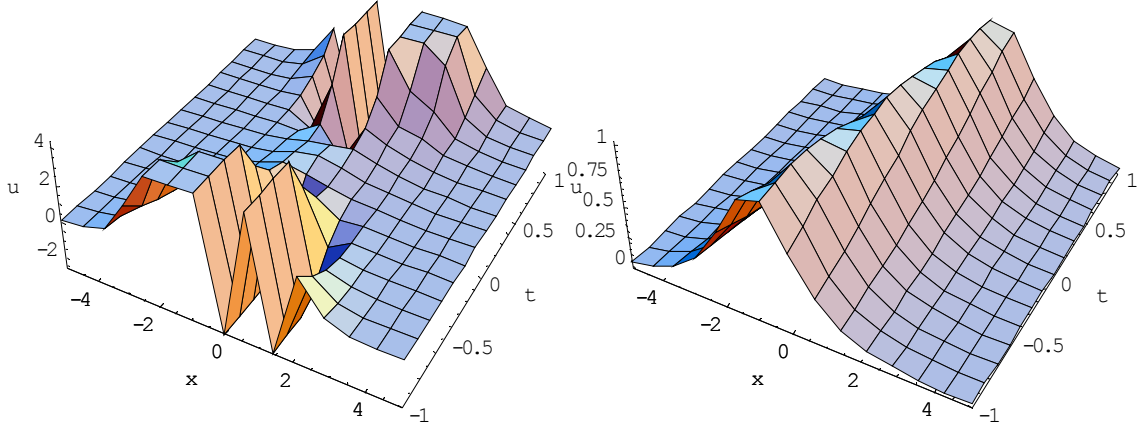
bulunur. Burada varyasyonel yöntemiyle bulmuş olduğumuz yaklaşık çözümler ve Tablo 3.3.2.'de ki analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde elde edilir.

t/x	5	10	15	20	25
0.1	-0.00304302	-0.0000205052	-1.38163×10^{-7}	-9.30937×10^{-10}	-6.2726×10^{-12}
0.2	-0.0682911	-0.000045999	-3.09938×10^{-7}	-2.08835×10^{-9}	-1.40712×10^{-11}
0.3	-0.0114305	-0.0000769203	-5.18285×10^{-7}	-3.49218×10^{-9}	-2.35301×10^{-11}
0.4	-0.0169231	-0.000113697	-7.66087×10^{-7}	-5.16185×10^{-9}	-3.47803×10^{-11}
0.5	-0.0233871	-0.000156746	-1.05615×10^{-6}	-7.11625×10^{-9}	-4.79489×10^{-11}
0.6	-0.0309077	-0.000206468	-1.39117×10^{-6}	-9.37364×10^{-9}	-6.31591×10^{-11}
0.7	-0.0395764	-0.000263251	-1.77377×10^{-6}	-1.19516×10^{-8}	-8.05292×10^{-11}
0.8	-0.0494918	-0.000327466	-2.20645×10^{-6}	-1.48669×10^{-8}	-1.00173×10^{-10}
0.9	-0.0607604	-0.000399465	-2.69157×10^{-6}	-1.81357×10^{-8}	-1.22197×10^{-10}
1.0	-0.0734985	-0.00047958	-3.23138×10^{-6}	-2.17729×10^{-8}	-1.46704×10^{-10}

Tablo 3.3.9. $n = 2$ durumunda; $c = 1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.



Şekil 3.3.13. $c = 1$ için $n = 2$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.14. $c = 1$ için $n = 2$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

3. DURUM

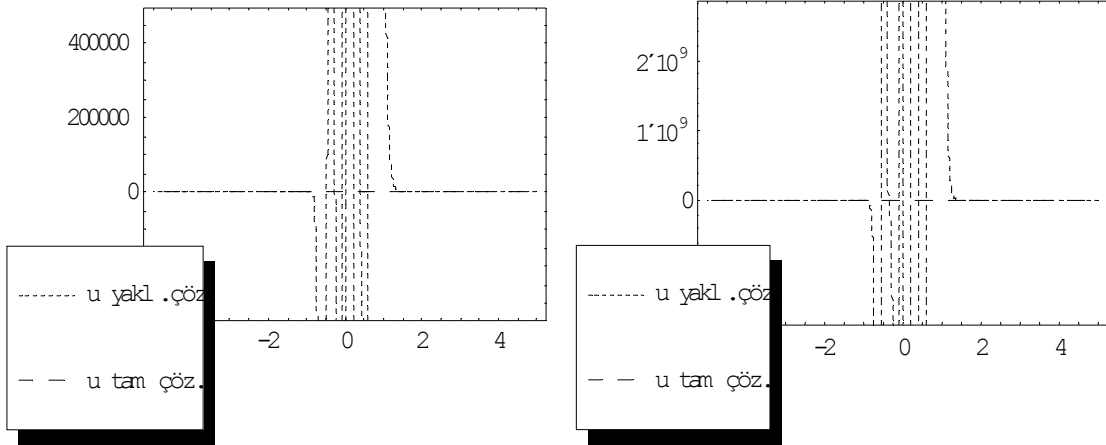
(3.3.1) GKdV denkleminde $n = 3$ alınmasıyla elde edilen denkleme (3.3.11) ile verilen iterasyon formülünü uygularsak

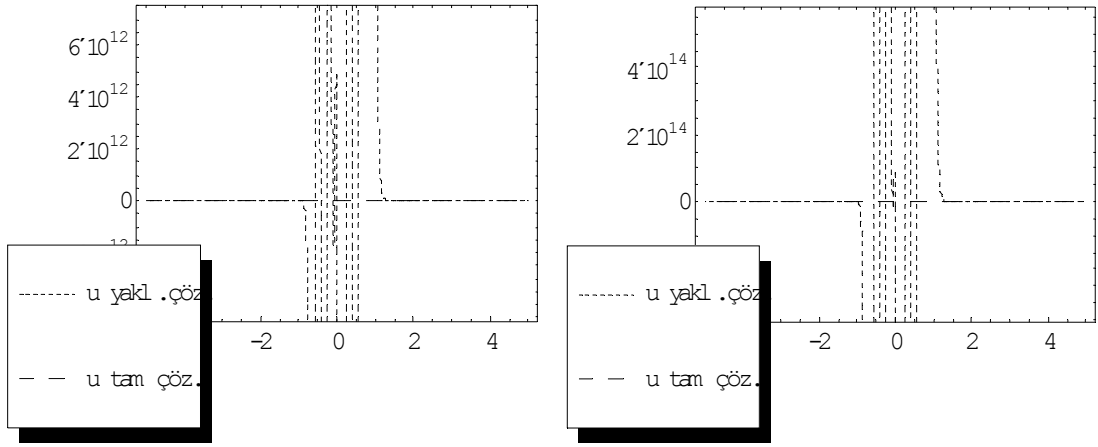
$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \left(\frac{5c}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right), \\
u_1(x, t) &= \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) + t \left(-9 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{6}} \sec h^{\frac{5}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \right. \\
&\quad \left. + 15 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{3}} \sec h^{\frac{11}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \sinh \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) + \dots \right) \\
u_2(x, t) &= \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) + t \left(-9 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{6}} \sec h^{\frac{5}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \right. \\
&\quad \left. + 15 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{3}} \sec h^{\frac{11}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \sinh \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \right. \\
&\quad \left. + 52^{\frac{2}{3}} 5^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{6}} \sec h^{\frac{11}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \sinh^3 \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \right. \\
&\quad \left. + t \left(-9 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{6}} \sec h^{\frac{5}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) \sinh \left(\frac{3}{2}\sqrt{cx}\right) + \dots \right) \right. \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

bulunur. Burada varyasyonel yöntemiyle bulmuş olduğumuz yaklaşık çözümler ve Tablo 3.3.2.'de ki analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde bulunur.

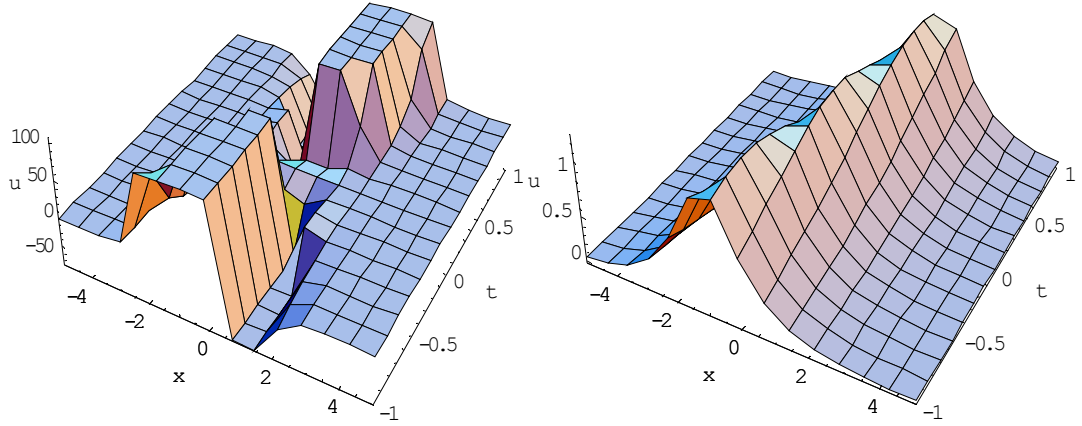
t/x	5	10	15	20	25
0.1	-0.000835643	-5.63047×10^{-6}	-3.79378×10^{-8}	-2.55623×10^{-10}	-1.72237×10^{-12}
0.2	-0.00418298	-0.000028183710	-1.89901×10^{-7}	-1.27954×10^{-9}	-8.62147×10^{-12}
0.3	-0.0826639	-0.0000556934	-3.75259×10^{-7}	-2.52848×10^{-9}	-1.70368×10^{-11}
0.4	-0.013144	-0.0000885465	-5.96622×10^{-7}	-4.02001×10^{-9}	-2.70866×10^{-11}
0.5	-0.188723	-0.000127117	-8.56505×10^{-7}	-5.77109×10^{-9}	-3.88853×10^{-11}
0.6	-0.0255063	-0.000171763	-1.15733×10^{-6}	-7.79803×10^{-9}	-5.25427×10^{-11}
0.7	-0.0330992	-0.000222828	-1.50141×10^{-6}	-1.01164×10^{-8}	-6.81637×10^{-11}
0.8	-0.417025	-0.000280638	-1.89092×10^{-6}	-1.27409×10^{-8}	-8.58478×10^{-11}
0.9	-0.0513659	-0.000345497	-2.32794×10^{-6}	-1.56855×10^{-8}	-1.05688×10^{-10}
1.0	-0.0621372	-0.000417689	-2.81437×10^{-6}	-1.89631×10^{-8}	-1.27772×10^{-10}

Tablo 3.3.10. $n = 3$ durumunda; $c = 1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.15. $c = 1$ için $n = 3$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.16. $c = 1$ için $n = 3$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

4. DURUM

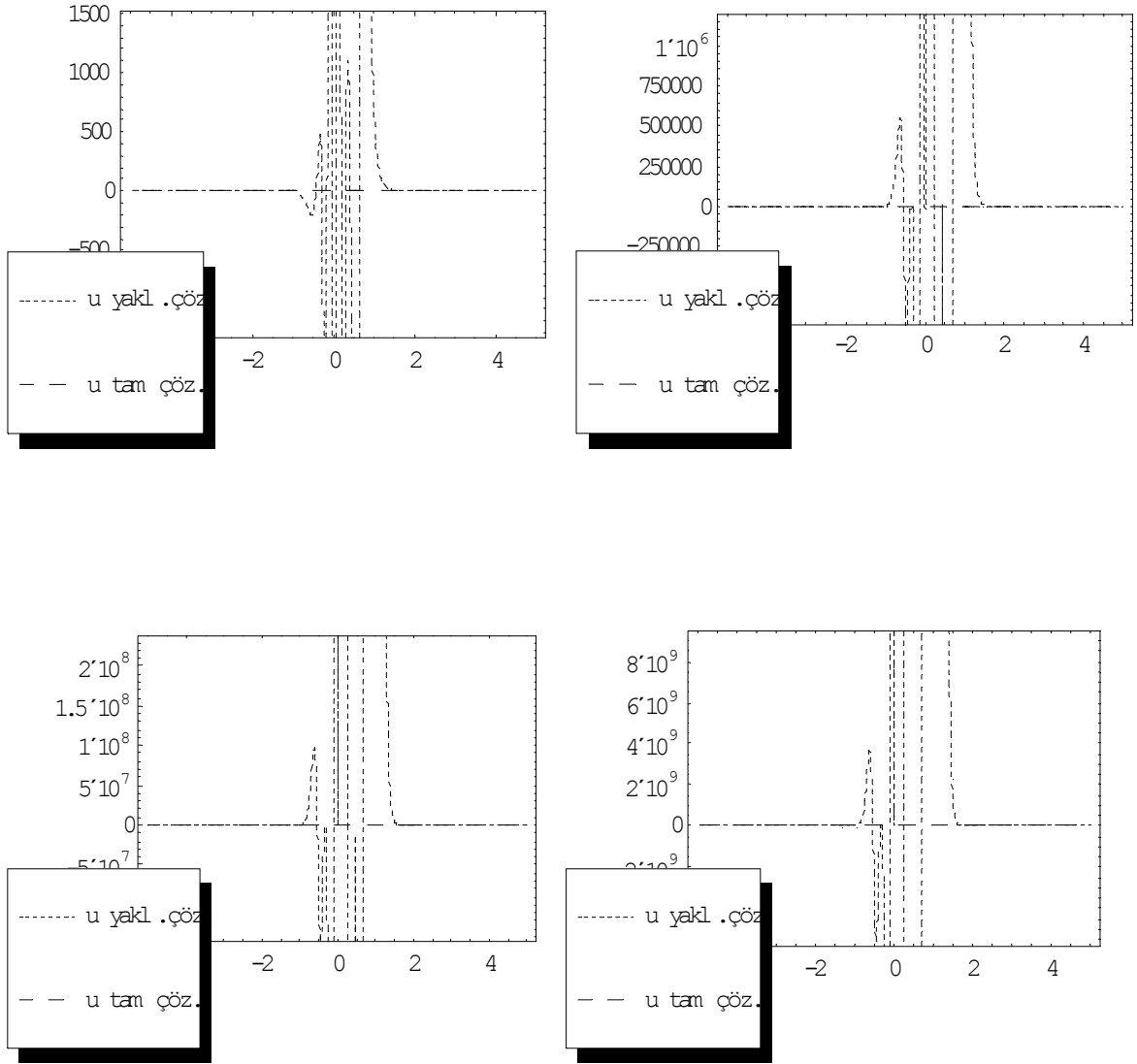
(3.3.1) GKdV denkleminde $n = 4$ alınmasıyla elde edilen denkleme (3.3.11) ile verilen iterasyon formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \left(\frac{5c}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sec h^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{cx}), \\
u_1(x, t) &= \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sec h(2\sqrt{cx})} + t(-72^{\frac{3}{4}} 5^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} \sec h^{\frac{3}{2}}(2\sqrt{c}) \sinh(2\sqrt{cx}) \\
&\quad + 15 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} \sec h^{\frac{7}{2}}(2\sqrt{c}) \sinh^3(2\sqrt{cx})), \\
u_2(x, t) &= \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sec h(2\sqrt{cx})} + t(-72^{\frac{3}{4}} 5^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} \sec h^{\frac{3}{2}}(2\sqrt{c}) \sinh(2\sqrt{cx}) \\
&\quad + 15 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} \sec h^{\frac{7}{2}}(2\sqrt{c}) \sinh^3(2\sqrt{cx})) + t(-72^{\frac{3}{4}} 5^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} \sec h^{\frac{3}{2}}(2\sqrt{c}) \sinh(2\sqrt{cx}) \\
&\quad + 15 \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} \sec h^{\frac{7}{2}}(2\sqrt{c}) \sinh^3(2\sqrt{cx}) - \dots \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

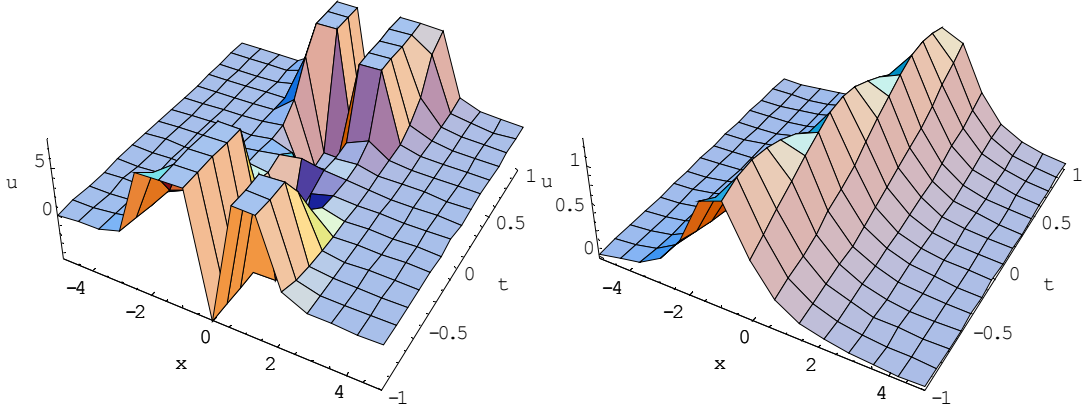
elde edilir. Burada varyasyonel yöntemiyle bulmuş olduğumuz yaklaşık çözümler ve Tablo 3.3.2.'de ki analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde elde edilir.

t/x	5	10	15	20	25
0.1	-0.00270587	-0.000018232	-1.22846×10^{-7}	-8.27733×10^{-10}	-5.57722×10^{-12}
0.2	-0.00607003	-0.0000408995	-2.75579×10^{-7}	-1.85683×10^{-9}	-1.25113×10^{-12}
0.3	-0.0101504	-0.0000683929	-4.60828×10^{-7}	-3.10503×10^{-9}	-2.09215×10^{-11}
0.4	-0.0150036	-0.0000101093	-6.81158×10^{-7}	-4.58961×10^{-9}	-3.09245×10^{-11}
0.5	-0.0206844	-0.000139369	-9.39061×10^{-7}	-6.32734×10^{-9}	-4.26333×10^{-11}
0.6	-0.0272461	-0.000183579	-1.23695×10^{-6}	-8.33447×10^{-9}	-5.61572×10^{-11}
0.7	-0.0347397	-0.000234067	-1.57713×10^{-6}	-1.06266×10^{-8}	-7.16017×10^{-11}
0.8	-0.432145	-0.000291163	-1.96184×10^{-6}	-1.32188×10^{-8}	-8.90674×10^{-11}
0.9	-0.0527171	-0.000355128	-2.39318×10^{-6}	-1.61251×10^{-8}	-1.0865×10^{-10}
1.0	-0.0632916	-0.000426413	-2.87315×10^{-6}	-1.93591×10^{-8}	-1.30441×10^{-10}

Tablo 3.3.11. $n = 4$ durumunda; $c = 1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata..



Şekil 3.3.17. $c = 1$ için $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.18. $c = 1$ için $n = 4$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

5.DURUM

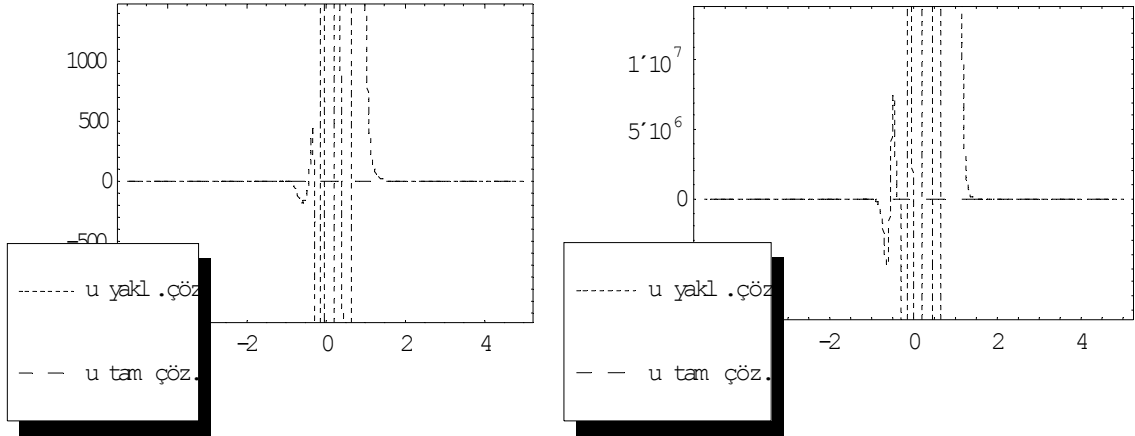
(3.3.1) GKdV denkleminde $n = 5$ alınmasıyla elde edilen denkleme (3.3.11) ile verilen iterasyon formülünü uygularsak

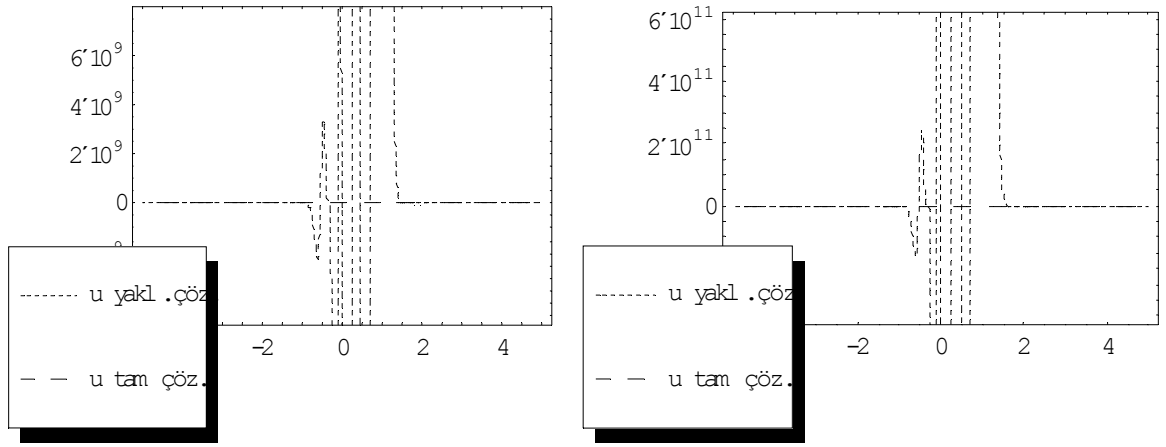
$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= \left(\frac{7c}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \sec h^{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right), \\
 u_1(x, t) &= \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}} \sec h\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right)^{\frac{7}{5}} \left(\cosh\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) + c^{\frac{3}{2}}t \sinh\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right)\right), \\
 u_2(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}} \sec h\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right)^{\frac{2}{5}} (2 + 100c^3t^2 + 21c^{\frac{3}{2}}t \sec h\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right)^9 \\
 &\quad \left(\cosh\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) + c^{\frac{3}{2}}t \sinh\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right)\right)^5 (-6c^{\frac{3}{2}}t + c^{\frac{3}{2}}t \cos(5\sqrt{cx}) + \sinh(5\sqrt{cx})) \\
 &\quad - 38c^{\frac{3}{2}}t \tanh\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) - 455c^3t^2 \tanh\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right)^2 + 42c^{\frac{3}{2}}t \tanh\left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right)^3 + \dots \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada varyasyonel yöntemiyle bulmuş olduğumuz yaklaşık çözümler ve Tablo 3.3.2.'de ki analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde elde edilir.

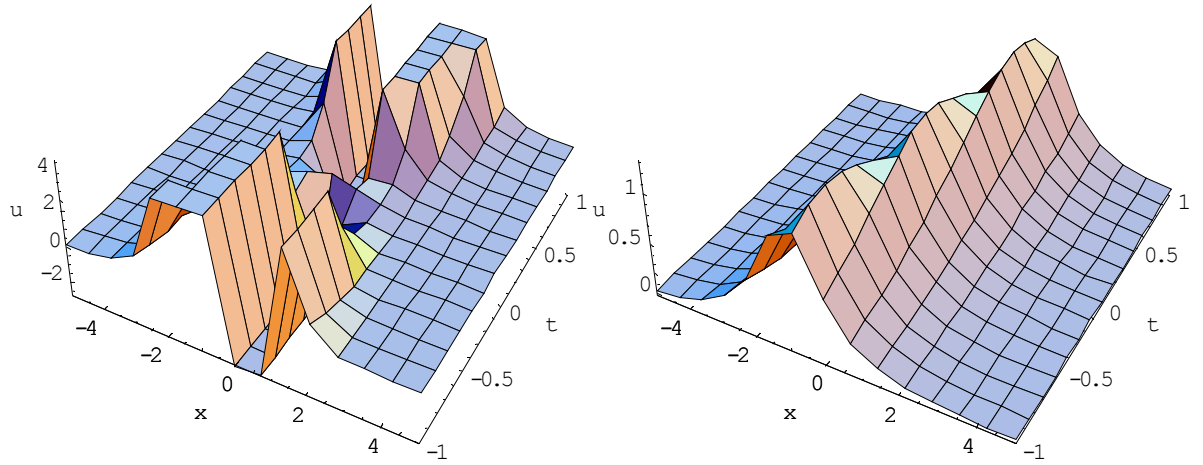
t/x	5	10	15	20	25
0.1	-0.0033244	-0.0000223996	-1.50927×10^{-7}	-1.01694×10^{-9}	-6.85209×10^{-12}
0.2	-0.0067536	-0.0000455054	-3.06613×10^{-7}	-2.06594×10^{-9}	-1.39202×10^{-11}
0.3	-0.0109059	-0.0000734832	-4.95126×10^{-7}	-3.33613×10^{-9}	-2.24787×10^{-11}
0.4	-0.0158385	-0.0000106718	-7.19063×10^{-7}	-4.84501×10^{-9}	-3.26454×10^{-11}
0.5	-0.0216071	-0.000145586	-9.80952×10^{-7}	-6.60961×10^{-9}	-4.45352×10^{-11}
0.6	-0.0282657	-0.00019045	-1.28324×10^{-6}	-8.64642×10^{-9}	-5.28591×10^{-11}
0.7	-0.0358665	-0.000241661	-1.6283×10^{-6}	-1.09714×10^{-8}	-7.39246×10^{-11}
0.8	-0.0444596	-0.000299555	-2.01839×10^{-6}	-1.35998×10^{-8}	-9.16347×10^{-11}
0.9	-0.0540928	-0.000364455	-2.45568×10^{-6}	-1.65462×10^{-8}	-1.11488×10^{-10}
1.0	-0.0648115	-0.000436664	-2.94222×10^{-6}	-1.98245×10^{-8}	-1.33576×10^{-10}

Tablo 3.3.12. $n = 5$ durumunda; $c = 1$ için iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.19. $c = 1$ için $n = 5$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin kullanılmasıyla elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.20. $c = 1$ için $n = 5$ durumunda, iterasyon formülü ile hesaplanan 4 terimin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

3.3.3 HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN GKdV DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu kısımda da daha önce Ayrışım metodu ve Varyasyonel metodu ile çözülmüş olan (3.3.1) GKdV dekleminin, 2. bölümde tanımlanmış Homotopi pertürbasyon metodu ile sayısal çözümlerini bulup analitik çözümleri ile karşılaştıracğız. Burada; $p \in [0.1]$ aralığında bir parametre olmak üzere;

$$(1 - p)(\dot{Y} - \dot{u}_0) + p(\dot{Y} + 6YY' + Y''') = 0, \quad (3.3.14)$$

formundaki (3.3.1) denkleminin homotopisi kurulmuş olur. Burada $\dot{Y}$, t 'ye göre, Y' , x 'e göre ve Y 'de n terimleri için u 'nun aldığı değerleri ifade eder. Tablo 3.3.1'de n 'nin değerlerine göre verilmiş başlangıç şartları altında, 2. bölümde tanımlanmış (2.4.8) ve (2.4.9) denklemleri (2.4.7)'de kullanılacaktır.

1. DURUM

$n = 1$ için Tablo 3.3.1'de verilen başlangıç şartları altında (3.3.1) GKdV denkleminin homotopi metodunun uygulanmasıyla bu denklem için p nin kuvvetlerinden

$$\begin{aligned} & \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 + p^5\dot{Y}_5 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + 6pY_0Y'_0 + 6p^2Y_0Y'_1 + 6p^3Y_0Y'_2 \\ & + 6p^4Y_0Y'_3 + 6p^5Y_0Y'_4 + 6p^2Y_1Y'_0 + 6p^3Y_1Y'_1 + 6p^4Y_1Y'_2 + 6p^5Y_1Y'_3 + 6p^6Y_1Y'_4 \\ & + 6p^3Y_2Y'_0 + 6p^4Y_2Y'_1 + 6p^5Y_2Y'_2 + 6p^4Y_3Y'_0 + 6p^5Y_3Y'_1 + 6p^5Y_4Y'_0 + 6p^4Y_4Y'_1 + \dots \\ & + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' + p^4Y_3''' + p^5Y_4''' + p^6Y_5''' = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $Y_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, bilinmeyenlerini bulmak için beş bilinmeyen içeren beş denklemden oluşan sistemi kurabiliriz. Burada; $\dot{Y}_0 = u_t$, $Y' = u_x$ ve $Y''' = u_{xxx}$ şeklindedir. $Y(x, 0) = u(x, 0)$ şeklindeki başlangıç şartını göz önünde bulundurarak (2.4.8) denkleminin başlangıç yaklaşımından

$$\begin{aligned} p^0 & : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \\ p^1 & : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + 6Y_0Y'_0 + Y_0''' = 0, \\ p^2 & : \dot{Y}_2 + 6Y_0Y'_1 + 6Y_1Y'_0 + Y_1''' = 0, \\ p^3 & : \dot{Y}_3 + 6Y_0Y'_2 + 6Y_1Y'_1 + 6Y_2Y'_0 + Y_2''' = 0, \\ p^4 & : \dot{Y}_4 + 6Y_0Y'_3 + 6Y_1Y'_2 + 6Y_2Y'_1 + 6Y_3Y'_0 + Y_3''' = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.6) denkleminde, eğer ilk dört yaklaşım yeterli ise yaklaşık çözümü

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} Y_k(x, t), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ile verilir.

Böylece HPM'nun GKdV denkleminde $n = 1$ için kullanılmasıyla aşağıdaki homotopi serisinin terimleri

$$\begin{aligned} Y_0(x, t) &= \frac{c}{2} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right), \\ Y_1(x, t) &= \frac{1}{2} c^{\frac{5}{2}} t \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \tanh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right), \\ Y_2(x, t) &= \frac{1}{8} c^4 t^2 (-2 + \cosh(\sqrt{c}x) \sec h^4 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right), \\ Y_3(x, t) &= \frac{1}{48} c^{\frac{11}{2}} t^3 \sec h^5 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \left(-11 \sinh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) + \sinh \left(\frac{3\sqrt{c}}{2} x \right) \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

bulunur. Bu terimler (2.4.9) ifadesinde yerine yazılırsa

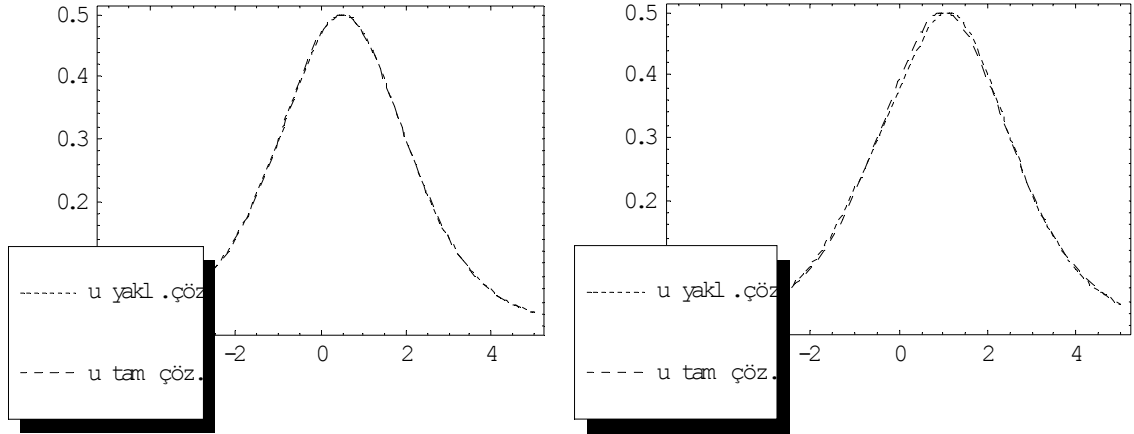
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{48} c \sec h^5 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \left(-9(-2 + c^3 t^2 \cos \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) + 3(2 + c^3 t^2) \cosh \left(\frac{3\sqrt{c}}{2} x \right) \right. \\ &\quad \left. + 2c^{\frac{3}{2}} t(6 - 5c^3 t^2 + (6 + c^3 t^2) \cosh(\sqrt{c}x]) \sinh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \right) + \dots \end{aligned}$$

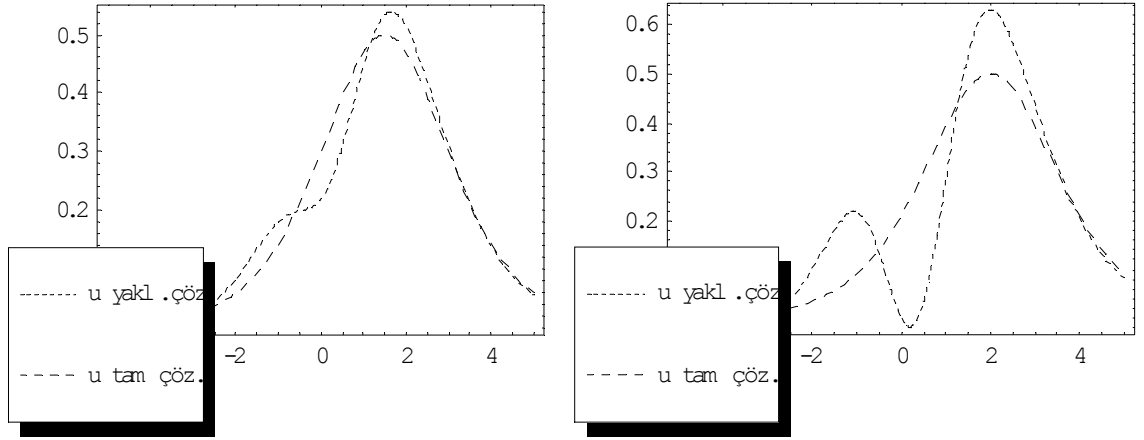
elde edilir.

Homotopi pertürbasyon metodu ve elde ettiğimiz yaklaşık değerler Tablo 3.3.2'de ve rilmiş olan analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

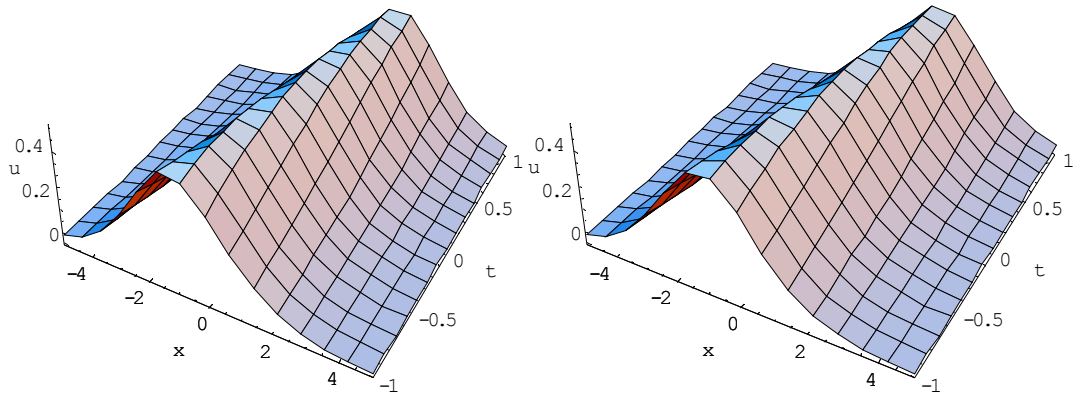
t/x	5	10	15	20	25
0.1	4.53239×10^{-9}	3.85455×10^{-10}	2.60101×10^{-12}	1.75256×10^{-14}	1.18087×10^{-16}
0.2	7.36168×10^{-7}	6.29422×10^{-9}	4.2474×10^{-11}	2.8619×10^{-13}	1.92834×10^{-15}
0.3	3.78303×10^{-6}	3.25292×10^{-8}	2.19518×10^{-10}	1.47911×10^{-12}	9.9662×10^{-15}
0.4	0.0000121353	1.04983×10^{-9}	7.08481×10^{-10}	4.77376×10^{-12}	3.21653×10^{-14}
0.5	0.0000300672	2.61799×10^{-9}	1.76683×10^{-9}	1.1905×10^{-11}	8.0215×10^{-14}
0.6	0.0000632637	5.54662×10^{-9}	3.74347×10^{-9}	2.52236×10^{-11}	1.69955×10^{-13}
0.7	0.000118905	1.05022×10^{-9}	7.08831×10^{-9}	4.77612×10^{-11}	3.21813×10^{-13}
0.8	0.000205745	1.83163×10^{-9}	1.2363×10^{-8}	8.33019×10^{-11}	5.61284×10^{-13}
0.9	0.000334189	3.00034×10^{-9}	2.02524×10^{-8}	1.36461×10^{-10}	9.19468×10^{-12}
1.0	0.000516351	4.67795×10^{-9}	3.1578×10^{-8}	2.12774×10^{-10}	1.43366×10^{-12}

Tablo 3.3.13. $n = 1$ durumunda; $c = 1$ için Homotopi serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.21. $c = 1$ için $n = 1$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanına göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.22. $c = 1$ için $n = 1$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

2. DURUM

(3.3.1) GKdV denkleminde $n = 2$ olması durumunda homotopi pertürbasyon metodunu uygularsak aşağıdaki denklem

$$\begin{aligned} & \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 + p^5\dot{Y}_5 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + 6pY_0^2Y_0' + 6p^2Y_0^2Y_1' + 6p^3Y_0^2Y_2' \\ & + 6p^4Y_0^2Y_3' + 6p^5Y_0^2Y_4' + 6p^2Y_1^2Y_0' + 6p^3Y_1^2Y_1' + 6p^4Y_1^2Y_2' + 6p^5Y_1^2Y_3' + 6p^6Y_1^2Y_4' \\ & + 6p^3Y_2^2Y_0' + 6p^4Y_2^2Y_1' + 6p^5Y_2^2Y_2' + 6p^4Y_3^2Y_0' + 6p^5Y_3^2Y_1' + 6p^5Y_4^2Y_0' + 6p^4Y_4^2Y_1' + \dots \\ & + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' + p^4Y_3''' + p^5Y_4''' + p^6Y_5''' = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. $Y_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, bilinmeyenlerini bulmak için beş bilinmeyen içeren beş denklemden oluşan sistemi kurabiliriz. Burada; $\dot{Y}_0 = u_t$, $Y' = u_x$ ve $Y''' = u_{xxx}$ şeklindedir. $Y(x, 0) = u(x, 0)$ şeklindeki başlangıç şartını göz önünde bulundurarak aşağıdaki p 'nin kuvvetlerinden oluşan sistem

$$\begin{aligned} p^0 & : \quad \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \\ p^1 & : \quad \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + 6Y_0^2Y_0' + Y_0''' = 0, \\ p^2 & : \quad \dot{Y}_2 + 6Y_0^2Y_1' + 6Y_1^2Y_0' + Y_1''' = 0, \\ p^3 & : \quad \dot{Y}_3 + 6Y_0^2Y_2' + 6Y_1^2Y_1' + 6Y_2^2Y_0' + Y_2''' = 0, \\ p^4 & : \quad \dot{Y}_4 + 6Y_0^2Y_3' + 6Y_1^2Y_2' + 6Y_2^2Y_1' + 6Y_3^2Y_0' + Y_3''' = 0, \end{aligned}$$

bulunur. (2.4.6) denkleminde, eğer ilk dört yaklaşım yeterli ise:

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} Y_k(x, t), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ifadesinde yerine yazılır.

Yukarıdaki sistemin çözülmesiyle homotopi serisinin aşağıdaki terimleri

$$\begin{aligned}
Y_0(x, t) &= \sqrt{c} \sec h(\sqrt{cx}), \\
Y_1(x, t) &= c^2 t \sec h(\sqrt{cx}) \tanh(\sqrt{cx}), \\
Y_2(x, t) &= \frac{1}{16} c^{\frac{7}{2}} t^2 (43 - 52 \cosh(2\sqrt{cx}) + \cosh(4\sqrt{cx})) \sec h^5(\sqrt{cx}) \\
&\quad + 2c^5 t^3 \sec h^3(\sqrt{cx}) \tanh^3(\sqrt{cx}), \\
Y_3(x, t) &= \frac{1}{13440} (c^5 t^3 \sec h^7(\sqrt{cx}) (1260 c^{\frac{3}{2}} t (-678 + 779 \cosh(2\sqrt{cx})) - 138 \cosh(4\sqrt{cx}) \\
&\quad + \cosh(6\sqrt{cx})) \sec h^5(\sqrt{cx}) + \dots, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.9) ifadesinde yerine yazılırsa bulunan bu terimler

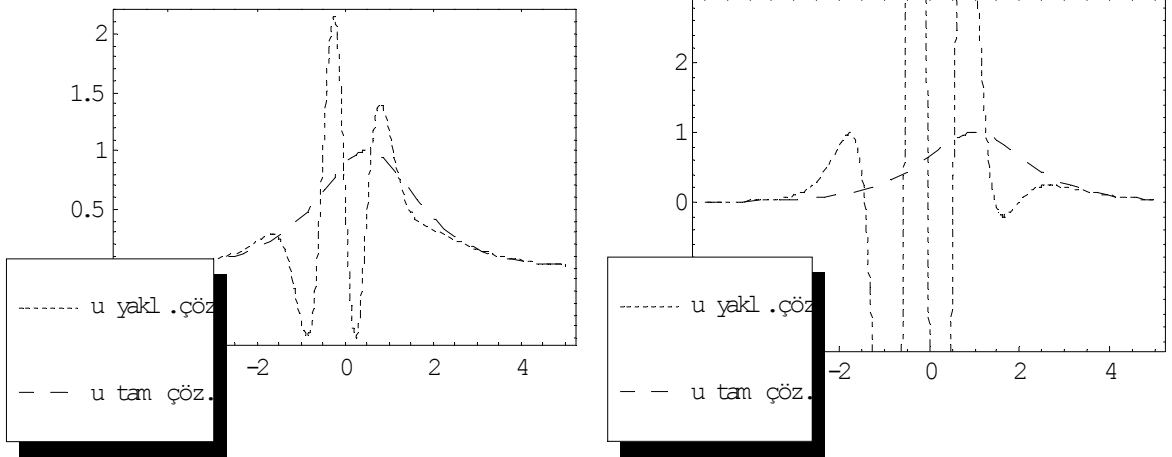
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sqrt{c} \sec h(\sqrt{cx}) + \frac{1}{16} c^{\frac{7}{2}} t^2 (43 - 52 \cosh(2\sqrt{cx}) + \cosh(4\sqrt{cx})) \sec h^5(\sqrt{cx}) \\
&\quad + \frac{3}{32} c^{\frac{13}{2}} t^4 (-678 + 779 \cosh(2\sqrt{cx}) - 138 \cosh(4\sqrt{cx}) + 5 \cosh(6\sqrt{cx})) \sec h^5(\sqrt{cx}) \dots
\end{aligned}$$

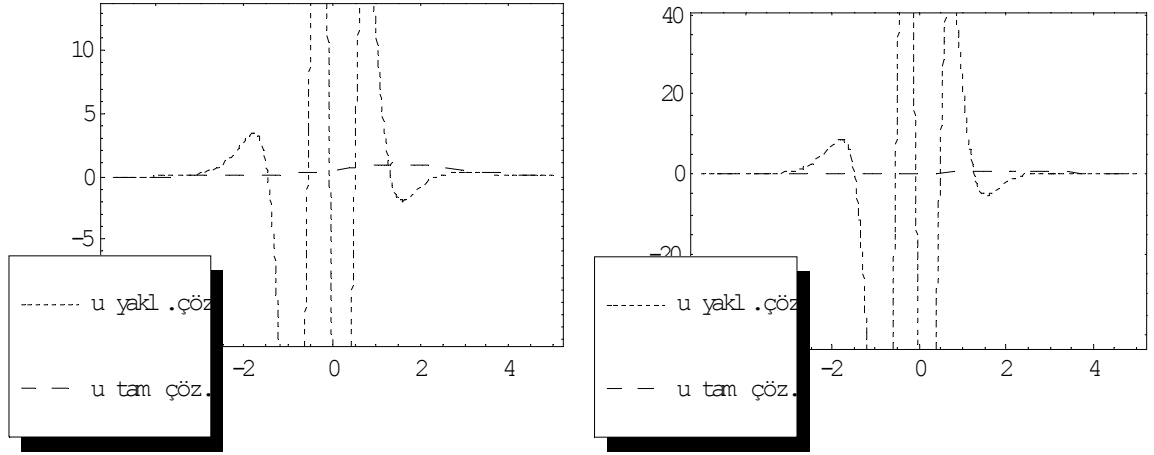
şeklinde ki homotopi serisinin çözüm fonksiyonunu verir.

Homotopi pertürbasyon metodu ve elde ettiğimiz yaklaşık değerler Tablo 3.3.2' de verilmiş olan analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

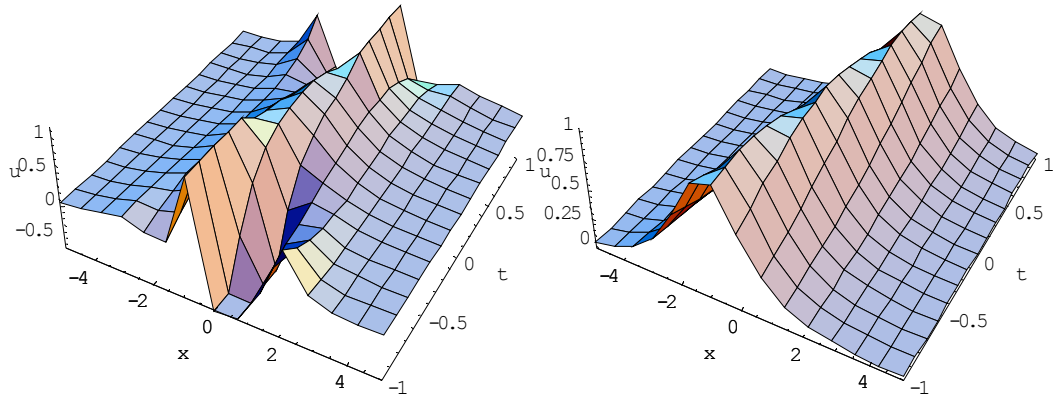
t/x	5	10	15	20	25
0.1	3.46833×10^{-7}	3.86116×10^{-10}	2.60103×10^{-12}	1.75256×10^{-14}	1.18087×10^{-16}
0.2	2.63326×10^{-6}	6.30428×10^{-9}	4.24744×10^{-11}	2.8619×10^{-13}	1.92834×10^{-15}
0.3	9.79691×10^{-6}	3.25812×10^{-8}	2.1952×10^{-10}	1.47912×10^{-12}	9.9662×10^{-15}
0.4	0.0000263252	1.05152×10^{-7}	7.08489×10^{-10}	4.77376×10^{-12}	3.21653×10^{-14}
0.5	0.0000548248	2.6223×10^{-7}	1.76685×10^{-9}	1.1905×10^{-11}	8.0215×10^{-14}
0.6	0.0000114208	5.55596×10^{-7}	3.74351×10^{-9}	2.52236×10^{-11}	1.69955×10^{-13}
0.7	0.000203897	1.05203×10^{-6}	7.08839×10^{-9}	4.77612×10^{-11}	3.21813×10^{-13}
0.8	0.000340051	1.83487×10^{-6}	1.23631×10^{-8}	8.33019×10^{-11}	5.61284×10^{-13}
0.9	0.000537812	3.00579×10^{-6}	2.02526×10^{-8}	1.36461×10^{-10}	9.19468×10^{-12}
1.0	0.000815175	4.68669×10^{-6}	3.15784×10^{-8}	2.12774×10^{-10}	1.43366×10^{-12}

Tablo 3.3.14. $n = 2$ durumunda; $c = 1$ için Homotopi serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.23. $c = 1$ için $n = 2$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanının sırasıyla 0.5, 1, 1.5 ve 2 değerlerine göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.24. $c = 1$ için $n = 2$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

3. DURUM

GKdV denkleminde $n = 3$ alırsak aşağıdaki başlangıç koşullu KdV

$$\begin{aligned}
& \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 + p^5\dot{Y}_5 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + 6pY_0^3Y_0' + 6p^2Y_0^3Y_1' + 6p^3Y_0^3Y_2' \\
& + 6p^4Y_0^3Y_3' + 6p^5Y_0^3Y_4' + 6p^2Y_1^3Y_0' + 6p^3Y_1^3Y_1' + 6p^4Y_1^3Y_2' + 6p^5Y_1^3Y_3' + 6p^6Y_1^3Y_4' \\
& + 6p^3Y_2^3Y_0' + 6p^4Y_2^3Y_1' + 6p^5Y_2^3Y_2' + 6p^4Y_3^3Y_0' + 6p^5Y_3^3Y_1' + 6p^5Y_4^3Y_0' + 6p^4Y_4^3Y_1' + \dots \\
& + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' + p^4Y_3''' + p^5Y_4''' + p^6Y_5''' = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme homotopi metodunu uygularsak

$$\begin{aligned}
p^0 & : \quad \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \\
p^1 & : \quad \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + 6Y_0^3Y_0' + Y_0''' = 0, \\
p^2 & : \quad \dot{Y}_2 + 6Y_0^3Y_1' + 6Y_1^3Y_0' + Y_1''' = 0, \\
p^3 & : \quad \dot{Y}_3 + 6Y_0^3Y_2' + 6Y_1^3Y_1' + 6Y_2^3Y_0' + Y_2''' = 0, \\
p^4 & : \quad \dot{Y}_4 + 6Y_0^3Y_3' + 6Y_1^3Y_2' + 6Y_2^3Y_1' + 6Y_3^3Y_0' + Y_3''' = 0,
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $Y(x, 0) = u(x, 0)$ = formundaki başlangıç şartını göz önüne alırsak, p 'nin kuvvetleri olan aşağıdaki denklem sistemi

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} Y_k(x, t), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle homotopi serisinin terimleri

$$\begin{aligned}
Y_0(x, t) &= \sqrt[3]{\frac{5c}{2}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right), \\
Y_1(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{11}{6}} t (11 + \cosh(3\sqrt{cx})) \sec h^{\frac{11}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) \sinh \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right), \\
Y_2(x, t) &= \frac{1}{64} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{10}{3}} t^2 \sec h^{\frac{20}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) (19160 - 18825 \cosh(3\sqrt{cx})) + 1176 \cosh(6\sqrt{cx}) \\
&\quad + \cosh(9\sqrt{cx}) + 30c^3 t^3 (11 + \dots), \\
Y_3(x, t) &= \frac{1}{787218432} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{29}{6}} t^3 \sec h^{\frac{29}{2}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) (512512 - (-313582446 \sinh \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) \\
&\quad + 99571488 \sinh \left(\frac{9}{2} \sqrt{cx} \right) - 81327760 \sinh \left(\frac{15}{2} \sqrt{cx} \right) + \dots, \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

formunda bulunur. Bu elde edilen terimleri (2.4.9) ifadesinde yerine yazarsak

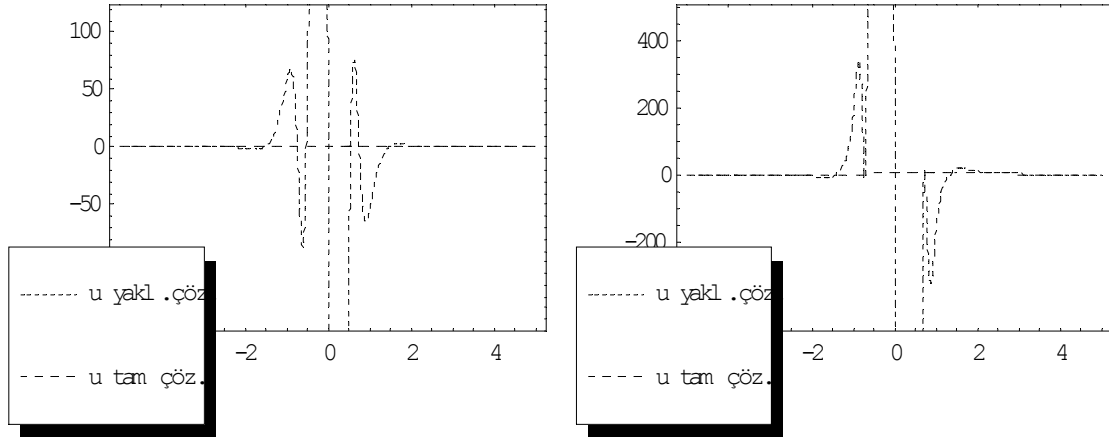
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{787218432} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} \sec h^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) (787218432 + 12300288c^3 t^2 (19160 \\
&\quad - 18825 \cosh(3\sqrt{cx}) + 1176 \cosh(6\sqrt{cx}) + \cosh(9\sqrt{cx})) \sec h^6 \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) \\
&\quad + 512512c^{\frac{9}{2}} t^3 \sec h^9 \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) (-3135824 \sinh \left(\frac{3}{2} \sqrt{cx} \right) + \dots
\end{aligned}$$

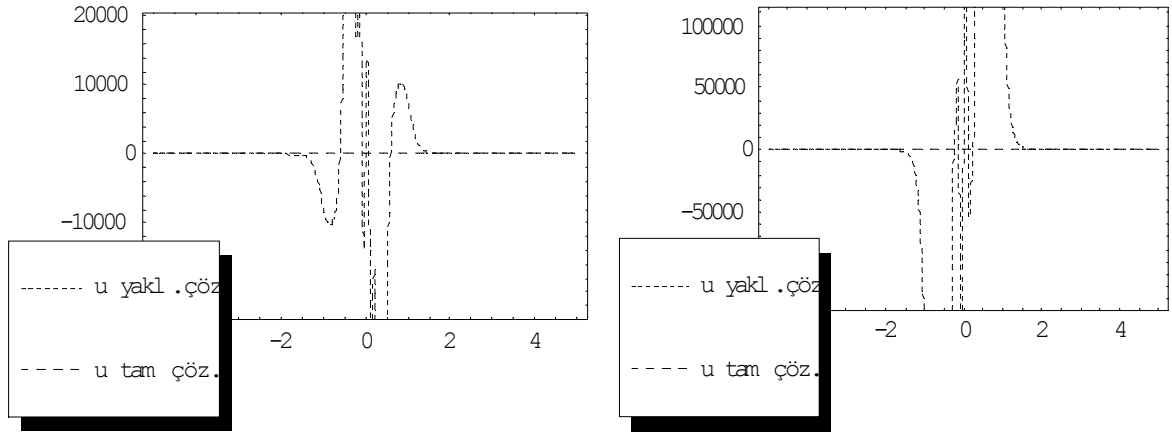
şeklindeki homotopi serisinin çözüm fonksiyonu bulunur.

Homotopi perturbasyon metodu ve elde ettiğimiz yaklaşık değerler Tablo 3.3.2' de verilmiş olan analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

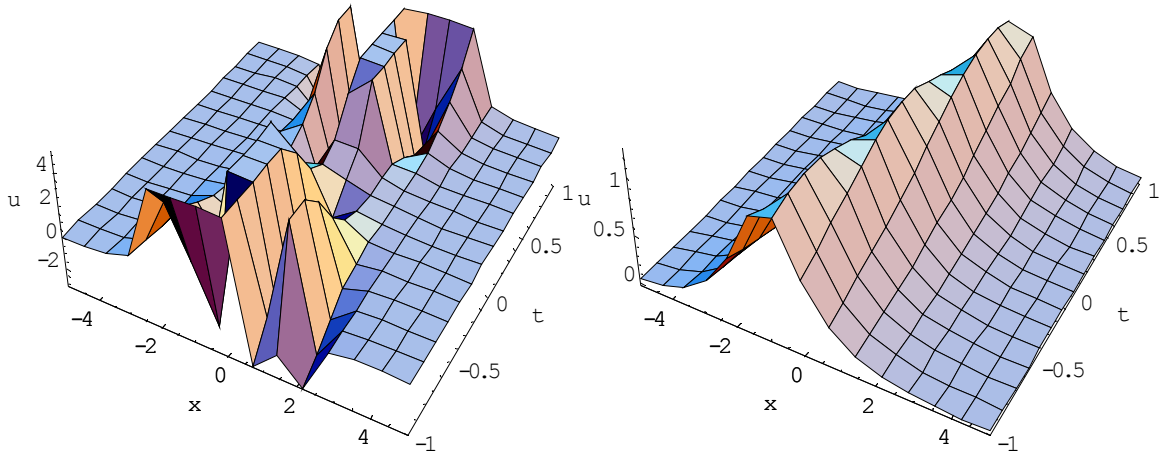
t/x	5	10	15	20	25
0.1	-2.88458×10^{-8}	4.15835×10^{-10}	2.80188×10^{-12}	1.88789×10^{-14}	1.27205×10^{-16}
0.2	4.41096×10^{-7}	6.79052×10^{-9}	4.57542×10^{-11}	3.08289×10^{-13}	2.07724×10^{-15}
0.3	3.44565×10^{-6}	3.50954×10^{-8}	2.36471×10^{-10}	1.59333×10^{-12}	1.07358×10^{-14}
0.4	0.0000127941	1.13268×10^{-7}	7.63196×10^{-10}	5.14238×10^{-12}	3.36491×10^{-14}
0.5	0.0000342549	2.82473×10^{-7}	1.90329×10^{-9}	1.28242×10^{-11}	8.6409×10^{-14}
0.6	0.0000757608	5.98487×10^{-7}	4.03257×10^{-9}	2.71713×10^{-11}	1.83079×10^{-13}
0.7	0.000147636	1.3324×10^{-6}	7.63574×10^{-9}	5.14492×10^{-11}	3.46662×10^{-13}
0.8	0.000262845	1.97653×10^{-6}	1.33177×10^{-8}	8.97343×10^{-11}	6.04625×10^{-13}
0.9	0.000437273	3.23785×10^{-6}	2.18165×10^{-8}	1.46998×10^{-10}	9.90467×10^{-13}
1.0	0.000690031	5.04854×10^{-6}	3.40168×10^{-8}	2.29203×10^{-10}	1.54436×10^{-12}

Tablo 3.3.15. $n = 3$ durumunda; $c = 1$ için Homotopi serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.25. $c = 1$ için $n = 3$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanının sırasıyla 0.5, 1, 1.5 ve 2 değerlerine göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.26. $c = 1$ için $n = 3$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

4. DURUM

$n = 4$ için Tablo 3.3.1’de verilen başlangıç şartları altında GKdV denklemine, homotopi metodunu uygularsak

$$\begin{aligned}
& \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + p^4\dot{Y}_4 + p^5\dot{Y}_5 - \dot{u}_0 + p\dot{u}_0 + 6pY_0^4Y_0' + 6p^2Y_0^4Y_1' + 6p^3Y_0^4Y_2' \\
& + 6p^4Y_0^4Y_3' + 6p^5Y_0^4Y_4' + 6p^2Y_1^4Y_0' + 6p^3Y_1^4Y_1' + 6p^4Y_1^4Y_2' + 6p^5Y_1^4Y_3' + 6p^6Y_1^4Y_4' \\
& + 6p^3Y_2^4Y_0' + 6p^4Y_2^4Y_1' + 6p^5Y_2^4Y_2' + 6p^4Y_3^4Y_0' + 6p^5Y_3^4Y_1' + 6p^5Y_4^4Y_0' + 6p^4Y_4^4Y_1' + \dots \\
& + pY_0''' + p^2Y_1''' + p^3Y_2''' + p^4Y_3''' + p^5Y_4''' + p^6Y_5''' = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. $Y(x, 0) = u(x, 0)$ şeklindeki başlangıç şartını göz önünde bulundurarak (2.4.8) denkleminin başlangıç yaklaşımından:

$$\begin{aligned}
p^0 & : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0, \\
p^1 & : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + 6Y_0^4Y_0' + Y_0''' = 0, \\
p^2 & : \dot{Y}_2 + 6Y_0^4Y_1' + 6Y_1^4Y_0' + Y_1''' = 0, \\
p^3 & : \dot{Y}_3 + 6Y_0^4Y_2' + 6Y_1^4Y_1' + 6Y_2^4Y_0' + Y_2''' = 0, \\
p^4 & : \dot{Y}_4 + 6Y_0^4Y_3' + 6Y_1^4Y_2' + 6Y_2^4Y_1' + 6Y_3^4Y_0' + Y_3''' = 0,
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Yukarıdaki denklem sistemi çözümlürse, homotopi serisinin terimleri aşağıdaki formda bulunur.

$$\begin{aligned}
Y_0(x, t) &= \left(\frac{5c}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sec h^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{cx}), \\
Y_1(x, t) &= \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} t \sec h^{\frac{3}{2}}(2\sqrt{cx}) \sinh(2\sqrt{cx}), \\
Y_2(x, t) &= \frac{1}{16} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{13}{4}} t^2 \sec h^{\frac{9}{2}}(2\sqrt{cx}) (231 - 248 \cosh(4\sqrt{cx})) + \cosh(8\sqrt{cx}) \\
&\quad + 48c^{\frac{9}{2}} t^3 \sinh^2(2\sqrt{cx}) \tanh^3(2\sqrt{cx}) + \dots, \\
Y_3(x, t) &= \frac{1}{1376256} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{19}{4}} t^3 \sec h^{\frac{15}{2}}(2\sqrt{cx}) (3584(-3544915 \sinh(2\sqrt{cx}) \\
&\quad + 847269 \sinh(6\sqrt{cx}) - 31495 \sinh(10\sqrt{cx}) + \dots \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

bulunur. Bu terimler (2.4.9) ifadesinde yerine yazılırsa

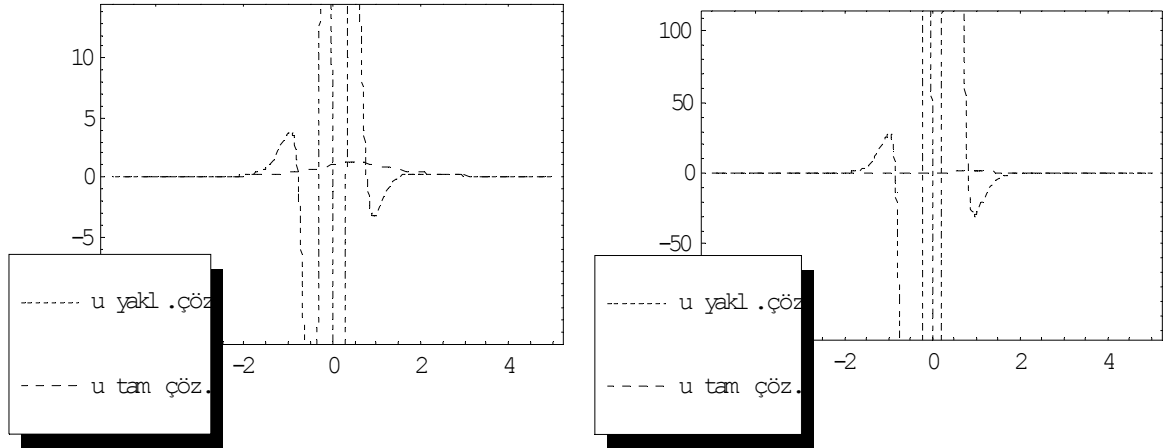
$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{1376256} \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sec h(2\sqrt{cx})} (1376256 + 86016c^3 t^2 (231 - 248 \cosh(4\sqrt{cx}) \\
&\quad + \cosh(8\sqrt{cx})) \sec h^4(2\sqrt{cx}) + 3584c^{\frac{9}{2}} t^3 \sec h^7(2\sqrt{cx}) (-3544915 \sinh(2\sqrt{cx}) \\
&\quad + 847269 \sinh(6\sqrt{cx}) - 31495 \sinh(10\sqrt{cx}) + \sinh(14\sqrt{cx})) + \dots
\end{aligned}$$

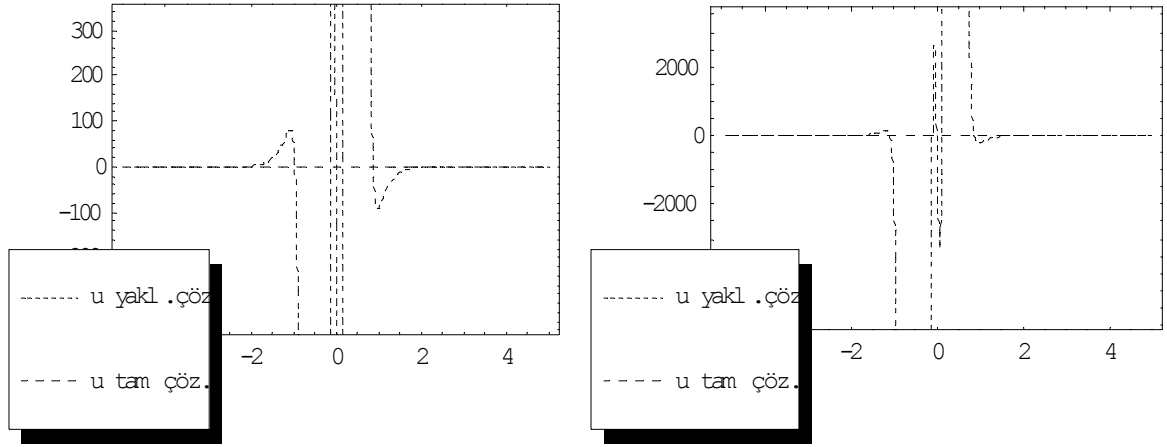
şeklinde ki homotopi serisinin çözüm fonksiyonu elde edilir.

Homotopi pertürbasyon metodu ve elde ettiğimiz yaklaşık değerler Tablo 3.3.2' de verilmiş olan analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

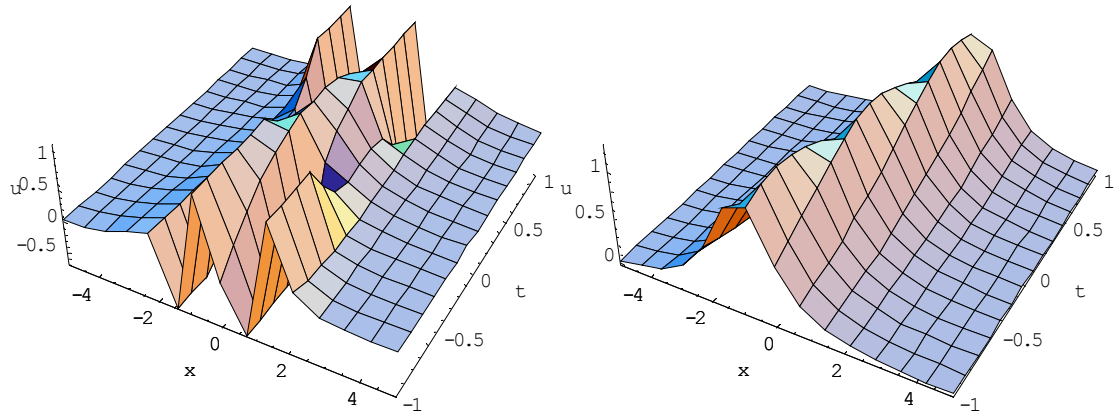
t/x	5	10	15	20	25
0.1	5.10992×10^{-8}	3.43232×10^{-10}	2.31268×10^{-12}	1.55827×10^{-14}	1.04996×10^{-16}
0.2	8.32998×10^{-7}	5.60493×10^{-9}	3.77657×10^{-11}	2.54463×10^{-13}	1.71456×10^{-15}
0.3	4.30297×10^{-6}	2.89679×10^{-8}	1.95184×10^{-10}	1.31514×10^{-12}	8.86134×10^{-15}
0.4	0.0000138842	9.34922×10^{-8}	6.29945×10^{-10}	4.24454×10^{-12}	2.85995×10^{-14}
0.5	0.0000346199	2.33154×10^{-7}	1.57098×10^{-9}	1.05852×10^{-11}	7.13224×10^{-14}
0.6	0.0000733438	4.93994×10^{-7}	3.3285×10^{-9}	2.24273×10^{-11}	1.51114×10^{-13}
0.7	0.00038868	9.35385×10^{-7}	6.30257×10^{-9}	4.24664×10^{-11}	2.86136×10^{-13}
0.8	0.000242192	1.63144×10^{-6}	1.09925×10^{-8}	7.4067×10^{-11}	4.9906×10^{-13}
0.9	0.000396732	2.67254×10^{-6}	1.80074×10^{-8}	1.21333×10^{-10}	8.17536×10^{-13}
1.0	0.000618575	4.16709×10^{-6}	2.80776×10^{-8}	1.89185×10^{-10}	1.27472×10^{-12}

Tablo 3.3.16. $n = 4$ durumunda; $c = 1$ için Homotopi serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.





Şekil 3.3.27. $c = 1$ için $n = 4$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanının sırasıyla 0.5, 1, 1.5 ve 2 değerlerine göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.28. $c = 1$ için $n = 4$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

5. DURUM

(3.3.1) GKdV denkleminde $n = 5$ alır ve gerekli başlangıç koşulunu kullanırsa, homotopi metoduyla aşağıdaki denklem

$$+6p^3Y_2^5Y_0' + 6p^4Y_2^5Y_1' + 6p^5Y_2^5Y_2' + 6p^4Y_3^5Y_0' + 6p^5Y_3^5Y_1' + 6p^5Y_4^5Y_0' + 6p^4Y_4^5Y_1' + \dots$$

$$+pY_0'''' + p^2Y_1'''' + p^3Y_2'''' + p^4Y_3'''' + p^5Y_4'''' + p^6Y_5'''' = 0,$$

bulunur. $Y(x, 0) = u(x, 0)$ şeklindeki başlangıç şartını göz önünde bulundurursak

$$p^0 : \dot{Y}_0 - \dot{u}_0 = 0,$$

$$p^1 : \dot{Y}_1 + \dot{u}_0 + 6Y_0^5Y_0' + Y_0'''' = 0,$$

$$p^2 : \dot{Y}_2 + 6Y_0^5Y_1' + 6Y_1^5Y_0' + Y_1'''' = 0,$$

$$p^3 : \dot{Y}_3 + 6Y_0^5Y_2' + 6Y_1^5Y_1' + 6Y_2^5Y_0' + Y_2'''' = 0,$$

$$p^4 : \dot{Y}_4 + 6Y_0^5Y_3' + 6Y_1^5Y_2' + 6Y_2^5Y_1' + 6Y_3^5Y_0' + Y_3'''' = 0,$$

sistemi elde edilir.

Bu sistemin çözülmesiyle homotopi serisinin

$$Y_0(x, t) = \left(\frac{7c}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \sec h^{\frac{2}{5}} \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right),$$

$$Y_1(x, t) = \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{17}{10}} t \sec h^{\frac{7}{5}} \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) \sinh \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right),$$

$$Y_2(x, t) = \frac{1}{16} \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{16}{5}} t^2 \sec h^{\frac{22}{5}} \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) (409 - 430 \cosh(5\sqrt{cx})) + \cosh(10\sqrt{cx}) \\ + 56c^6 t^4 \sinh^2 \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) \tanh^4 \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) + \dots,$$

$$Y_3(x, t) = \frac{1}{1406300848128} \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{47}{10}} t^3 \sec h^{\frac{37}{5}} \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) (3662241792(-11610643 \sinh \left(\frac{5}{2}\sqrt{cx}\right) \\ + 2710017 \sinh \left(\frac{15}{2}\sqrt{cx}\right) - 93739 \sinh \left(\frac{25}{2}\sqrt{cx}\right) + \sinh \left(\frac{35}{2}\sqrt{cx}\right)) + \dots$$

⋮

terimleri bulunur. Bu terimler (2.4.9) ifadesinde yerine yazılırsa

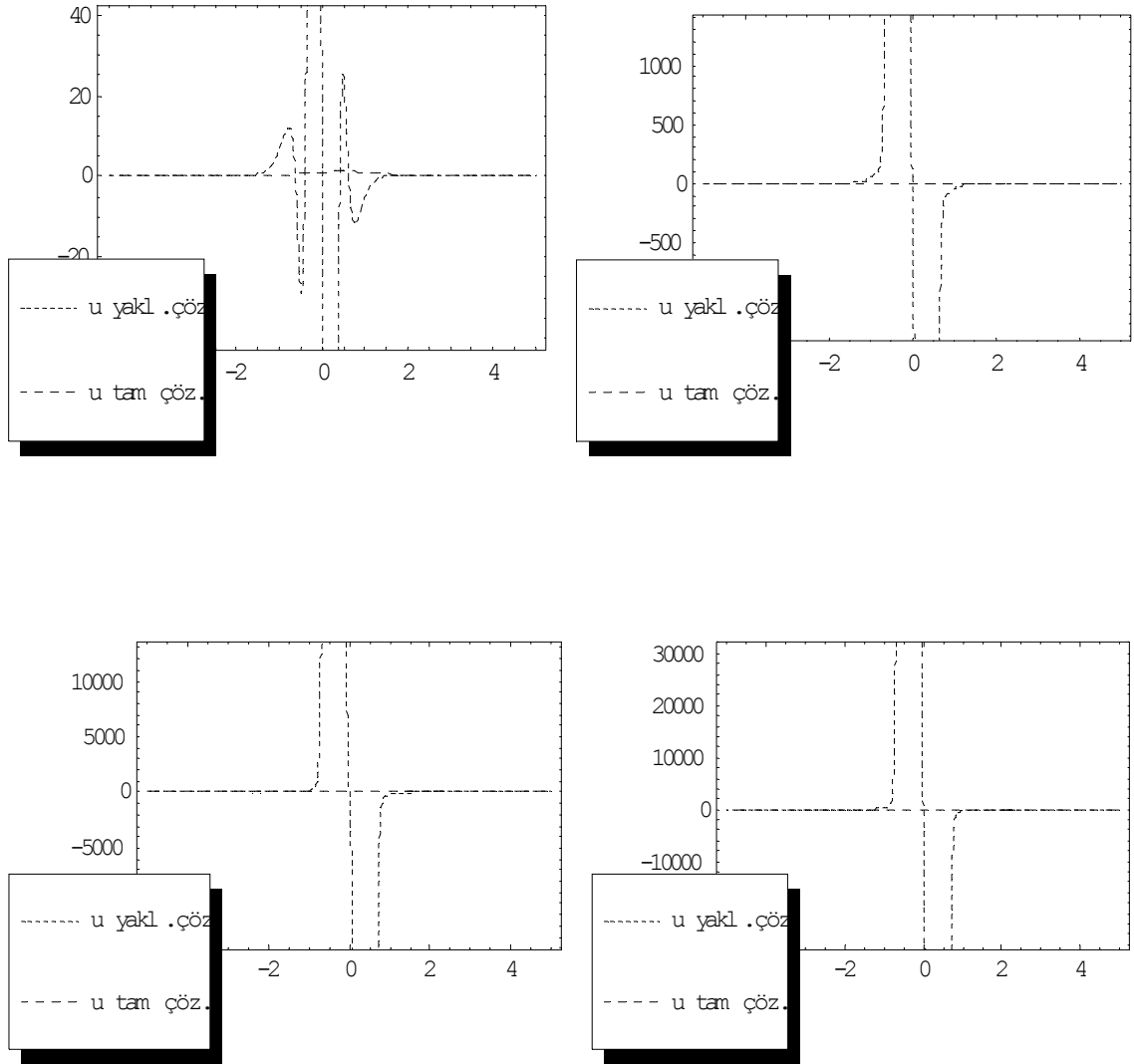
$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{1406300848128} \left(\left(\frac{7}{2} \right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}} \sec h^{\frac{2}{5}} \left(\frac{5}{2} \sqrt{cx} \right) (1406300848128 + 87893803008c^3t^2(409 \right. \\
& - 430 \cosh(5\sqrt{cx}) + \cosh(10\sqrt{cx})) \sec h^4 \left(\frac{5}{2} \sqrt{cx} \right) \\
& + 3662241792c^{\frac{9}{2}}t^3 \sec h^7 \left(\frac{5}{2} \sqrt{cx} \right) (-11610643 \sinh \left(\frac{5}{2} \sqrt{cx} \right) \\
& + 2710017 \sinh \left(\frac{15}{2} \sqrt{cx} \right) - 93739 \sinh \left(\frac{25}{2} \sqrt{cx} \right) + \sinh \left(\frac{35}{2} \sqrt{cx} \right) + \dots
\end{aligned}$$

şeklinde ki homotopi serisinin çözüm fonksiyonu elde edilir.

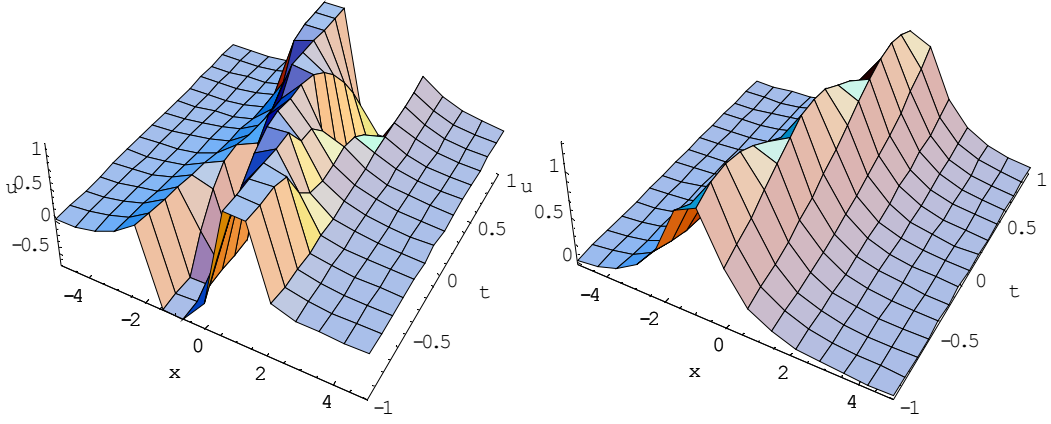
Homotopi pertürbasyon metodu ve elde ettiğimiz yaklaşık değerler Tablo 3.3.2' de verilmiş olan analitik çözümler arasındaki fark alınarak hata tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

t/x	5	10	15	20	25
0.1	4.85636×10^{-8}	3.272×10^{-10}	2.20466×10^{-12}	1.48549×10^{-14}	1.00091×10^{-16}
0.2	7.93012×10^{-7}	5.34313×10^{-9}	3.60017×10^{-11}	2.42578×10^{-13}	1.63448×10^{-15}
0.3	4.09847×10^{-6}	2.76148×10^{-8}	1.86067×10^{-10}	1.25371×10^{-12}	8.44744×10^{-15}
0.4	0.0000132275	8.91253×10^{-8}	6.00521×10^{-10}	4.04628×10^{-12}	2.72636×10^{-14}
0.5	0.0000329872	2.22264×10^{-7}	1.4976×10^{-9}	1.00908×10^{-11}	6.7991×10^{-14}
0.6	0.0000698913	4.7092×10^{-7}	3.17303×10^{-9}	2.13797×10^{-11}	1.44056×10^{-13}
0.7	0.00013234	8.91694×10^{-7}	6.00819×10^{-9}	4.04828×10^{-11}	2.72771×10^{-13}
0.8	0.000230818	1.55523×10^{-6}	1.04791×10^{-8}	7.06075×10^{-11}	4.75749×10^{-13}
0.9	0.000378115	2.54771×10^{-6}	1.71663×10^{-8}	1.15666×10^{-10}	7.7935×10^{-13}
1.0	0.000589566	3.97245×10^{-6}	2.67661×10^{-8}	1.80349×10^{-10}	1.21518×10^{-12}

Tablo 3.3.17. $n = 5$ durumunda; $c = 1$ için Homotopi serisinin 4 teriminin ve analitik çözümün kullanılmasıyla elde edilen mutlak hata.



Şekil 3.3.29. $c = 1$ için $n = 5$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen çözüm ile analitik çözümün değişen t zamanının sırasıyla 0.5, 1, 1.5 ve 2 değerlerine göre karşılaştırılması.



Şekil 3.3.30. $c = 1$ için $n = 5$ durumunda, Homotopi serisinin 4 terimi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile analitik çözümün üç boyutlu resmi.

4. BÖLÜM

SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, matematiksel fiziğin önemli denklemlerinden biri olan başlangıç şartlı GKdV denkleminin ayrışım metodu, varyasyonel iterasyon metodu ve homotopi pertürbasyon metodu ile sayısal çözümleri elde edildi. Elde edilen bu sonuçlar tablolar ve şekillerle 3. bölümde ifade edildi. Tablolar analitik çözüm ile elde edilen yaklaşık çözümün farkının mutlak değeri alınarak oluşturuldu. Üç yöntem içinde yapmış olduğumuz çalışmalarda $c \in [0, 1]$ ve $x \in [5, 25]$ aralığında alındı. Ayrıca hesaplamalar yapılırken Mathe-matika programından yararlanıldı.

İlk olarak denkleme Adomian ayrışım metodu uygulandı ve t -zamanının küçük değerleri için çözümün daha hassas değerler verdiği belirlendi. Ancak Tablo 1’de ki başlangıç şartları altında Adomian polinomlarının varlığı ve n ’in artan değerleri için polinomların çokluğu hesaplamalarda zorluklar ortaya çıkardı.

Varyasyonel iterasyon metodunun en önemli avantajı Adomian polinomlarının hesaplanmasında ortaya çıkan zorlukların ortadan kalkmasıdır. Dezavantajı ise terimlerin uzun olması ve hesaplamaların zaman alıcı olmasıdır. Bu nedenle, GKdV denkleminde $c = 1$ için dördüncü terimden sonra bu metodla hesaplama yapılamadı.

Aynı şartlar altında üçüncü olarak denkleme Homotopi pertürbasyon metodu uygulandı. Daha önce yapılmış çalışmaların çoğunluğunda diğer iki yöntemden daha hassas sonuçlar verdiği belirtilen HPM bu denklem için hassas sonuçlar vermedi. Bu denklem için Adomian metodu ile elde ettiğimiz sonuçlar homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen sonuçlara göre daha hassastır.

Sonuç olarak GKdV denklemi için aynı şartlar altında uygulanan üç yöntem içinde Adomian polinomlarının hesaplanmasındaki zorluklara rağmen Ayrışım metodu diğer iki yönteme göre hem hesaplama esnasında değerlerin daha hassas, hem de hesaplama süresi bakımından daha kısa olduğundan, GKdV denklemi için daha uygun bir çözüm yöntemi olduğu kanaatine varıldı.

References

- [1] Kreyszig, E., 1978, Intruductory Functional Analıysis with Applications, John Wiley and Sons, New York.
- [2] Yaşar, İ., B., 2005, Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [3] Koca, K., 2001, Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.
- [4] Adomian, G., 1986, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego.
- [5] Karagöz, M., 1998, İstatistik Yöntemler, Malatya.
- [6] Kincaid, D., Cheney, W., 1990, Numerical Analysis, Cole Publishing Company, California.
- [7] Cherruault, Y., 1998, Modèles et Méthodes Mathématiques pour les Sciences du Vivant, Presses Universitaires de France, Paris.
- [8] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1957, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Graylock Presses, Rochester, N. Y.
- [9] Şuhubi, S., Erdoğan, 2001, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 38, İstanbul.
- [10] Cherruault, Y., 1988, Convergence of Adomian's method, Kybernetes 18 (2), 31-38.
- [11] Hosseini, M., M., Nasabzadeh, H., On the convergence of Adomian decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 182 (2006) 536-543.
- [12] Mavoungou, T., Cherruault, Y., 1992, Convergence of Adomian's method and applications to nonlinear partial differential equations, Kybernetes, 21 (6), 13-25.
- [13] Sibony, M., Une méthode itérative pour les inéquations variationnelles non-linéaires, Rapport INRIA, 1968.
- [14] Helal, M.A., Mehanna, M.S., 2007, A comparative study between two different methods for solving the GKdV equation, Chaos, Soliton and Fractals 33, 725-739.

- [15] Tatari, M., Dehghan, M., Razzaghi, M., Application of the Adomian decomposition method for the Fokker- Planck equation, 2007, Mathematical and Computer Modelling. 45, 639-650.
- [16] Nagarhasta, N., Some, B., Abbaoui, K., Cherruault, Y., 2002, New numerical study of Adomian method applied to a diffusion model, Kybernetes, 31 (1),61-75.
- [17] Adomian, G., 1986, On compositenonlinearites and the decomposition method, J. Math. Anal. Appl. 114 (1), 130-141.
- [18] Adomian, G., Rach, R., 1992, Noise terms in decomposition solution series, Comp. Math. Applic. 24 (11), 61-64.
- [19] Adomian, G., Rach, R., 1993, Analytic solution of nonlinear boundary-value problemsin several dimensions by decomposition, J. Math. Anal. Appl. 174, 118-137.
- [20] Adomian, G., 1994, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition method, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [21] Adomian, G., 1996, Nonlinear Klein-Gordon equation, Appl. Math. Comput. 9 (3), 9-10.
- [22] Brigitte, A., 1999, Application of the decomposition method to the understanding of HIV immune dynamics, Kybernetes 28 (3), 271-283.
- [23] Deeba, E., Khuri, S.A., 1996, A decomposition method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation, J. Comput. Phys. 124, 442-448.
- [24] Deeba, E., Khuri, S.A., Xie, S., 2000, An algorithm for solving boundary value problems, J. Comput. Phys. 159 (2), 125-138.
- [25] Khuri, S.A., 2001, On the decomposition method for the approximate solutions of nonlinear ordinary differential equations, Intern. J. Math. Ed. Sci. Tech. 32 (4), 525-539.
- [26] Inc, M., Cherruault, Y., 2005, A reliable approach to the Korteweg-de Vries equation: An application of the decomposition method, Kybernetes 34, 951-959.
- [27] Inc, M., Evans, D.J., 2005, Decomposition method for nonlinear isothermal magnetostatic atmospheres, Intern. J. Computer Math. 82, 559-572.

- [28] Inc, M., 2005, On numerical solutions of one-dimensional nonlinear Burgers' equation and convergence of the decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 170, 76-85.
- [29] Inc, M., 2006, On numerical doubly periodic wave solutions of the coupled Drinfel'd–Sokolov–Wilson equation by the decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 172, 421-430.
- [30] Wazwaz, A.M., 2005, Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations, *Appl. Math. Comput.* 166, 652-663.
- [31] Wazwaz, A.M., 2001, Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by the decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 123, 109-122.
- [32] Wazwaz, A.M., 2001, Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by Adomian decomposition method, *Chaos, Solitons and Fractals* 12, 2283-2293.
- [33] Wazwaz, A.M., 2002, *Partial Differential Equations: Methods and Applications*, Balkema Publishers, The Netherlands.
- [34] Wazwaz, A.M., 2000, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for non-linear operators, *Appl. Math. Comput.* 111, 33-51.
- [35] Tajvidi, T., Razzaghi, M., Dehghan, M., 2008, Modified rational Legendre approach to laminar viscous flow over a semi- infinite flat plate, *Chaos, Solitons and Fractals* 35, 59-66
- [36] Laghrouche, O., Mohamed, M. S., 2008, Locally enriched finite elements for the Helmholtz equation in two dimensions, *Computer and Structures*.
- [37] Abdou, M. A., Soliman, A. A., 2005, Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 181, 245- 251
- [38] He, J.H., 1997, A new approach to nonlinear partial differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulation* 2 (4), 230-235.
- [39] He, J.H., 1998, Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.* 167, 57-68.

- [40] He, J.H., 1999, Variational iteration method a kind of nonlinear analytical technique: some examples, *Int. J. Nonlinear Mech.* 34, 699-708.
- [41] He, J.H., 2006, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Int. J. Modern Phys. B* 20 (10), 1141-1199.
- [42] Abdou, M.A., Soliman, A.A., 2005, Variational iteration method for solving Burgers' and coupled Burgers' equations, *J. Comp. Appl. Math.* 181, 245-251.
- [43] Momani, S., Abusad, S., 2006, Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation, *Chaos, Solitons and Fractals* 27, 1119-1123.
- [44] Dehghan, M., Tatari, M., 2006, The use of He's variational iteration method for solving the Fokker-Planck equation, *Physica Scripta* 74, 31-316.
- [45] Tatari, M., Dehghan, M., 2007, He's variational iteration method for computing a control parameter in a semi-linear inverse parabolic equation, *Chaos, Solitons and Fractals* 33, 671-677.
- [46] Inc, M., 2007, Numerical simulation of KdV and mKdV equations with initial conditions by the variational iteration method, *Chaos, Solitons and Fractals* 34, 1075-1081.
- [47] Inc, M., 2007, Numerical doubly-periodic solution of the (2+1)-dimensional Boussinesq equation with initial conditions by the variational iteration method, *Phys. Letters A* 366, 20-24.
- [48] Inc, M., 2007, Exact and numerical solitons with compact support for nonlinear dispersive K(m,p) equations by the variational iteration method, *Physica A* 375, 447-456.
- [49] He, J., H., 2005, *Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems*, Donghua University, Shanghai, China.
- [50] He, J., H., 2005, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 26, (3), 695-700.
- [51] Abdulaziz, O., Hashim, I., Momani, S., 2008, Solving systems of fractional differential equations by homotopy- perturbation method, *Physics Letter A*, 372, (4), 451-459.

- [52] Sadighi, A., Ganji, D.,D., Analytical treatment of linear and nonlinear Schrödinger equations; A study with homotopy- perturbation and Adomian decomposition methods, 372, (4), 465-469.
- [53] Korteweg, D.J., de Vries, G., 1895, On the change of from of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave, *Phil. Mag.*, 39 (5), 422-443.
- [54] Zabusky, N.J., Kruskal, M.D., 1965, Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states , *Phsy. Rev. Lett.*, 15, 240-243.
- [55] Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S., 1955, Studies of nonlinear problems, Los Alamos Report LA 1940, Lectures in Applied Mathematics (ed. A.C. Newell) Amer. Math. Soc., 15 (1974), 143-156.
- [56] Karpman, VI, Lynov, JP, Michelsen, P., Pecseli, HL, Rasmussen, JJ, Turikov, VA., *Phys Fluids* 1980; 23;1782.
- [57] Bisognano, JJ. In: Proceedings of the 1996 European particle accelerator conference, Sitges. Bristol, UK: IOP; 1996. p. 328-30.
- [58] Boussinesq, J., 1871, Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, *Comptes Rendus*, 72, 755-759.
- [59] Rayleigh, L., 1876, Onwaves, *Phil. Mag.* 1, 257-279.
- [60] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kuruskal, M.D., Miura, R.M., 1974, Korteweg-de Vries equation and generalizations, Methods for exact solution, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27, 97-133.
- [61] Hirota, R., 1971, Exact solution of the KdV equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.* 27, 1192-1194.
- [62] Hirota, R., 1973, Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* 14, 805-809.
- [63] Zabusky, N.J., Galvin, C.J., 1971, Shallow water waves, the KdV equation and solitons, *J. Fluid Mech.* 47, 811-824.
- [64] Hammack, J.L., Segur, H., 1974, The Korteweg-de Vries equation and water waves, *J. Fluid Mech.* 65, 289-314.

- [65] Weidman, P.D., Maxworthy, T., 1978, Experiments on strong interactions between solitary waves, *J. Fluid Mech.* 85, 417-431.
- [66] Hirota, R., 1980, *Direct Methods in Soliton Theory*, Solitons, Springer, Berlin.
- [67] Ablowitz, M., Segur, H., 1981, *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia.
- [68] Öziş, T., Yıldırım, A., 2008, Reliable analysis for obtaining exact solutions of nonlinear Schrödinger (NLS) equation, *Choas, Solitons and Fractals* 38, 209-212.
- [69] Makhankov, V. G., Fedyanin, V. K., 1978, Soliton - like solution of the S3 - equation pertubed by resonance interaction, *Physics Letters A* 68, 169-171.
- [70] Katyshev, Y., V., Makhaldiani, N., V., Makhankov, V., G., 1978, On the stability of soliton solutions to the Schrödinger equation with nonlinear term of the form $\Psi\Psi^v$, *Physics Letter A* 66, 456-458.
- [71] Makhankov, V., G., 1978, Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems), *Physics Reports* 35, 1-128.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2002 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2006 yılında Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. 2007 yılı ekim ayında Fen Bilimleri Enstitüsünün açtığı araştırma görevliliği kadrosunu kazandım. Halen Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.